KaDiSto Bd.1

Einführung in die stochastische Simulation mit FATHOM

Carmen Maxara

Kassel, August 2006

KaDiSto: Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik, Band 1

Herausgegeben von Rolf Biehler, Fachbereich Mathematik/Informatik, Universität Kassel

Kurzbeschreibung der Schriftenreihe

In den Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik (KaDiSto) werden vom Herausgeber und ggf. weiteren Gutachtern geprüfte Materialien publiziert, z.B. Staatsexamensarbeiten, Dissertationen, Berichte von Forschungs- und Entwicklungsprojekten, Unterrichtsmaterialien und „Occasional Papers“, die sich mit der Didaktik der Stochastik und dem Stochastikunterricht beschäftigen. Die Arbeiten werden oft zusammen mit weiteren elektronischen Materialien, z.B. Dateien von Computerprogrammen zur Stochastik verfügbar gemacht.

Die Reihe wurde ins Leben gerufen wurde, um Materialien zu veröffentlichen, die in der Arbeitsgruppe des Herausgebers oder bei Kooperationspartnern in Wissenschaft und Schulpraxis entstanden sind. Die Reihe steht grundsätzlich auch anderen Autorinnen und Autoren offen.

Kurzbeschreibung des Dokuments

Die "Einführung in die stochastische Simulation mit Fathom" führt in die Simulation mit der Computersoftware Fathom ein und entstand im Rahmen meines Dissertationsprojekts. Voraussetzung sind elementare Grundkenntnisse in dieser Software, z.B. für die Analyse von eindimensionalen Daten.

Die Arbeit basiert auf einer ausführlichen Analyse stochastischer Situationen, die als Zufallsexperimente modelliert werden können. Sie wurde ursprünglich für Studenten der Veranstaltung "Elementare Stochastik" an der Universität Kassel didaktisch aufbereitet. Sie ist aber auch für alle Lehrenden und Lernenden an Schule und Hochschule gedacht, die die stochastische Simulation mit Fathom erlernen wollen.

Das Dokument dient dazu, eine systematische Anleitung zum Erstellen eigener Simulationen zu geben. Eine didaktische Hilfestellung bietet dazu das dreigegliederte Simulationskonzept: 1. Festlegen des stochastischen Modell, 2. Erstellen eines Simulationsplans und 3. Realisierung in FATHOM. Verschiedene Simulationsarten werden ausführlich an einem Beispiel vorgestellt und können in Arbeitsumgebungen selbst erzeugt werden.

Die Erstellung der Arbeit wurde mit Mitteln des BLK-Projektes Netzwerk Wissenschaftliche Weiterbildung für Lehramtsberufe (NWWL) an der Universität Kassel gefördert.

Technischer Hinweis

Zu dem Dokument gehören 21 Fathomdateien, auf die im Dokument referenziert wird. Diese können zusätzlich als zip-Datei herunter geladen werden. Damit die Links im Dokument funktionieren, legen Sie die Dateien in denselben Ordner wie das Dokument.

Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik:
`https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/handle/urn:nbn:de:hebis:34-2006062213595`
Herausgegeben von Rolf Biehler, Fachbereich Mathematik/Informatik, Universität Kassel,
biehler@mathematik.uni-kassel.de

Bd. 1:
`https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/handle/urn:nbn:de:hebis:34-2006082514477`

carmen@mathematik.uni-kassel.de

Einführung in die stochastische Simulation mit Fathom

Carmen Maxara

Inhaltsverzeichnis

Einführung
in die stochastische Simulation
mit Fathom

Carmen Maxara
AG Prof. Dr. Rolf Biehler
Universität Kassel
FB Mathematik/Informatik
carmen@mathematik.uni-kassel.de
fathom@mathematik.uni-kassel.de
www.mathematik.uni-kassel.de/~fathom

1. Einleitung

Im Folgenden wird nun eine Einführung in die stochastische Simulation mit Fathom gegeben. Die Umsetzung einer Simulation eines Zufallsexperiments in Fathom wird in drei Schritte gegliedert. Zunächst erstellt man ein stochastisches Modell der Situation, dem anschließend einen Simulationsplan und zuletzt setzt man diesen Plan dann in Fathom um. Simuliert werden einstufige und verschiedene mehrstufige Zufallsexperimente sowie einige Wartezeitprobleme.

Wirft man eine Münze auf einem glatten Untergrund, so bleibt diese nach Rollen oder Umherspringen irgendwann liegen (wir schließen hier den unwahrscheinlichen Fall aus, dass sie auf der Kante liegen bleibt). Ob aber Wappen oder Zahl oben liegt, ist auch nach mehreren Wiederholungen ungewiss. Der Ausgang ist „zufällig", d.h. nicht mit Sicherheit vorhersehbar. Weitere zufallsabhängige Vorgänge wie zum Beispiel das Ziehen einer Karte aus einem gemischten Set Karten, das Drehen eines Glücksrades, das Werfen eines Würfel haben mit oben beschriebenem Münzwurf die Gemeinsamkeit, dass man den genauen Ausgang eines Vorgangs nicht kennt, aber alle möglichen Ergebnisse dieser Vorgänge bekannt sind. Weiterhin können diese Vorgänge prinzipiell beliebig oft wiederholt und unter bestimmten festgelegten Bedingungen durchgeführt werden. Zufallsabhängige Vorgänge nennt man „*ideales Zufallsexperiment* wenn folgende Gegebenheiten vorliegen:

- Das Experiment wird unter genau festgelegten Bedingungen, den sogenannten *Versuchsbedingungen*, durchgeführt.
- Die Menge der möglichen Ergebnisse (Ausgänge) ist vor der Durchführung des Experimentes bekannt.
- Das Experiment kann zumindest prinzipiell beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholt werden." (Henze 1997, 3).

In Fathom wollen wir in drei Abschnitten die Umsetzung von Zufallsexperimenten behandeln. Im ersten Abschnitt (Kapitel 3) wird zunächst ein einstufiges Zufallsexperiment betrachtet. Im zweiten Abschnitt (Kapitel 4) werden dann mehrstufige Zufallsexperimente behandelt, die sich aus der Wiederholung einstufiger Zufallsversuche zusammensetzen und im dritten Abschnitt werden Zufallsexperimente betrachtet, die sich als Urnenexperimente modellieren lassen.

2. Stochastische Simulation

Das nun folgende dreigegliederte Simulationskonzept soll eine Hilfestellung für das stochastische Simulieren bieten, praktisch einen Leitfaden darstellen, der sich auf die verschiedenen Zufallsexperimente übertragen lässt und auch angewandt werden soll. Das Simulieren von Zufallsexperimenten beinhaltet dabei auch Aspekte des Modellierens und des Problemlösens, denn das Zufallsexperiment muss vor der Simulation modelliert und in Fathom umgesetzt werden. Im nun folgenden Simulationskonzept wird in Schritt 1 das Stochastische Modell festgelegt. Die weiteren Schritte bestehen aus dem Erstellen eines Simulationsplans und der Realisierung in Fathom. Das Simulationskonzept wird zunächst an einem Beispiel und in allgemeiner Form dargestellt. Die konkrete Realisierung von verschiedenen Zufallsexperimenten folgt an vier Beispielen.

Aufgabe: Ein fairer Würfel wird einmal geworfen, dabei soll das Ereignis E: „Die Augenzahl ist größer 4“ betrachtet werden.

1. Die stochastische Modellierung

Beispiel:

Ein Würfel wird einmal geworfen. Dieses Zufallsexperiment ist ein einstufiges Experiment und soll mit einer Urne simuliert werden, in der sechs durchnummerierte, ansonsten ununterscheidbare Kugeln liegen. Aus dieser Urne wird eine Kugel gezogen. Die Nummer der gezogenen Kugel soll die geworfene Augenzahl des Würfels darstellen. Die Ergebnismenge kann mit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ beschrieben werden, wobei eine Gleichverteilung mit $P(1) = P(2) = ... = P(6) = \frac{1}{6}$ vorliegt. Da es sich hierbei um ein einstufiges Zufallsexperiment handelt, ziehen wir genau eine Kugel aus der Urne und legen n = 1 fest. In der Aufgabe ist nach dem Ereignis E: „die Augenzahl ist größer 4“ gefragt, dass wir mit E = $\{5, 6\}$ beschreiben können. Das Zufallsexperiment wollen wir 1000-mal simulieren und wählen somit N = 1000.

Allgemein:

Das Zufallsexperiment muss mit seiner Ergebnismenge Ω und seiner Wahrscheinlichkeitsverteilung P festgelegt werden. Mit n wird die Anzahl der Versuche, aus der sich das Experiment zusammensetzt, festgelegt. Modelliert man ein einstufiges Zufallsexperiment, so ist n immer 1. Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten ist n durch die Anzahl der Teilexperimente bestimmt. Weiterhin sollen die interessierenden Ereignisse und Zufallsgrößen definiert werden (mindestens in verbaler Form). Als letztes soll die Wiederholungszahl N für die Anzahl an durchzuführenden Simulationen festgelegt werden.

2. Der Simulationsplan

1. Wir definieren eine Kollektion *Würfel* mit einem Merkmal *Augenzahl*.
2. Mit der Zufallsmaschine `ganzeZufallszahl(1;6)` wird zufällig eine ganze Zahl zwischen 1 und 6 erzeugt. Wir fügen für die Simulation eines Würfelwurfs der Kollektion nun einen Fall hinzu.
3. Das Ereignis E = $\{5, 6\}$ definieren wir als Merkmal *E* mit der Formel `Augenzahl > 4`.
4. Indem man der Kollektion 999 Fälle hinzufügt, wird das Zufallsexperiment 1000-mal simuliert.
5. Wir werden die Ergebnisse in einem Säulendiagramm und einer Auswertungstabelle auswerten.

1. Festlegen einer Kollektion und ein oder mehrerer Variablen; Wahl einer Umsetzungsart (simultan, sequenziell oder Urne; nur bei mehrstufigen Zufallsexperimenten)
2. Wahl einer passenden Zufallsmaschine für (Ω, P) und Simulation eines Zufallsexperiments
3. Definition von Ereignissen und Zufallsgrößen
4. Durchführung und Wiederholung der Simulation des Zufallsexperiments
5. Statistische Auswertung der Ergebnisse

3. Die Realisierung in Fathom

Die Umsetzung der Simulation in Fathom wird an verschiedenen Beispielen ausführlich dargestellt. Das eben beschriebene einstufige Zufallsexperiment wird als erstes umgesetzt und ist prototypisch für die Umsetzung einstufiger Zufallsexperimente. Anschließend werden mehrstufige Zufallsexperimente behandelt, die sich aus der unabhängigen Wiederholung von gleichen Teilexperimenten zusammensetzen. In einem dritten Kapitel werden noch solche Zufallsexperimente behandelt, die sich durch eine Urnenziehung modellieren lassen. Dabei kann zwischen Urnenmodellierungen mit und ohne Zurücklegen unterschieden werden, aber auch Urnenziehungen bis zum Eintreten eines bestimmten Falls, also mit unterschiedlichem Stichprobenumfang, können simuliert werden.

3. Einstufiges Zufallsexperiment in Fathom

Beispiel 1: Ein fairer Würfel wird einmal geworfen, dabei soll das Ereignis E: „die Augenzahl ist größer 4“ betrachtet werden.

Stochastische Modellierung: Ein Würfel wird einmal geworfen. Dieses Zufallsexperiment ist ein einstufiges Experiment und soll mit einer Urne simuliert werden, in der sechs durchnummerierte, ansonsten ununterscheidbare Kugeln liegen. Aus dieser Urne wird eine Kugel gezogen. Die Nummer der gezogenen Kugel soll die geworfene Augenzahl des Würfels darstellen. Die Ereignismenge kann mit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ beschrieben werden, wobei eine Gleichverteilung mit $P(1) = P(2) = ... = P(6) = \frac{1}{6}$ vorliegt. Da es sich hierbei um ein einstufiges Zufallsexperiment handelt, ziehen wir genau eine Kugel aus der Urne und legen n = 1 fest. In der Aufgabe ist nach dem Ereignis E: „die Augenzahl ist größer 4“ gefragt, dass wir mit E = $\{5, 6\}$ beschreiben können. Das Zufallsexperiment wollen wir 1000-mal simulieren und wählen somit N = 1000.

Simulationsplan:

1. Wir definieren eine Kollektion *Würfel* mit einem Merkmal *Augenzahl*.
2. Mit der Zufallsmaschine `ganzeZufallszahl(1;6)` wird zufällig eine ganze Zahl zwischen 1 und 6 erzeugt. Wir fügen für die Simulation eines Würfelwurfs der Kollektion nun einen Fall hinzu.
3. Das Ereignis E = $\{5, 6\}$ definieren wir als Merkmal *E* mit der Formel `Augenzahl > 4`.
4. Indem man der Kollektion 999 Fälle hinzufügt, wird das Zufallsexperiment 1000-mal simuliert.
5. Wir werden die Ergebnisse in einem Säulendiagramm und einer Auswertungstabelle auswerten.

Realisierung in Fathom:

1. **Festlegen einer Kollektion mit Variable(n)**: In Fathom beginnen wir auf einem neuen, leeren Dokument und erstellen eine neue Kollektion *Würfel*. Wir öffnen das Info-Fenster der Kollektion mit einem Doppelklick auf diese und definieren ein neues Merkmal *Augenzahl*.

2. **Definition des Zufallsexperiments**: Für die Umsetzung von $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ mit $P(1) = P(2) = ... = P(6) = \frac{1}{6}$ wählen wir die Zufallsmaschine `ganzeZufallszahl( )`. Die Formel `ganzeZufallszahl(1;6)` erzeugt mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der ganzen Zahlen 1 bis 6, so dass wir durch diese, einen fairen Würfelwurf simulieren können. Wir öffnen mit einem Doppelklick auf die Formelzelle den Formeleditor für das Merkmal *Augenzahl* und geben die Formel `ganzeZufallszahl(1;6)` ein. Dann fügen wir der Kollektion noch einen Fall hinzu (**Kollektion | Neue Fälle...**) und haben somit das Zufallsexperiment einmal simuliert. Das Ergebnis kann man dann in einer Tabelle visualisieren.

3. **Definition des interessierenden Ereignisses und/oder der interessierenden Zufallsgröße:** Hier soll nun das Ereignis E: „Augenzahl größer 4" betrachtet werden. Dazu definieren wir in Fathom in der Kollektion *Würfel* ein weiteres Merkmal. Dieses nennen wir *E* und definieren es durch die Formel `Augenzahl > 4`. Das Merkmal *E* gibt nun *wahr* aus, falls das Merkmal „Augenzahl" größer 4 ist, andernfalls ein *falsch*.

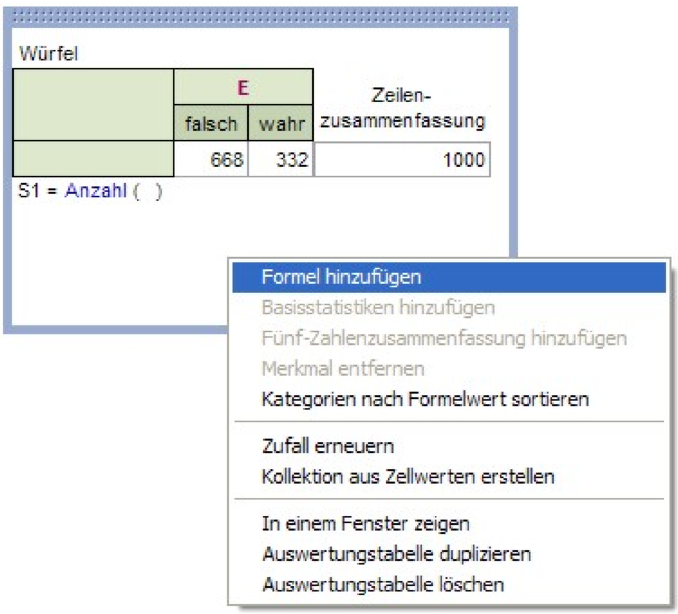
4. **Wiederholung der Simulation:** Wir wollen das Zufallsexperiment nun 1000-mal durchführen. Dazu fügen wir der Kollektion weitere 999 Fälle hinzu (einen hatten wir ja schon erzeugt). Dies geschieht wiederum über **Kollektion | Neue Fälle...**. Nun wird die schon erzeugte Tabelle, in der wir bisher den einen Fall visualisiert hatten automatisch um 999 Zeilen erweitert. Jede Zeile der Kollektion stellt das Ergebnis eines Zufallsversuchs dar und wird unabhängig von der vorigen erzeugt. Das Merkmal *E* bezieht sich zeilenweise auf das Merkmal *Augenzahl*. Jede Zeile wird im Hinblick auf das Ereignis *E* also einzeln ausgewertet.

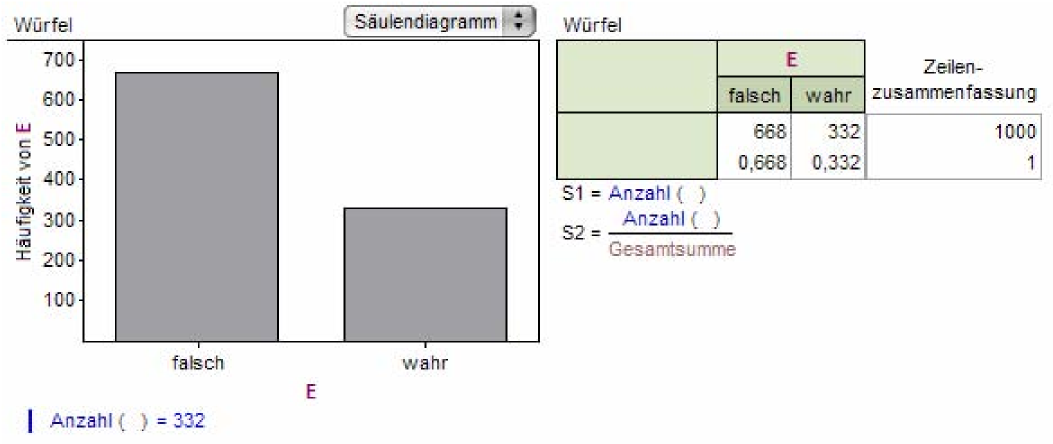

Würfel

	Augenz...	E
1	4	falsch
2	3	falsch
3	5	wahr
4	1	falsch
5	4	falsch
6	2	falsch
7	1	falsch
8	1	falsch
9	3	falsch
10	1	falsch

5. **Visualisierung und statistische Auswertung:** Wir werden nun die Ergebnisse der Simulation graphisch darstellen. Als erstes stellen wir die Daten des Merkmals *E* in einem Säulendiagramm dar. Dazu ziehen wir aus der Symbolleiste in Fathom eine leere Graphik auf den Bildschirm und dann aus der Tabelle das Merkmal *E* auf die x-Achse. Für eine statistische Auswertung erstellen wir noch eine leere Auswertungstabelle, in die wir ebenfalls das Merkmal *E* hineinfügen. In der Auswertungstabelle ergänzen wir noch eine Formel, die uns die relative Häufigkeit für das Eintreten des Ereignisses *E* angibt. Wir aktivieren die Auswertungstabelle und klicken die rechte Maustaste. Aus dem Menü wählen wir dann **Auswertung | Formel hinzufügen** aus und geben in den Formeleditor

$$\frac{Anzahl(\ )}{Gesamtsumme}$$ ein.





Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses *E* kann durch die relative Häufigkeit auf den Wert 0,332 geschätzt werden.

Dieses einstufige Zufallsexperiment ist auch mit einer ausführlichen Dokumentation in der Fathomdatei Würfel1.ftm zu finden. Eine schon erstellte Version des Zufallsexperiments mit nur kurzen Erklärungen findet man in der Fathomdatei Würfel2.ftm und eine Möglichkeit zum „Nachbauen" der Simulation mit einer kurzen Anleitung in Würfel3.ftm.

Nachdem nun ausführlich die Umsetzung eines einstufigen Zufallsexperiments mit einem bestimmten Ereignis dargelegt wurde, sollen nun noch beispielhaft andere typische Ereignisse und Zufallsgrößen in Merkmale umsetzt werden, so dass man einen Pool von Realisierungsmöglichkeiten erhält. Dabei beziehen wir uns immer noch auf obiges Beispiel mit der entsprechenden Umsetzung in Fathom. Weitere interessierende Ereignisse und Zufallsgrößen könnten hier sein (mit Augenzahl ist immer die mit dem Würfel gewürfelte Zahl gemeint, bzw. bei der Formel das Merkmal *Augenzahl*):

Ereignisse/Zufallsgrößen	**Formel in Fathom**
E_1: Augenzahl ist gerade	gerade(Augenzahl)
E_2: Augenzahl ist ungerade	ungerade(Augenzahl)
E_3: Augenzahl ist kleiner drei	Augenzahl < 3
E_4: Augenzahl ist eine Primzahl	(Augenzahl = 2) oder (Augenzahl = 3) oder (Augenzahl = 5)
X_1: Augenzahl mal zwei	Augenzahl • 2
X_2: $\begin{cases} 1,2,3,4 \to \mathit{Niete} \\ 5 \to \mathit{Trostpreis} \\ 6 \to \mathit{Gewinn} \end{cases}$	transform(Augenzahl)$\begin{cases} (5):\text{"}\mathit{Trostpreis}\text{"} \\ (6):\text{"}\mathit{Gewinn}\text{"} \\ \mathit{sonst}:\text{"}\mathit{Niete}\text{"} \end{cases}$

Ereignisse werden immer durch Formeln definiert, die als Ergebnis *wahr* oder *falsch* haben. Bei Zufallsgrößen wird jedem $\omega \in \Omega$ ein Wert $X(\omega)$ zugeordnet. Das Info-Fenster mit den Definitionen der Merkmale in der Kollektion *Würfel* sieht man in folgender Abbildung:

Info Würfel

Fälle | Messgrößen | Kommentare | Anzeige | Kategorien

Merkmale	Wert	Formel
Augenzahl	5	ganzeZufallszahl (1; 6)
E	wahr	Augenzahl > 4
E1	falsch	gerade (Augenzahl)
E2	wahr	ungerade (Augenzahl)
E3	falsch	Augenzahl < 3
E4	wahr	(Augenzahl = 2) oder (Augenzahl = 3) oder (Augenzahl = 5)
X1	10	Augenzahl • 2
X2	Trostpreis	transform (Augenzahl) { (5) : 'Trostpreis"; (6) : 'Gewinn"; sonst : 'Niete" }
<neu>		

1/1000 Details zeigen

Eine Visualisierung der Ergebnisse von 10 Versuchsdurchführungen kann nun in einer Tabelle wie folgt aussehen (die Zeilen sind unabhängig voneinander):

Würfel

	Augenzahl	E	E1	E2	E3	E4	X1	X2
1	3	falsch	falsch	wahr	falsch	wahr	6	Niete
2	3	falsch	falsch	wahr	falsch	wahr	6	Niete
3	5	wahr	falsch	wahr	falsch	wahr	10	Trostpreis
4	4	falsch	wahr	falsch	falsch	falsch	8	Niete
5	4	falsch	wahr	falsch	falsch	falsch	8	Niete
6	4	falsch	wahr	falsch	falsch	falsch	8	Niete
7	5	wahr	falsch	wahr	falsch	wahr	10	Trostpreis
8	6	wahr	wahr	falsch	falsch	falsch	12	Gewinn
9	5	wahr	falsch	wahr	falsch	wahr	10	Trostpreis
10	5	wahr	falsch	wahr	falsch	wahr	10	Trostpreis

4. Mehrstufige Zufallsexperimente in Fathom

Mehrstufige Zufallsexperimente werden wir in Fathom in drei Varianten umsetzen. Die erste Variante bezeichnen wir im Folgenden mit „simultaner Simulation“. In Fathom versteht man unter simultaner Simulation die Zuordnung von Teilexperimenten zu verschiedenen Spalten. Die zweite Variante bezeichnen wir mit „sequenzieller Simulation“, bei der in Fathom die Teilexperimente verschiedenen Zeilen zugeordnet werden. Die dritte Variante ist eine Simulation als Urnenziehung.

Für die ersten beiden Varianten betrachten wir hier mehrstufige Zufallsexperimente, die sich aus der Wiederholung von gleichen Teilexperimenten zusammensetzen. Besteht ein mehrstufiges Zufallsexperiment aus einer kleineren Anzahl an Teilexperimenten, so kann man gut die im Folgenden beschriebene simultane Simulation verwenden[1], besteht es dagegen aus einer größeren Anzahl an Wiederholungen so verwendet man besser die später beschriebene sequenzielle Simulation.

4.1 Simultane Simulation

Beispiel 2: In einer Schachtel liegen vier rote und sechs blaue Kugeln. Aus der Schachtel werden mit Zurücklegen drei Kugeln gezogen. Wir betrachten dabei das Ereignis E: „es wird die Folge rot-blau-rot gezogen“.

Stochastische Modellierung: Es soll das dreimalige Ziehen aus einer Schachtel mit vier roten und sechs blauen Kugeln simuliert werden. Dies simulieren wir mithilfe von drei Schachteln, die wie oben gefüllt sind, aus denen jeweils eine Kugel gezogen wird. Die Ergebnismenge eines Teilexperiments (ein Zug aus einer Schachtel) kann mit $\Omega_1 = \{R, B\}$ und $P(R) = 0,4$ und $P(B) = 0,6$ beschrieben werden. Die Ergebnismenge des Gesamtexperiments ist der Produktraum (Ω, P) mit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1$ und entsprechendem $P(\{(\omega_i, \omega_j, \omega_l)\}) = P(\{\omega_i\}) \cdot P(\{\omega_j\}) \cdot P(\{\omega_l\})$, $\omega_i, \omega_j, \omega_l \in \Omega_1$, beliebig. Wir ziehen dreimal und legen damit *n* = 3 fest. Das Ereignis E: „es wird die Folge rot-blau-rot gezogen“ beschreiben wir mit E: „rot-blau-rot“. Insgesamt wollen wir das Zufallsexperiment 1000-mal simulieren, wählen also *N* = 1000.

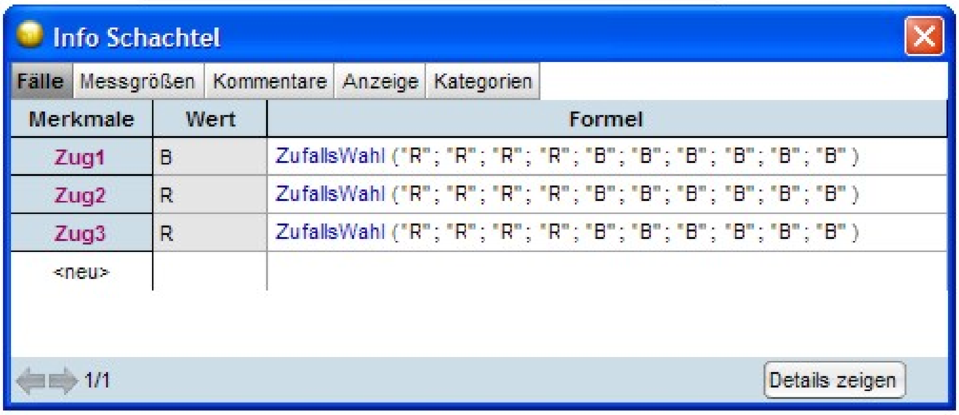
Simulationsplan:

1. Wir definieren eine Kollektion *Schachtel* mit drei Merkmalen *Zug1*, *Zug2* und *Zug3*.
2. Wir wählen die Zufallsmaschine `ZufallsWahl( )` für die Erzeugung von roten und grünen Kugeln. Mit der Formel `ZufallsWahl("R";"R";"R";"R";"B";"B";"B";"B";"B";"B")` wird mit der Wahrscheinlichkeit von 0,4 ein „R“ ausgegeben, welches für eine rote Kugel steht und mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 ein „B“, welches für eine blaue Kugel steht. Jedes Element in den Klammern hinter `ZufallsWahl` wird mit derselben Wahrscheinlichkeit ausgegeben. Wir fügen für die Simulation eines Würfelwurfs der Kollektion nun einen Fall hinzu.
3. Für die Umsetzung eines Merkmals *E* müssen wir zunächst ein Hilfsmerkmal *Serie* definieren, dass die Ergebnisse der drei Züge in einem Merkmal zusammenfasst. Das Merkmal *Serie* wird durch die Formel *verkette(Zug1; Zug2; Zug3)* definiert. Das Ereignis E: „rot-blau-rot“ definieren wir nun als Merkmal *E* mit der Formel `beinhaltet(Serie;“RBR”)`. Der Befehl `beinhaltet(Merkmal; “Zeichen”)` überprüft, ob in dem angegebenen Merkmal ein bestimmtes Zeichen oder eine bestimmte Zeichenkette vorkommt (dasselbe gilt für Zahlen; diese müssen dann nicht in “ “ stehen).
4. Indem man der Kollektion 999 Fälle hinzufügt, wird das Zufallsexperiment 1000-mal simuliert.
5. Wir werden die Ergebnisse in einem Säulendiagramm und einer Auswertungstabelle auswerten.

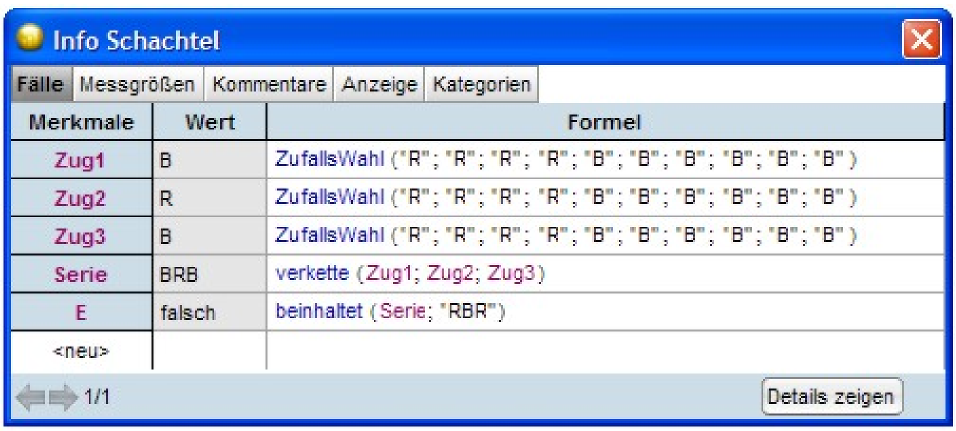
[1] Prinzipiell lassen sich in der folgenden Umsetzungsart auch Zufallsexperimente realisieren, die sich aus verschiedenartigen Teilexperimenten zusammensetzen. Wie auch in folgender Version würde jedes Teilexperiment als eigenes Attribut definiert.

Realisierung in Fathom:

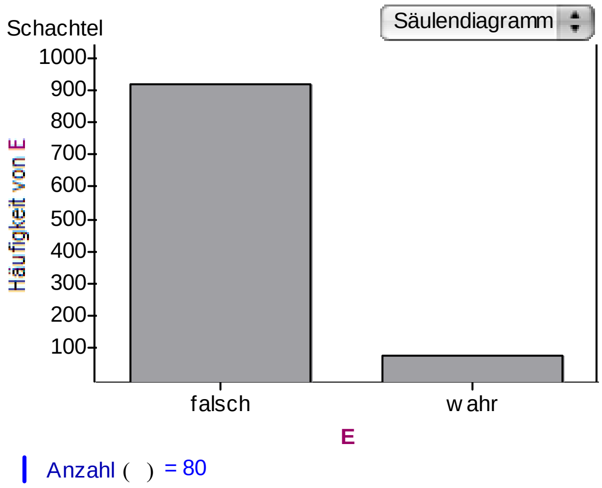
1. **Festlegung der Kollektion und Variablen**: Wir erstellen eine neue Kollektion *Schachtel* und öffnen das Info-Fenster. Dort definieren wir drei Merkmale *Zug1*, *Zug2* und *Zug3*.
2. **Definition des Zufallsexperiments**: Die Merkmale *Zug1*, *Zug2* und *Zug3* werden mit der Formel `ZufallsWahl("R";"R";"R";"R";"B";"B";"B";"B";"B";"B")`. definiert. Mithilfe von Kopieren and Einfügen kann die Formel bei *Zug2* und *Zug3* eingefügt werden. Die Formel `ZufallsWahl()` gibt zufällig eine ihrer Einträge an. Hier steht „R“ für eine rote Kugel und „B“ für eine blaue. Wir fügen anschließend der Kollektion noch einen Fall hinzu, so dass nun das dreimalige Ziehen simuliert ist und visualisieren die Ergebnisse in einer Tabelle.



3. **Definition des interessierenden Ereignisses und/oder der interessierenden Zufallsgröße:** Für die Umsetzung des Ereignisses E: „es wird die Folge rot-blau-rot gezogen“ erstellen wir ein Hilfsmerkmal *Serie*, dass die Ergebnisse der drei Züge in einem Merkmal zusammenfasst. Das Merkmal *Serie* wird durch die Formel `verkette(Zug1; Zug2; Zug3)` definiert. Mit Hilfe dieses Merkmals definieren wir nun das Merkmal *E*, mit der Formel: `beinhaltet(Serie;“RBR“)`. Der Befehl `beinhaltet( )` überprüft hier, ob im Merkmal *Serie* die Folge „RBR“ vorkam, bzw. ob es aus dieser besteht. Es kann beispielsweise auch überprüft werden, ob mindestens eine blaue Kugel gezogen wurde: `beinhaltet(Serie;“B“)`, also ob im Merkmal *Serie* ein „B“ vorkam.



4. **Wiederholung des Zufallsexperiments:** Wir wollen die Simulation des Zufallexperiments nun 1000-mal durchführen und fügen der Kollektion 999 weitere Fälle hinzu. Diese werden dann wieder automatisch in die Tabelle übernommen.
5. **Visualisierung und statistische Auswertung:** Für eine Visualisierung des Ereignisses *E* ziehen wir das Merkmal *E* in eine leere Graphik auf die x-Achse. Das so entstehende Säulendiagramm stellt die Ergebnisse des Merkmals in absoluten Anzahlen graphisch dar.



Für die Auswertung können wir zusätzlich noch eine Auswertungstabelle erstellen, indem wir eine neue aus der Symbolleiste auf den Bildschirm ziehen und anschließend das Merkmal *E* in ein leeres Kästchen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Folge rot-blau-rot gezogen wird, lässt sich aufgrund unserer simulierten Daten hier auf den Wert 0,08 schätzen.

Schachtel

	E		Zeilen-zusammenfassung
	falsch	wahr	
	920	80	1000

S1 = Anzahl ( )

Dieses mehrstufige Zufallsexperiment ist auch mit einer ausführlichen Dokumentation in der Fathomdatei Simultan1.ftm zu finden. Eine schon erstellte Version des Zufallsexperiments mit nur kurzen Erklärungen findet man in der Fathomdatei Simultan2.ftm und eine Möglichkeit zum „Nachbauen" der Simulationsumgebung mit einer kurzen Anleitung in Simultan3.ftm.

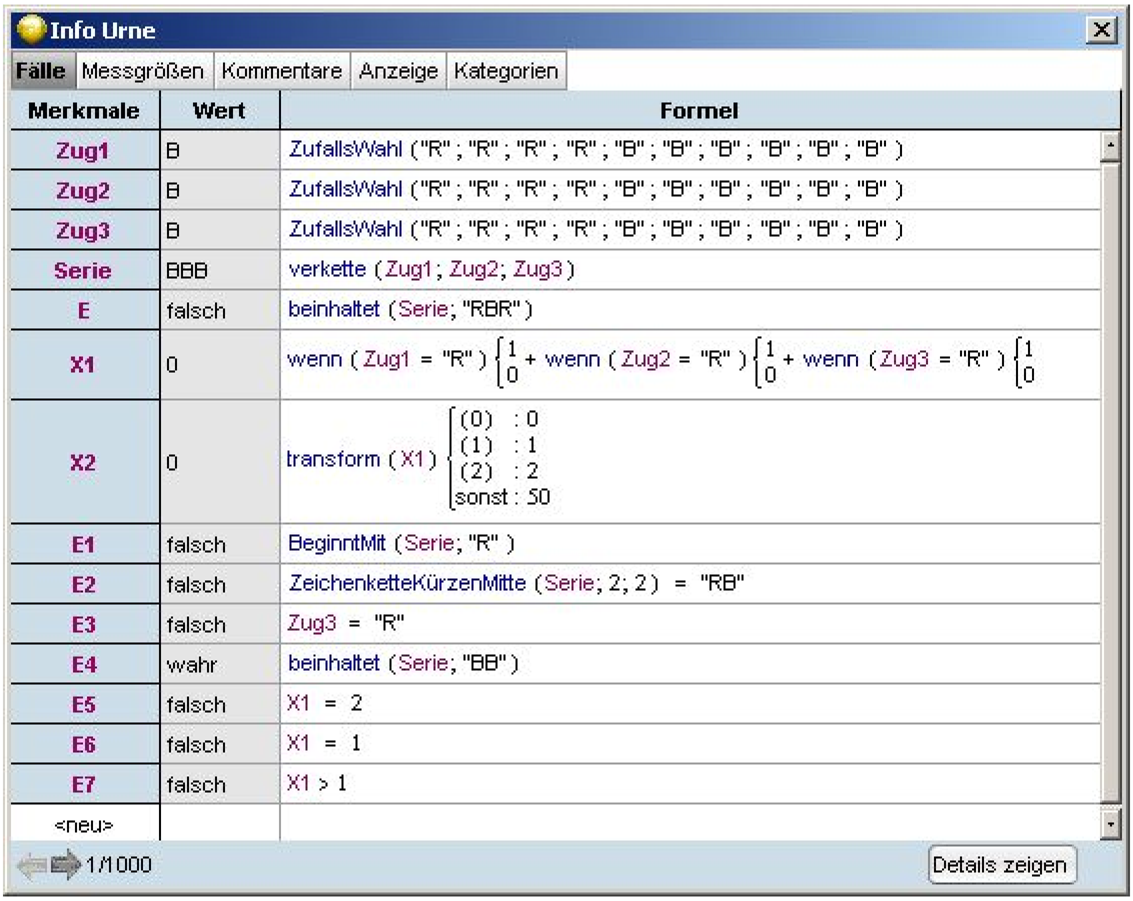
Nach dieser ausführlichen Dokumentation der Umsetzung eines mehrstufigen Zufallsexperiments mit dem Hilfsmerkmal *Serie*, dass mit dem Befehl `verkette( )` erzeugt wurde, werden nun noch weitere Ereignisse und Zufallsgrößen aufgeführt. Diese beziehen sich auf das eben simulierte Experiment mit den Merkmalen *Zug1*, *Zug2*, *Zug3* und *Serie*.

Ereignisse/Zufallsgrößen	**Formel in Fathom**
X_1: Anzahl der roten Kugeln	wenn(Zug1="R") $\begin{cases}1\\0\end{cases}$ + wenn(Zug2="R") $\begin{cases}1\\0\end{cases}$ +

	wenn(Zug3=”R”) $\begin{cases}1\\0\end{cases}$
X_2: Gewinn, mit $X_2: \begin{cases}\text{0 rote Kugeln} \rightarrow \text{0 Euro Gewinn}\\ \text{1 rote Kugel} \rightarrow \text{1 Euro Gewinn}\\ \text{2 rote Kugeln} \rightarrow \text{2 Euro Gewinn}\\ \text{3 rote Kugeln} \rightarrow \text{50 Euro Gewinn}\end{cases}$	transform(X1) $\begin{cases}(0):0\\(1):1\\(2):2\\ sonst:50\end{cases}$
E_1: erster Zug ist rot	BeginntMit(Serie;“R“) *oder* Zug1 =“R“
E_2: zweiter Zug ist rot, dritter ist blau	ZeichenketteKürzenMitte(Serie;2;2) = “RB“ *oder* Zug2 =“R“ and Zug3 =“B“
E_3: dritter Zug ist rot	EndetMit(Serie;“R“) *oder* Zug3 =“R“
E_4: es werden zwei blaue Kugeln hintereinander gezogen	beinhaltet(Serie;“BB“)
E_5: Anzahl der gezogenen roten Kugeln ist gleich 2	X1 = 2
E_6: es werden zwei blaue und eine rote Kugeln gezogen	beinhaltet(Serie;“BBR“) or beinhaltet(Serie;“BRR“) or beinhaltet(Serie;“RBB“) *oder* X1 = 1
E_7: Anzahl der roten Kugeln ist größer 1	X1>1
Außerdem bei numerischen Variablen (z.B. dreifacher Würfelwurf):	
X_3: Summe der Augenzahlen	Wurf1 + Wurf2 + Wurf3
X_4: Produkt der Augenzahlen	Wurf1 • Wurf2 • Wurf3
E_8: Summe der Augenzahlen ist größer 10	X3 > 10

Formel:	**Erläuterung:**
BeginntMit(Serie;“R“)	überprüft, ob das Merkmal *Serie* mit dem Buchstaben „R“ beginnt. Mit diesem Befehl kann genauso gut überprüft werden, ob die Serie mit einer Buchstabenfolge, Zahl, Zahlenfolge oder aus einer Kombination von bestimmten Buchstaben und Zahlen beginnt.
EndetMit( )	EndetMit( ) arbeitet analog zu BeginntMit( )
ZeichenketteKürzenMitte(Serie;2;1)	Der Befehl gibt ab der zweiten Stelle des Eintrags des Merkmals *Serie* einen Buchstaben an. Lautet ein Eintrag auf den sich die Formel bezieht zum Beispiel „Stochastik“ und man benutzt die Formel `ZeichenketteKürzenMitte(Serie;2;3)`, so wird „toc“ ausgegeben. Also ab dem zweiten Buchstaben eine Folge von Buchstaben der Länge Drei. Für die Definition des Ereignisses A_2, wird nun noch überprüft, ob die zweite Stelle des Eintrags ein „R“ ist.

Einen Teil der Umsetzung dieser Ereignisse und Zufallsgrößen in Fathom sieht man im folgenden Info-Fenster:



Merkmale	Wert	Formel
Zug1	B	ZufallsWahl ("R" ; "R" ; "R" ; "R" ; "B" ; "B" ; "B" ; "B" ; "B" ; "B")
Zug2	B	ZufallsWahl ("R" ; "R" ; "R" ; "R" ; "B" ; "B" ; "B" ; "B" ; "B" ; "B")
Zug3	B	ZufallsWahl ("R" ; "R" ; "R" ; "R" ; "B" ; "B" ; "B" ; "B" ; "B" ; "B")
Serie	BBB	verkette (Zug1; Zug2; Zug3)
E	falsch	beinhaltet (Serie; "RBR")
X1	0	wenn (Zug1 = "R") $\begin{cases}1\\0\end{cases}$ + wenn (Zug2 = "R") $\begin{cases}1\\0\end{cases}$ + wenn (Zug3 = "R") $\begin{cases}1\\0\end{cases}$
X2	0	transform (X1) $\begin{cases}(0) & : 0\\(1) & : 1\\(2) & : 2\\\text{sonst} & : 50\end{cases}$
E1	falsch	BeginntMit (Serie; "R")
E2	falsch	ZeichenketteKürzenMitte (Serie; 2; 2) = "RB"
E3	falsch	Zug3 = "R"
E4	wahr	beinhaltet (Serie; "BB")
E5	falsch	X1 = 2
E6	falsch	X1 = 1
E7	falsch	X1 > 1
<neu>		

4.2 Sequenzielle Simulation

Im vorigen Abschnitt wurden die Teilexperimente eines Zufallsexperiments in Spalten umgesetzt, d.h. die Ergebnisse der einzelnen Teilexperimente wurden in je einer Spalte repräsentiert. Die im Folgenden vorgestellte Umsetzungsart repräsentiert die Ergebnisse der einzelnen Teilexperimente in Zeilen. Dies ist allerdings nur möglich, falls es sich bei dem Zufallsexperiment um die gleichartige Wiederholung einzelner Teilexperimente handelt.

Beispiel 3: Ein Mathekurs besteht aus 23 Schülern. Wie wahrscheinlich ist es, dass mindestens zwei der Schüler am gleichen Tag Geburtstag haben, wenn man alle Tage für einen Geburtstag als gleichwahrscheinlich betrachtet? Schätzen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe einer Simulation.

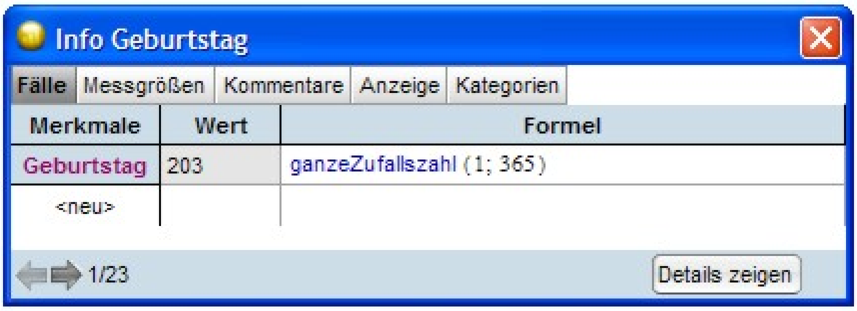
Stochastische Modellierung: Wir modellieren die Aufgabenstellung durch eine Urnenziehung aus einer Urne mit 365 durchnummerierten ganzzahligen Kugeln von 1 bis 365. Aus der Urne werden dann 23 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Jede der Zahlen 1 bis 365 steht für einen bestimmten Tag des Jahres. Der erste Zug aus der Urne bestimmt den Geburtstag des ersten Schülers, der zweite Zug, den des zweiten Schülers usw. Nach 23 Ziehungen sind also die 23 Geburtstage der Schüler ermittelt. Wird eine Zahl (oder auch mehrere) mindestens zweimal gezogen, so haben mindestens zwei Schüler am selben Tag Geburtstag. Wir stellen die Ergebnismenge eines Teilexperiments, also die Ergebnismenge für die Geburtstage eines Schülers durch $\Omega_1 = \{1, 2, 3, ..., 364, 365\}$ dar, wobei die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Gleichverteilung $P(1) = P(2) = ... = P(365) = \frac{1}{365}$ genügt. Aus Ω_1 wird 23-mal mit Zurücklegen ein Element entnommen. Also legen wir $n = 23$ fest. Die Ergebnismenge des Gesamtzufallexperiments lässt sich nun als $\Omega = \underbrace{\Omega_1 \times \Omega_1 \times ... \times \Omega_1}_{23-mal} = \{(x_1, x_2, ..., x_{23}) | x_1, ..., x_{23} \in \Omega_1\}$ mit $P(\{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{23})\}) = P(\{\omega_1\}) \cdot P(\{\omega_2\}) \cdot ... \cdot P(\{\omega_{23}\}) = \left(\frac{1}{365}\right)^{23}, \quad \omega_1, \omega_2, ..., \omega_{23} \in \Omega_1$ darstellen. Außerdem definieren wir ein Ereignis E: „mindestens zwei Schüler haben an einem Tag Geburtstag“ oder anders gesagt, von den 23 gezogenen Zahlen, tritt mindestens eine zwei- oder mehrfach auf. Wir wollen zu dem Zufallsexperiment $N = 1000$ Simulationen durchführen.

Simulationsplan:

1. Wir definieren eine Kollektion *Geburtstag* mit einem Merkmal *Geburtstag*.
2. Wir wählen die Zufallsmaschine `ganzeZufallszahl(1;365)` für die Erzeugung einer ganzen Zahl, die den Geburtstag eines Schülers darstellen soll. Wir fügen für die Simulation der 23 Geburtstage der Schüler eines Mathekurses der Kollektion nun 23 Fälle hinzu.
3. Für die Umsetzung des Ereignisses E: „mindestens zwei Schüler haben an einem Tag Geburtstag“ definieren wir eine Messgröße *E* mit der Formel `AnzVerschiedeneWerte(Geburtstag)` ≤ 22. `AnzVerschiedeneWerte(Merkmal)` zählt die unterschiedlichen Einträge eines Merkmals in seiner Spalte. `AnzVerschiedeneWerte(Geburtstag)` ≤ 22 zählt nun die unterschiedlichen Einträge des Merkmals *Geburtstag* und überprüft, ob diese Anzahl kleiner gleich 22 ist.
4. Indem man 1000 Messgrößen sammelt, werden 1000 Ergebnisse des Ereignisses *E* gesammelt. Dazu wird das Zufallsexperiment 1000-mal simuliert.
5. Wir werden die Ergebnisse in einem Säulendiagramm und einer Auswertungstabelle auswerten.

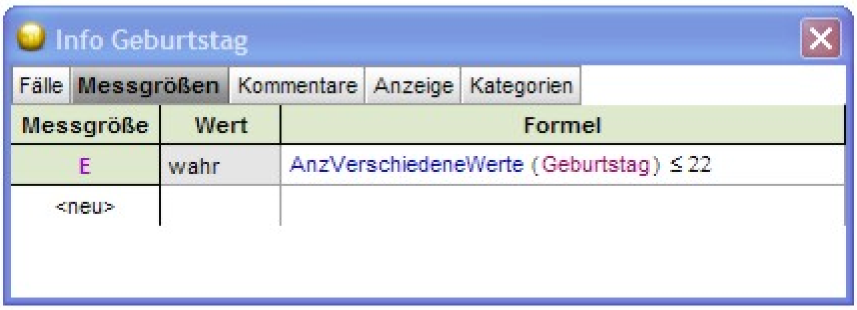
Realisierung in Fathom:

1. **Festlegen der Kollektion und Variable(n):** In Fathom erstellen wir zur Umsetzung dieses Zufallsexperiments eine Kollektion *Geburtstag* mit einem Merkmal *Geburtstag*.
2. **Definition des Zufallsexperiments**: Das Merkmal *Geburtstag* definieren wir über das Info-Fenster mit der Formel: `ganzeZufallszahl(1;365)`. Diese Formel gibt nun eine ganze Zahl zwischen 1 und 365 aus. Wir fügen der Kollektion nun 23 Fälle hinzu und haben damit die 23 Ziehungen aus der Urne simuliert und somit das Zufallsexperiment. Das Info-Fenster der Kollektion in ist folgender Abbildung dargestellt:



Die Kollektion und eine Darstellung der Ergebnisse in einer Tabelle sieht man in der nächsten Abbildung:

3. **Definition des interessierenden Ereignisses und/oder der interessierenden Zufallsgröße:** Wir möchten nun das Ereignis E: „es haben mindestens zwei Schüler am selben Tag Geburtstag" in Fathom umsetzen. Dazu definieren wir in der Kollektion *Geburtstag* eine Messgröße. Eine Messgröße wird im Info-Fenster auf der Registerkarte Messgröße definiert. Die Vorgehensweise ist analog zur Definition eines Merkmals.[2] Die Messgröße *E* wird nun durch die Formel: `AnzVerschiedeneWerte(Geburtstag)` ≤ 22 definiert.

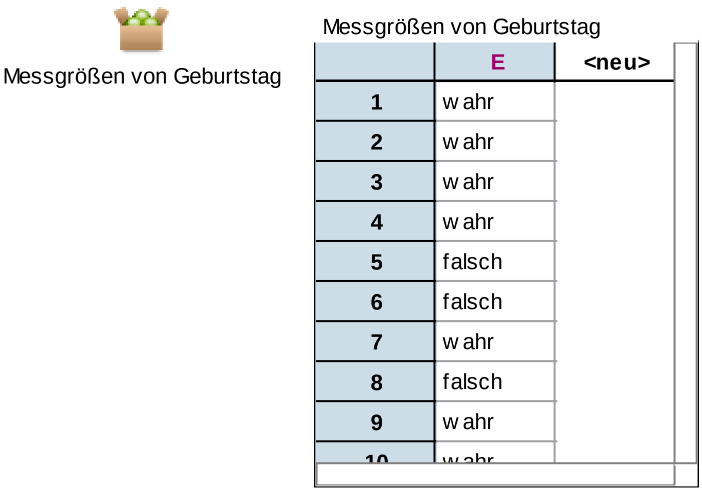


Diese Formel zählt durch `AnzVerschiedeneWerte( )` die unterschiedlichen Einträge im Merkmal *Geburtstag*. Tritt mindestens eine Zahl doppelt auf, so werden maximal 22 unterschiedliche Nummern gezählt. Wurde eine Zahl mindestens zweimal gezogen, so bedeutet dies, dass mindestens zwei Personen an diesem Tag Geburtstag haben und die Messgröße gibt *wahr* aus.

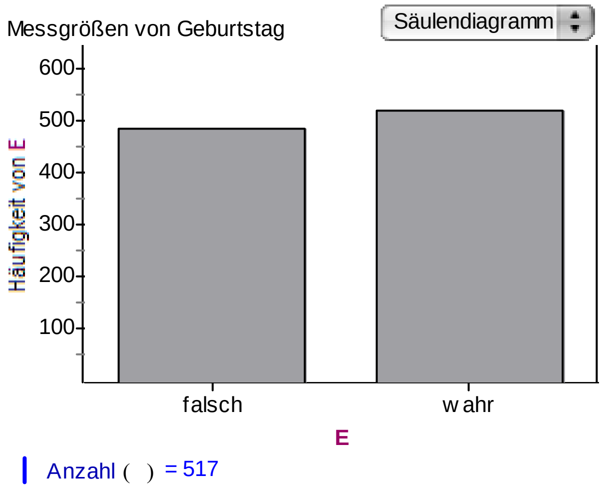
[2] Neu definierte Merkmale beziehen sich immer *zeilenweise* auf vorige Merkmale, d.h. das vorige Merkmal wird pro Zeile ausgewertet. Messgrößen beziehen sich dagegen *spaltenweise* auf vorher definierte Merkmale, d.h. die gesamte Spalte eines Merkmals wird ausgewertet.

4. **Wiederholung des Zufallsexperiments:** Wir werden die Simulation des Zufallsexperiments nun 1000-mal durchführen. In Fathom können wir dies durch das Sammeln von 1000 Messgrößen erreichen (**Kollektion | Messgrößen sammeln**). Es wird zuerst eine neue Kollektion *Messgrößen von Geburtstag* erstellt, in der fünfmal die Ergebnisse der Messgrößen liegen. Für jedes Ergebnis wurde das Zufallsexperiment erneut durchgeführt und ausgewertet. Die Anzahl der zu sammelnden Messgrößen kann man im Info-Fenster der Messgrößenkollektion wie unten zu sehen ändern.

5. **Visualisierung und statistische Auswertung:** Wir stellen die Simulationsergebnisse zunächst in einer Tabelle dar. Dazu erstellen wir mit der markierten Kollektion *Messgrößen von Geburtstag* eine neue Tabelle.



Da man eine Tabelle mit 1000 Einträgen schlecht überblicken kann, stellen wir die Ergebnisse noch in einem Säulendiagramm dar. Wir erstellen dazu eine neue Graphik und ziehen die Messgröße *E* auf die x-Achse.



Für die Untersuchung der simulierten Daten kann man beispielsweise noch eine Auswertungstabelle heranziehen.

Messgrößen von Geburtstag

	E		Zeilen-zusammenfassung
	falsch	wahr	
	483	517	1000
	0,483	0,517	1

S1 = Anzahl ( )

S2 = $\frac{\text{Anzahl ( )}}{\text{Gesamtsumme}}$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann hier nun durch den Wert 0,517 geschätzt werden.

Zu diesem Simulationsbeispiel stehen wieder drei Fathomdateien zur vertiefenden Übung bereit. Die Datei Sequenziell1.ftm ist eine ausführliche Beschreibung der Simulationsumgebung, die Datei Sequenziell2.ftm eine kurze Beschreibung und in Datei Sequenziell3.ftm findet man eine Anleitung zum Nachbauen der Simulationsumgebung.

Interessierende Ereignisse und Zufallsgrößen werden genau wie im folgenden Kapitel umgesetzt. Da sich das nächste Beispiel besser für die Definition von verschiedenen Ereignissen und Zufallsgrößen eignet als das Geburtstagsproblem, kann man dort die Umsetzungstabelle zu den Ereignissen und Zufallsgrößen betrachten.

5. Simulationen mit Urnen

Im Folgenden wird die Umsetzung von Zufallsexperimenten beschrieben, die sich als Urnenziehung modellieren lassen und bei denen die Umsetzung in Fathom diese Vorstellung auch unterstützt.

5.1 Urnenziehung mit Zurücklegen

Beispiel 4: Wir werfen einen fairen Würfel 50-mal. Wie oft wird dabei im Mittel eine Sechs gewürfelt?

Stochastische Modellierung: Wir wollen den 50-fachen Würfelwurf simulieren. Das Experiment modellieren wir durch eine Urne in der sechs durchnummerierte Kugeln von 1 bis 6 liegen. Aus dieser ziehen wir 50-mal mit Zurücklegen. Die Ergebnismenge eines Teilexperiments, also *eines* Würfelwurfs beschreiben wir durch $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $P(1) = ...P(6) = \frac{1}{6}$. Die Anzahl der Urnenziehungen für ein Zufallsexperiment beträgt $n = 50$. Als Ergebnismenge des Gesamtexperiments lässt sich nun $\Omega = \underbrace{\Omega_1 \times \Omega_1 \times ... \times \Omega_1}_{50-mal} = \{(x_1, x_2, ..., x_{50}) \,|\, x_1, ..., x_{50} \in \Omega_1\}$ festhalten mit $P(\{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{50})\}) = P(\{\omega_1\}) \cdot P(\{\omega_2\}) \cdot ... \cdot P(\{\omega_{50}\}) = \left(\frac{1}{6}\right)^{50}$. Als Zufallsgröße interessiert X: „Anzahl der 6en“. Das Gesamtexperiment wollen wir dann 1000-mal simulieren (N = 1000).

Simulationsplan:
1. Wir definieren eine Kollektion *Würfel 50* mit einem Merkmal *Augenzahl*.
2. Wir geben über eine Tabelle oder den Formeleditor (Formel: `Index`) sechs Fälle mit den Einträgen 1,2,3,4,5,6 ein. Dann erstellen wir ein Stichprobe der Größe 50 mit Zurücklegen.
3. Für die Umsetzung der Zufallsgröße X: „Anzahl der 6en“, definieren wir eine Messgröße *X* mit der Formel `Anzahl(Augenzahl=6)`. `Anzahl(Merkmal=Bedingung)` zählt die Einträge eines Merkmals, die die Bedingung erfüllen.
4. Indem man 1000 Messgrößen sammelt, werden 1000 Ergebnisse der Zufallsgrößen X gesammelt. Dazu wird das Zufallsexperiment 1000-mal simuliert.
5. Wir werden die Ergebnisse in einem Säulendiagramm und einer Auswertungstabelle auswerten.

Realisierung in Fathom:
1. **Festlegen der Kollektion und Variable(n):** In Fathom öffnen wir ein neues Dokument und erstellen eine neue Kollektion *Würfel 50* mit einem Merkmal *Augenzahl*.
2. **Definition des Zufallsexperiments:** Über eine Tabelle geben wir nun in dem Merkmal *Augenzahl* die Zahlen 1 bis 6 ein.

	Augenzahl	<neu>
1	1	
2	2	
3	3	
4	4	
5	5	
6	6	

Dann ziehen wir aus der Kollektion *Würfel 50* eine Stichprobe der Größe 50. Dazu erstellen wir über **Kollektion | Zufallsstichprobe ziehen** eine Stichprobe und ändern im Info-Fenster der Stichprobenkollektion die Anzahl der Ziehungen. Anschließend klicken wir auf den „Stichprobe verändern“- Button. Das Info-Fenster sieht nun folgendermaßen aus:

Nun wurden aus der Kollektion *Würfel 50* 50 Kugeln mit Zurücklegen gezogen und die Ergebnisse in der Kollektion *Stichprobe von Würfel 50* gesammelt. Möchte man das Zufallsexperiment nochmals durchführen, so kann man entweder <Strg y> drücken oder den „Stichprobe verändern“-Button. Da die Option „Vorhandene Fälle ersetzen“ angekreuzt ist, werden die vorhandenen 50 Züge durch die neuen ersetzt.

Stichprobe von Würfel 50

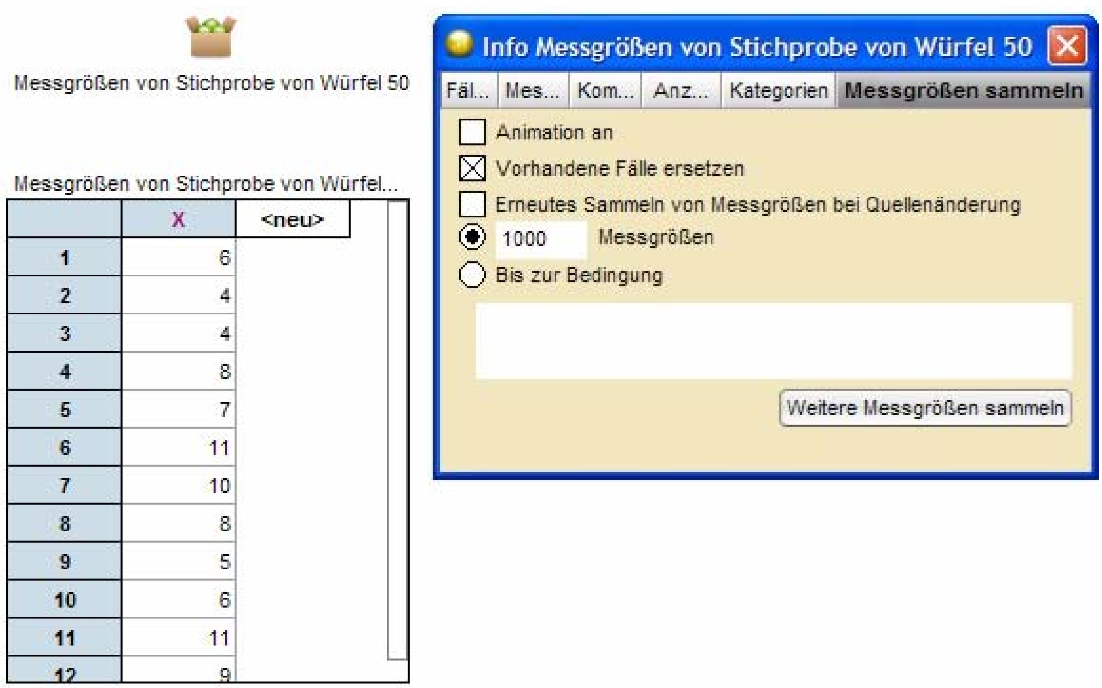
Stichprobe von Würfel 50

	Augenzahl
1	5
2	2
3	6
4	6
5	3
6	4
7	2
8	1
9	1
10	2
11	3
12	1

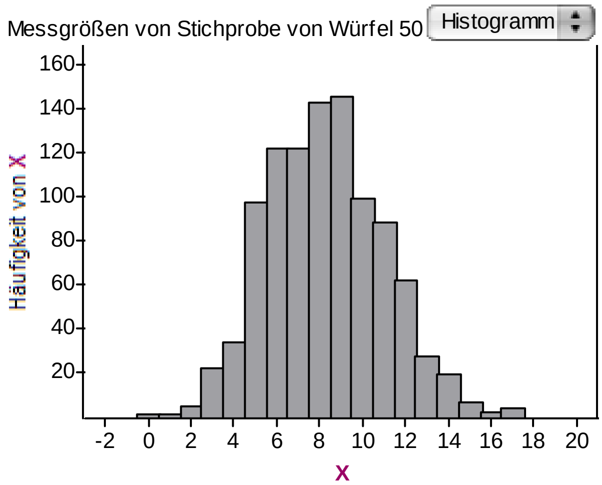
3. **Definition des interessierenden Ereignisses und/oder der interessierenden Zufallsgröße:** Uns interessiert in diesem Beispiel die Zufallsgröße X: „die Anzahl der gewürfelten 6en“. Diese Zufallsgröße setzen wir nun in Fathom als Messgröße um. Dazu definieren wir im Info-Fenster der Stichprobenkollektion auf der Registerkarte **Messgröße** eine Messgröße *X* mit der Formel `Anzahl(Augenzahl = 6)`. Diese Formel zählt die Fälle, bei denen das Merkmal *Augenzahl* eine 6 zeigt. Im Vergleich

zu den Umsetzungen der Ereignisse und Zufallsgrößen als Merkmale, die das jeweilige Zufallsexperiment immer horizontal, also zeilenweise, ausgewertet haben, bezieht sich die Messgröße auf das Merkmal als Spalte.

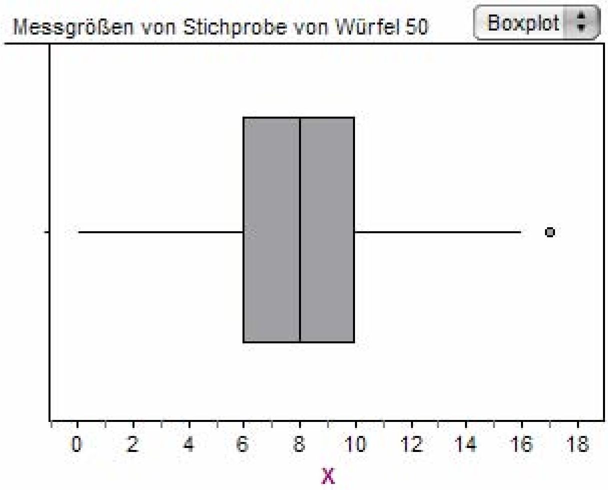
4. **Wiederholung des Zufallsexperiments:** Wir wollen die Simulation des Zufallsexperiments nun 1000-mal durchführen. In Fathom geschieht das in diesem Fall durch das Sammeln von Messgrößen (**Kollektion | Messgrößen sammeln**). Dadurch wird eine neue Kollektion *Messgrößen von Stichprobe von Würfel 50* erstellt, in der anfangs fünf gesammelte Messgrößen liegen, d.h. fünf Werte, die die Anzahl der 6en in 50 Würfen repräsentieren. Bei jedem Wert wurde zuerst eine neue Stichprobe erstellt, so dass das gesamte Zufallsexperiment tatsächlich 5-mal simuliert wurde. Wenn wir im Info-Fenster der Messgrößenkollektion die Anzahl der zu sammelnden Messgrößen auf 1000 hoch setzen, wird dann auch 1000-mal eine neue Stichprobe gezogen.

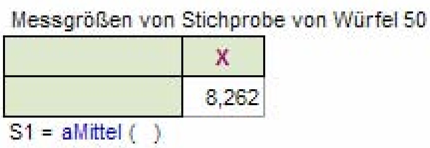


5. **Visualisierung und statistische Auswertung:** Wir stellen die Simulationsergebnisse zunächst in einem Histogramm dar, indem wir eine leere Graphik auf den Bildschirm ziehen und dann die Messgröße *X* auf die x-Achse.



Für die Auswertung der Daten kann man den Boxplot und die Auswertungstabelle verwenden:





Dieses Beispiel kann man wieder in drei Fathomdateien nachbearbeiten. Eine ausführliche Dokumentation der Simulationsumgebung findet man in Urne_mZ_1.ftm, eine kurze Beschreibung mit der Simulationsumgebung in Urne_mZ_2.ftm und eine Anleitung zum „Nachbauen“ der Simulation in Urne_mZ_3.ftm.

Neben der in diesem Beispiel definierten Zufallsgröße, werden nun beispielhaft noch weitere Umsetzungsmöglichkeiten von Zufallsgrößen und Ereignissen in einer Tabelle dargestellt. Die angeführten Beispiele beziehen sich auf das oben definierte Zufallsexperiment.

Ereignis/Zufallsgröße	**Formel in Fathom**
X_1: Summe der Augenzahlen	Summe(Augenzahl)
X_2: Anzahl der Würfe mit unterschiedlichen Augenzahlen	AnzVerschiedeneWerte(Augenzahl)
E_1: Summe der Augenzahlen ist > 10	Summe > 10
E_2: Anzahl der 6er ist ≥ 2	Anz_6 ≥ 2
E_3: Anzahl der 6er ist = 1	Anz_6 = 1
E_4: erster Wurf war eine 6	ErsterWert(Augenzahl = 6)
E_5: letzter Wurf war eine 6	LetzterWert(Augenzahl = 6)

5.2 Urnenziehung ohne Zurücklegen

Beispiel 5: Ein konfuser Mensch schreibt 10 Briefe und beschriftet danach die entsprechenden 10 Kuverts. Völlig zerstreut steckt er die Briefe in die Kuverts ohne auf die richtige Zuordnung zu achten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Brief im richtigen Kuvert steckt?

Stochastische Modellierung: Wir werden das Zufallsexperiment mit einer Urne simulieren, in der 10 durchnummerierte Kugeln von 1 bis 10 liegen. Jede Zahl auf einer Kugel steht für einen Brief. Wir ziehen aus der Urne alle 10 Kugeln ohne Zurücklegen. Die erste gezogene Kugel stecken wir in den ersten Umschlag. Ist die Zahl der ersten gezogenen Kugel eine Eins, so ist der Brief ins richtige Kuvert gesteckt worden. Ist die Zahl der zweiten Kugel eine Zwei, so ist auch diese in das richtige Kuvert gesteckt worden usw. Wir stellen die Ergebnismenge durch

$$\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{10} \,|\, \omega_1 \in \{1,2,...,10\}, \omega_2 \in \{1,2,...10\} \setminus \{\omega_1\}; \omega_3 \in \{1,2,...,10\} \setminus \{\omega_1, \omega_2\}; ...\}$$

dar mit $P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{10}$, $P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{9}, \dots,$ $P(\{\omega_{10}\}) = \frac{1}{1}$. Wir ziehen $n = 10$ mal aus der Urne und definieren eine Zufallsgröße X: „Anzahl der richtig zugeordneten Briefe“ sowie ein Ereignis E: „kein Brief wird richtig zugeordnet“. Das Zufallsexperiment wird $N = 1000$ mal simuliert.

Simulationsplan:

1. Wir definieren eine Kollektion *Briefe* mit einem Merkmal *Briefnummer*.
2. Wir geben über eine Tabelle oder den Formeleditor (Formel: `Index`) zehn Fälle mit den Einträgen 1,2,…,9,10 ein. Dann erstellen wir eine Stichprobe der Größe 10 ohne Zurücklegen.
3. Für die Umsetzung der Zufallsgröße X: „Anzahl der richtig zugeordneten Briefe“ definieren wir eine Messgröße *X* mit der Formel `Anzahl(Index=Briefnummer)`. `Anzahl(Merkmal=Bedingung)` zählt die Einträge eines Merkmals, die die Bedingung erfüllen. Daneben definieren wir das Ereignis E: „kein Brief wird richtig zugeordnet“ ebenfalls als Messgröße *E* mit der Formel $X = 0$.
4. Indem man 1000 Messgrößen sammelt, werden 1000 Ergebnisse der Zufallsgrößen X gesammelt. Dazu wird das Zufallsexperiment 1000-mal simuliert.
5. Wir werden die Ergebnisse in einem Säulendiagramm und einer Auswertungstabelle untersuchen.

Realisierung in Fathom:

1. **Festlegen der Kollektion mit Variable(n)**: In Fathom definieren wir uns nun eine Kollektion *Briefe* mit einem Merkmal *Briefnummer*.
2. **Definition des Zufallsexperiments**: In dem Merkmal *Briefnummer* erzeugen wir 10 Fälle mit zehn Zahlen für die unterschiedlichen Briefe.

Briefe

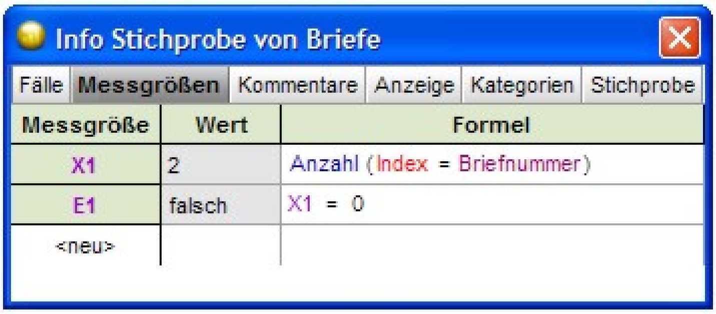
	Briefnummer
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10

Aus dieser Kollektion ziehen wir nun ohne Zurücklegen ein Stichprobe der Größe 10, da wir *alle* Briefe in ein Kuvert stecken wollen. Mit der markierten Kollektion *Briefe* wählen wir **Kollektion | Zufallsstichprobe** ziehen und haben somit eine Stichprobe der Größe 10 erzeugt. Nun müssen wir im Info-Fenster der Stichprobenkollektion noch das Kreuz bei „Mit Zurücklegen" wegklicken, damit wir die Briefe ohne Zurücklegen ziehen. Wir führen das Zufallsexperiment noch einmal neu aus und stellen die Ergebnisse in einer Tabelle dar.

Stichprobe von Briefe

	Briefnu...	<r
1	8	
2	2	
3	6	
4	10	
5	3	
6	7	
7	5	
8	4	
9	9	
10	1	

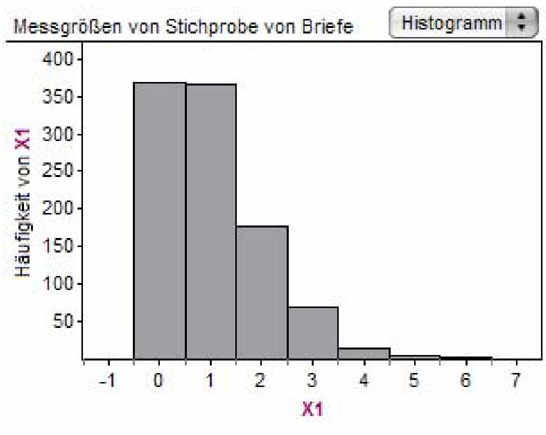
3. **Definition des interessierenden Ereignisses und/oder der interessierenden Zufallsgröße:** Uns interessiert in diesem Beispiel vorerst die Zufallsgröße X: „Anzahl der richtig zugeordneten Briefe“. Die Zufallsgröße *X* wird hier wieder als Messgröße umgesetzt. Dazu definieren wir im Info-Fenster auf der Registerkarte **Messgröße** eine Messgröße *X1*[3] mit der Formel: `Anzahl(Index = Briefnummer)`. Mit dieser Formel werden die Fälle gezählt, bei denen die Nummer des Briefs mit seiner Positionierung in der erzeugten Liste übereinstimmt. Stimmt die Bedingung `Index = Briefnummer`, so wertet die Funktion `Anzahl( )` den Eintrag mit einer Eins, sonst mit einer Null. So erhalten wir die Anzahl der richtig zugeordneten Briefe. Uns bleiben also mehr Informationen erhalten, als wir eigentlich benötigen und können so noch weitere Auswertungen vornehmen. Möchten wir allerdings nur wissen, ob kein Brief im richtigen Umschlag steckt, so definieren wir das Ereignis E: „kein Brief steckt im richtigen Umschlag“ als Messgröße *E1*. Dazu verwenden wir die eben definierte Messgröße *X1*. Mit der Formel `X1 = 0`, wird nun überprüft, ob die Anzahl der richtig zugeordneten Briefe gleich Null ist, ob also kein Brief im richtigen Umschlag steckt.

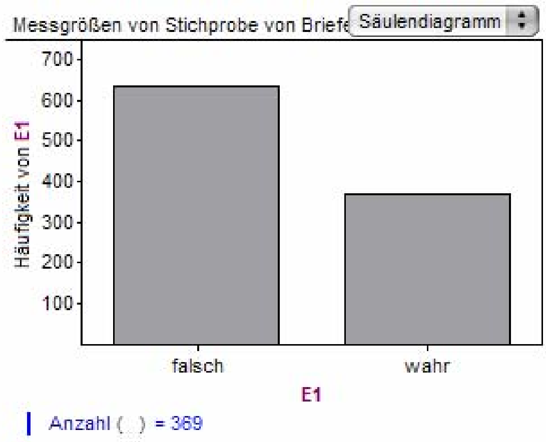


4. **Wiederholung des Zufallsexperiments:** Wir werden die Simulation des Zufallsversuchs 1000-mal durchführen. Dazu sammeln wir über **Kollektion | Messgrößen sammeln** 1000 Messgrößen (ändern der Anzahl im Info-Fenster und erneutes Sammeln). Bei jeder einzelnen Messgröße wird wieder eine neue Stichprobe erstellt.

[3] Möchte man eine Messgröße zur Definition einer weiteren Messgröße wieder verwenden, so kann man es nicht einfach nur mit *X* benennen. Dies ist in Fathom aus technischen Gründen leider nicht möglich. Aus diesem Grund wurde die Messgröße hier *X1* benannt.

5. **Visualisierung und statistische Auswertung:** Wir stellen die Ergebnisse der beiden Messgrößen in zwei Graphiken dar. Wir erstellen zwei leere Graphiken und ziehen die Messgrößen jeweils auf die x-Achse. Die Messgröße *X1* wird zuerst in einem Punktdiagramm realisiert, das wir aber in ein Histogramm umändern, da im Punktdiagramm nicht alle Daten graphisch sinnvoll wiedergegeben werden. Die zweite Messgröße *E1* wird in ein Säulendiagramm umgesetzt, da es sich hier um eine kategoriale Variable handelt.





Für die Untersuchung der Daten kann man zur Messgröße *E1* zusätzlich noch eine Auswertungstabelle erstellen.

Messgrößen von Stichprobe von Briefe

	E1		
	falsch	wahr	Zeilen-zusammenfassung
	631	369	1000
	0,631	0,369	1

S1 = Anzahl ( )

S2 = $\frac{\text{Anzahl ( )}}{\text{Gesamtsumme}}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Brief im richtigen Umschlag ist kann nun mit dem Wert 0,369 geschätzt werden.

Zum Nacharbeiten dieses Beispiels stehen wiederum drei Fathomdateien zur Verfügung. Die erste mit ausführlicher Dokumentation (Urne_oZ_1.ftm), die zweite mit kurzer Dokumentation (Urne_oZ_2.ftm) und die dritte zum eingenständigen „Nachbauen" mit Anleitung (Urne_oZ_3.ftm).

5.3 Urnenziehung mit Stichprobengrößen, die durch Stopkriterien festgelegt werden können (Wartezeitprobleme)

Beispiel: Wir werfen einen fairen Würfel so lange, bis eine Sechs gefallen ist. Wie oft muss man im Mittel den Würfel werfen?

Stochastische Modellierung: Wir modellieren das Zufallsexperiment durch eine Urnenziehung. In der Urne sind sechs durchnummerierte Kugeln von 1 bis 6. Aus dieser Urne wird nun mit Zurücklegen solange gezogen bis die Kugel mit der Ziffer 6 gezogen wurde. Die Ergebnismenge eines Teilexperiments, also *eines* Würfelwurfs beschreiben wir durch

$\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ mit $P(1) = ...P(6) = \frac{1}{6}$. Die Anzahl der Urnenziehungen für ein Zufallsexperiment beträgt $n = k$, wobei im k-ten Teilexperiment das erste mal eine Sechs gezogen wurde. Als Ergebnismenge des Gesamtexperiments lässt sich nun $\Omega = \underbrace{\Omega_1 \times \Omega_1 \times ... \times \Omega_1}_{k-mal} = \{(x_1, x_2, ..., x_k) | x_1, ..., x_k \in \Omega_1\}$ festhalten mit $P(\{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k)\}) = P(\{\omega_1\}) \cdot P(\{\omega_2\}) \cdot ... \cdot P(\{\omega_k\}) = \left(\frac{1}{6}\right)^k$. Als Zufallsgröße interessiert X: „Anzahl der Würfe bis zur ersten 6“. Das Gesamtexperiment wollen wir dann 1000-mal simulieren (N = 1000).

Simulationsplan:

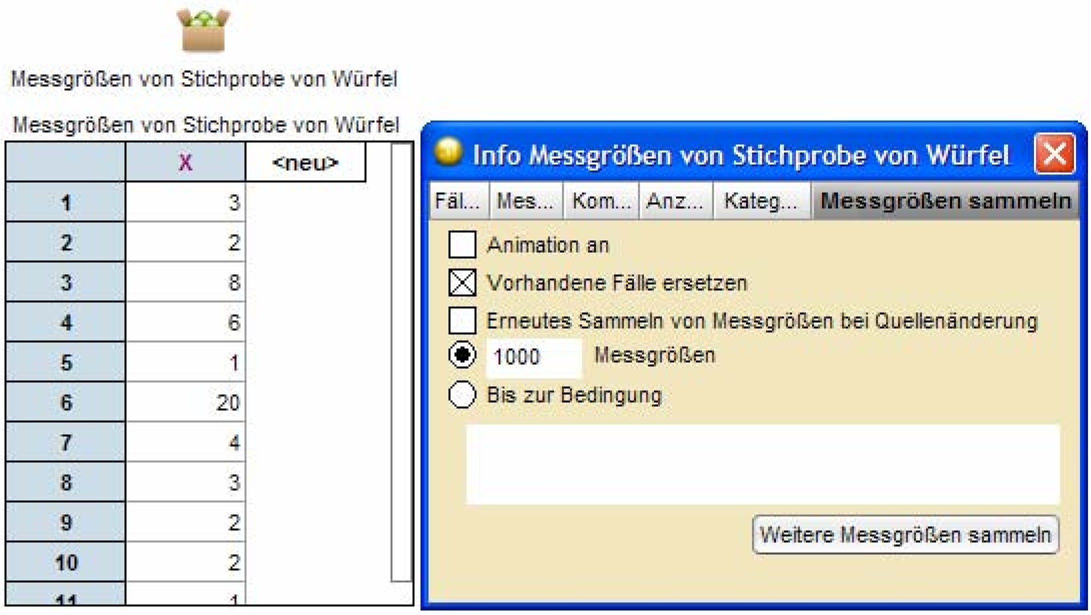
1. Wir definieren eine Kollektion *Würfel* mit einem Merkmal *Augenzahl.*
2. Wir geben über eine Tabelle oder den Formeleditor (Formel: `Index`) zehn Fälle mit den Einträgen 1,2,3,4,5,6 ein. Dann erstellen wir eine Stichprobe mit Abbruchbedingung und mit Zurücklegen. Die Abbruchbedingung soll der Zug einer 6 sein.
3. Für die Umsetzung der Zufallsgröße X: „Anzahl der Würfe bis zur ersten 6“ definieren wir eine Messgröße *X* mit der Formel *Anzahl*`(Index)`. `Anzahl(Index)` zählt die Einträge eines Merkmals.
4. Indem man 1000 Messgrößen sammelt, werden 1000 Ergebnisse der Zufallsgrößen X gesammelt. Dazu wird das Zufallsexperiment 1000-mal simuliert.
5. Wir werden die Ergebnisse in einem Säulendiagramm und einer Auswertungstabelle untersuchen.

Realisierung in Fathom:

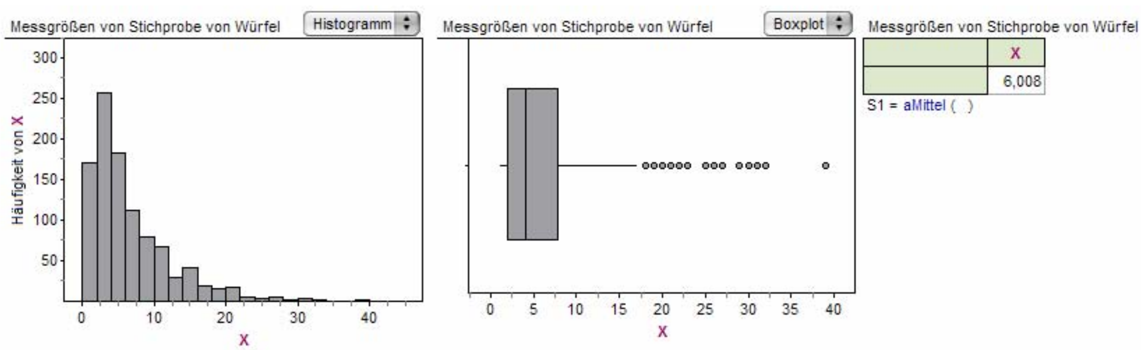
1. **Festlegen der Kollektion mit Variable(n)**: In Fathom erstellen wir eine Kollektion *Würfel* mit einem Merkmal *Augenzahl.*
2. **Definition des Zufallsexperiments**: Dem Merkmal *Augenzahl* fügen wir sechs Fälle mit den Einträgen 1 bis 6 (über eine Tabelle oder den Formeleditor) hinzu. Dann ziehen wir aus der Kollektion eine Stichprobe mit Zurücklegen, wobei wir nun die Option „Bis zur Bedingung“ im Info-Fenster nutzen. Dort geben wir die Formel `Augenzahl = 6` ein. Drücken wir jetzt den Button „Stichprobe verändern“, so wird so lange gezogen, bis eine 6 erscheint. Die Ergebnisse stellen wir in einer Tabelle dar.

3. **Definition des interessierenden Ereignisses und/oder der interessierenden Zufallsgröße:** Wir definieren nun die Zufallsgröße X: „Anzahl der Züge bis zur ersten 6“. Um diese Zufallsgröße in Fathom zu realisieren, definieren wir in der Kollektion *Stichprobe von Würfel* eine Messgröße *X* mit der Formel `Anzahl(Index)`. Diese Formel zählt die Anzahl der vorhandenen Fälle. Wird also nur dreimal bis zur ersten 6 gezogen, so gibt die Formel eine 3 aus.

4. **Wiederholung des Zufallsexperiments:** Die Simulation des Zufallsexperiments wird nun mit Messgrößen sammeln 1000-mal durchgeführt. Die Ergebnisse visualisieren wir in einer Tabelle.



5. **Visualisierung und statistische Auswertung:** Wir stellen die Simulationsergebnisse nun graphisch in einem Histogramm dar. Für die Auswertung der Daten kann man zum Histogramm zusätzlich ein Boxplot und eine Auswertungstabelle erstellen und diese dann geeignet interpretieren.



Eine in Fathom ausführlich dokumentierte Version dieses Beispiels findet man bei Warte1.ftm. Eine kurz beschriebe Umsetzung des Zufallsexperiments mit entsprechender Simulationsumgebung existiert unter Warte2.ftm und eine Anleitung zum „Nachbauen“ findet man unter Warte3.ftm.

In untenstehender Tabelle sind einige weitere typische Abbruchbedingungen für Wartezeitprobleme aufgelistet. Das Beispiel bezieht sich auf die Simulation eines Würfelwurfs wie wir ihn eben definiert haben. Es existiert also eine Kollektion „Würfel“ mit einem Merkmal „Augenzahl“, das die Werte 1 bis 6 enthält. Aus dieser Kollektion wird dann eine Stichprobe gezogen, bis eine diese Abbruchbedingungen eingetreten ist.

Allgemein		**Beispiel**	
Abbruchbedingung	**Formel**	**Abbruchbedingung**	**Formel**
Bis ein bestimmter Fall gezogen wird	Merkmalname = bestimmter Fall	Bis eine 6 gewürfelt wird	Augenzahl = 6
Bis genau x-mal ein bestimmter Fall gezogen wurde	Anzahl(Merkmalname = bestimmter Case)=x	Bis genau fünfmal eine 6 gewürfelt wurde	Anzahl(Augenzahl = 6) = 5
Bis x unterschiedliche Fälle gezogen wurden	AnzVerschiedeneWerte(Merkmalname) = 6	Bis jede Zahl mindestens einmal gewürfelt wurde	AnzVerschiedene-Werte(Augenzahl) = 6
Bis x-mal hintereinander der gleiche Fall gezogen wurde	RunLänge(Merkmalname) = x	Bis ein Dreierpasch (3 gleiche Zahlen in Folge) gewürfelt wurden	RunLänge(Augenzahl) = 3
Bis genau zweimal hintereinander ein bestimmter Fall gezogen wurde	(Merkmalname = bestimmter Fall) und (Vorgänger-Wert(Merkmalname) = bestimmter Fall)	Bis zweimal hintereinander eine 6 gewürfelt Wurde	(Augenzahl = 6) und (Vorgänger-Wert(Augenzahl) = 6)

Anhang

Zufallsmaschinen

In der folgenden Tabelle werden verschiedene Zufallsmaschinen vorgestellt, die Zufallszahlen erzeugen. Die erste Spalte der Tabelle beinhaltet den Befehl in Fathom, die zweite das allgemeine Ergebnis, das der Befehl liefert und die dritte Spalte beinhaltet verschiedene Anwendungsmöglichkeiten des Befehls in Fathom, insbesondere zur Simulation. Die Verwendung von Zufallszahlenerzeuger bietet sich vor allem dann an, wenn man ein einstufiges Zufallsexperiment betrachtet oder das Zufallsexperiment aus der Wiederholung einstufiger Zufallsexperimente zusammensetzt. Die Funktionen Zufallszahl( ), ganzeZufallszahl( ) und Zufalls-Wahl( ) sind gleichverteilt, d.h. jedes Element wird mit der gleichen Wahrscheinlichkeit erzeugt.

Befehl in Fathom	Liefert:	Anwendungen:
Zufallszahl( )	eine Zufallszahl zwischen 0 und 1.	• Simulation einer Jungengeburt mit P(Jungengeburt) = 0,5128: $wenn(Zufallszahl() \leq 0.5128)\begin{cases}\text{"J"}\\ \text{"M"}\end{cases}$ • Simulation einer zufälligen Stelle eines Schnittes durch eine Strecke der Länge 1: *Zufallszahl()* • Simulation einer Urnenziehung mit 4 roten, 5 blauen und 3 schwarzen Kugeln: $transform(Zufallszahl())\begin{cases}\leq \frac{4}{12}: \text{"r"}\\ \leq \frac{9}{12}: \text{"b"}\\ sonst: \text{"s"}\end{cases}$
Zufallszahl(Max)	eine reelle Zufallszahl zwischen 0 und Max.	
Zufallszahl(Min, Max)	eine reelle Zufallszahl zwischen Min und Max.	
ganzeZufallszahl()	entweder 0 oder 1	• Simulation eines Münzwurfs mit den kodierten Ausgängen 0 für Wappen und 1 für Zahl: *ganzeZufallszahl( )*
ganzeZufallszahl(Max)	eine ganze Zahl zwischen 0 und max	• Simulation der zufälligen Vergabe von Noten in der Oberstufe*:* *ganzeZufallszahl(15)*
ganzeZufallszahl(Min, Max)	eine ganzzahlige Zufallszahl zwischen Min und Max.	• Simulation eines Würfelwurfs*:* *ganzeZufallszahl(1;6)* • Simulation Ziehung der Lottozah-

		len 6 aus 49: *ganzeZufallszahl(1;49)*
ZufallsWahl(a_1,a_2, …,a_n)	ein zufällig gezogenes Element aus einer definierten Liste von Elementen.	• Simulation eines Würfelwurfs: *ZufallsWahl(1;2;3;4;5;6)* (Zahlen müssen nicht in „“ stehen) • Simulation eines Münzwurfs: *ZufallsWahl(“Wappen“;“Zahl“)*, (Buchstaben oder Wörter müssen in „“) stehen • Simulation einer unfairen Münze mit P(Wappen) = 2/3 , P(Zahl) = 1/3: *ZufallsWahl(“Wappen“; “Wappen“; “Zahl“)*
ZufallBinomial(n,p), n: Anzahl der Versuche, p: Wahrscheinlichkeit des Erfolgs	eine ganzzahlige Zufallszahl, aus einer Binomialverteilung.	• Simulation der Anzahl der Wappen beim 20fachen Münzwurf: *ZufallBinomial(20;0,5)*
ZufallNormal(mu,sd), mu: arithmetisches Mittel, sd: Standardabweichung	eine reelle Zufallszahl aus einer Normalverteilung.	
ZufallGeometrisch(p)	eine nicht negative natürliche Zahl aus einer geometrischen Verteilung.	
ZufallExponential(mu)	eine zufällige reelle Zahl größer als 0, die aus einer Exponentialverteilung erzeugt wurde.	

Das Füllen von Urnen

Möchte man sein Zufallsexperiment in einer Simulation mit einer Urne umsetzen, so muss man die Kollektion wie die Urne füllen. Dazu hat man mehrere Möglichkeiten. Zum einen kann man die Urne per Hand über eine Tabelle oder das Info-Fenster füllen, zum anderen ist auch eine Füllung per Formel möglich. Sind die Kugeln der Urne kategorial und alle unterschiedlich so ist eine Handeingabe unumgänglich. Treten allerdings Wiederholungen auf oder ist die Variable auf der Kugel numerisch, so kann die Kollektion oft auch sinnvoll per Formel gefüllt werden. Eine weitere dritte Möglichkeit ist der Import von Daten, die in einer Kollektion abgelegt werden.

Handeingabe:
Muss oder möchte man seine Kollektion per Hand füllen, so ist eine Eingabe über die Tabelle am einfachsten. Eine Eingabe über das Info-Fenster ist auch möglich, gestaltet sich aber umständlicher und wird aus diesem Grund auch nicht näher erläutert.
Beispiel: Aus den Schülern eines Deutsch-Kurses sollen einige zufällig ausgewählt werden. Dies soll in Fathom mit dem Urnenmodell umgesetzt werden. Dazu erstellen wir eine neue Kollektion und eine dazugehörige Tabelle (die Kollektion muss aktiviert sein, wenn man die

Tabelle aus der Symbolleiste zieht). Wir definieren ein Merkmal, z.B. *Name* und tippen die Namen einzeln in die Zeilen darunter.

Eingabe über Formel:
Je nach Art der Daten können verschiedene Formeln genutzt werden. Prinzipiell wird zuerst eine neue Kollektion erstellt und dann das Info-Fenster geöffnet. Man definiert ein entsprechendes Merkmal mit einem bestimmten Namen und fügt der Kollektion die entsprechende Anzahl an Fällen hinzu. Je ein Fall entspricht einer Kugel. Zum Beispiel müssen für die Simulation der Ziehung der Lottozahlen 49 Fälle in der Kollektion vorhanden sein. Anschließend gibt man eine Formel über den Formeleditor ein.

Beispiel	Formel
Man möchte eine Urne mit den Lotto-Kugeln füllen, d.h. mit den Zahlen 1 bis 49.	*Index* (49 Fälle)
Man hat eine Lostrommel mit durchnummerierten Losen von 300 bis 350.	*Index + 299* (51 Fälle)
Man hat eine Lostrommel mit nur geraden Zahlen von 2 bis 100, wobei die Lose 50 und 52 abhanden gekommen sind.	*Index* •2 (50 Fälle; anschließend Formel löschen und dann entsprechende Fälle)
Es ist eine Population von 412 Männern und 432 Frauen gegeben.	$wenn(Index \leq 412)\begin{cases} \text{"Mann"} \\ \text{"Frau"} \end{cases}$ (844 Fälle)
Man möchte aus einer Urne mit 6 roten, 7 blauen und 9 schwarzen Kugeln ziehen.	$transform(Index)\begin{cases} \leq 6: \text{"rot"} \\ \leq 13: \text{"blau"} \\ sonst: \text{"schwarz"} \end{cases}$ (22 Fälle)

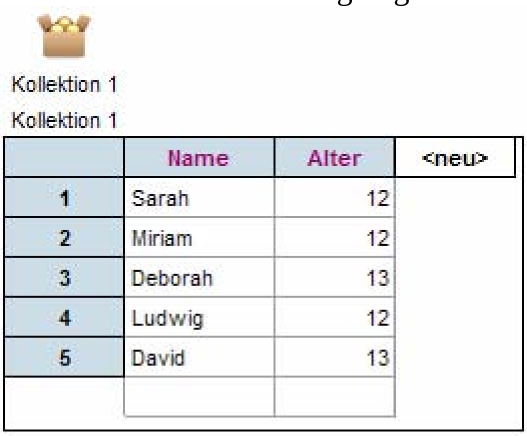
Import von Daten:
Man kann aus Word, Excel oder dem Netz Daten in Tabellenform kopieren und in Fathom in eine neue Kollektion einfügen. Erstellen Sie also zunächst eine leere Kollektion und wählen

Sie dann aus dem Kontextmenü (rechte Maustaste) **Fälle einfügen** aus. Möchte man Daten aus anderen Fathomdateien einfügen kann man dies auch mit Kopieren und Einfügen umsetzen. Man wählt in der Kollektion die entsprechenden Fälle aus, kopiert diese und fügt sie in seine neue Kollektion mit **Fälle einfügen** wieder ein.

1. Tabelle, Zellen oder Fälle kopieren:

2. Kopiertes in Fathom in eine neue Kollektion einfügen

3. Kollektion mit den eingefügten Werten in einer Tabelle visualisiert:

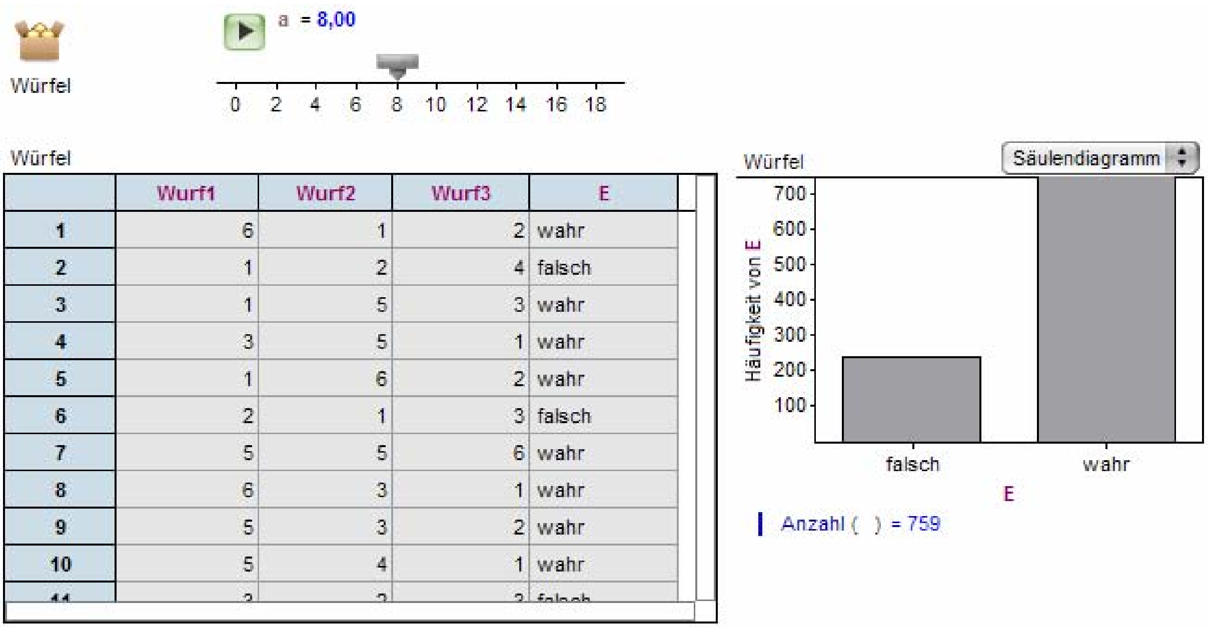


Nutzung von Parametern:

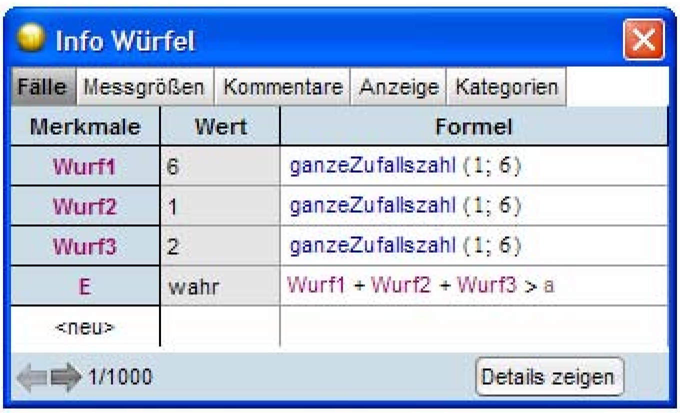
Möchte man in Fathom mit Parametern arbeiten, so kann man diese als Regler realisieren. Diese können prinzipiell immer über den Formeleditor in eine Formel eingebaut werden, z.B. für die Definition eines Merkmals, einer Messgröße, aber auch zur Definition einer Formel für „Bis zur Bedingung“ (wenn man eine Stichprobe mit Abbruchbedingung definieren möchte).

Beispiel: Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen. Wir betrachten dabei die Augensumme der drei Würfe. Ist diese größer als ein bestimmter Wert a (a = 5, 6, 7, ..)?

Das Zufallsexperiment wurde in Spalten mit den Merkmalen *Wurf1-3* und den Formeln `ganzeZufallszahl(1;6)` realisiert. Nun definieren wir uns einen Regler *a* und ein Merkmal *E*, das durch die Formel: `Wurf1 + Wurf2 + Wurf3` > *a* definiert wird. Der Kollektion werden nun noch 1000 Fälle hinzugefügt. Das Merkmal *E* kann man in einem Säulendiagramm visualisieren. Bewegt man den Regler, so wird das Zufallsexperiment neu simuliert und dargestellt. Die erstellte Simulationsumgebung ist unten abgebildet und kann in Würfel8.ftm untersucht werden.



	Wurf1	Wurf2	Wurf3	E
1	6	1	2	wahr
2	1	2	4	falsch
3	1	5	3	wahr
4	3	5	1	wahr
5	1	6	2	wahr
6	2	1	3	falsch
7	5	5	6	wahr
8	6	3	1	wahr
9	5	3	2	wahr
10	5	4	1	wahr



Merkmale	Wert	Formel
Wurf1	6	ganzeZufallszahl (1; 6)
Wurf2	1	ganzeZufallszahl (1; 6)
Wurf3	2	ganzeZufallszahl (1; 6)
E	wahr	Wurf1 + Wurf2 + Wurf3 > a
<neu>		