

Finite-Elemente Berechnung inelastischer Kontinua

Interpretation als Algebro-Differentialgleichungssysteme

Vom Fachbereich Maschinenbau der
Universität Kassel
für das Fachgebiet Mechanik
genehmigte
Habilitationsschrift

von
Dr.-Ing. Stefan Hartmann
aus Kassel

Kassel, März 2003

Referent:
Korreferent:

Prof. Dr.-Ing. Peter Haupt
Prof. Dr.-Ing. Peter Wriggers

Tag der Habilitation:

5. Feb 2003

Herausgeber

Der Geschäftsführende Direktor
Institut für Mechanik
Universität Kassel

Organisation und Verwaltung

Dr. Stefan Hartmann
Institut für Mechanik
Universität Kassel
Mönchebergstr. 7
34109 Kassel

© 2003 Institut für Mechanik
Universität Kassel
Mönchebergstr. 7
34109 Kassel

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Vorwort

Während und nach meiner Promotionsphase beschäftigte ich mich immer wieder mit der Frage, wie die derzeitige Vorgehensweise der Methode der finiten Elemente bei Berücksichtigung von Materialmodellen vom Evolutionsgleichungstyp mit Verfahren der Numerischen Mathematik zusammenhängt. Auf einem Workshop zu robusten Finite-Element Formulierungen traf ich Peter Ellsiepen (damals tätig an der Universität Stuttgart), der diese Fragestellung ebenfalls, jedoch im Zusammenhang mit der Theorie poröser Medien, behandelte. Hieraus entwickelte sich eine fruchtbare Zusammenarbeit, deren grundlegenden Gedanken sich in dieser Arbeit wieder spiegeln. Bei ihm möchte ich mich besonders bedanken.

Diese Zusammenarbeit war insbesondere möglich, da mein Lehrer Professor Peter Haupt den Mitarbeitern die Freiheit zur selbständigen Forschung gegeben hat. Insofern ist diese sehr Numerik angehauchte Arbeit in einem Experiment und Theorie orientierten Fachgebiet nicht einfach gewesen. Ich bedanke mich daher bei ihm für die Möglichkeit zur freien Gestaltung des Themas und den Beiträgen zu meiner Fortentwicklung.

Ein weiterer Dank sei an Professor Peter Wriggers zur Übernahme der Zweitbegutachtung der Habilitationsschrift und seinen wertvollen Anmerkungen ausgesprochen.

Nichtzuletzt möchte ich mich bei einigen meiner derzeitigen und ehemaligen Kollegen bedanken, die durch Diskussionen die Arbeit beeinflußt haben. Hierzu gehören: Dr. D. Helm, Dr. Ch. Hüttel, Ch. Kardelky, T. Kersten, Dr. A. Lion, Dr. K. Sedlan und Dr. L. Schreiber.

Mein vornehmlicher Dank gilt meiner Frau und meinen beiden Töchtern, die die privaten Entbehrungen hingenommen haben, immer in der Hoffnung, daß sich dies einmal ändern könnte. Vielen Dank.

Kassel, Februar 2003

Dr. Stefan Hartmann

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	11
2	Mathematische Grundlagen	15
2.1	Eigenwertproblem von Tensoren 2-ter Stufe	15
2.1.1	Eigenwert- und Eigenvektorberechnung	15
2.1.2	Aspekte der Numerik des Eigenwertproblems	21
2.2	Tensoren 4-ter Stufe	28
2.3	Lösung von Algebra-Differentialgleichungssystemen	31
2.3.1	Diagonalimplizite Runge-Kutta Verfahren	31
2.3.2	Zeitadaptivität	37
2.4	Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme	39
2.4.1	Newton-Raphson Verfahren	40
2.4.2	Multilevel-Newton Verfahren	42
3	Kontinuumsmechanische Grundlagen	45
3.1	Kinematik	45
3.2	Zerlegungen des Deformationsgradienten	50
3.2.1	Volumenändernde und -erhaltende Zerlegung	50
3.2.2	Elastisch-viskose Zerlegung	53
3.3	Bilanzgleichungen und Spannungstensoren	57
4	Materialmodellierung	61
4.1	Anmerkungen zur Hyperelastizität	62
	Baker-Ericksen Ungleichung	66
	Inkrementelle Stabilität	66
4.2	Hyperelastizität bei Inkompressibilität	68
4.2.1	Verallgemeinerter Polynomansatz	70
4.2.2	Ogden-Elastizität	73
4.2.3	Arruda/Boyce-Modell	75
4.3	Hyperelastizität bei Nahezu-Inkompressibilität	76
4.3.1	Volumenändernder Anteil der Formänderungsenergie	76
4.3.2	Volumenerhaltender Anteil der Formänderungsenergie	78
4.3.3	Spannungszustand	79
	Referenzkonfiguration	79
	Momentankonfiguration	80
4.3.4	Tangentenoperator	82
	Referenzkonfiguration	82
	Momentankonfiguration	85

	Zusammenhang zur Theorie kleiner Verzerrungen	86
4.3.5	Problematik des einaxialen Zuges	88
4.3.6	Weitere Anmerkungen	90
4.4	Viskoelastizität	92
4.4.1	Thermodynamisch konsistente Materialgleichungen	94
4.4.2	Ein Modell der finiten Viskoelastizität	99
5	Numerische Lösung des ARWP	103
5.1	Variationsprinzipien	104
5.1.1	Prinzip der virtuellen Verschiebungen bei kleinen Deformationen	105
	Anwendung des Multilevel-Newton Verfahrens	113
	Verallgemeinerte Mittelpunktsregel	116
5.1.2	Eigenschaften der Verschiebungssteuerung	117
5.1.3	Total-Lagrange Formulierung	119
5.1.4	Formulierung mit Größen der Momentankonfiguration	123
5.1.5	Gemischtes Variationsproblem	127
5.2	Spannungsberechnung bei finiter Viskoelastizität	133
5.3	Tangentenoperator bei finiter Viskoelastizität	135
6	Beispielrechnungen	139
6.1	Einfacher Zug	140
6.2	Zug eines Probekörpers	142
6.3	Einfache Scherung	144
6.4	Scherung einer Scheibe	147
7	Zusammenfassung	151
A	Mathematische Hilfsmittel	153
A.1	Eigenwertproblem von Tensoren 2-ter Stufe	153
A.1.1	Berechnung der Eigenvektoren	153
A.1.2	Sensitivität des Eigenwertproblems	155
A.2	Matrizendarstellung	158
A.2.1	Überführung in (6×6) -Matrizen	159
A.2.2	Ausnutzung des Skalarproduktes	162
B	Lineare Elastizitätstheorie	165
C	Matrizen der FE-Formulierung	167
C.1	Funktionalmatrix des Spannungsalgorithmus	167
C.2	Tangentenoperator des Überspannungsanteils	168
D	Symbole	171
D.1	Skalare	171
D.2	Matrizen und Spaltenmatrizen	174
D.3	Vektoren	178
D.4	Tensoren 2-ter Ordnung	178
D.5	Tensoren 4-ter Ordnung	180
D.6	Operatoren	181

D.7 Abkürzungen	181
Literaturverzeichnis	182

Kapitel 1

Einleitung

Die numerische Simulation des mechanischen Verhaltens von Bauteilen bzw. Strukturen gewinnt in der Industrie mit kontinuierlich zunehmender Rechenleistung immer mehr an Bedeutung. Für diese Berechnungen ist im wesentlichen die Methode der finiten Elemente aufgrund ihrer flexiblen Einsatzmöglichkeiten dominierend. Insbesondere die Berücksichtigung von inelastischen Materialeigenschaften gewinnt in der Bau- und Maschinenbauindustrie immer mehr an Bedeutung. Die numerische Simulation von mechanisch beanspruchten Bauteilen dient dabei im allgemeinen zur Vorabschätzung des Strukturverhaltens und damit der konstruktiven Verbesserung der untersuchten Bauteile. Zu diesem Zweck ist die Fortentwicklung von numerischen Verfahren zur effektiveren und präziseren Simulation von mechanischen Prozessen Gegenstand der Forschung.

Im speziellen stehen in der Umformtechnik und der Reifenindustrie große Deformationen gekoppelt mit großen Dehnungen bei Metallen und Polymeren im Vordergrund. Hierbei steigen die Anforderungen an Schnelligkeit, Stabilität und Genauigkeit der Algorithmen und der Realitätsnähe des zugrundeliegenden Materialmodells, um die physikalischen Werkstoff- bzw. Bauteileigenschaften beschreiben zu können. Zur Charakterisierung der Materialeigenschaften sind Materialmodelle auszuarbeiten, die anhand von experimentellen Untersuchungen auf deren Zulässigkeitsbereich eingegrenzt werden und mit Hilfe der Materialtheorie eine prinzipielle mathematische Struktur erhalten. Wünschenswert ist dabei, daß die Struktur der Modellgleichungen auch zu einfachen Algorithmen und damit einer einfachen Implementation in ein Programmsystem führt. Die Struktur vieler numerischer Verfahren entwickelte sich dabei einerseits historisch und andererseits durch grundlegende theoretische Betrachtungen der Methodik. Die vorliegende Arbeit möchte dem letzteren Sachverhalt dienen, d.h. die Methode der finiten Elemente unter Berücksichtigung inelastischer Stoffeigenschaften für quasistatische Prozesse wird auf deren mathematische Struktur hin untersucht. Dabei wird offensichtlich, daß man die historisch entwickelte Vorgehensweise mit Verfahren der Numerischen Mathematik zum Teil in Einklang bringen kann. Mehr noch, damit ist es auch möglich neue Klassen von Verfahren, die zu Genauigkeitserhöhung und Aufwandsreduktion führen, zu entwickeln und anzuwenden.

Die voranstehende Einführung soll im folgenden am Beispiel von Elastomeren konkretisiert werden: In den fünfziger und sechziger Jahren ist die Modellierung von Elastomeren intensiv durchgeführt worden, jedoch war zu diesem Zeitpunkt die numerische Berechnung von nahezu beliebigen Strukturen noch nicht möglich. Der Schwerpunkt lag daher auf analytischen Untersuchungen elastischer bzw. hyperelastischer Materialien einfacher homogener und inhomogener Spannungs- bzw. Deformationszustände unter Berücksichtigung finiter Verzerrungen. Elastomere haben jedoch nicht rein elastische Eigenschaften, sondern insbesondere viskose, d.h. prozeßabhängige Eigenschaften, was sie insbesondere als Dämpfungs- bzw. Lagerungselemente

einsetzbar macht. Bleibende Deformationen sind hierbei von untergeordneter Bedeutung, auch wenn hier verschiedene Vorschläge in der Literatur zu finden sind. In den letzten Jahren sind unter anderem auch durch die Initiative der Continental AG, Hannover, in Deutschland eine Reihe von Untersuchungen bzw. Aktivitäten in Form von Dissertationen und Habilitationen von rußgefüllten Elastomeren entstanden (zum Beispiel KALISKE [90], KECK [94], LION [106], MIDDENDORF [114], NASDALA [124], REESE [136, 137], SEDLAN [146]). Diese Arbeiten beschäftigen sich mit der experimentellen Untersuchung von Elastomeren, der Modellierung des phänomenologischen Werkstoffverhaltens sowie der numerischen Behandlung der entwickelten Materialmodelle im Rahmen der Methode der finiten Elemente. Die hier vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zum letzteren Punkt liefern. Andererseits entwickelte sich in den letzten 20 Jahren in rasantem Tempo die Methode der finiten Elemente zur Berücksichtigung von Materialnichtlinearitäten. Einer der grundlegenden Artikel, der mit dem Begriff der konsistenten Linearisierung des numerischen Verfahrens verbunden ist, ist die Arbeit von SIMO & TAYLOR [153]. Die konsistente Linearisierung dient zur Erreichung der "quadratischen" Konvergenz des in der Finite-Elemente Formulierung auftretenden Newton-Verfahrens. Dabei wird jedoch nicht klar, wie diese sich etablierte Vorgehensweise mit Verfahren der Numerischen Mathematik erklären läßt. Die hier vorliegende Arbeit soll daher diesen Zusammenhang anhand eines Materialmodells der Viskoelastizität bei finiten Deformationen erläutern.

Der Schwerpunkt der Arbeit beschäftigt sich deshalb mit einer Finite-Elemente Formulierung, welche Materialmodelle vom Evolutionsgleichungstyp berücksichtigt. Die klassische Trennung in Raum- und Zeitdiskretisierung führt auf die Interpretation als Lösung sogenannter Algebroid-Differentialgleichungssysteme (DAE-Systeme). Mit dieser Interpretation wird die bisherige Vorgehensweise der Zeitintegration sowie der geschachtelten Struktur derzeitiger Finite-Elemente Programme klarer. Mehr noch, es lassen sich mit dieser Interpretation neue und effektivere Verfahren einsetzen sowie zeitadaptive, d.h. auch fehlerkontrollierte Prozesse berechnen. Dieses Konzept, welches bei kleinen Deformationen durch WITTEKINDT [172] und FRITZEN [50] initiiert und im Rahmen der Finite-Element-Diskretisierung von Modellen der Theorie poröser Medien von ELLSIEPEN [45] bzw. DIEBELS ET AL. [38] und EHLERS & ELLSIEPEN [43] übertragen wurde, führte auf weitere Untersuchungen durch HARTMANN [62, 64], ELLSIEPEN & HARTMANN [46], HARTMANN [67] sowie BÜTTNER & SIMEON [24]. Die Erkenntnis, daß die bisherige Vorgehensweise in der Methode der finiten Elemente schon im Rahmen der elektrischen Netzwerke bekannt war, ist in HARTMANN [62] beschrieben worden. In den genannten Arbeiten sind spezielle diagonal-implizite Runge-Kutta Verfahren (DIRK-Verfahren, Einschrittverfahren) herangezogen worden. Eine andere Vorgehensweise orientiert sich in den Arbeiten von KIRCHNER & SIMEON [96] und SCHERF [144] an sogenannten BDF-Verfahren (backward-differentiation formulas, Mehrschrittverfahren). Wir beschränken uns hier auf die Darstellung der DIRK-Verfahren. Die vorliegende Arbeit untersucht neben der ausführlichen Darstellung der Vorgehensweise der DAE-Interpretation insbesondere die Verschiebungssteuerung mit der Zielsetzung der Berechnung der Reaktionskräfte sowie den Zusammenhang zu gemischten Elementformulierungen bei finiten Deformationen.

Die Behandlung der auftretenden Materialmodelle schneidet einige Teilaspekte, die näher untersucht werden. Zum einen begleitet die Arbeit die numerische Umsetzung der tensoriellen Gleichungen, d.h. deren effektive Umsetzung in Matrizen. Hierzu muß zunächst eine konsistente symbolische Notation insbesondere von Tensoren 4-ter Stufe herangezogen werden, die sich an die Arbeiten von DE BOER [36] und EHLERS [41] anlehnt. Anbei wird die numerische Behandlung des Eigenwertproblems von Tensoren 2-ter Stufe angesprochen, da in der Literatur einige Aspekte der Sensitivität unberücksichtigt geblieben sind. Im Rahmen der in der Material-

modellierung auftretenden Hyperelastizitätsbeziehungen streifen wir zusätzlich den Aspekt der Nahezu-Inkompressibilität sowie eine ausführliche Darstellung der verallgemeinerten Polynomenelastizität.

Die Struktur der Arbeit ist folgendermaßen gewählt worden. Zunächst werden in **Kapitel 2** die numerischen Aspekte des Eigenwertproblems von Tensoren 2-ter Stufe sowie einige Grundkenntnisse der Lösung von Algebro-Differentialgleichungssystemen als auch der Lösung von nichtlinearen blockstrukturierten Gleichungssystemen angesprochen. Im Zusammenhang mit der Lösung von Algebro-Differentialgleichungssystemen beschränken wir uns auf Einschrittverfahren insbesondere spezieller steif-genauer diagonal-impliziter Runge-Kutta Verfahren.

Anschließend werden in **Kapitel 3** die Grundgleichungen und -beziehungen der Kontinuumsmechanik aufgeführt, um die gewählte Notation zu vermitteln.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit dem gewählten Materialmodell der finiten Viskoelastizitätstheorie, welches auf den Arbeiten von LION [106] und SEDLAN [146] aufbaut. Dabei werden einige Gesichtspunkte insbesondere der grundlegenden und am häufigsten angewendeten Elastizitätsbeziehungen untersucht.

Die räumliche und zeitliche Diskretisierung der Methode der finiten Elemente sprechen wir in **Kapitel 5** an, die nach der Raumdiskretisierung auf die Lösung eines Algebro-Differentialgleichungssystems führt. Auch hier wird ein grundlegender Aspekt, nämlich derjenige der Verschiebungssteuerung, diskutiert. Dieses Thema findet leider keinen Eingang in die Lehrbücher der Methode der finiten Elemente oder wird in Bezug auf nichtlineare Probleme nur unzureichend angesprochen. Dabei gehen wir zunächst von der Theorie kleiner Verzerrungen aus, bevor das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in materieller und räumlicher Darstellung sowie eine gemischte Elementformulierung von SIMO ET AL. [155] bzw. [154] aufgegriffen werden. Hierzu versuchen wir eine konsequente Darstellung in globale und elementbezogene Größen (Vektoren und Matrizen) einzuführen.

Im letzten Kapitel, **Kapitel 6**, untersuchen wir die vorgestellte Vorgehensweise anhand einiger Beispiele. Da wir uns vorwiegend mit Genauigkeitsaspekten beschäftigen, dienen hierzu hauptsächlich akademische Beispiele. Zum einen betrachten wir zunächst homogene Deformationen, da hierbei Vergleichslösungen für den einfachen Zug und der einfachen Scherung vorliegen. Im Rahmen inhomogener Deformationen behandeln wir das Zugproblem einer realen Probengeometrie sowie die Scherung einer Elastomerscheibe.

In der Arbeit wird versucht eine konsequente (optische) Trennung in Skalare, geometrische Vektoren, Tensoren 2-ter und 4-ter Stufe sowie von Matrizen mit einer Unterscheidung in "lokale" und "globale" Größen einzuführen. Skalare werden kursiv/roman (A), geometrische Vektoren durch einen übergeordneten Pfeil (\vec{A}), Tensoren 2-ter Stufe in fett/roman (\mathbf{A}), Tensoren 4-ter Stufe in kalligraphischen Lettern (\mathcal{A}), Matrizen (und Spaltenmatrizen) in kursiv/fett/serifenlos bzw. fett/serifenlos für globale bzw. lokale Darstellungen (\mathbf{A} bzw. \mathbf{A}) dargestellt. "Lokal" impliziert die in der Methode der finiten Elemente bezeichneten Größen auf Elementebene bzw. hier auch an einem Punkt auftretende Größe. "Globale" Matrizen sind zum Beispiel diejenigen matriziellen Größen, die auf die gesamte Struktur (bzw. Gebiet) bezogen sind, siehe Kap. 5 und gleichfalls das Symbolverzeichnis.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

In den späteren Kapiteln der Arbeit stoßen wir auf Fragestellungen, denen wir hier eigene Abschnitte widmen möchten. Im einzelnen gibt der kommende Abschnitt einige Grundlagen der Eigenwertproblematik von symmetrischen Tensoren 2-ter Stufe wieder, wobei einige Anmerkungen zur Empfindlichkeit der Berechnung getätigt werden. Als weitere spezielle Betrachtungen behandeln wir Tensoren 4-ter Stufe insbesondere spezieller Transpositionseigenschaften, die sich im Zusammenhang mit den später erörterten kontinuumsmechanischen Fragestellungen als auch in der Entwicklung der Elementformulierung als zweckdienlich erweisen. In einem dritten Abschnitt wird auf die numerische Lösung von Systemen von Algebro-Differentialgleichungen sowie der dabei auftretenden blockstrukturierten nichtlinearen Gleichungssysteme eingegangen, da diese im Zusammenhang mit der Methode der finiten Elemente zur Lösung inelastischer Strukturen auftreten. Wir wollen hiermit einen Bogen von der klassischen Vorgehensweise bis zu Verfahren der Numerischen Mathematik spannen.

2.1 Eigenwertproblem von Tensoren 2-ter Stufe

Das Eigenwertproblem von Tensoren 2-ter Stufe \mathbf{B} bzw. von Matrizen $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist bis heute immer wieder behandelt worden, da es auf viele Eigenschaften bzw. Beziehungen des zugrundeliegenden Tensors führt. Des weiteren ist die numerische Umsetzung von besonderem Interesse, da zum einen die numerische Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren zu verschiedenen Schwierigkeiten führen kann und zum anderen möglichst effizient in Finite-Elemente Programmen implementiert sein sollte. Im folgenden werden einige Ergebnisse zusammengetragen und diskutiert, auf die wir später zurückgreifen werden. Wir stellen daher zunächst die wichtigsten theoretischen Grundlagen bei der Eigenwert- und Eigenvektorberechnung dar und gehen anschließend kurz auf deren numerische Berechnung ein.

2.1.1 Eigenwert- und Eigenvektorberechnung

Gesucht wird bei dem Eigenwertproblem

$$\mathbf{B}\vec{n} = \lambda\vec{n} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{B}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ und } \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.1)$$

diejenigen Richtungen \vec{n} , welche durch den Tensor \mathbf{B} auf sich selbst abgebildet werden. Der Proportionalitätsfaktor λ wird als Eigenwert und die zugehörige Richtung \vec{n} als Eigenvektor

bezeichnet. Wir nehmen im folgenden $|\vec{n}| = 1$ an.¹ Durch Überführung in die Darstellung

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I})\vec{n} = \vec{0} \quad (2.2)$$

wird offensichtlich, daß für $\vec{n} \neq \vec{0}$ die Determinante verschwinden muß, was auf das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + \mathbf{I}_B \lambda^2 - \mathbf{II}_B \lambda + \mathbf{III}_B \quad (2.3)$$

bzw. die charakteristische Gleichung

$$P(\lambda) = 0 \quad (2.4)$$

führt. Die Polynom-Koeffizienten lauten

$$\mathbf{I}_B = \text{tr } \mathbf{B}, \quad \mathbf{II}_B = \frac{1}{2} ((\text{tr } \mathbf{B})^2 - \text{tr } \mathbf{B}^2), \quad \mathbf{III}_B = \det \mathbf{B} \quad (2.5)$$

und werden als Hauptinvariante bezeichnet. $\text{tr } \mathbf{B}$ ist die Spur eines Tensors, $\text{tr } \mathbf{B} = b_{ii}$,² und $\det \mathbf{B}$ die Determinante.

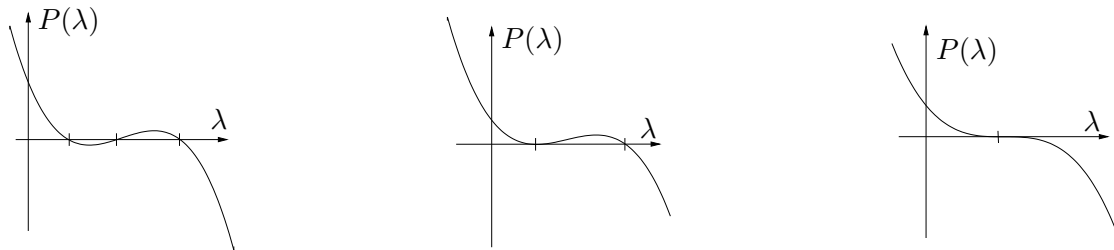


Abbildung 2.1: Verlauf des charakteristischen Polynoms bei drei und zwei Eigenwerten bzw. einem Eigenwert

Die Lösung des Polynoms dritten Grades ist analytisch herleitbar und mit dem Begriff der Cardanischen bzw. auch Cardanoschen Lösungsformel verbunden.³ Unter Voraussetzung eines symmetrischen Tensors, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$, läßt sich zeigen, daß das Polynom (2.3) drei reelle Nullstellen besitzt.⁴ Hierbei können jedoch auch doppelte oder dreifache Nullstellen auftreten (siehe Abb. 2.1). Im Falle rein reeller Nullstellen reduzieren sich die Lösungsformeln auf den sogenannten *casus irreducibilis* mit den Lösungen

$$\lambda_k = \frac{1}{3} \left(\mathbf{I}_B + 2\sqrt{\mathbf{I}_B^2 - 3\mathbf{II}_B} \cos \frac{\beta + (k-1)2\pi}{3} \right), \quad k = 1, \dots, 3 \quad (2.6)$$

$$\beta = \arccos \frac{2\mathbf{I}_B^3 - 9\mathbf{I}_B\mathbf{II}_B + 27\mathbf{III}_B}{2\sqrt{(\mathbf{I}_B^2 - 3\mathbf{II}_B)^3}}. \quad (2.7)$$

Zu jeder dieser Lösungen λ_k , $k = 1, \dots, 3$, kann eine Eigenrichtung \vec{n} gefunden werden, dabei berücksichtigt man die Eigenschaft, daß zu unterschiedlichen Eigenwerten zueinander orthogonale Eigenvektoren existieren:⁵ Bei zwei gleichen Eigenwerten $\lambda_i = \lambda_j \neq \lambda_k$ ($i \neq j \neq k \neq i$)

¹Die Kombination aus dieser Bedingung und den drei Gleichungen (2.1) betrachten ALTENBACH & ALTENBACH [3] als ein nichtlineares Gleichungssystem in vier Variablen (λ, \vec{n}). Das grundlegende Problem ist dabei, daß die Anzahl der Lösungen a priori nicht bekannt ist und eine spezielle Lösung erfolgen muß.

²Wir beschränken uns in der hier gewählten Darstellung auf orthonormale Basissysteme, so daß eine Unterscheidung in ko- und kontravariante Komponenten nicht notwendig ist.

³Eine ausführliche Darstellung zur Herleitung der analytischen Lösung ist zum Beispiel in SMIRNOW [157, S.410 ff.] zu finden. Siehe auch BRONSTEIN & SEMENDJAJEW [23, S.131].

⁴Siehe zum Beispiel SCHADE [142, S.147].

⁵Siehe auch OGDEN [127, S.26].

kann eindeutig ein Eigenvektor \vec{n}_k gefunden werden. Die anderen Eigenvektoren liegen in der sich zu \vec{n}_k normal befindenden Ebene, wobei unendlich viele Lösungen existieren. Üblicherweise legt man \vec{n}_i fest ($\vec{n}_i \cdot \vec{n}_k = 0$) und wählt \vec{n}_j mittels $\vec{n}_j = \vec{n}_i \times \vec{n}_k$.⁶ Bei drei gleichen Eigenwerten, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, ist die Eigenbasis beliebig, so daß beliebige orthonormale Eigenvektoren bestimmt werden können. In diesem Fall kann der Tensor \mathbf{B} nur ein Kugeltensor sein, $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{I}$.

Im folgenden gehen wir davon aus, daß drei orthonormale Eigenvektoren vorliegen. Mit dem Identitätstensor $\mathbf{I} = \sum_{k=1}^3 \vec{n}_k \otimes \vec{n}_k$ läßt sich die Spektraldarstellung des Tensors \mathbf{B} angeben: Unter Verwendung von Gl.(2.1)₁ gilt nämlich

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{I} = \mathbf{B} \sum_{k=1}^3 \vec{n}_k \otimes \vec{n}_k = \sum_{k=1}^3 \mathbf{B}\vec{n}_k \otimes \vec{n}_k = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \vec{n}_k \otimes \vec{n}_k. \quad (2.8)$$

Unter Verwendung des orthogonalen Tensors

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^3 \vec{n}_k \otimes \vec{e}_k = Q_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad \text{mit} \quad Q_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{n}_j \quad (2.9)$$

bzw. des Eigenvektors

$$\vec{n}_i = \mathbf{Q}\vec{e}_i = Q_{ji} \vec{e}_j, \quad (2.10)$$

läßt sich dann der Tensor $\mathbf{B} = b_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ in die Darstellung

$$\mathbf{B}^* = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \vec{e}_k \otimes \vec{e}_k = \mathbf{Q}^T \mathbf{B} \mathbf{Q} \quad (2.11)$$

bezogen auf die ursprüngliche kartesische Basis transformieren. In der numerischen Umsetzung des orthogonalen Tensors $\mathbf{Q} = Q_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ entspricht die Matrix $\mathbf{Q} = [Q_{ij}]$ der spaltenweise Anordnung der normierten Eigenvektoren \mathbf{n}_j , $\mathbf{Q} = [\mathbf{n}_1 \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{n}_3]$.

Spezielle Tensoren, die auch im Rahmen der Arbeit verwendet werden, sollen symmetrisch, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$, und positiv definit sein ($\vec{u} \cdot \mathbf{B}\vec{u} > 0$ für beliebige Vektoren \vec{u} , jedoch $\vec{u} \neq \vec{0}$). Hierbei gilt mit der Darstellung (2.11) $\vec{u} \cdot (\mathbf{Q} (\sum_{k=1}^3 \lambda_k \vec{e}_k \otimes \vec{e}_k) \mathbf{Q}^T) \vec{u} = \sum_{k=1}^3 v_k^2 \lambda_k > 0$ nur dann für beliebige v_k falls $\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, 3$.⁷ Dabei ist die Abkürzung $v_k = (\mathbf{Q}^T \vec{u}) \cdot \vec{e}_k$ eingeführt worden. Wir werden später die Eigenschaft der positiven Definitheit noch ausnutzen. In Tab. 2.1 sind die Möglichkeiten der Eigenwerte nochmals zusammengefaßt, wobei dies um die Eigenschaften orthogonaler Tensoren erweitert wurde ohne auf diese im speziellen einzugehen.⁸

Wir kommen nochmals auf die Invarianten aus Definition (2.5) zu sprechen. Diese erhalten durch Einsetzen der Spektraldarstellung (2.8) die einfache Gestalt

$$\text{I}_{\mathbf{B}} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad \text{II}_{\mathbf{B}} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \quad \text{III}_{\mathbf{B}} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad (2.12)$$

welche für analytische Betrachtungen zum Teil einfachere Beziehungen liefern.

Den Tensor $\mathbf{N}_k = \vec{n}_k \otimes \vec{n}_k$ bezeichnet man als Basisdyade. Diese kann entweder durch explizite Berechnung der Eigenvektoren \vec{n}_k oder unter bestimmten Voraussetzungen auch durch Berechnung des gesamten Tensors \mathbf{N}_k erfolgen. Die Berechnung der einzelnen Eigenvektoren

⁶Die drei Eigenvektoren müssen demnach nicht unbedingt ein Rechtssystem liefern.

⁷Der Verlauf des charakteristischen Polynoms (2.3) hat nur positive Nullstellen. Das Steigungsverhalten $P'(\lambda)|_{\lambda=-\infty} < 0$ sowie $P'(\lambda)|_{\lambda=+\infty} < 0$ ist offensichtlich, so daß das charakteristische Polynom bei positiv definiten Tensoren nur die in Abb. 2.1 dargestellten Verläufe haben kann.

⁸Siehe SCHADE [142, S.169 f.].

Tabelle 2.1: Mögliche Lösungen (Nullstellen) des charakteristischen Polynoms (jeweils für $i \neq j \neq k \neq i$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ ist konjugiert komplex)

Allgemeiner Tensor	(1) $\lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_j \in \mathbb{C}, \lambda_k = \bar{\lambda}_j \in \mathbb{C}$	
	(2) $\lambda_i \neq \lambda_j \neq \lambda_k \neq \lambda_i,$	$\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{R}$
	(3) $\lambda_i = \lambda_j \neq \lambda_k,$	$\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{R}$
	(4) $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k,$	$\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{R}$
Symmetrische Tensoren	(1) $\lambda_i \neq \lambda_j \neq \lambda_k \neq \lambda_i,$	$\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{R}$
	(2) $\lambda_i = \lambda_j \neq \lambda_k,$	$\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{R}$
	(3) $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k,$	$\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{R}$
Positiv definite und symmetrische Tensoren	(1) $\lambda_i \neq \lambda_j \neq \lambda_k \neq \lambda_i,$	$\lambda_i > 0, \lambda_i, \lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{R}$
	(2) $\lambda_i = \lambda_j \neq \lambda_k,$	$\lambda_i > 0, \lambda_i, \lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{R}$
	(3) $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k,$	$\lambda_i > 0, \lambda_i, \lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{R}$
Orthogonale Tensoren	(1) $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k = \pm 1$	$\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{R}$
	(2) $\lambda_i = \lambda_j = \pm 1, \lambda_k = \mp 1$	$\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{R}$
	(3) $\lambda_i = \pm 1, \lambda_j \in \mathbb{C}, \lambda_k = \bar{\lambda}_j$	

\vec{n}_k erfolgt aus den homogenen Gleichungssystemen $[\mathbf{B} - \lambda_k \mathbf{I}] \mathbf{n}_k = \mathbf{0}$, wobei die Koeffizientenmatrix $\mathbf{B} - \lambda_k \mathbf{I}$ mindestens den Rangabfall 1 hat. In den Tabellen A.1 und A.2 des Anhanges ist ein möglicher Algorithmus zur Berechnung der Eigenvektoren abgebildet. Hat man die Eigenvektoren \vec{n}_k bestimmt, so sind auch die Eigendyaden $\vec{n}_k \otimes \vec{n}_k$ bekannt.

Wir kommen im folgenden auf die direkte Bestimmung der Basisdyade $\mathbf{N}_k = \vec{n}_k \otimes \vec{n}_k$ zu sprechen.⁹ Diese läßt sich ohne explizite Berechnung der Eigenvektoren \vec{n}_k berechnen, was sich nicht nur als ein theoretisch interessantes Ergebnis, sondern im Hinblick auf eine schnellere Berechnung von speziellen Tensorfunktionen, wie z.B. $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2}$, $\mathbf{E}^{(0)} = \ln \mathbf{U}$, etc., als effizienter erweist.¹⁰ Hierzu betrachten wir eine isotrope Tensorfunktion¹¹ $\mathbf{f}(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^3 f(\lambda_k) \vec{n}_k \otimes \vec{n}_k$, die sich in der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{B}) = \alpha_1 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{B} + \alpha_3 \mathbf{B}^2 = \sum_{k=1}^3 f(\lambda_k) \vec{n}_k \otimes \vec{n}_k \quad (2.13)$$

darstellen läßt. $\alpha_k, k = 1, \dots, 3$, sind wiederum Funktionen der drei Hauptinvarianten (2.5) bzw. wegen Gl.(2.12) Funktionen der Eigenwerte $\lambda_j, j = 1, \dots, 3$. Wir gehen nun davon aus, daß der Tensor \mathbf{B} positiv definit ist. Da \mathbf{B}^2 und $\mathbf{f}(\mathbf{B})$ die gleichen Eigenrichtungen wie \mathbf{B} haben¹², resultieren die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} f(\lambda_1) &= \alpha_1 + \alpha_2 \lambda_1 + \alpha_3 \lambda_1^2, \\ f(\lambda_2) &= \alpha_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_2^2, \\ f(\lambda_3) &= \alpha_1 + \alpha_2 \lambda_3 + \alpha_3 \lambda_3^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dabei gehen wir zunächst davon aus, daß die Eigenwerte voneinander verschieden sind. Gesucht sind diejenigen Funktionen $\alpha_k(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), k = 1, \dots, 3$, die die Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{B})$ als eine isotrope Tensorfunktion darstellen. Die Gln.(2.14) repräsentieren im Hauptachsensystem ein lineares

⁹Siehe TING [160], MORMAN [121], SIMO & TAYLOR [154], MIEHE [115].

¹⁰MIEHE [118].

¹¹Eine Tensorfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{B})$ ist isotrop, falls $\mathbf{Q} \mathbf{f}(\mathbf{B}) \mathbf{Q}^T = \mathbf{f}(\mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{Q}^T)$ für alle orthogonalen Tensoren \mathbf{Q} erfüllt ist.

¹²Der Beweis, daß bei einer isotropen Tensorfunktion die Eigenrichtungen von $\mathbf{f}(\mathbf{B})$ und \mathbf{B} identisch sind, ist zum Beispiel in HAUPT [74, S.334] bzw. TRUESDELL & NOLL [164, S.32] aufgeführt.

Gleichungssystem der Form

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ f(\lambda_3) \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

mit der Lösung

$$\alpha_1 = \sum_{k=1}^3 f(\lambda_k) \frac{\text{III}_{\mathbf{B}} \lambda_k^{-1}}{D_k}, \quad \alpha_2 = \sum_{k=1}^3 f(\lambda_k) \frac{\mathbf{I}_{\mathbf{B}} - \lambda_k}{D_k}, \quad \alpha_3 = \sum_{k=1}^3 f(\lambda_k) \frac{1}{D_k} \quad (2.16)$$

und den Abkürzungen

$$D_k = \prod_{i=1 \setminus k}^3 (\lambda_i - \lambda_k) = 2\lambda_k^2 - \lambda_k \mathbf{I}_{\mathbf{B}} + \text{III}_{\mathbf{B}} \lambda_k^{-1}, \quad k = 1, \dots, 3. \quad (2.17)$$

Die Inverse der Koeffizientenmatrix aus Gl.(2.15), wir bezeichnen sie im Nachhinein mit \mathbf{A} , lautet hierbei

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \lambda_2 \lambda_3^2 - \lambda_3 \lambda_2^2 & \lambda_3 \lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3^2 & \lambda_1 \lambda_2^2 - \lambda_2 \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \\ \lambda_3 - \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\text{III}_{\mathbf{B}} \lambda_1^{-1}}{D_1} & \frac{\text{III}_{\mathbf{B}} \lambda_2^{-1}}{D_2} & \frac{\text{III}_{\mathbf{B}} \lambda_3^{-1}}{D_3} \\ \frac{\lambda_1 - \mathbf{I}_{\mathbf{B}}}{D_1} & \frac{\lambda_2 - \mathbf{I}_{\mathbf{B}}}{D_2} & \frac{\lambda_3 - \mathbf{I}_{\mathbf{B}}}{D_3} \\ \frac{1}{D_1} & \frac{1}{D_2} & \frac{1}{D_3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

mit $\det \mathbf{A} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)$. Demnach berechnet sich die isotrope Tensorfunktion (2.13) gemäß

$$\mathbf{f}(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^3 f(\lambda_k) (\text{III}_{\mathbf{B}} \lambda_k^{-1} \mathbf{I} + (\lambda_k - \mathbf{I}_{\mathbf{B}}) \mathbf{B} + \mathbf{B}^2) D_k^{-1}. \quad (2.19)$$

Durch den Vergleich zu $\mathbf{f}(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^3 f(\lambda_k) \mathbf{N}_k$ wird nun offensichtlich, daß sich die Basisdyaden \mathbf{N}_k als isotrope Tensorfunktionen darstellen lassen:

$$\mathbf{N}_k = \vec{n}_k \otimes \vec{n}_k = (\text{III}_{\mathbf{B}} \lambda_k^{-1} \mathbf{I} + (\lambda_k - \mathbf{I}_{\mathbf{B}}) \mathbf{B} + \mathbf{B}^2) D_k^{-1} \quad (2.20)$$

ANMERKUNG 2.1

Es ist hierbei interessant festzustellen, daß dieses Ergebnis schon einen älteren Ursprung hat und als "Theorem von Sylvester" bezeichnet wird (BOWEN & WANG [20, S.144]). Danach wird die Eigendyade gemäß

$$\mathbf{N}_k = \frac{\prod_{i=1 \setminus k}^3 (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{B})}{D_k}, \quad (2.21)$$

berechnet, eine Darstellung, die auch in MIEHE [115] zu finden ist. \square

Wir kommen nunmehr auf doppelte, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, und dreifache Eigenwerte, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, zu sprechen.¹³ Zur Bestimmung der Eigendyaden bei doppelten Eigenwerten, siehe MORMAN [121, Gl.(15)], geht man von der Spektraldarstellung (2.8)

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \vec{n}_k \otimes \vec{n}_k = \lambda_1 \mathbf{I} + (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{n}_3 \otimes \vec{n}_3 \quad (2.22)$$

für $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ aus. Die isotrope Tensorfunktion (2.13) lautet daher

$$\mathbf{f}(\mathbf{B}) = f(\lambda_1) \mathbf{I} + (f(\lambda_3) - f(\lambda_1)) \vec{n}_3 \otimes \vec{n}_3 \quad (2.23)$$

bzw. unter Verwendung von \mathbf{N}_3 aus Gl.(2.20)

$$\mathbf{N}_3 = \vec{n}_3 \otimes \vec{n}_3 = (\text{III}_{\mathbf{B}} \lambda_3^{-1} \mathbf{I} + (\lambda_3 - \mathbf{I}_{\mathbf{B}}) \mathbf{B} + \mathbf{B}^2) D_3^{-1} \quad (2.24)$$

sowie $D_3 = 2\lambda_3^2 - \lambda_3 \mathbf{I}_{\mathbf{B}} + \text{III}_{\mathbf{B}} \lambda_3^{-1}$, $D_1 = D_2 = 0$.¹⁴ Die Basisdyaden \mathbf{N}_1 und \mathbf{N}_2 sind jetzt nicht mehr eindeutig berechenbar. Um auf die Lösung von MORMAN [121] der Gleichung (2.24) zu gelangen, gehen wir folgendermaßen vor. Wenn wir die Basisdyade (2.24) in die Beziehung (2.23) einsetzen, so resultieren in der Darstellung (2.13) bzw. (2.14) die Koeffizienten

$$\alpha_1 = \frac{f(\lambda_1) \lambda_3^2 + f(\lambda_3) \lambda_1^2 - 2f(\lambda_1) \lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{2(f(\lambda_1) - f(\lambda_3)) \lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2}, \quad \alpha_3 = \frac{f(\lambda_3) - f(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2}. \quad (2.25)$$

Da das Gleichungssystem (2.15) wegen $\lambda_1 = \lambda_2$ linear abhängige Zeilen hat, $f(\lambda_1) = f(\lambda_2)$, ist ein α_k frei vorgebar. Wählt man dasjenige α_3 aus Gl.(2.25) und löst die erste und dritte Gleichung in Gl.(2.15), so folgt das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 = \frac{f(\lambda_3) - f(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_3) \end{array} \right\},$$

dessen Lösung wiederum (2.25)_{1,2} liefert; was zu zeigen war. Die willkürliche Wahl eines Koeffizienten α_k kann natürlich zu einem unstetigen $\alpha_k(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ führen, selbst wenn $\mathbf{f}(\mathbf{B})$ stetig ist, siehe TRUESDELL & NOLL [164, S.33] und SERRIN [149].

Wir bemerken abschließend, daß im Falle von drei gleichen Eigenwerten, $\lambda \equiv \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$,

$$\mathbf{B} = \lambda \mathbf{I} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{f}(\mathbf{B}) = f(\lambda) \mathbf{I} \quad (2.26)$$

gilt. In diesem Fall werden $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ gewählt und die einzige resultierende Gleichung aus Gl.(2.15) aufgelöst.

Eines der wichtigsten Resultate des Eigenwertproblems, welches aufgeführt werden muß, ist der Satz von Cayley-Hamilton, nach dem der Tensor seine eigene charakteristische Gleichung erfüllt:¹⁵

$$-\mathbf{B}^3 + \mathbf{I}_{\mathbf{B}} \mathbf{B}^2 - \text{II}_{\mathbf{B}} \mathbf{B} + \text{III}_{\mathbf{B}} \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

¹³Da die Reihenfolge der Eigenwerte beliebig ist, soll der Ausdruck $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ alle möglichen Kombinationen von doppelten Eigenwerten repräsentieren.

¹⁴Für λ_3 berechnet sich der Ausdruck $\text{III}_{\mathbf{B}} \lambda_3^{-1}$ natürlich gemäß $\lambda_1 \lambda_2$, was bei singulären Matrizen zu berücksichtigen ist.

¹⁵Zum Beweis siehe zum Beispiel OGDEN [129, S.25].

Hieraus resultieren eine Reihe von wichtigen Beziehungen, wie zum Beispiel eine explizite Darstellung der Inversen eines Tensors (insofern die Determinante verschieden von Null ist) sowie die Adjungierte und die Determinante des Tensors

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\text{III}_{\mathbf{B}}} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{I}_{\mathbf{B}}\mathbf{B} + \text{II}_{\mathbf{B}}\mathbf{I}) = \frac{1}{\text{III}_{\mathbf{B}}} (\text{adj } \mathbf{B})^T, \quad (2.28)$$

$$\text{adj } \mathbf{B} = (\mathbf{B}^T)^2 - \mathbf{I}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T + \text{II}_{\mathbf{B}}\mathbf{I}, \quad (2.29)$$

$$\det \mathbf{B} = \frac{1}{3} (\text{tr } \mathbf{B}^3 - \mathbf{I}_{\mathbf{B}}^3 + 3\text{II}_{\mathbf{B}}\text{II}_{\mathbf{B}}). \quad (2.30)$$

Auf diese Beziehung wird später noch zurückgegriffen. Damit haben wir die wichtigsten Grundlagen abgeschlossen.

2.1.2 Aspekte der Numerik des Eigenwertproblems

Wir kommen auf die Problematik der numerischen Berechnung der Eigenwerte λ_k und den Eigenvektoren \vec{n}_k bzw. der Eigendyaden \mathbf{N}_k zu sprechen. In Tab. 2.2 ist die Berechnung der Eigenwerte gemäß den Gleichungen (2.6) und (2.7) dargestellt. Hierbei sind einige Sicherheitsabfragen für eine robuste Berechnung implementiert.¹⁶ Dem Autor sind lediglich die Arbeiten von FRANCA [49] und SIMO & HUGHES [151] bekannt, die Probleme bei der numerischen Berechnung der Eigenwerte ansprechen. In [49] liegt die Zielsetzung in der Berechnung der Wurzel eines positiv definiten symmetrischen Tensors $\mathbf{B}^{1/2}$. Der Autor spricht von einer numerisch sensitiven Berechnung und gibt ein Verfahren an, bei welchem lediglich ein Eigenwert, nämlich der maximale Eigenwert, berechnet wird.¹⁷ In SIMO & HUGHES [151, S.244] wird angedeutet, daß die Berechnung der Eigenwerte (2.6) für Tensoren $\mathbf{B} \approx \mathbf{I}$ zu sensitiven Lösungen führen kann und schlägt daher eine Umwandlung der arccos-Funktion aus Gl.(2.7) in eine arctan-Funktion vor.¹⁸ Diese Aussage muß jedoch erweitert und näher analysiert werden. Daher erörtern wir die Problematik der Eigenwert- und auch der Eigenvektorberechnung und betrachten im folgenden die Sensitivität der Berechnung.

Zur Untersuchung der Nullstellenberechnung von Polynomen kann einerseits eine Störungsberechnung herangezogen, siehe WILKINSON [171, Ch.2] oder SCHWARZ ET AL. [145, S.106 ff.], oder eine Rundungsfehleranalyse, siehe [171, Ch.3], durchgeführt werden. Wir beschränken uns hier kurz auf einer Störungsuntersuchung und suchen nach denjenigen Fällen, bei denen kleinste Störungen des Tensors \mathbf{B} , bzw. seiner Invarianten $\text{I}_{\mathbf{B}}$, $\text{II}_{\mathbf{B}}$ und $\text{III}_{\mathbf{B}}$, zu großen numerischen Fehlern führen können. Um die Sensitivität der Eigenwertberechnung zu untersuchen, wird im Anhang A.1.2 die Änderung

$$D_{\mathbf{B}} \lambda_k(\text{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}), \text{II}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}), \text{III}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}))[\mathbf{H}]$$

berechnet, wobei \mathbf{H} eine Störung des Tensors \mathbf{B} definiert. Diese Größe entspricht dem ‘‘Hauptteil’’ der Änderung von \mathbf{B} ,

$$\lambda_k(\mathbf{B} + \mathbf{H}) = \lambda_k(\mathbf{B}) + D_{\mathbf{B}} \lambda_k(\mathbf{B})[\mathbf{H}] + \dots$$

¹⁶Hier ist auch der Vorschlag zur Minimierung der Rundungsfehler von PRESS ET AL. [133, S.179] berücksichtigt worden.

¹⁷Die in FRANCA [49] untersuchten Beispiele liegen jedoch für Streckungen λ_k des rechten Strecktensors $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2}$ vor, die bei realen Problemstellungen nicht auftreten.

¹⁸Hierbei geht es um die Berechnung des rechten oder linken Strecktensors \mathbf{U} bzw. \mathbf{V} aus Gl.(3.5), die nahe der undeformierten Konfiguration ungefähr dem Einheitstensor entsprechen. Es gilt nämlich $\arccos x = \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Tabelle 2.2: Eigenwertberechnung mit Hilfe der arccos-Funktion

Gegeben: $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	
BERECHNE	
$\mathbf{I}_{\mathbf{B}} = \text{tr } \mathbf{B}$	
$\mathbf{II}_{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_{\mathbf{B}}^2 - \text{tr } \mathbf{B}^2)$	
$\mathbf{III}_{\mathbf{B}} = \det \mathbf{B}$	
$p = \mathbf{I}_{\mathbf{B}}^2 - 3\mathbf{II}_{\mathbf{B}}$	
IF $(p < 0)$ THEN $p = 0$	
BERECHNE	
$s = \sqrt{p}$	
IF $(s < \text{tol})$ THEN $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\mathbf{I}_{\mathbf{B}}}{3}$ RETURN	
BERECHNE	
$q = 2\mathbf{I}_{\mathbf{B}}^3 - 9\mathbf{I}_{\mathbf{B}}\mathbf{II}_{\mathbf{B}} + 27\mathbf{III}_{\mathbf{B}}$	
IF $(q < \text{tol})$ THEN $q = 0$	
BERECHNE	
$t = \frac{q}{2s^3}$	
IF $(t > 1)$ THEN $t = \text{sign}(t)$	
BERECHNE	
$\beta = (\arccos t)/3$	
$r = \frac{2}{3}s$	
$\lambda_k = \frac{\mathbf{I}_{\mathbf{B}}}{3} + r \cos\left(\beta + \frac{2\pi}{3}(k-1)\right)$ für $k = 1, 2, 3$	

Wir erhalten als Ergebnis, gemäß den Beziehungen (A.17) und (A.18), daß im Falle von

$$2\mathbf{I}_{\mathbf{B}}^3 - 9\mathbf{I}_{\mathbf{B}}\mathbf{II}_{\mathbf{B}} + 27\mathbf{III}_{\mathbf{B}} \approx 2\sqrt{(\mathbf{I}_{\mathbf{B}}^2 - 3\mathbf{II}_{\mathbf{B}})^3} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{I}_{\mathbf{B}}^2 - 3\mathbf{II}_{\mathbf{B}} \approx 0 \quad (2.31)$$

kleinste Änderung des Tensors \mathbf{B} dazu führen, daß die Eigenwerte unbegrenzt wachsen können. Die zweite Beziehung in Gl.(2.31) ist identisch Null, falls der Tensor ein Kugeltensor ist, d.h. in der Nähe von "hydrostatischen" Zuständen führt die Eigenwertberechnung zu Schwierigkeiten und nicht nur in der Nähe zum Einheitstensor.¹⁹ Um dies zu zeigen betrachten wir die zweite Invariante des Deviators. Es gilt nämlich für einen deviatorischen Tensor $\mathbf{B}^D = \mathbf{B} - \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{B})\mathbf{I}$

$$J_2(\mathbf{B}) = \frac{1}{2}((\text{tr } \mathbf{B}^D)^2 - \mathbf{B}^D \cdot \mathbf{B}^D) = -\frac{1}{2}\mathbf{B}^D \cdot \mathbf{B}^D = -\frac{1}{3}(\mathbf{I}_{\mathbf{B}}^2 - 3\mathbf{II}_{\mathbf{B}}) \leq 0, \quad (2.32)$$

¹⁹Für $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{I}$ gilt nämlich $\mathbf{I}_{\mathbf{B}}^2 - 3\mathbf{II}_{\mathbf{B}} = 0$.

woraus wegen $\mathbf{B}^D \cdot \mathbf{B}^D \geq 0$ ebenfalls $\mathbf{I}_{\mathbf{B}}^2 \geq 3\mathbf{II}_{\mathbf{B}}$ folgt. Dies impliziert, daß bei einem Tensor, der sehr nahe einem Kugeltensor ist, also drei sehr ähnliche Eigenwerte hat, numerische Schwierigkeiten auftreten können.

Der Fall (2.31)₁ tritt im Falle von zwei sehr nahe gelegenen Eigenwerten auf, $\lambda_i \approx \lambda_j \neq \lambda_k$. Um dies zu zeigen, betrachten wir für $\lambda_i = \lambda_j$ zunächst die rechte Seite von (2.31)₁,

$$2(\mathbf{I}_{\mathbf{B}}^2 - 3\mathbf{II}_{\mathbf{B}})^{3/2} = 2(\lambda_k - \lambda_i)^3 = 2(\lambda_k^3 - 3\lambda_k^2\lambda_i + 3\lambda_k\lambda_i^2 - \lambda_i^3). \quad (2.33)$$

Die linke Seite berechnet sich mit

$$\mathbf{I}_{\mathbf{B}} = 2\lambda_i + \lambda_k \quad \rightarrow \quad \mathbf{I}_{\mathbf{B}}^3 = 8\lambda_i^3 + 12\lambda_i^2\lambda_k + 6\lambda_i\lambda_k^2 + \lambda_k^3 \quad (2.34)$$

$$\mathbf{II}_{\mathbf{B}} = \lambda_i^2 + 2\lambda_i\lambda_k \quad \rightarrow \quad \mathbf{I}_{\mathbf{B}}\mathbf{II}_{\mathbf{B}} = 2\lambda_i^3 + 5\lambda_i^2\lambda_k + 2\lambda_i\lambda_k^2 \quad (2.35)$$

$$\mathbf{III}_{\mathbf{B}} = \lambda_i^2\lambda_k \quad (2.36)$$

zu

$$2\mathbf{I}_{\mathbf{B}}^3 - 9\mathbf{I}_{\mathbf{B}}\mathbf{II}_{\mathbf{B}} + 27\mathbf{III}_{\mathbf{B}} = 2(\lambda_k^3 - 3\lambda_k^2\lambda_i + 3\lambda_k\lambda_i^2 - \lambda_i^3), \quad (2.37)$$

welche identisch ist mit Gl.(2.33) ist. Wir folgern hieraus, daß ebenfalls bei zwei sehr nahe beieinanderliegenden Eigenwerten Schwierigkeiten der Eigenwertberechnung mittels analytischer Vorgehensweise auftreten.

Wir erwähnen noch, daß in Gl.(2.31)₁ ein Zusammenhang zur dritten Invariante $J_3(\mathbf{B})$ des Deviators vorliegt. Es gilt unter Zuhilfenahme der Beziehung²⁰

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} + (\text{adj } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot (\text{adj } \mathbf{B}) + \det \mathbf{B} \quad (2.38)$$

mit Gl.(2.29)

$$J_3(\mathbf{B}) = \det \mathbf{B}^D = \frac{1}{27} (2\mathbf{I}_{\mathbf{B}}^3 - 9\mathbf{I}_{\mathbf{B}}\mathbf{II}_{\mathbf{B}} + 27\mathbf{III}_{\mathbf{B}}) \quad (2.39)$$

und damit der Zusammenhang $27J_3 \approx 2(-3J_2)^{3/2}$.

Auch die Verwendung der arctan-Funktion, wie dies von SIMO & HUGHES [151, S.244] vorgeschlagen wird, kann zu Ungenauigkeiten führen. Eine modifizierte Version des Verfahrens ist in Tab. 2.3 aufgeführt.²¹ Durch den Austausch der Funktionen arccos mit arctan ändert sich an der Ungenauigkeitsproblematik fast identischer Eigenwerte nichts. Wir folgern daher, daß bei näherungsweise doppelten oder dreifachen Eigenwerten immer mit numerischen Ungenauigkeiten zu rechnen ist.

Die numerische Sensitivität der geschlossenen Lösung von symmetrischen Eigenwertproblemen mit Hilfe des charakteristischen Polynoms ist bekannt.²² Als überlegenswerte Alternative bieten sich iterative Lösungsmethoden an, wie sie in mathematischen Programmibliotheken behandelt werden, die als erheblich robuster gelten.

BEISPIEL 2.1

In einem Beispiel mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 + \frac{\epsilon}{4} & \frac{\sqrt{3}\epsilon}{4} \\ & \frac{\sqrt{3}\epsilon}{4} & 1 + \frac{3\epsilon}{4} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

²⁰Siehe DE BOER [36, S.81].

²¹Die in [151] aufgeführte Version war für einige Berechnungen im Beispiel 2.1 nicht lauffähig.

²²Siehe zum Beispiel SCHWARZ ET AL. [145, S.106 ff.], KIELBASINSKI & SCHWETLICK [95, S.354 ff.].

Tabelle 2.3: Eigenwertberechnung mit Hilfe der arctan-Funktion

Gegeben: $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	
BERECHNE	
	$\mathbf{I}_{\mathbf{B}} = \text{tr } \mathbf{B}$
	$\mathbf{II}_{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_{\mathbf{B}}^2 - \text{tr } \mathbf{B}^2)$
	$\mathbf{III}_{\mathbf{B}} = \det \mathbf{B}$
	$p = \mathbf{II}_{\mathbf{B}} - \frac{1}{3}\mathbf{I}_{\mathbf{B}}^2$
	$q = -\frac{2}{27}\mathbf{I}_{\mathbf{B}}^3 + \frac{1}{3}\mathbf{I}_{\mathbf{B}}\mathbf{II}_{\mathbf{B}} - \mathbf{III}_{\mathbf{B}}$
IF	$(p > -\text{tol})$ THEN $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\mathbf{I}_{\mathbf{B}}}{3}$ RETURN
BERECHNE	
	$t = \frac{-q}{2\sqrt{(-p)^3/27}}$
IF	$(t > 1)$ THEN $t = \text{sign}(t)$
BERECHNE	
	$s = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$
	$r = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$
	$\beta = \frac{1}{3} \arctan r$
	$\lambda_k = \frac{\mathbf{I}_{\mathbf{B}}}{3} + s \cos\left(\beta + \frac{2\pi}{3}(k-1)\right)$ für $k = 1, 2, 3$

soll die Sensitivität für unterschiedliche Störungsfaktoren ϵ studiert werden. Wir erhalten die exakten Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1 + \epsilon$ sowie die Eigenvektoren

$$\mathbf{n}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{n}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{Bmatrix}$$

für $\epsilon \neq 0$. Wir verwenden die zwei Verfahren aus den Tab. 2.2 und 2.3 zur Berechnung der Eigenwerte sowie vergleichend ein iteratives Verfahren.²³ Die Eigenwerte lassen sich beliebig nahe zur Einheitsmatrix durch hinreichend kleines ϵ wählen.²⁴ Des weiteren treten doppelte Eigenwerte für $\epsilon \neq 0$ auf. Wir erhalten für verschiedene Störungen ϵ , die in Tab. 2.4 dargestellten Eigenwerte. Die iterative Methode liefert bei diesem Beispiel immer die genauesten Eigenwerte. Die in Tab. 2.2 und 2.3 vorgestellten Algorithmen geben für $\epsilon = 10^{-3}$ noch sehr gute Ergebnisse wieder. Die Genauigkeit der Berechnung nimmt hingegen sehr stark für kleiner werdende Störparameter

²³Gewählt wird hier die doppeltgenaue Version der LAPACK-Routine SSYEV aus ANDERSON ET AL. [4, S.211].

²⁴Die Berechnungen erfolgen auf einem PENTIUM III-Rechner (600 MHz) unter LINUX sowie dem GNU-FORTRAN 77-Compiler g77 mit doppelter Genauigkeit.

Tabelle 2.4: Eigenwertberechnung unterschiedlicher Verfahren

$\epsilon = 10^{-3}$	λ_1	λ_2	λ_3
Exakt	0.1000000000000000E+01	0.1000000000000000E+01	0.1001000000000000E+01
arccos-Methode	0.999999999997780E+00	0.999999999997780E+00	0.1001000000000445E+01
arctan-Methode	0.999999999998613E+00	0.999999999998613E+00	0.1001000000000278E+01
LAPACK-Routine	0.1000000000000000E+01	0.1000000000000000E+01	0.1001000000000000E+01
$\epsilon = 10^{-5}$	λ_1	λ_2	λ_3
Exakt	0.1000000000000000E+01	0.1000000000000000E+01	0.1000010000000000E+01
arccos-Methode	0.9999975598691122E+00	0.1000003333333333E+01	0.1000009106797554E+01
arctan-Methode	0.9999976429858176E+00	0.1000003170570670E+01	0.1000009186443512E+01
LAPACK-Routine	0.1000000000000000E+01	0.1000000000000000E+01	0.1000010000000000E+01
$\epsilon = 10^{-7}$	λ_1	λ_2	λ_3
Exakt	0.1000000000000000E+01	0.1000000000000000E+01	0.1000000100000000E+01
arccos-Methode	0.999999718730994E+00	0.1000000033333333E+01	0.1000000094793567E+01
arctan-Methode	0.1000000033333333E+01	0.1000000033333333E+01	0.1000000033333333E+01
LAPACK-Routine	0.999999999999999E+00	0.1000000000000000E+01	0.1000000100000000E+01

ϵ ab. Die in Tab. 2.3 dargestellte arctan-Methode berechnet drei gleiche Eigenwerte bei einer gewählten Toleranz von $tol = 10^{-14}$. \square

Die Berechnung der Eigenvektoren gemäß der Vorgehensweise aus Tab. A.2 erweist sich nur bedingt robust, da man von den fehlerhaften Eigenwerten die Differenz bildet, um mehrfache Eigenwerte zu detektieren. Diese Differenz muß kleiner einer vorgegebenen Toleranz sein. Ist die Toleranz zu klein, so können erhebliche Ungenauigkeiten in den Eigenvektoren auftreten und zwar derart, daß für $\mathbf{B}^* = \mathbf{Q}^T \mathbf{B} \mathbf{Q}$ keine Diagonalmatrix resultiert.²⁵ Ist hingegen tol zu groß, so wird ein dreifacher Eigenwert angezeigt. Die Genauigkeit hängt im wesentlichen auch von den Eigenwerten ab.

Neben der Gegenüberstellung der Genauigkeit, die natürlich mittels analytischer Betrachtungen²⁶ untersucht werden können, kommen wir zu einem Effizienzvergleich bezüglich der Rechengeschwindigkeit.

BEISPIEL 2.2

Wir wählen als Beispiel wieder die Matrix (2.40).²⁷ Da bekanntlich die iterative Lösung für sehr nah beieinanderliegende Eigenwerte wächst, wählen wir wieder verschiedene Parameter ϵ . In einer Finite-Elemente Berechnung werden Eigenwertprobleme symmetrischer Matrizen aus $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ sehr häufig durchgeführt. Wir lösen daher 20.000.000 mal das Eigenwertproblem. Tab. 2.5 zeigt die Rechenzeiten, wobei wir die Eigenwertberechnung mit (a) und die Kombination aus Eigenwert- und Eigenvektorberechnung mit (b) kennzeichnen. Als geschlossene Lösung wird das Verfahren aus Tab. 2.3 sowie Tab. A.1 bezeichnet. Die numerische Lösung ist mit der LAPACK-Routine DSYEV durchgeführt worden. Es wird offensichtlich, daß die geschlossene Lösung ungefähr doppelt so schnell wie die iterative Lösungsmethode ist. Dies gilt sowohl für die reine Eigenwertberechnung als auch für die Kombination aus Eigenwert- und Eigenvektorberechnung. Die bei $\epsilon = 10^{-7}$ auftretende sehr geringe Rechenzeit der geschlossenen Lösung hängt damit zusammen, daß das Verfahren eine dreifache Nullstelle herausgefunden hat und damit nur sehr

²⁵D.h. es treten Nebendiagonalterme in der Größenordnung der Eigenwerte auf.

²⁶Siehe zum Beispiel KIELBASINSKI & SCHWETLICK [95, S.354 ff.], SCHWARZ ET AL. [145, S.106 ff.].

²⁷Die Berechnungen sind in der in Abschnitt A.2 eingeführten Speichertechnik für 3×3 -Matrizen durchgeführt worden. Bei der iterativen Lösungsmethode ist nur die obere Dreiecksmatrix bei jeder Berechnung erzeugt worden.

Tabelle 2.5: Rechenzeitvergleich bei geschlossener sowie iterativer Lösung der Eigenwertberechnung bzw. (a) Eigenwertberechnung und (b) Eigenwert- und Eigenvektorberechnung

		$\epsilon = 10^{-3}$	$\epsilon = 10^{-5}$	$\epsilon = 10^{-7}$
Geschlossene Lösung	(a)	52 [s]	59 [s]	22 [s]
	(b)	1.21 [min]	1.24 [min]	26 [s]
Iterative Lösung	(a)	1.48 [min]	1.48 [min]	1.48 [min]
	(b)	2.55 [min]	2.55 [min]	3.00 [min]

wenige Rechenoperationen benötigt. \square

Wir betrachten im folgenden die Sensitivität der Eigendyade (2.21) bzw. der Berechnung spezieller Tensorfunktionen wie z.B. $\ln \mathbf{B}$, $\exp \mathbf{B}$ oder $\mathbf{B}^{1/2}$. Auch hier können Schwierigkeiten bei nahezu gleichen (doppelten oder dreifachen) Eigenwerten auftreten, da dann unterschiedliche Fallunterscheidungen getroffen werden müssen, die wiederum von vorgegebenen Toleranzen abhängen. Für $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$ berechnet man die Funktion mit Hilfe von Gl.(2.19) bzw. (2.20). Bei doppelten Eigenwerten $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ benötigt man lediglich N_3 , siehe Gln.(2.23) und (2.24) und für drei gleiche Eigenwerte muß keine Eigendyade berechnet werden. In Tab. 2.6 ist eine mögliche Vorgehensweise vorgeschlagen.

BEISPIEL 2.3

Wir betrachten wieder Beispiel 2.1 und suchen nach $\mathbf{f}(\mathbf{B}) = \exp \mathbf{B} = \sum_{k=1}^3 (\exp \lambda_k) \vec{n}_k \otimes \vec{n}_k$ mit der analytischen Lösung

$$\mathbf{f}(\mathbf{B}) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4e & & \\ & e(3 + e^\epsilon) & \sqrt{3}e(e^\epsilon - 1) \\ & \sqrt{3}e(e^\epsilon - 1) & e(1 + 3e^\epsilon) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Für $\epsilon = 10^{-8}$ und $\text{tol} = 10^{-10}$ aus Tab. 2.6 hat die Lösung unter Verwendung der arccos-Auswertung der Eigenwertberechnung, siehe Tab. 2.2, nichts mehr mit der analytischen Lösung zu tun. Das Verfahren reagiert sehr instabil. Daher muß tol größerer Werte annehmen, die wiederum dazu führen, daß $\mathbf{f}(\mathbf{B})$ keine Nebendiagonalterme aufweist und mit $\mathbf{f}(\mathbf{B})$ aus Gl.(2.41) nicht mehr übereinstimmt.

Als letztes behandeln wir wieder einen Rechenzeitvergleich. Für $\epsilon = 10^{-3}$ dauert die Berechnung von $\mathbf{f}(\mathbf{B}) = \exp \mathbf{B}$ für \mathbf{B} aus Gl.(2.40) 1.51 min bei Ausnutzung der Eigenvektorberechnung nach Tab. A.1, $\mathbf{N}_k = \mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^T$, und lediglich 1.16 min mit dem Verfahren aus Tab. (2.6). Die Eigenwerte sind dabei jeweils mit der arccos-Methode aus Tab. 2.2 berechnet worden. Auch hier verwenden wir wieder 20 Mio. Berechnungen. Es zeigt sich, daß die direkte Eigendyadenberechnung nach Tab. 2.6 schneller ist.²⁸ \square

MIEHE [115] schlug zur Vermeidung der vielen Fallunterscheidungen eine Störungstechnik im Falle mehrfacher Eigenwerte vor, bei welcher die berechneten Eigenwerte durch einen Störungsparameter δ geändert werden, $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1(1+\delta)$, $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2(1-\delta)$ und $\tilde{\lambda}_3 = \lambda_3/((1+\delta)(1-\delta))$.²⁹

²⁸Dieses Ergebnis differiert zu den Resultaten von MIEHE [118], welcher hierzu ein unterschiedliches Ergebnis herausfand. Daher kommt es im wesentlichen auf die verwendete Implementation an.

²⁹Die gewählte Störung führt dazu, daß die Determinante des Tensors erhalten bleibt, da $\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ erfüllt ist.

Tabelle 2.6: Berechnung von isotropen Tensorfunktionen in Spektraldarstellung

Gegeben $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	
BERECHNE	$d_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \quad d_2 = \lambda_2 - \lambda_3, \quad d_3 = \lambda_3 - \lambda_1$
Dreifache Eigenwerte	
IF	$(d_1 < \text{tol}) \quad \text{und} \quad (d_2 < \text{tol}) \quad \text{und} \quad (d_3 < \text{tol})$
THEN	$\mathbf{f} = f(\lambda_1)\mathbf{I}$ RETURN
BERECHNE	\mathbf{B}^2
Doppelte Eigenwerte	
IF	$(d_1 < \text{tol})$ THEN
BERECHNE	$D_3 = -d_2d_3$
	$\mathbf{N}_3 = (\lambda_1^2\mathbf{I} - 2\lambda_1\mathbf{B} + \mathbf{B}^2)/D_3$
	$\mathbf{f} = f(\lambda_1)\mathbf{I} + (f(\lambda_3) - f(\lambda_1))\mathbf{N}_3$
ELSE IF	$(d_2 < \text{tol})$ THEN
BERECHNE	$D_1 = -d_1d_3$
	$\mathbf{N}_1 = (\lambda_2^2\mathbf{I} - 2\lambda_2\mathbf{B} + \mathbf{B}^2)/D_1$
	$\mathbf{f} = f(\lambda_2)\mathbf{I} + (f(\lambda_1) - f(\lambda_2))\mathbf{N}_1$
ELSE IF	$(d_3 < \text{tol})$ THEN
BERECHNE	$D_2 = -d_1d_2$
	$\mathbf{N}_2 = (\lambda_3^2\mathbf{I} - 2\lambda_3\mathbf{B} + \mathbf{B}^2)/D_2$
	$\mathbf{f} = f(\lambda_3)\mathbf{I} + (f(\lambda_2) - f(\lambda_3))\mathbf{N}_2$
END IF	
RETURN	
Einfache Eigenwerte	
BERECHNE	$D_1 = -d_1d_3, \quad D_2 = -d_1d_2, \quad D_3 = -d_2d_3$
	$h_1 = (\lambda_2\lambda_3)/D_1, \quad h_2 = -(\lambda_2 + \lambda_3)/D_1, \quad h_3 = 1/D_1$
	$\mathbf{N}_1 = h_1\mathbf{I} + h_2\mathbf{B} + h_3\mathbf{B}^2$
	$h_2 = (\lambda_1\lambda_3)/D_2, \quad h_2 = -(\lambda_1 + \lambda_3)/D_2, \quad h_3 = 1/D_2$
	$\mathbf{N}_2 = h_1\mathbf{I} + h_2\mathbf{B} + h_3\mathbf{B}^2$
	$h_1 = (\lambda_1\lambda_2)/D_3, \quad h_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2)/D_3, \quad h_3 = 1/D_3$
	$\mathbf{N}_3 = h_1\mathbf{I} + h_2\mathbf{B} + h_3\mathbf{B}^2$
BERECHNE	$\mathbf{f} = f(\lambda_1)\mathbf{N}_1 + f(\lambda_2)\mathbf{N}_2 + f(\lambda_3)\mathbf{N}_3$

Da sowohl die Eigenvektorberechnung als auch die Berechnung von Tensorfunktionen über die Spektraldarstellung zu Ungenauigkeiten führen kann, muß mit zusätzlichen Ungenauigkeiten gerechnet werden, die man in Kauf nehmen kann, falls keine hohen Genauigkeiten von Interesse sind. Vorteil des Verfahrens der Störungstechnik ist die Verringerung der analytischen Betrachtungen bzw. Fallunterscheidungen sowie des zugehörigen Programmieraufwandes.

Als Resultat der durchgeführten Untersuchungen halte ich eine Kombination der Verfahren in Abhängigkeit der Sensitivitäten für sinnvoll. Zum Beispiel kann der Ausdruck $\mathbf{I}_{\mathbf{B}}^2 - 3\mathbf{II}_{\mathbf{B}}$ als Indikator für Störungen herangezogen werden. Im Falle von $\mathbf{I}_{\mathbf{B}}^2 - 3\mathbf{II}_{\mathbf{B}} < \text{tol}$ sollte ein iteratives Verfahren für die Eigenwert- und Eigenvektor- bzw. Eigendyadenberechnung herangezogen werden. Ansonsten kann die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren durch die geschlossenen Lösungen erfolgen. Dies gilt auch für die Berechnung von Tensorfunktionen über die Spektraldarstellung. Die Wahl einer Störungstechnik zur Vermeidung mehrfacher Eigenwerte sollte nur bei geringen Genauigkeitsanforderungen erfolgen. Die Kombination dieser unterschiedlichen Verfahren erhöht die erreichbare Genauigkeit bei bestmöglicher Geschwindigkeit.

2.2 Tensoren 4-ter Stufe

Um zu einer koordinatenfreien Darstellung bei verschiedenen Transformationen von Tensoren vierter Stufe im Rahmen der später verwendeten Materialgleichungen bzw. auch der Behandlung der Variationsformulierungen mittels der Methode der finiten Elemente zu gelangen, greifen wir auf Ergebnisse der Transposition von Tensoren höherer Stufe von DE BOER [36, S.58 ff] sowie EHLERS [41, S.396] zurück. Weitere Ergebnisse von Eigenschaften von Tensoren 4-ter Stufe werden als bekannt vorausgesetzt bzw. auf die einschlägige Literatur verwiesen.³⁰ In [36] wird eine Notation für verschiedene Transpositionsmöglichkeiten von Tensoren n -ter Stufe eingeführt,

$$\mathcal{L}^{T_{k_i k_j}} = \mathcal{I}^{k_1 \dots k_j \dots k_i \dots k_n} \vec{g}_{k_1} \otimes \dots \otimes \vec{g}_{k_i} \otimes \dots \otimes \vec{g}_{k_j} \otimes \dots \otimes \vec{g}_{k_n}, \quad (2.42)$$

woraus sich zum Beispiel für einen Tensor 4-ter Stufe der Gestalt

$$\mathcal{L} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = a^{ij} b^{kl} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \otimes \vec{g}_k \otimes \vec{g}_l \quad (2.43)$$

die Transposition

$$\mathcal{L}^{T_{23}} = [\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} = a^{ik} b^{jl} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \otimes \vec{g}_k \otimes \vec{g}_l \quad (2.44)$$

ergibt. Diese spezielle Transposition ist in EHLERS [41] in der dort benutzten Darstellung verwendet und zusätzlich um daraus resultierende Rechenregeln erweitert worden.³¹ Der Tensor (2.44) hat besondere Eigenschaften, wenn man ihn auf Tensoren 2-ter bzw. 4-ter Stufe anwendet.

³⁰Siehe zum Beispiel DE BOER [36], BOWEN & WANG [20], OGDEN [129]

³¹In HARTMANN [60] und LÜHRS [109] ist zum Beispiel die Transposition $\mathcal{L}^{T_{14}}$ verwendet worden.

Diese Eigenschaften sind im folgenden angegeben:

$$[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} \mathbf{C} = \mathbf{ACB}^T \quad (2.45)$$

$$\left[[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} \right]^{-1} = [\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}]^{T_{23}} \quad (2.46)$$

$$\left[[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} \right]^T = [\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T]^{T_{23}} \quad (2.47)$$

$$[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} [\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}] = \left[[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} \mathbf{C} \otimes \mathbf{D} \right] = [\mathbf{ACB}^T \otimes \mathbf{D}] \quad (2.48)$$

$$[\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}] [\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} = \left[\mathbf{C} \otimes [\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T]^{T_{23}} \mathbf{D} \right] = [\mathbf{C} \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{DB}] \quad (2.49)$$

$$[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} [\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}]^{T_{23}} = [\mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}]^{T_{23}} \quad (2.50)$$

Die in Gl.(2.47) verwendete Transposition

$$\mathcal{L}^T = [\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^T = \mathbf{B} \otimes \mathbf{A} = a^{kl} b^{ij} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \otimes \vec{g}_k \otimes \vec{g}_l \quad (2.51)$$

beschreibt das Vertauschen der vorderen und hinteren beiden Indizes und tritt vorwiegend im Skalarprodukt ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a^{ij} b_{ij}$)

$$\begin{aligned} s &= \mathcal{M}\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = (m^{ijkl} c_{kl}) d_{ij} = \\ &= c_{kl} (m^{ijkl} d_{ij}) = \mathbf{C} \cdot \mathcal{M}^T \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$s \in \mathbb{R}$, auf.

Die Beweise zu den Beziehungen (2.45)-(2.50) wurden in EHLERS [41] fortgelassen und werden daher hier kurz beschrieben.

BEWEIS 2.1

(zu Gl.(2.45)): Mit $\mathcal{L}^{T_{23}}$ aus Gl.(2.44) folgt für $\mathcal{L}^{T_{23}} \mathbf{C}$

$$(a^{ik} b^{jl} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \otimes \vec{g}_k \otimes \vec{g}_l) (c_{rs} \vec{g}^r \otimes \vec{g}^s) = a^{ir} b^{js} c_{rs} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j = \mathbf{ACB}^T.$$

□

BEWEIS 2.2

(zu Gl.(2.46)): Mit $\mathbf{D} = \mathcal{L}^{T_{23}} \mathbf{C}$ und \mathcal{L} aus Gl.(2.43), \mathbf{A} und \mathbf{B} seien invertierbar, folgt mit Hilfe von Gl.(2.45) durch Auflösung nach dem Tensor \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{DB}^{-T} = [\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}]^{T_{23}} \mathbf{D}.$$

Mit

$$\mathbf{C} = [\mathcal{L}^{T_{23}}]^{-1} \mathbf{D} = [[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}}]^{-1} \mathbf{D}$$

wird Beziehung (2.46) offensichtlich.

□

BEWEIS 2.3

(zu Gl.(2.47)): Die linke Seite von Gl.(2.47) liefert in Indexdarstellung unter Zuhilfenahme von Gl.(2.51)

$$\left[[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} \right]^T = [a^{ik} b^{jl} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \otimes \vec{g}_k \otimes \vec{g}_l]^T = a^{jl} b^{ik} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \otimes \vec{g}_k \otimes \vec{g}_l$$

und ist daher mit

$$[\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T]^{T_{23}} = [a^{ji} b^{lk} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \otimes \vec{g}_k \otimes \vec{g}_l]^{T_{23}} = a^{jl} b^{ik} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \otimes \vec{g}_k \otimes \vec{g}_l$$

gleich.

□

BEWEIS 2.4

(zu Gl.(2.48)): Unter Verwendung der Beziehung $[\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}]\mathbf{E} = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})\mathbf{C}$ führt die Anwendung der Tensoren 4-ter Stufe in der linken Seite von Gl.(2.48) auf einen Tensor 2-ter Stufe \mathbf{E} zu

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} [\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}]\mathbf{E} &= [\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})\mathbf{C} = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{B}^T = \\ &= [\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{D}]\mathbf{E} = \left[[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} \mathbf{C} \otimes \mathbf{D} \right] \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Dies ist mit der Eigenschaft

$$\mathcal{M} [\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}] = \mathcal{M}\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \quad (2.53)$$

eines beliebigen Tensors 4-ter Stufe äquivalent. \square

BEWEIS 2.5

(zu Gl.(2.49)): Auch hier erinnern wir uns an die bekannte Beziehung

$$[\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}]\mathcal{M} = \mathbf{C} \otimes \mathcal{M}^T \mathbf{D}. \quad (2.54)$$

Mit dem Tensor $\mathcal{M} = \mathcal{L}^{T_{23}}$ aus Gl.(2.44) sowie Gl.(2.47) folgt

$$\begin{aligned} [\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}][\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} &= \mathbf{C} \otimes \left[[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} \right]^T \mathbf{D} = \\ &= \mathbf{C} \otimes [\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T]^{T_{23}} \mathbf{D} = \mathbf{C} \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{B}. \end{aligned}$$

\square

BEWEIS 2.6

(zu Gl.(2.50)): Interessant erscheint noch Beziehung (2.50). Mit

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} [\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}]^{T_{23}} \mathbf{E} &= [\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} \mathbf{C}\mathbf{E}\mathbf{D}^T = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{E}\mathbf{D}^T \mathbf{B}^T = [\mathbf{A}\mathbf{C} \otimes \mathbf{B}\mathbf{D}]^{T_{23}} \mathbf{E} \end{aligned}$$

wird die Eigenschaft klar. \square

Bei Verwendung von orthogonalen Tensoren, $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, siehe Gl.(2.11), würde die gewählte Darstellung (2.45) für $\mathcal{Q} = [\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}]^{T_{23}}$, d.h. $\mathbf{A} = \mathbf{Q}$ und $\mathbf{B} = \mathbf{Q}$, die einfachere Darstellung

$$\mathbf{B} = \mathcal{Q}\mathbf{B}^* \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{B}^* = \mathcal{Q}^{-1}\mathbf{B} = \mathcal{Q}^T \mathbf{B} \quad (2.55)$$

erhalten. Unter Verwendung von Gl.(2.46) folgt offensichtlich $\mathbf{B}^* = \mathcal{Q}^T \mathbf{B} \mathcal{Q}$ mit

$$\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q}^T = [\mathbf{Q}^T \otimes \mathbf{Q}^T]^{T_{23}}. \quad (2.56)$$

Mit dieser Schreibweise läßt sich sehr einfach auch die Drehung eines Tensors 4-ter Stufe angeben

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{Q}^T \mathcal{L} \mathcal{Q} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{L} = \mathcal{Q} \mathcal{L}^* \mathcal{Q}^T. \quad (2.57)$$

Auch der Einheitstensor 4-ter Stufe, $\mathcal{I}\mathbf{A} = \mathbf{A}$, läßt sich durch die Transpositionssymbolik darstellen,

$$\mathcal{I} = [\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}]^{T_{23}} = \delta_k^i \delta_l^j \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \otimes \vec{g}^k \otimes \vec{g}^l. \quad (2.58)$$

2.3 Lösung von Algebro-Differentialgleichungssystemen

Im Ingenieurstudium besteht im allgemeinen die Möglichkeit einen Einblick in die numerische Lösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen 1-ter Ordnung

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \quad (2.59)$$

im Intervall $t \in [t_0, T]$ mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ zu erhalten, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Demgegenüber ist die Lösung von sogenannten Algebro-Differentialgleichungssystemen bzw. auch impliziter Differentialgleichungssysteme unüblich, obwohl solche Problemstellungen in der Regelungstechnik und der Mehrkörpersimulation auftreten. Wir werden in Kapitel 5 erkennen, daß derart strukturierte Gleichungen gleichfalls in vielen Anwendungsgebieten der Methode der finiten Elemente auftreten. In diesem Abschnitt soll daher ein kurzer Einblick in die Lösung solcher Systeme unter Verwendung impliziter Runge-Kutta Verfahren gegeben werden.

Die Differentialgleichung (2.59) bezeichnet man als explizit, da nach der Zeitableitung $\dot{\mathbf{y}}$ aufgelöst werden kann. Im allgemeinsten Fall muß dies nicht notwendigerweise vorliegen, so daß

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) = \mathbf{0} \quad (2.60)$$

als implizites gewöhnliches Differentialgleichungssystem 1-ter Ordnung bezeichnet wird. Wir gehen später von einer speziellen Struktur der Form

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t)) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{r}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t)) \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (2.61)$$

mit

$$\mathbf{y}(t) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{array} \right\}, \quad \text{und den Anfangsbedingungen} \quad \mathbf{y}(t_0) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(t_0) \\ \mathbf{q}(t_0) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{array} \right\} \equiv \mathbf{y}_0 \quad (2.62)$$

aus ($\mathbf{g}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ und $\mathbf{r}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_q}$). Diese Struktur bezeichnet man auch als semi-explizites System von nichtlinearen Algebro-Differentialgleichungen 1-ter Ordnung oder kurz DAE-System (BRENAN ET AL. [21, S.4]). Die Methoden zur numerischen Lösung solcher Algebro-Differentialgleichungen unterscheiden sich im wesentlichen in Einschritt- und Mehrschrittverfahren.³²

2.3.1 Diagonalimplizite Runge-Kutta Verfahren

Wir verwenden und untersuchen im folgenden implizite Runge-Kutta Verfahren (IRK), die zu den Einschritt-Verfahren gehören. Zur Verdeutlichung einiger Begriffe greifen wir zunächst auf gewöhnliche Differentialgleichungssysteme 1-ter Ordnung zurück. Das gesamte zu untersuchende Zeitintervall $t \in [t_0, T]$ wird in N Unterintervalle $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N = T$ zerlegt, die man als Zeitschritte bezeichnet. $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ für $0 \leq n \leq N-1$ stellt die Schrittweite vom Zeitpunkt t_n bis zum Zeitpunkt t_{n+1} dar. Wir gehen von einem Punkt mit der exakten Lösung $(t_n, \mathbf{y}(t_n))$ aus und suchen die Lösung zum Zeitpunkt t_{n+1} , indem wir über Gl.(2.59) integrieren:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t_{n+1}) &= \mathbf{y}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt = \\ &= \mathbf{y}(t_n) + \Delta t_n \int_0^1 \mathbf{f}(t_n + \tau \Delta t_n, \mathbf{y}(t_n + \tau \Delta t_n)) d\tau \end{aligned} \quad (2.63)$$

³²Siehe zum Beispiel HAIRER & WANNER [59], BRENAN ET AL. [21] und STREHMEL & WEINER [159].

Hierbei haben wir eine Koordinatentransformation auf den Bereich $0 \leq \tau \leq 1$ eingeführt, $t = t_n + \tau \Delta t_n$. Wendet man nun eine Quadraturregel der Form $I = \int_0^1 f(\tau) d\tau \approx \sum_{i=1}^s b_i f(c_i)$ mit den Wichtungsfaktoren b_i , $i = 1, \dots, s$, und den Stützstellen (Integrationspunkten) c_i , $i = 1, \dots, s$ ($0 \leq c_i \leq 1$), an, so erhält man die diskrete Form

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) \approx \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}(t_n) + \Delta t_n \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{f}(t_n + c_i \Delta t_n, \mathbf{y}(t_n + c_i \Delta t_n)). \quad (2.64)$$

Wir erkennen in Gl.(2.64) neue unbekannte Größen $\mathbf{y}(t_n + c_i \Delta t_n)$, die durch einen erneuten Integrationsschritt mit einer weiteren Quadratur bestimmt werden,

$$\mathbf{y}(t_n + c_i \Delta t_n) \approx \mathbf{Y}_{ni} = \mathbf{y}(t_n) + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{f}(t_n + c_j \Delta t_n, \mathbf{Y}_{nj}). \quad (2.65)$$

Dabei werden neue Wichtungsfaktoren a_{ij} eingeführt, jedoch die gleichen Stützstellen

$$T_{ni} = t_n + c_i \Delta t_n, \quad i = 1, \dots, s, \quad (2.66)$$

gewählt (siehe Abb. 2.2). Man spricht von einem s -stufigen impliziten Runge-Kutta Verfahren,

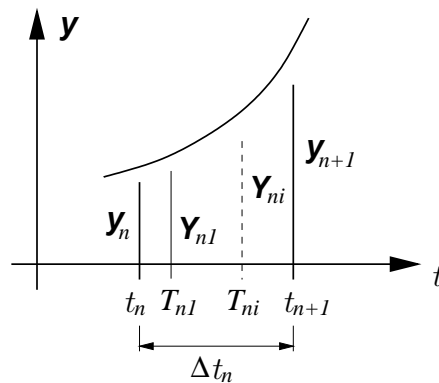


Abbildung 2.2: Zeitschritte und Stufen

wenn mindestens ein $a_{ij} \neq 0$ für $j \geq i$ ist, wobei s die Anzahl der Stufen (Stützstellen, stages) wiedergibt. Der Ausdruck $\dot{\mathbf{Y}}_{nj} = \mathbf{f}(T_{nj}, \mathbf{Y}_{nj})$, der in der Summe aus Gl.(2.65) auftritt, wird als Steigungswert (stage derivative) bezeichnet.³³ Der Steigungswert ist aufgrund der eingeführten Quadratur eine diskrete Größe und stellt den Wert der rechten Seite der Differentialgleichung (2.59) dar.

Implizite Differentialgleichungen (2.60) und damit auch die Algebro-Differentialgleichungen (2.61) können folgendermaßen behandelt werden. In jeder Stufe T_{ni} werden die Stufenwerte $\mathbf{Y}_{ni} \in \mathbb{R}^m$ mit $m = n_u + n_Q$ gemäß der impliziten Runge-Kutta Verfahren

$$\mathbf{Y}_{ni} = \mathbf{y}_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{\mathbf{Y}}_{nj}, \quad i = 1, \dots, s. \quad (2.67)$$

berechnet. Man kann sich in einer Berechnung für die unabhängigen Variablen \mathbf{Y}_{ni} oder $\dot{\mathbf{Y}}_{nj}$ entscheiden, da beide nach Gl.(2.67) nicht unabhängig voneinander sind. Das Einsetzen von

³³In der Literatur wird der Steigungswert häufig mit \mathbf{k}_j abgekürzt.

Tabelle 2.7: Butcher Tableaus für Runge-Kutta Verfahren: (a) Implizite Runge-Kutta Verfahren (b) Steifgenaue diagonal-implizite Runge-Kutta Verfahren

c_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1s}	c_1	a_{11}	0	\dots	0
c_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2s}	c_2	a_{21}	a_{22}	\ddots	\vdots
\vdots	\vdots		\ddots	\vdots	\vdots	\vdots		\ddots	0
c_s	a_{1s}	a_{2s}	\dots	a_{ss}	c_s	b_1	b_2	\dots	b_s
	b_1	b_2	\dots	b_s		b_1	b_2	\dots	b_s

(a)
(b)

Beziehung (2.67) in die implizite Differentialgleichung (2.60) führt dann auf

$$\mathbf{F}(T_{ni}, \mathbf{y}_n + \Delta t_n \underbrace{\sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{\mathbf{Y}}_{nj}}_{\mathbf{Y}_{ni}}, \dot{\mathbf{Y}}_{ni}) = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, s. \quad (2.68)$$

Hierbei hängen alle Steigungswerte $\dot{\mathbf{Y}}_{ni}$, $i = 1, \dots, s$, voneinander ab. Nach der Berechnung dieses nichtlinearen Gleichungssystems der Dimension $s \cdot (n_u + n_Q)$ sind die Steigungswerte $\dot{\mathbf{Y}}_{ni}$ bekannt und wir können mit Hilfe von Gl.(2.64) die approximierte Lösung \mathbf{y}_{n+1} zum Zeitpunkt t_{n+1} berechnen,

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t_n \sum_{i=1}^s b_i \dot{\mathbf{Y}}_{ni}. \quad (2.69)$$

Die Wichtungsfaktoren a_{ij} und b_j sowie die Stützstellen c_i werden üblicherweise in dem sogenannten Butcher Tableau zusammengefaßt, wobei sich die Koeffizienten für verschiedene Runge-Kutta Verfahren unterscheiden, siehe Tab. 2.7(a). Die Faktoren werden hinsichtlich von Effizienz, Stabilität und Genauigkeit berechnet bzw. definiert.³⁴ Vollimplizite Runge-Kutta Verfahren sind solche Verfahren, bei denen die obere Dreiecksmatrix der Wichtungsmatrix $[a_{ij}]$ mindestens einen von Null verschiedenen Koeffizienten enthält.³⁵ Damit entsteht eine Kopplung aller Stufenwerte \mathbf{Y}_{ni} . Bei expliziten Runge-Kutta Verfahren sind die obere Dreiecksmatrix inklusive der Hauptdiagonalen identisch null ($a_{ij} = 0$ für $j \leq i$), so daß gemäß Gl.(2.67) jede Stufengröße \mathbf{Y}_{ni} aus bekannten Größen berechnet werden kann. Um für die spätere Anwendung bzw. der Interpretation im Rahmen der Methode der finiten Elemente zu gelangen, sind sogenannte steif-genaue diagonal-implizite Runge-Kutta Verfahren (DIRK-Verfahren) von Interesse. Bei diesen impliziert die Diagonalimpliztheit $a_{ij} = 0$ für $j > i$ sowie die steif-genaue Eigenschaft die Bedingung $a_{sj} = b_j$, siehe Tab. 2.7(b). In diesem Fall stimmen die Stufengrößen \mathbf{Y}_{ns} mit den Größen \mathbf{y}_{n+1} überein, siehe Gln.(2.67) und (2.69). Die Integrationsschritte siehe Gln.(2.67) und (2.69) reduzieren sich auf

$$\mathbf{Y}_{ni} = \mathbf{y}_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^i a_{ij} \dot{\mathbf{Y}}_{nj} = \mathbf{s}_{ni} + \Delta t_n a_{ii} \dot{\mathbf{Y}}_{ni}, \quad (2.70)$$

mit dem Startwert

$$\mathbf{s}_{ni} = \mathbf{y}_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \dot{\mathbf{Y}}_{nj}, \quad (2.71)$$

³⁴Siehe hierzu HAIRER & WANNER [59] und die dort zitierte Literatur.

³⁵Damit sind Koeffizienten oberhalb der Hauptdiagonalen gemeint; mindestens ein $a_{ij} \neq 0$ für $j > i$.

welcher lediglich von bereits berechneten Stufenableitungen abhängt und damit in jedem Berechnungsschritt als bekannt vorausgesetzt werden kann. Die Stufenableitungen können nämlich aus Gl.(2.70) zu

$$\dot{\mathbf{Y}}_{ni} = \frac{\mathbf{Y}_{ni} - \mathbf{S}_{ni}}{\Delta t_n a_{ii}}, \quad (2.72)$$

d.h. nach jeder durchgeführten Stufenberechnung bestimmt werden. Sie führen durch Einsetzen in Gl.(2.68) auf das nichtlineare Gleichungssystem

$$\mathbf{R}_{ni}(\mathbf{Y}_{ni}) \equiv \mathbf{F}\left(T_{ni}, \mathbf{Y}_{ni}, \frac{\mathbf{Y}_{ni} - \mathbf{S}_{ni}}{\Delta t_n a_{ii}}\right) = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, s, \quad (2.73)$$

in jeder Stufe. Mit der Wahl von diagonal-impliziten Runge-Kutta Verfahren sind nicht mehr die gekoppelten s nichtlinearen Gleichungssysteme (2.68) zu lösen, sondern nacheinander s mal das nichtlineare Gleichungssystem (2.73) mit der Dimension m . Aufgrund der Verwendung von steif-genauen Verfahren, $a_{si} = b_i$, stimmt, wie bereits gesagt, die Berechnung von \mathbf{Y}_{ns} mit der gesuchten Lösung \mathbf{y}_{n+1} überein. Dies hat zunächst den wesentliche Vorteil, daß zur Berechnung der gesuchten Größen \mathbf{y}_{n+1} keine weitere Berechnung erfolgen muß. Ferner impliziert diese Eigenschaft die sofortige Anwendung auf Algebro-Differentialgleichungssysteme, siehe HAIRER & WANNER [59, S.372-376]. Die Anwendung auf das Algebro-Differentialgleichungssystem (2.61) führt dann auf die Berechnung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\mathbf{R}_{ni}(\mathbf{Y}_{ni}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \\ \mathbf{L}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (2.74)$$

in jeder Stufe i im Zeitschritt t_n nach t_{n+1} , mit

$$\mathbf{G}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \equiv \mathbf{g}(T_{ni}, \mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \quad (2.75)$$

und den zeitdiskreten Gleichungen, die aus der Integration des Anteils der gewöhnlichen Differentialgleichungen resultieren

$$\mathbf{L}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \equiv \frac{\mathbf{Q}_{ni} - \mathbf{S}_{ni}^q}{\Delta t_n a_{ii}} - \mathbf{r}(T_{ni}, \mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}). \quad (2.76)$$

Dabei benötigen wir hier lediglich den Anteil $\mathbf{S}_{ni}^q = \mathbf{Q}_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \dot{\mathbf{Q}}_{nj}$, siehe Gl.(2.71). Die partitionierten Größen lauten dabei

$$\mathbf{y}_n = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{q}_n \end{array} \right\}, \quad \mathbf{Y}_{ni} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_{ni} \\ \mathbf{Q}_{ni} \end{array} \right\}, \quad \mathbf{S}_{ni} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_{ni}^u \\ \mathbf{S}_{ni}^q \end{array} \right\}. \quad (2.77)$$

In Tab. 2.8 ist die zuvor erläuterte Vorgehensweise nochmals zusammengefaßt. In Abschnitt 2.4 gehen wir auf die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (2.74) ein, was eine weitere wichtige Fragestellung ist.

ANMERKUNG 2.2

Es gibt durchaus Anwendungen, siehe zum Beispiel in [75] bzw. [61], bei denen die Struktur des Algebro-Differentialgleichungssystems die Gestalt

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t)) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{r}(t, \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{q}(t)) \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (2.78)$$

Tabelle 2.8: Zeitadaptives, eingebettetes DIRK-Verfahren

<p>Gegeben:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Koeffizienten $c_i, a_{ij}, b_j, (i, j = 1, \dots, s)$ eines steif-genauen DIRK-Verfahrens • Anfangszeitpunkt t_0, Anfangsschrittweite Δt_0 • Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(t_0) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t_0) \\ \mathbf{q}(t_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{y}_0$
<p>Schleife über die Zeitschritte: $n = 0, \dots, N$</p>
<p>Wiederhole</p>
<p>Schleife über die Stufen: $i = 1, \dots, s$</p>
$T_{ni} = t_n + c_i \Delta t_n$ $\mathbf{S}_{ni} = \mathbf{y}_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \dot{\mathbf{Y}}_{nj}$ <p>Löse: $\mathbf{F}\left(T_{ni}, \mathbf{Y}_{ni}, \frac{\mathbf{Y}_{ni} - \mathbf{S}_{ni}}{\Delta t_n a_{ii}}\right) = \mathbf{0}$ für $\mathbf{Y}_{ni} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{ni} \\ \mathbf{Q}_{ni} \end{Bmatrix}$</p> <p>Speichere: $\dot{\mathbf{Y}}_{ni} = \frac{\mathbf{Y}_{ni} - \mathbf{S}_{ni}}{\Delta t_n a_{ii}}$</p>
<p>Fehlerschätzung gemäß Gl.(2.92). Berechne neue Schrittweite Δt_{neu} gemäß Gl.(2.93). Falls Schritt nicht akzeptiert, setze $\Delta t_n = \Delta t_{\text{neu}}$</p>
<p>Bis Schritt akzeptiert</p>
<p>Update:</p> $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n, \Delta t_{n+1} = \Delta t_{\text{neu}}, \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{Y}_{ns}$

erhält. Gleichungssystem (2.73) führt dann für $i = 1, \dots, s$ zu

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ni}(\mathbf{Y}_{ni}) &\equiv \mathbf{F}\left(T_{ni}, \mathbf{Y}_{ni}, \frac{\mathbf{Y}_{ni} - \mathbf{S}_{ni}}{\Delta t_n a_{ii}}\right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \\ \frac{\mathbf{Q}_{ni} - \mathbf{S}_{ni}^q}{\Delta t_n a_{ii}} - \mathbf{r}\left(T_{ni}, \mathbf{U}_{ni}, \frac{\mathbf{U}_{ni} - \mathbf{S}_{ni}^u}{\Delta t_n a_{ii}}, \mathbf{Q}_{ni}\right) \end{array} \right\} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Dies gilt insbesondere auch für Modelle der Elastoplastizität mit Fließfläche, da bei Ausnutzung der Konsistenzbedingung zur Berechnung des plastischen Multiplikators die Dehnungsgeschwindigkeit und damit, nach Raumdiskretisierung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente, auch die Verschiebungsgeschwindigkeiten auftreten. In diesem Fall ist die Funktion \mathbf{r} keine stetige Funktion der Zeit.

Auch kann der differentielle Anteil selbst wieder ein DAE-System darstellen, was durch die Darstellung

$$\mathbf{R}_{ni}(\mathbf{Y}_{ni}) \equiv \left\{ \mathbf{A} \left\{ \frac{\mathbf{Q}_{ni} - \mathbf{S}_{ni}^q}{\Delta t_n a_{ii}} \right\} - \mathbf{r}(T_{ni}, \mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \right\} = \mathbf{0}. \quad (2.80)$$

mit der singulären Matrix \mathbf{A} gegeben ist, siehe zum Beispiel ELLSIEPEN & HARTMANN [46]. Solche Gleichungsstrukturen treten ebenfalls bei Materialmodellen der Plastizität mit Fließfläche

auf und zwar dann, wenn die Konsistenzbedingung nicht analytisch ausgewertet wird. In diesem Fall dient der auftretenden plastische Multiplikator zur Erfüllung der Fließbedingung, die selbst eine algebraische Gleichung repräsentiert, als weitere Unbekannte. \square

Eine Reihe von diagonal-impliziten Runge-Kutta Verfahren sind in Tab. 2.9 aufgeführt. Die letzte

Tabelle 2.9: Butcher-Tableaus verschiedener DIRK-Verfahren

(a) Ellsiepen's Verfahren [45, S.89] ($s = 2, p = 2, \hat{p} = 1$)						
α			α			
1	1 - α	α				
			1 - α	α		
			1 - $\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}$		
				$\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$,	$\hat{\alpha} = 2 - \frac{5}{4}\sqrt{2}$	
(b) Cash's Verfahren [25] ($s = 3, p = 3, \hat{p} = 2$)						
γ			γ	$\gamma = 0.4358665215084580$		
δ	$\tau - \gamma$	γ	$\tau - \gamma = 0.2820667392457705$			
1	α	β	γ	$\alpha = 1.2084966491760101$		
			α	β	γ	$\beta = -0.6443631706844691$
			$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	0	$\delta = 0.7179332607542295$
				$\hat{\alpha} = 0.7726301276675511$		
				$\hat{\beta} = 0.2273698723324489$		
(c) Fritzen's Verfahren [50] ($s = 5, p = 3, \hat{p} = 2$)						
0			0			
γ			0	γ	$\gamma = 0.4358665215084580$	
$\frac{1+\gamma}{2}$	0	$\frac{1-\gamma}{2}$	γ	$\alpha = 1.2084966491760101$		
1	$\hat{\alpha}$	β	0	γ	$\beta = -0.6443631706844691$	
1	0	α	β	0	γ	$\hat{\alpha} = 1 - \hat{\beta} - \gamma$
			0	α	β	0
			$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	0	γ
				$\hat{\beta} = \frac{1}{2\gamma} - 1$		
(d) Hairer & Wanner's Verfahren [59] ($s = 5, p = 4, \hat{p} = 3$)						
$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$			
$\frac{3}{4}$			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		
$\frac{11}{20}$	$\frac{17}{50}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{2}$	$\frac{371}{1360}$	$-\frac{137}{2720}$	$\frac{15}{544}$	$\frac{1}{4}$		
1	$\frac{25}{24}$	$-\frac{49}{48}$	$\frac{125}{16}$	$-\frac{85}{12}$	$\frac{1}{4}$	
			$\frac{25}{24}$	$-\frac{49}{48}$	$\frac{125}{16}$	$-\frac{85}{12}$
			$\frac{59}{48}$	$-\frac{17}{96}$	$\frac{225}{32}$	$-\frac{85}{12}$
				0		
(e) Kombination aus Trapez und impliziten Euler-Verfahren ($s = 3, p = 2, \hat{p} = 1$)						
0			0			
1	0	1				
1	0.5	0	0.5			
			0.5	0	0.5	
			0	1	0	

Zeile in den Butcher-Tableaus wird in kommenden Abschnitt im Zusammenhang eingebetteter Runge-Kutta Verfahren erläutert. Das Verfahren von Fritzen und das kombinierte Verfahren bestehend aus der Trapezregel und dem impliziten Euler-Verfahren, siehe Tab. 2.9(c) und (e), haben

lediglich formal $s = 5$ bzw. $s = 3$ Stufen, da bei beiden $a_{11} = c_1 = 0$ gilt. Dies führt dazu, daß $\mathbf{Y}_{n1} = \mathbf{y}_n$ gilt und damit die erste Stufenberechnung entfallen kann. Es müssen demnach lediglich 4 bzw. 2 nichtlineare Gleichungssysteme berechnet werden.

2.3.2 Zeitadaptivität

Eine wesentliche Frage, die sich bei der Zeitintegration von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder auch Algebro-Differentialgleichungen stellt, ist die Suche nach einer geeigneten Schrittweite Δt_n . Zum einen kann zwar die algebraische Gleichung (2.74)₁ zum Zeitpunkt $T_{ns} = t_{n+1}$ erfüllt sein, zum anderen hingegen kann der Integrationsschritt (2.74)₂ eine beliebig ungenaue Approximation der Lösung des differentiellen Anteils darstellen. Des Weiteren ist es eine besondere Zielsetzung sich einer genauen Lösung des Problems sicher zu sein, bzw. auch von Interesse eine zulässige Toleranz vorgeben zu können, damit ein zu definierender Integrationsfehler beschränkt bleibt. Eine zeitadaptive Berechnung stabilisiert zusätzlich das gesamte Verfahren und paßt sich an den zugrundeliegenden Lösungsverlauf an. Dies ist umso wichtiger, desto unterschiedlicher die Zeitskalen in einer Berechnung sind.

In ALEXANDER [2] sind verschiedene DIRK-Verfahren vorgeschlagen worden, die für große steife Differentialgleichungssysteme geeignet sind. Die vorgeschlagenen Verfahren sind im speziellen einfach diagonal-implizite Runge-Kutta Verfahren (SDIRK-Verfahren) bei welchen die Diagonalelemente a_{ii} der Wichtungsfaktoren identisch sind. Wir verwenden zur Minimierung des Rechenaufwandes für die Zeitadaptivität sogenannte eingebettete Verfahren, deren Schrittweitenabschätzung im folgenden wiedergegeben wird.³⁶ Die Abschätzung der Schrittweite richtet sich an der Abschätzung des sogenannten lokalen Integrationsfehlers. Gegeben sei der exakte Wert $\mathbf{y}(t_n)$. Der lokale Integrationsfehler ist die Differenz aus der exakten Lösung $\mathbf{y}(t_{n+1})$ und der numerischen Lösung \mathbf{y}_{n+1} , welche hier durch den Integrationsschritt des angewendeten Runge-Kutta Verfahrens vorliegt:

$$\begin{aligned} \delta(t_{n+1}, \mathbf{y}, \Delta t_n) &= \mathbf{y}(t_{n+1}) - \overbrace{\{\mathbf{y}(t_n) + \Delta t_n \Phi(t_n, \mathbf{y}, \Delta t_n)\}}^{\text{Runge-Kutta Verfahren}} \\ &= \underbrace{\Delta t_n^{p+1} \Psi(t_n, \mathbf{y})}_{\text{Hauptteil des lokalen Integrationsfehlers}} + \mathcal{O}(\Delta t_n^{p+2}) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Φ ist die sogenannte Verfahrensfunktion.³⁷ Diese Funktion ist nur formal explizit und enthält ebenfalls implizite Verfahren. Gl.(2.81) berechnet sich durch die Taylor-Entwicklung der exakten Lösung sowie des gewählten Runge-Kutta Verfahrens. p stellt dann die Ordnung des Verfahrens dar. Der lokale Integrationsfehler besteht aus dem Hauptteil des lokalen Fehlers sowie einer Größe der Ordnung Δt_n^{p+2} . Der Hauptteil des lokalen Fehlers dient im folgenden zur Abschätzung der Schrittweite, um damit den Fehler zu kontrollieren. Hierzu gehen wir davon aus, daß zwei Verfahren mit unterschiedlicher Ordnung vorliegen,

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}(t_n) + \Delta t_n \Phi(t_n, \mathbf{y}, \Delta t_n), \quad (2.82)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{n+1} = \mathbf{y}(t_n) + \Delta t_n \hat{\Phi}(t_n, \hat{\mathbf{y}}, \Delta t_n). \quad (2.83)$$

³⁶Siehe hierzu HAIRER ET AL. [58, p. 123], HAIRER & WANNER [59, p. 167].

³⁷Hairer et al. [58, p. 159].

Beide Verfahren führen zu den lokalen Fehlern

$$\delta = \mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1} = \Delta t_n^{p+1} \Psi(t_n, \mathbf{y}) + \mathcal{O}(\Delta t_n^{p+2}), \quad (2.84)$$

$$\hat{\delta} = \mathbf{y}(t_{n+1}) - \hat{\mathbf{y}}_{n+1} = \Delta t_n^{\hat{p}+1} \hat{\Psi}(t_n, \mathbf{y}) + \mathcal{O}(\Delta t_n^{\hat{p}+2}), \quad (2.85)$$

wobei wir im folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\hat{p} < p$ annehmen. Durch Bildung der Differenz beider Fehler kann man den lokalen Integrationsfehler des Verfahrens niedrigerer Ordnung abschätzen,

$$\delta - \hat{\delta} = \hat{\mathbf{y}}_{n+1} - \mathbf{y}_{n+1} = \Delta t_n^{\hat{p}+1} \hat{\Psi}(t_n, \mathbf{y}) + \mathcal{O}(\Delta t_n^{\hat{p}+2}) \approx \Delta t_n^{\hat{p}+1} \hat{\Psi}(t_n, \mathbf{y}). \quad (2.86)$$

Der Betrag des Fehlers soll nun geringer sein als eine vorgegebene Toleranz

$$\|\Delta t_n^{\hat{p}+1} \hat{\Psi}(t_n, \mathbf{y})\| \approx \|\hat{\mathbf{y}}_{n+1} - \mathbf{y}_{n+1}\| \leq \epsilon_r \|\hat{\mathbf{y}}_n\| + \epsilon_a. \quad (2.87)$$

ϵ_a und ϵ_r sind nutzerdefinierte absolute und relative Fehlertoleranzen. Unter der Annahme, daß der Fehler $\|\hat{\Psi}(t_n, \mathbf{y})\| \approx C$ ist, d.h. von einem zum nächsten Schritt konstant bleiben soll, führt Beziehung (2.87) auf

$$\|\hat{\mathbf{y}}_{n+1} - \mathbf{y}_{n+1}\| \approx C \Delta t_n^{\hat{p}+1}. \quad (2.88)$$

Die Forderung der Gleichheit des Fehlers für eine neue Schrittweite Δt_{neu} mit der vorgegebenen Fehlertoleranz liefert

$$C \Delta t_{\text{neu}}^{\hat{p}+1} = \epsilon_r \|\hat{\mathbf{y}}_n\| + \epsilon_a. \quad (2.89)$$

Eine Abschätzung der neuen Schrittweite erhalten wir durch Auswertung der Beziehungen (2.88) und (2.89) durch Elimination von C ,

$$\Delta t_{\text{neu}} = \Delta t_n \left(\frac{\epsilon_r \|\hat{\mathbf{y}}_n\| + \epsilon_a}{\|\hat{\mathbf{y}}_{n+1} - \mathbf{y}_{n+1}\|} \right)^{1/(\hat{p}+1)}. \quad (2.90)$$

Prinzipiell ließe sich hiermit eine neue Schrittweite berechnen, jedoch will man zu häufige Verringerungen und Erhöhungen sowie zurückgewiesene Schrittweiten vermeiden. Daher muß Gl.(2.90) etwas modifiziert werden. Des weiteren haben die in dem Lösungsvektor \mathbf{y} unterschiedlichen physikalischen Größen verschiedene Größenordnungen, so daß eine Anpassung obiger Normen und Auswertungen erfolgen sollte. Hierzu haben EHLERS & ELLSIEPEN [41] und DIEBELS ET AL. [38] den lokalen Fehler $\mathbf{y}_{\text{err}} = \hat{\mathbf{y}}_{n+1} - \mathbf{y}_{n+1}$ in

$$\mathbf{u}_{\text{err}} = \hat{\mathbf{u}}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1} \quad \text{und} \quad \mathbf{q}_{\text{err}} = \hat{\mathbf{q}}_{n+1} - \mathbf{q}_{n+1} \quad (2.91)$$

für die Verschiebungen und Inneren Variablen zerlegt sowie die gewichteten Normen

$$e_u \equiv \sqrt{\frac{1}{n_u} \sum_{l=1}^{n_u} \left(\frac{u_{\text{err}}^l}{\epsilon_r |u_n^l| + \epsilon_a^l} \right)^2}, \quad e_q \equiv \max_k \left| \frac{q_{\text{err}}^k}{\epsilon_r |q_n^k| + \epsilon_a^k} \right| \quad (2.92)$$

vorgeschlagen. Weitere Modifikationen bestehen in der unterschiedlichen Wahl der relativen und absoluten Fehlertoleranzen ϵ_r bzw. ϵ_a . Das Maximum dieser partiellen Fehlermaße, $e_m = \max(e_u, e_q)$, dient dann zur Bestimmung der neuen Schrittweite:

$$\Delta t_{\text{neu}} = \Delta t_n \cdot \begin{cases} \max(f_{\min}, f_{\text{safety}} e_m^{-1/(\hat{p}+1)}) & \text{falls } e_m > 1 \\ \min(f_{\max}, f_{\text{safety}} e_m^{-1/(\hat{p}+1)}) & \text{falls } e_m \leq 1 \end{cases} \quad (2.93)$$

Der Faktor $0 < f_{\text{safety}} < 1$ verhindert zu starke Oszillationen der Schrittweitenprozedur und die Faktoren f_{min} und f_{max} verhindern zu starke Schrittweitenänderungen (siehe HAIRER ET AL. [58, S.168], HAIRER & WANNER [59, S.124]). Praktische Werte liegen bei $0.8 \leq f_{\text{safety}} \leq 0.9$, $0.2 \leq f_{\text{min}} \leq 0.5$, $2 \leq f_{\text{max}} \leq 3$.

Ein wesentlicher Punkt liegt nun in der Berechnung der Lösung $\hat{\mathbf{y}}_{n+1}$ des Verfahrens mit der Ordnung \hat{p} . Rechnerisch zu aufwendig wäre die komplette Neuberechnung mit einem anderen Verfahren. Daher wählen wir sogenannte eingebettete Verfahren, bei denen für das Verfahren der Ordnung \hat{p} die Koeffizienten a_{ij} und c_i des Verfahrens der Ordnung p gewählt werden, jedoch andere Koeffizienten b_i vorliegen. Die neuen Koeffizienten bezeichnen wir mit \hat{b}_i , womit die Lösung

$$\hat{\mathbf{y}}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t_n \sum_{i=1}^s \hat{b}_i \dot{\mathbf{Y}}_{ni}, \quad (2.94)$$

vorliegt. Die Stufenableitungen $\dot{\mathbf{Y}}_{ni}$ sind durch das Verfahren der Ordnung p bereits berechnet, siehe Gl.(2.72). Der Fehler $\mathbf{y}_{\text{err}} = \hat{\mathbf{y}}_{n+1} - \mathbf{y}_{n+1}$ ist daher durch einfache Auswertung

$$\mathbf{y}_{\text{err}} = \hat{\mathbf{y}}_{n+1} - \mathbf{y}_{n+1} = \Delta t_n \sum_{i=1}^s (\hat{b}_i - b_i) \dot{\mathbf{Y}}_{ni} \quad (2.95)$$

berechenbar, d.h. ohne großen zusätzlichen Rechenaufwand ist eine effektive Schrittweitenberechnung möglich. In Tab. 2.9 sind fünf verschiedene eingebettete DIRK-Verfahren dargestellt, bei denen jeweils in der letzten Zeile des Butcher-Tableaus die Koeffizienten \hat{b}_i , $i = 1, \dots, s$, aufgelistet sind.

2.4 Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

In den in Abschnitt 2.3 verwendeten Lösungsverfahren zur Lösung von Algebra-Differentialgleichungssystemen entstehen nichtlineare Gleichungssysteme

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad (2.96)$$

der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}(\mathbf{U}, \mathbf{Q}) \\ \mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{Q}) \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (2.97)$$

mit

$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L} \\ \mathbf{G} \end{array} \right\} \quad \text{und den Unbekannten} \quad \mathbf{y} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{array} \right\}, \quad (2.98)$$

siehe Gl.(2.74). Hierbei seien $\mathbf{F}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_u+n_q}$, $\mathbf{G}, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_u}$ und $\mathbf{L}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_q}$. Diese Gleichungssysteme müssen in jeder Stufe T_{ni} gelöst werden. Wir lassen jedoch der Einfachheit wegen in diesem Abschnitt die Indizes ni fort. Es geht in diesem Abschnitt um die Lösungsmöglichkeit des nichtlinearen Gleichungssystems (2.97) im Rahmen der Methode der finiten Elemente. Hierzu werden im folgenden zwei Verfahren zur Lösung blockstrukturierter Gleichungssysteme angesprochen. Wir beginnen mit dem klassischen Newton-Raphson Verfahren und gehen anschließend auf das Multilevel-Newton Verfahren über.

2.4.1 Newton-Raphson Verfahren

Das in der deutschsprachigen Literatur bezeichnete Newton-Verfahren zur numerischen Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme (2.96) führt als Näherung des Nullstellenproblems eine lineare Näherung der Funktion $\mathbf{F}(\mathbf{y})$ ein

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{y}_0) + \left. \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0} \{\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\} \quad (2.99)$$

und sucht diejenige Stelle \mathbf{y} für gegebenen Anfangswert \mathbf{y}_0 , bei welchem die linearisierte Funktion $\mathbf{F}(\mathbf{y})$ verschwindet.³⁸ Die gefundene Lösung stellt natürlich zunächst nur eine grobe Näherung dar. Ein Iterationsverfahren entsteht hieraus, wenn man den gefundenen Wert \mathbf{y} erneut wieder als Auswertungsstelle \mathbf{y}_0 verwendet, um einen erneuten Wert durch einen wiederholten Linearisierungsprozeß zu berechnen. Die Iterationsvorschrift lautet dann mit dem Iterationsindex m

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}^{(m)}) + \left. \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^{(m)}} \Delta \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2.100)$$

mit $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y}^{(m+1)} - \mathbf{y}^{(m)}$. Gl.(2.100) entspricht einem linearen Gleichungssystem zur Berechnung des Inkrements $\Delta \mathbf{y}$:

$$\left. \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}^{(m)}} \Delta \mathbf{y} = -\mathbf{F}(\mathbf{y}^{(m)}) \quad (2.101)$$

Wir erhalten die Lösung $\mathbf{F}(\mathbf{y}) \approx \mathbf{0}$, wenn $\|\Delta \mathbf{y}\| < \text{tol}_y$, $0 < \text{tol}_y \ll 1$, oder $\|\mathbf{F}(\mathbf{y}^{(m)})\| < \text{tol}_F$, $0 < \text{tol}_F \ll 1$, gilt. Die Koeffizientenmatrix ist die Funktionalmatrix (oder auch Jacobi-Matrix). Die Anwendung der Iterationsvorschrift des Newton-Raphson Verfahrens auf das blockstrukturierte Gleichungssystem (2.97) führt in jedem Iterationsschritt auf das lineare Gleichungssystem, siehe Gl.(2.101),

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{Q}} & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{U}} \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}} & \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \end{array} \right]_{\mathbf{z}} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{Q} \\ \Delta \mathbf{U} \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{L}(\mathbf{z}) \\ \mathbf{G}(\mathbf{z}) \end{array} \right\} \quad (2.102)$$

mit

$$\mathbf{z} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{Q}^{(m)} \\ \mathbf{U}^{(m)} \end{array} \right\} \quad \text{sowie} \quad \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{(m+1)} - \mathbf{Q}^{(m)} \quad \text{und} \quad \Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}^{(m+1)} - \mathbf{U}^{(m)}.$$

Um auf einen Vergleich mit nachfolgenden Verfahren zu erhalten, lösen wir obiges lineares Gleichungssystem zunächst nach der ersten Gleichung auf,

$$\Delta \mathbf{Q} = - \left[\left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{z}} \right]^{-1} \left\{ \mathbf{L}(\mathbf{z}) + \left[\left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{z}} \right] \Delta \mathbf{U} \right\},$$

und setzen das Ergebnis für $\Delta \mathbf{Q}$ in die zweite Gleichung von Gl.(2.102) ein, womit wir ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung des Zuwachses $\Delta \mathbf{U}$ erhalten:

$$\left[\left[\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{z}} \right] - \left[\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{z}} \right] \left[\left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{z}} \right]^{-1} \left[\left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{z}} \right] \right] \Delta \mathbf{U} = -\mathbf{G}(\mathbf{z}) + \left[\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{z}} \right] \left[\left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{z}} \right]^{-1} \mathbf{L}(\mathbf{z}) \quad (2.103)$$

³⁸In der englischsprachigen Literatur verwendet man zum Teil auch die Bezeichnung Newton-Raphson Verfahren. Zur historischen Entwicklung bzw. dem Zusatz "Raphson" siehe BICANIC & JOHNSON [16].

Anstatt der Inversenbestimmung in der Funktionalmatrix bzw. auch in der rechten Seite würde man natürlich zunächst das lineare Gleichungssystem mit mehreren rechten Seiten

$$\left[\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{Q}} \Big|_{\mathbf{z}} \right] [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2] = \left[\left[\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{\mathbf{z}} \right] \mid \mathbf{L}(\mathbf{z}) \right] \quad (2.104)$$

zur Bestimmung der Unbekannten $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{n_Q \times (n_Q + n_u)}$ sowie $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_Q}$ lösen. In Tab. 2.10 ist die

Tabelle 2.10: Newton-Raphson Verfahren in der Stufe i des Zeitschrittes $t_n \rightarrow t_{n+1}$

Gegeben: $\mathbf{U}_{ni}^{(0)} = \mathbf{u}_n$, $\mathbf{Q}_{ni}^{(0)} = \mathbf{q}_n$, Δt_n , T_{ni} , a_{ii} , \mathbf{S}_{ni}	
Wiederhole	$m = 0, \dots$ (Argumentvektor: $\mathbf{z} \equiv (\mathbf{U}_{ni}^{(m)}, \mathbf{Q}_{ni}^{(m)})$)
	<i>Lokale Ebene</i> Löse lokalen Integrationsschritt $\left[\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{Q}} \Big _{\mathbf{z}} \right] [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2] = \left[\left[\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{U}} \Big _{\mathbf{z}} \right] \mid \mathbf{L}(\mathbf{z}) \right] \rightsquigarrow \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$
	<i>Globale Ebene</i> Löse $\left[\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \Big _{\mathbf{z}} \right] - \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}} \Big _{\mathbf{z}} \right] \mathbf{x}_1 \right] \Delta \mathbf{U}_{ni} = -\mathbf{G}(\mathbf{z}) + \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}} \Big _{\mathbf{z}} \right] \mathbf{x}_2 \rightsquigarrow \Delta \mathbf{U}_{ni}$ Update der globalen Variablen $\mathbf{U}_{ni}^{(m+1)} \leftarrow \mathbf{U}_{ni}^{(m)} + \Delta \mathbf{U}_{ni} \rightsquigarrow \mathbf{U}_{ni}^{(m+1)}$
	<i>Lokale Ebene</i> Berechne $\Delta \mathbf{Q}_{ni} = -\mathbf{x}_1 \Delta \mathbf{U}_{ni} - \mathbf{x}_2 \rightsquigarrow \Delta \mathbf{Q}_{ni}$ Update der lokale Variablen $\mathbf{Q}_{ni}^{(m+1)} \leftarrow \mathbf{Q}_{ni}^{(m)} + \Delta \mathbf{Q}_{ni} \rightsquigarrow \mathbf{Q}_{ni}^{(m+1)}$
Bis	Konvergenzkriterium erfüllt ist

Vorgehensweise nochmals dargestellt.

ANMERKUNG 2.3

Die Begriffe der lokalen und globalen Berechnung bzw. Ebene stammt aus der Lösungsmethodik in der Methode der finiten Elemente. Daher sind auch die Buchstaben der zu lösenden Gleichungen \mathbf{L} und \mathbf{G} entsprechend gewählt. Wir kommen auf die konkrete Zuordnung der Größen in Kapitel 5 zu sprechen. Im allgemeinen steht "lokal" für Berechnungen auf Elementebenen und "global" für generelle Auswertungen, die nicht in den ElementunterROUTINEN durchführbar sind. \square

ANMERKUNG 2.4

Ein wesentlicher Nachteil dieses Verfahrens ist, daß zweimal in die lokale Ebene gewechselt werden muß. Falls auf lokaler Ebene die Felder \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 sowie der aktuelle Wert $\mathbf{L}(\mathbf{z})$ gespeichert würden, wäre dies eine ins Auge zu fassende Vorgehensweise, zumal auf lokaler Ebene lediglich

Funktionsauswertungen und keine Iterationen stattfinden. In SCHERF [144] wird — ohne konkrete Angabe der Implementation — dieses Verfahren mit dem in Abschnitt 2.4.2 vorgestellten Algorithmus verglichen. Dort führt obiges Verfahren zu kürzeren Berechnungszeiten als das in Abschnitt 2.4.2 dargestellte Multilevel-Newton Verfahren. \square

2.4.2 Multilevel-Newton Verfahren

Ein weiteres Verfahren zur Lösung nichtlinearer blockstrukturierter Gleichungssysteme stellt das Multilevel-Newton Verfahren bzw. Mehrebenen-Newton Verfahren dar. Dieses Verfahren entstand im Zusammenhang mit gleichheitsrestringierten Optimierungsverfahren³⁹ bzw. auch bei der Lösung von Algebro-Differentialgleichungssystemen, die bei der Berechnung elektrischer Netzwerke auftreten.⁴⁰ Das Verfahren ähnelt dem in Blockstruktur dargestellten Newton-Verfahren aus Abschnitt 2.4.1, ist mit diesem jedoch nicht identisch. Wir gehen wieder von den nichtlinearen Gleichungen (2.97)

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}, \mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \quad (2.105)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \quad (2.106)$$

aus. Wir wenden in einem ersten Schritt den Satz über implizite Funktionen auf Gl.(2.105) an. Dann existiert unter der Anforderung einer genügend glatten Funktion \mathbf{L} eine Funktion $\mathbf{Q}(\mathbf{U})$ in der Nähe der Lösung. Wenn wir diese Lösung in Gl.(2.106) einsetzen,

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{Q}(\mathbf{U})) = \mathbf{0} \quad (2.107)$$

so resultiert ein nichtlineares Gleichungssystem für die Variable \mathbf{U} . Die Anwendung des klassischen Newton-Verfahrens (2.101) zur Berechnung der Variablen \mathbf{U} auf diese Gleichung führt in jedem Iterationsschritt (m) auf das lineare Gleichungssystem

$$\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{U}} \right]^{(m)} \Delta \mathbf{U} = -\mathbf{G}(\mathbf{U}^{(m)}, \mathbf{Q}^{(m)}). \quad (2.108)$$

$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}^{(m+1)} - \mathbf{U}^{(m)}$ beschreibt den Zuwachs der Größe \mathbf{U} und die Koeffizientenmatrix stellt die Funktionalmatrix dar. Die Größe $\mathbf{Q}^{(m)} = \mathbf{Q}(\mathbf{U}^{(m)})$ in Gl.(2.108) erlangt man aus der Berechnung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}^{(m)}, \mathbf{Q}^{(m)}) = \mathbf{0} \quad (2.109)$$

für gegebenes $\mathbf{U}^{(m)}$. Des weiteren benötigt man in Gl.(2.108) nicht nur die partielle Ableitung $\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{U}$ sowie $\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{Q}$, sondern auch die Ableitung der unbekanntem Funktion $\mathbf{Q}(\mathbf{U})$ nach \mathbf{U} . Diese erhalten wir durch Anwendung der Kettenregel auf die Funktion

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}, \mathbf{Q}(\mathbf{U})) = \mathbf{0}, \quad (2.110)$$

was auf

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{U}} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{U}} = \mathbf{0} \implies \left[\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{Q}} \right] \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{U}} = -\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{U}} \quad (2.111)$$

führt. Dieses entspricht einem linearen Gleichungssystem mit mehreren rechten Seiten. Das Verfahren ist in Tab. 2.11 (Zweiebenen-Newton Verfahren) abgebildet.

³⁹Siehe HOYER & SCHMIDT [83] und die dort zitierte Literatur.

⁴⁰Siehe zum Beispiel RABBAT ET AL. [135].

Tabelle 2.11: Multilevel-Newton Verfahren in der Stufe i des Zeitschrittes $t_n \rightsquigarrow t_{n+1}$

Gegeben: $\mathbf{U}_{ni}^{(0)} = \mathbf{u}_n$, $\mathbf{Q}_{ni}^{(0)} = \mathbf{q}_n$, Δt_n , T_{ni} , a_{ii} , \mathbf{S}_{ni}	
Wiederhole $m = 0, \dots$	<p><i>Lokale Ebene</i> (Gegeben: $\mathbf{U}_{ni}^{(m)}$, Argumentvektor $\mathbf{z} \equiv (\mathbf{U}_{ni}^{(m)}, \mathbf{Q}_{ni}^{(m)})$)</p> <p>Lokaler Integrationsschritt</p> $\mathbf{L}(\mathbf{U}_{ni}^{(m)}, \mathbf{Q}_{ni}^{(m)}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{Q}_{ni}^{(m)}$ <p>Konsistente Linearisierung</p> $\left[\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{Q}} \Big _{\mathbf{z}} \right] \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{U}} = - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{U}} \Big _{\mathbf{z}} \rightsquigarrow \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{U}} \Big _{\mathbf{z}}$ <hr/> <p><i>Globale Ebene</i></p> <p>Löse lineares Gleichungssystem</p> $\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \Big _{\mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}} \Big _{\mathbf{z}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{U}} \Big _{\mathbf{z}} \right] \Delta \mathbf{U}_{ni} = -\mathbf{G}(\mathbf{z}) \rightsquigarrow \Delta \mathbf{U}_{ni}$ <p>Update der globalen Variablen</p> $\mathbf{U}_{ni}^{(m+1)} \leftarrow \mathbf{U}_{ni}^{(m)} + \Delta \mathbf{U}_{ni} \rightsquigarrow \mathbf{U}_{ni}^{(m+1)}$
Bis	Konvergenzkriterium erfüllt ist

Im Vergleich zum blockstrukturierten Newton-Raphson Verfahren muß folgendes angemerkt werden. Beim Mehrebenen-Newton Verfahren muß auf “lokaler” Ebene ein nichtlineares Gleichungssystem sowie ein lineares Gleichungssystem mit mehreren rechten Seiten gelöst werden. Die Funktionalmatrix des globalen linearen Gleichungssystems hat bei beiden Verfahren aus Tab. 2.10 und 2.11 die gleiche Struktur, lediglich die rechten Seiten ändern sich. In Kapitel 5 gehen wir sehr detailliert auf den Aufbau der Matrizen im Rahmen der Methode der finiten Elemente ein und zeigen damit den Zusammenhang zur klassischen Vorgehensweise, bei der der Begriff der konsistenten Linearisierung im Rahmen der Methode der finiten Elemente durch SIMO & TAYLOR [153] eingeführt wurde.

Kapitel 3

Kontinuumsmechanische Grundlagen

3.1 Kinematik

Die Aufgabe der Kontinuumsmechanik ist die Beschreibung der Bewegung bzw. der Deformation eines unter äußerer Belastung stehenden materiellen Körpers.¹ Hierbei werden jedem materiellen Punkt \mathcal{P} drei Koordinaten bzw. ein Vektor $\vec{\xi}$ in der Referenzkonfiguration \mathcal{R} zugeordnet. Des weiteren beschreibt der Vektor \vec{x} den Ort des materiellen Punktes zum Zeitpunkt t in der Momentankonfiguration \mathcal{B}_t . $\vec{x} = \vec{\chi}_{\mathcal{R}}(\vec{\xi}, t)$ bezeichnet man als die Bewegung. Zu einem Ausgangszeitpunkt t_0 nimmt der Körper die Bezugskonfiguration \mathcal{B}_{t_0} an, welche durch den Ortsvektor $\vec{X} = \vec{\chi}_{\mathcal{R}}(\vec{\xi}, t_0)$ gekennzeichnet ist. In der praktischen Umsetzung zur Beschreibung der Bewegung bezieht man sich im allgemeinen auf diese Bezugskonfiguration, so daß die Bewegung $\vec{x} = \vec{\Phi}_{t_0}(\vec{X}, t)$ die gesuchte Größe der folgenden Untersuchungen ist. Dabei ist man in dem Differenzvektor $\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{\Phi}_{t_0}(\vec{X}, t) - \vec{X}$ interessiert, den man als Verschiebungsvektor bezeichnet. In Abb. 3.1 sind die genannten Größen verbildlicht. Eine detaillierte Beschreibung

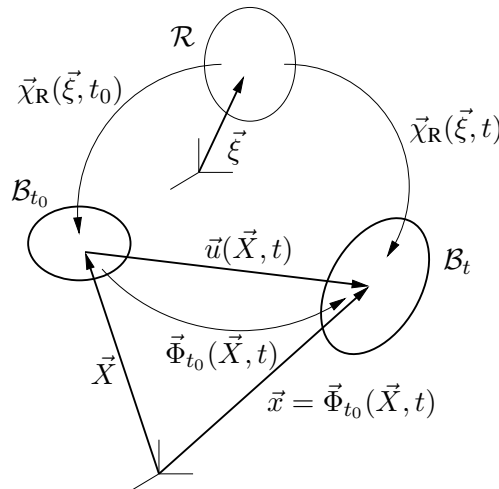


Abbildung 3.1: Konfigurationen

¹ Zu den Grundlagen der Kontinuumsmechanik gibt es eine Reihe von Lehrbücher bzw. mehr wissenschaftlich orientierter Literatur wie z.B. ALTENBACH & ALTENBACH [3], BECKER & BÜRGER [11], BERTRAM [15], BOWEN [19], CHADWICK [26], ERINGEN [47], GURTIN [57], HAUPT [74], JAUNZEMIS [88], LEIGH [100], MALVERN [111], MASE [113], SPENCER [158] sowie TRUESDELL [162, 163]. Weitere kontinuumsmechanische Kenntnisse vermitteln auch Monographien zur finiten Elastizitätstheorie, siehe Fußnote 5 auf Seite 62.

der Bewegung kann dem Buch von HAUPT [74, S.7 ff.] entnommen werden. Wegen der Beliebbarkeit der Auswahl der Referenzkonfiguration \mathcal{R} wählen wir die Bezugskonfiguration \mathcal{B}_{t_0} als Referenzkonfiguration, falls nichts anderes angegeben wird. Daher erfolgt im folgenden keine Unterscheidung zwischen Größen der Referenz- und der Bezugskonfiguration. Die lokal an einem Punkt auftretende Deformation wird durch den Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \vec{\Phi}_{t_0}(\vec{X}, t) = \frac{\partial x^k}{\partial X^L} \vec{g}_k \otimes \vec{G}^L \quad (3.1)$$

beschrieben, was die “Änderung” der Bewegung benachbarter materieller Punkte symbolisiert. $x^k = \Phi_{t_0}^k(X^L, t)$ sind die Koordinaten der Momentan- und X^L die der Bezugskonfiguration. \vec{g}_k stellt die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien in der Momentan- und \vec{G}^L die Gradientenvektoren auf den Koordinatenflächen in der Bezugskonfiguration dar. Der Deformationsgradient hat folgende geometrische Bedeutung: Zum einen bildet er materielle Linienelemente $d\vec{X}$ (Tangentenvektoren an materielle Linien in der Bezugskonfiguration) auf materielle Linienelemente $d\vec{x}$ der Momentankonfiguration ab. Daraus folgend transformieren sich materielle Flächen- und Volumenelemente gemäß

$$d\vec{x} = \mathbf{F}d\vec{X}, \quad (3.2)$$

$$d\vec{a} = (\det \mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}d\vec{A}, \quad (3.3)$$

$$dv = (\det \mathbf{F})dV, \quad (3.4)$$

mit $\det \mathbf{F} > 0$. Wir verwenden im folgenden für die Determinante des Deformationsgradienten die Abkürzung $J \equiv \det \mathbf{F}$.

Aufbauend auf dem Deformationsgradienten \mathbf{F} kann man Verzerrungstensoren und weitere die Deformation beschreibende Größen definieren. Wir beginnen mit der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (3.5)$$

die eindeutig den Rotationstensor \mathbf{R} , $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\det \mathbf{R} = +1$, sowie den rechten Strecktensor \mathbf{U} , $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$, \mathbf{U} positiv definit, und den linken Strecktensor \mathbf{V} , $\mathbf{V} = \mathbf{V}^T$, \mathbf{V} positiv definit, definiert ($\det \mathbf{F} = \det \mathbf{U} = \det \mathbf{V}$). Die Größen \mathbf{R} bzw. \mathbf{U} und \mathbf{V} beschreiben die Drehung (Rotation) sowie die Streckung materieller Linienelemente. Hieraus folgend definiert man die Rechten und Linken Cauchy-Green Tensoren

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2. \quad (3.6)$$

Mit Hilfe der bisherigen kinematischen Größen lassen sich Verzerrungsmaße einführen, d.h. tensorielle Größen, die bei einer Starrkörperbewegung verschwinden und monotone Eigenschaften haben.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) \quad (3.7)$$

ist der Greensche und

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-T}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-2}) \quad (3.8)$$

der Almansische Verzerrungstensor, die ineinander überführbar sind,

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{E}\mathbf{F}^{-1}, \quad (3.9)$$

siehe Abb. 3.5. Eine allgemeinere Definition von Verzerrungstensoren stellt unter Verwendung der beiden Strecktensoren \mathbf{U} und \mathbf{V}

$$\mathbf{E}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{I}) & \text{für } m \neq 0 \\ \ln \mathbf{U} & \text{für } m = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

bzw.

$$\mathbf{A}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m}(\mathbf{V}^m - \mathbf{I}) & \text{für } m \neq 0 \\ \ln \mathbf{V} & \text{für } m = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

dar.² Für $m = 2$ gilt $\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}$ bzw. für $m = -2$ gilt $\mathbf{A}^{(-2)} = \mathbf{A}$. $\mathbf{E}^{(0)} = \ln \mathbf{U}$ bezeichnet man auch als Hencky-Tensor.³

Da auch Deformationsgeschwindigkeiten von Interesse sind, betrachten wir die zeitliche Änderung der materiellen Linien-, Flächen- und Volumenelemente⁴:

$$d\dot{\vec{x}} = \dot{\mathbf{F}}d\vec{X} = \mathbf{L}d\vec{x} \quad (3.12)$$

$$d\dot{\vec{a}} = J \left((\mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T \right) \mathbf{F}^{-T} d\vec{A} = ((\text{tr } \mathbf{L}) \mathbf{I} - \mathbf{L}^T) d\vec{a} \quad (3.13)$$

$$d\dot{v} = J(\mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) dV = (\text{tr } \mathbf{L}) dv \quad (3.14)$$

Der Punkt symbolisiert die materielle Zeitableitung. $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \text{grad } \vec{v}(\vec{x}, t)$ stellt den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten dar, der mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x}, t)$ berechnet wird. In den Gln.(3.13) und (3.14) ist die materielle Zeitableitung der Determinante des Deformationsgradienten, d.h. die Beziehung

$$\dot{J} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \frac{J}{2} \mathbf{C}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{C}} = J(\text{tr } \mathbf{L}) = J(\text{tr } \mathbf{D}) \quad (3.15)$$

verwendet worden. Von besonderem Interesse sind noch der symmetrische und anti- bzw. schiefsymmetrische Anteil von \mathbf{L}

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad \text{und} \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T), \quad (3.16)$$

welche als Verzerrungsgeschwindigkeitstensor und Wirbeltensor bezeichnet werden. Hierbei liegt offensichtlich der Zusammenhang

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \quad (3.17)$$

bzw. wegen (3.9)

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \frac{d}{dt} (\mathbf{F}^T \mathbf{A} \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \equiv \overset{\Delta}{\mathbf{A}} \quad (3.18)$$

vor, d.h. die sogenannte Oldroyd-Ableitung des Almansi-Tensors (3.8) stimmt mit dem räumlichen Verzerrungsgeschwindigkeitstensor überein:

$$\mathbf{D} = \overset{\Delta}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{L}^T \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{L} \quad (3.19)$$

²Siehe zum Beispiel OGDEN [129, S.118] oder HAUPT & TSAKMAKIS [78].

³Siehe auch OGDEN [129, S.118 f.].

⁴Siehe HAUPT [74, S.43].

Eine andere Möglichkeit zur Darstellung der die Deformation beschreibenden Tensoren verwendet die Spektraldarstellung (2.8) des rechten und linken Strecktensors

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{V} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \vec{v}_k \otimes \vec{v}_k. \quad (3.20)$$

Beide positiv definite Tensoren, $\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, 3$, haben zwar die gleichen Eigenwerte λ_k , jedoch unterschiedliche Eigenvektoren \vec{u}_k und \vec{v}_k (orthogonale Einheitsvektoren). Die Eigenwerte λ_k haben die geometrische Bedeutung von Streckungen, sie sind die sogenannten Hauptstreckungen.⁵ Offensichtlich gilt dann

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \vec{v}_k \otimes \vec{u}_k \quad \text{und} \quad \mathbf{R} = \sum_{k=1}^3 \vec{v}_k \otimes \vec{u}_k. \quad (3.21)$$

Die Cauchy-Green Tensoren (3.6) berechnen sich gemäß

$$\mathbf{C} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k^2 \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k = \sum_{k=1}^3 \mu_k \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k^2 \vec{v}_k \otimes \vec{v}_k = \sum_{k=1}^3 \mu_k \vec{v}_k \otimes \vec{v}_k. \quad (3.22)$$

Die verallgemeinerten Verzerrungstensoren (3.10)-(3.11) bilden sich mit den Eigenwerten λ_k :⁶

$$\epsilon_k^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m} (\lambda_k^m - 1) & \text{für } m \neq 0 \\ \ln \lambda_k & \text{für } m = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Sie erhalten die Darstellung⁷

$$\mathbf{E}^{(m)} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_k^{(m)} \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}^{(m)} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_k^{(m)} \vec{v}_k \otimes \vec{v}_k. \quad (3.24)$$

Es gilt unter Verwendung des Rotationstensors (3.21)₂ offensichtlich der Zusammenhang

$$\mathbf{A}^{(m)} = \mathbf{R} \mathbf{E}^{(m)} \mathbf{R}^T. \quad (3.25)$$

Man erhält in vielen Anwendungen nur eines obiger Verzerrungsmaße. Daher besteht die Frage, wie man bei Vorgabe eines Verzerrungstensors $\mathbf{E}^{(m)}$ einen anderen Verzerrungstensor $\mathbf{E}^{(l)}$,

⁵Die Streckungen λ_k werden auch als Singulärwerte bezeichnet (siehe z.B. SIMO & TAYLOR [154]), da die Darstellung (3.21)₁ an die Singulärwertzerlegung von Matrizen erinnert (siehe GOLUB & VAN LOAN [52, S.16 ff.]).

⁶Die logarithmischen Verzerrungen $\epsilon_k^{(m)} = \ln \lambda_k$ lassen sich aus dem Grenzübergang $m \rightarrow 0$ bestimmen. Mit $\lambda_k^m = e^{\ln \lambda_k^m} = e^{m \ln \lambda_k}$ folgt mit Hilfe der Regel von L'Hospital

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{\lambda_k^m - 1}{m} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{e^{m \ln \lambda_k} - 1}{m} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda_k e^{m \ln \lambda_k}}{1} = \ln \lambda_k.$$

⁷Die Eigenwerte, d.h. die Hauptverzerrungen, verschwinden im undeforinierten Zustand, $\epsilon_k^{(m)}|_{\lambda_k=1} = 0$, sind monoton steigend, $\partial \epsilon_k^{(m)} / \partial \lambda_k > 0$ für $\lambda_k > 0$ und gehen im undeforinierten Zustand alle ineinander über, $\partial \epsilon_k^{(m)} / \partial \lambda_k|_{\lambda_k=1} = 1$.

$l \neq m$, ausrechnen kann. Um dies zu zeigen, betrachten wir unter Auflösung von Gl.(3.10) nach dem rechten Strecktensor

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \frac{1}{m}(m\mathbf{E}^{(m)} + \mathbf{I})^{1/m} & \text{für } m \neq 0 \\ \exp \mathbf{E}^{(0)} & \text{für } m = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

und setzen dieses Ergebnis wiederum in Definition (3.10) ein:

$$\mathbf{E}^{(l)} = \begin{cases} \frac{1}{l} \left((m\mathbf{E}^{(m)} + \mathbf{I})^{(l/m)} - \mathbf{I} \right) & \text{für } m \neq 0 \text{ und } l \neq 0 \\ \frac{1}{l} \left((\exp \mathbf{E}^{(0)})^l - \mathbf{I} \right) & \text{für } m = 0 \text{ und } l \neq 0 \\ \frac{1}{m} \ln (m\mathbf{E}^{(m)} + \mathbf{I}) & \text{für } m \neq 0 \text{ und } l = 0 \\ \mathbf{E}^{(m)} = \mathbf{E}^{(0)} & \text{für } m = 0 \text{ und } l = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

In der Eigenwertdarstellung $\mathbf{E}^{(m)} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_k^{(m)} \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k$ erhalten wir analog

$$\lambda_k = \begin{cases} m \left(\epsilon_k^{(m)} + 1 \right)^{(1/m)} & \text{für } m \neq 0 \\ \exp \epsilon_k^{(0)} & \text{für } m = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

und damit

$$\epsilon_k^{(l)} = \begin{cases} \frac{1}{l} \left(\left(m\epsilon_k^{(m)} + 1 \right)^{(l/m)} - 1 \right) & \text{für } m \neq 0 \text{ und } l \neq 0 \\ \frac{1}{l} \left(\exp(l\epsilon_k^{(0)}) - 1 \right) & \text{für } m = 0 \text{ und } l \neq 0 \\ \frac{1}{m} \ln \left(m\epsilon_k^{(m)} + 1 \right) & \text{für } m \neq 0 \text{ und } l = 0 \\ \epsilon_k^{(m)} = \epsilon_k^{(0)} & \text{für } m = 0 \text{ und } l = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

Die zu den verallgemeinerten Verzerrungstensen (3.24)₁ zugehörigen Dehnungsgeschwindigkeiten, die wir in Abschnitt 4.1 benötigen, lassen sich folgendermaßen herleiten. Mit Hilfe der Eigenvektoren, siehe Gl.(2.10), $\vec{u}_k = \mathbf{Q}\vec{E}_k$, und deren Zeitableitungen $\dot{\vec{u}}_k = \dot{\mathbf{Q}}\vec{E}_k = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\vec{u}_k$ definieren wir den schiefsymmetrischen Tensor

$$\Omega^L = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = \sum_{k=1}^3 \dot{\vec{u}}_k \otimes \vec{u}_k = \Omega_{ij}^L \vec{u}_i \otimes \vec{u}_j \quad (3.30)$$

mit

$$\Omega_{ij}^L = \vec{u}_i \cdot \Omega^L \vec{u}_j = \vec{u}_i \cdot \dot{\vec{u}}_j = -\Omega_{ji}^L, \quad (3.31)$$

der die Drehgeschwindigkeit der Eigenvektoren gegenüber der kartesischen Basis \vec{E}_k in der Referenzkonfiguration beschreibt. Die materielle Zeitableitung der Verzerrungstensen lautet dann

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^{(m)} &= \sum_{k=1}^3 \dot{\epsilon}_k^{(m)} \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k + \sum_{k=1}^3 \epsilon_k^{(m)} \dot{\vec{u}}_k \otimes \vec{u}_k + \sum_{k=1}^3 \epsilon_k^{(m)} \vec{u}_k \otimes \dot{\vec{u}}_k = \\ &= \sum_{k=1}^3 \dot{\epsilon}_k^{(m)} \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k + \Omega^L \mathbf{E}^{(m)} - \mathbf{E}^{(m)} \Omega^L = \\ &= \sum_{k=1}^3 \dot{\epsilon}_k^{(m)} \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Omega_{ij}^L \left(\epsilon_j^{(m)} - \epsilon_i^{(m)} \right) \vec{u}_i \otimes \vec{u}_j. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Wir beschränken uns hier auf die Verzerrungen für $m = 0, 1, 2$

$$\epsilon_k^{(0)} = \ln \lambda_k, \quad \epsilon_k^{(1)} = \lambda_k - 1, \quad \epsilon_k^{(2)} = \frac{1}{2}(\lambda_k^2 - 1), \quad (3.33)$$

$$\mathbf{E}^{(0)} = \ln \mathbf{U}, \quad \mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{U} - \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}), \quad (3.34)$$

und damit auf die Verzerrungsgeschwindigkeiten

$$\dot{\epsilon}_k^{(0)} = \frac{\dot{\lambda}_k}{\lambda_k}, \quad \dot{\epsilon}_k^{(1)} = \dot{\lambda}_k, \quad \dot{\epsilon}_k^{(2)} = \lambda_k \dot{\lambda}_k = \frac{\dot{\mu}_k}{2}, \quad (3.35)$$

bzw.

$$\dot{\mathbf{E}}^{(0)} = \frac{d}{dt}(\ln \mathbf{U}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_k}{\lambda_k} \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k + \boldsymbol{\Omega}^L(\ln \mathbf{U}) - (\ln \mathbf{U})\boldsymbol{\Omega}^L, \quad (3.36)$$

$$\dot{\mathbf{E}}^{(1)} = \dot{\mathbf{U}} = \sum_{k=1}^3 \dot{\lambda}_k \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k + \boldsymbol{\Omega}^L \mathbf{U} - \mathbf{U} \boldsymbol{\Omega}^L, \quad (3.37)$$

$$\dot{\mathbf{E}}^{(2)} = \dot{\mathbf{E}} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \dot{\lambda}_k \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k + \boldsymbol{\Omega}^L \mathbf{E} - \mathbf{E} \boldsymbol{\Omega}^L = \quad (3.38)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^3 \dot{\mu}_k \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k + \boldsymbol{\Omega}^L \mathbf{C} - \mathbf{C} \boldsymbol{\Omega}^L \right). \quad (3.39)$$

3.2 Zerlegungen des Deformationsgradienten

Der Deformationsgradient stellt die grundlegende Größe zur Beschreibung der Deformation dar. Wir wiederholen hier einige kinematische und physikalische Zerlegungen, die für den Deformationsgradienten vorliegen bzw. ihm zugeordnet werden. Eine solche Zerlegung ist zum Beispiel die polare Zerlegung (3.5), bei welcher die multiplikativen Anteile der Zerlegung zu einer reinen Streckung bzw. einer reinen Rotation von materiellen Linienelementen führen. Eine weitere Zerlegung wird FLORY [48] zugeordnet, welche auf Tensoren führt, die die volumenändernde und -erhaltende Anteile des Deformationsgradienten wiedergeben. Weitere Zerlegungen unterscheiden in elastische und inelastische Anteile, wobei hier schon Vorstellungen über die zugrundeliegenden Materialmodellierung eingehen.⁸ Im folgenden diskutieren wir die multiplikativen Zerlegungen des Deformationsgradienten in volumenerhaltenden und -ändernde sowie elastische und inelastische Anteile und mögliche Koppelungen solcher Zerlegungen, da wir später ein Materialmodell basierend auf diesen Zerlegungen verwenden.

3.2.1 Volumenändernde und -erhaltende Zerlegung

Auf der Basis der Zerlegung des Deformationsgradienten⁹

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}} \quad (3.40)$$

⁸Andere Zerlegungen sind zum Beispiel die Unterscheidung in rein thermische und mechanische Anteile (siehe zum Beispiel LION [106, S. 10] und die dort zitierte Literatur). Ferner gibt es Zerlegungen in elastische und inelastische Anteile, die auf der additiven Zerlegung des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors \mathbf{D} aus Gl.(3.16)₁ oder eines modifizierten räumlichen Geschwindigkeitsgradienten basieren (siehe MIEHE [116, S.46]).

⁹Siehe FLORY [48].

in einen volumenändernden, $\hat{\mathbf{F}}$, und einen volumenerhaltenden Anteil, $\bar{\mathbf{F}}$,

$$\hat{\mathbf{F}} = J^{1/3} \mathbf{I}, \quad \det \hat{\mathbf{F}} = \det \mathbf{F} = J, \quad (3.41)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F}, \quad \det \bar{\mathbf{F}} = 1, \quad (3.42)$$

sind eine Vielzahl von Materialformulierungen entstanden, da sich eine physikalische Zuordnung der kinematischen Größen zu den noch einzuführenden Spannungen motivieren läßt. Der Zusammenhang zur polaren Zerlegung des Deformationsgradienten (3.5) ist wegen $\det \mathbf{R} = +1$ und damit wegen $J = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{U} = \det \mathbf{V}$ klar,

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{(\det \mathbf{U})^{1/3}} \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{R} \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{V}} \mathbf{R}, \quad (3.43)$$

woraus $\bar{\mathbf{U}} = (\det \mathbf{U})^{-1/3} \mathbf{U} = J^{-1/3} \mathbf{U}$ sowie $\bar{\mathbf{V}} = (\det \mathbf{V})^{-1/3} \mathbf{V} = J^{-1/3} \mathbf{V}$ folgt. Aus der Zerlegung (3.40) lassen sich Verzerrungstensoren bzw. auch andere deformationsbeschreibende Größen motivieren, wie zum Beispiel die unimodularen Rechten und Linken Cauchy-Green Tensoren

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{U}}^2 = J^{-2/3} \mathbf{C} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}}^T = \bar{\mathbf{V}}^2 = J^{-2/3} \mathbf{B}, \quad (3.44)$$

mit $\det \bar{\mathbf{C}} = \det \bar{\mathbf{B}} = 1$. Betrachten wir das Eigenwertproblem

$$(\bar{\mathbf{U}} - \bar{\lambda} \mathbf{I}) \bar{\mathbf{n}} = (J^{-1/3} \mathbf{U} - \bar{\lambda} \mathbf{I}) \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{0}},$$

so wird offensichtlich, daß die Eigenvektoren von \mathbf{U} und $\bar{\mathbf{U}}$ identisch sind und sich lediglich die Eigenwerte ändern:

$$\bar{\lambda}_k = J^{-1/3} \lambda_k, \quad k = 1, \dots, 3 \quad (3.45)$$

Damit erhalten wir die Spektraldarstellung für die unimodularen Strecktensoren

$$\bar{\mathbf{U}} = \sum_{k=1}^3 \bar{\lambda}_k \bar{\mathbf{u}}_k \otimes \bar{\mathbf{u}}_k \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathbf{V}} = \sum_{k=1}^3 \bar{\lambda}_k \bar{\mathbf{v}}_k \otimes \bar{\mathbf{v}}_k \quad (3.46)$$

sowie die unimodularen Cauchy-Green Tensoren

$$\bar{\mathbf{C}} = \sum_{k=1}^3 \bar{\lambda}_k^2 \bar{\mathbf{u}}_k \otimes \bar{\mathbf{u}}_k = \sum_{k=1}^3 \bar{\mu}_k \bar{\mathbf{u}}_k \otimes \bar{\mathbf{u}}_k \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathbf{B}} = \sum_{k=1}^3 \bar{\lambda}_k^2 \bar{\mathbf{v}}_k \otimes \bar{\mathbf{v}}_k = \sum_{k=1}^3 \bar{\mu}_k \bar{\mathbf{v}}_k \otimes \bar{\mathbf{v}}_k \quad (3.47)$$

mit den Eigenwerten

$$\bar{\mu}_k = \bar{\lambda}_k^2 = J^{-2/3} \lambda_k^2 = J^{-2/3} \mu_k. \quad (3.48)$$

Hiermit lassen sich dann ebenfalls verallgemeinerte Verzerrungstensoren analog zu (3.10)-(3.11) motivieren:¹⁰

$$\bar{\mathbf{E}}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m} (\bar{\mathbf{U}}^m - \mathbf{I}) & \text{für } m \neq 0 \\ \ln \bar{\mathbf{U}} & \text{für } m = 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

bzw.

$$\bar{\mathbf{A}}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m} (\bar{\mathbf{V}}^m - \mathbf{I}) & \text{für } m \neq 0 \\ \ln \bar{\mathbf{V}} & \text{für } m = 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

¹⁰Diese sind in SIMO & TAYLOR [154, S.279] eingeführt worden.

Auch hier, siehe Gl.(3.25), gilt der Zusammenhang

$$\overline{\mathbf{A}}^{(m)} = \mathbf{R}\overline{\mathbf{E}}^{(m)}\mathbf{R}^T. \quad (3.51)$$

Für $m = 2$ bzw. $m = -2$ erhalten wir wieder die entsprechenden ‘Greenschen’ und ‘Almansischen’ Verzerrungstensoren

$$\overline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{F}}^T\overline{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \quad (3.52)$$

und

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{F}^{-T}\overline{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1} = \frac{J^{-2/3}}{2}(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{F}}^{-T}\overline{\mathbf{F}}^{-1}). \quad (3.53)$$

Auf der durch die Zerlegung 3.40 implizierten volumenerhaltenden Zwischenkonfiguration $\overline{\mathcal{B}}_t$, siehe Abb. 3.2, operiert der Tensor

$$\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{F}}^{-T}\overline{\mathbf{E}}\overline{\mathbf{F}}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{F}}^{-T}\overline{\mathbf{F}}^{-1}), \quad (3.54)$$

der vom Almansi-Typ ist, jedoch die rein volumenerhaltenden Verzerrungen mißt.

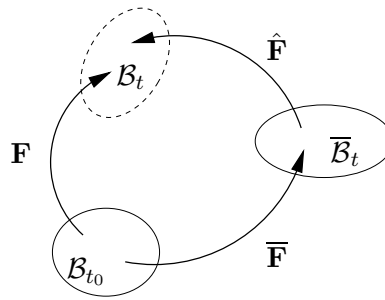


Abbildung 3.2: Konfigurationen der volumenerhaltenden und -ändernden Zerlegung

Wir kommen im folgenden auf die materielle Zeitableitung der die Kinematik beschreibenden volumenerhaltenden Größen zu sprechen. Aus Gl.(3.15) folgt zunächst

$$\frac{d}{dt}(J^{-1/3}) = -\frac{1}{3}J^{-1/3}(\text{tr } \mathbf{L}) \quad \text{sowie} \quad \frac{d}{dt}(J^{1/3}) = \frac{1}{3}J^{1/3}(\text{tr } \mathbf{L}). \quad (3.55)$$

Unter Zuhilfenahme von Gl.(3.55)₁ berechnen wir die materielle Zeitableitung des volumenerhaltenden Anteils des Deformationsgradienten aus Gl.(3.42)₁

$$\dot{\overline{\mathbf{F}}} = \frac{d}{dt}(J^{-1/3}\mathbf{F}) = J^{-1/3} \left(-\frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{L})\mathbf{I} + \mathbf{L} \right) \mathbf{F} = \mathbf{L}^D\overline{\mathbf{F}}, \quad (3.56)$$

wobei wir

$$\overline{\mathbf{L}} \equiv \mathbf{L}^D = \dot{\overline{\mathbf{F}}}\overline{\mathbf{F}}^{-1} \quad (3.57)$$

definieren. Des weiteren resultiert unter Verwendung der materiellen Zeitableitung des volumenändernden Anteils des Deformationsgradienten (3.41)₁ bei Ausnutzung von Beziehung (3.55)₂,

$$\dot{\overline{\mathbf{F}}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{F}\overline{\mathbf{F}}^{-1}) = J^{1/3}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^D) = J^{1/3}\frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{L})\mathbf{I} \quad (3.58)$$

bzw. $\dot{\hat{\mathbf{F}}} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{F}}$ mit $\hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{L})\mathbf{I}$, d.h. die Zerlegung (3.40) führt auf die additive Zerlegung des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} in Kugel- und Deviatoranteil

$$\mathbf{L} = \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{L})\mathbf{I} + \mathbf{L}^D = \hat{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{L}}. \quad (3.59)$$

Aufbauend auf den materiellen Zeitableitungen der volumenerhaltenden materiellen und räumlichen Geschwindigkeitsgradienten (3.56) und (3.57) definieren wir den volumenerhaltenden Deformationsgeschwindigkeits- und Wirbeltensor

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{L}}^T) \quad \text{sowie} \quad \bar{\mathbf{W}} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{L}} - \bar{\mathbf{L}}^T), \quad (3.60)$$

wobei Ersterer mit der Zeitableitung von (3.52) über

$$\dot{\bar{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2}\dot{\bar{\mathbf{C}}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(J^{-2/3}\mathbf{C}) = \bar{\mathbf{F}}^T\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{F}} \quad (3.61)$$

zusammenhängt. Wegen der Spurfreiheit des Wirbeltensors, $\text{tr } \mathbf{W} = 0$ sowie (3.57), gilt dann auch

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}^D, \quad (3.62)$$

welcher wiederum mit einer Relativableitung des Tensors (3.54) zusammenhängt:

$$\overset{\blacktriangle}{\mathbf{a}} \equiv \dot{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{L}}^T\mathbf{a} + \mathbf{a}\bar{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{D}} \quad (3.63)$$

$$= \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{L}^D\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{L}^D = \mathbf{D}^D \quad (3.64)$$

3.2.2 Elastisch-viskose Zerlegung

Die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e\mathbf{F}_v \quad (3.65)$$

in einen elastischen Anteil \mathbf{F}_e , $\det \mathbf{F}_e > 0$, und einen inelastischen Anteil \mathbf{F}_v , $\det \mathbf{F}_v > 0$, ist von LEE & LIU [99] bzw. LEE [98] aufgegriffen worden. Der inelastische Anteil \mathbf{F}_v wird von ihnen im Zusammenhang von Problemen der geschwindigkeitsunabhängigen Plastizität auch mit \mathbf{F}_p bezeichnet und ist mittels zu definierender Materialgleichungen zu bestimmen. Nach den dort entstandenen Vorstellungen bleiben nach einer fiktiven lokalen Entlastung die durch den plastischen Anteil definierten plastischen Verzerrungen übrig, $\mathbf{E}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_p^T\mathbf{F}_p - \mathbf{I})$. In der Theorie der finiten Viskoelastizität ist ebenfalls diese multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten eingeführt worden. Eine mikromechanische Motivation der Zerlegung ist in REESE [137, Abschn.3.2.2] basierend auf den Arbeiten von GREEN & TOBOLSKY [55] und LUBLINER [108] ausführlich dargestellt. Man könnte sich diese Zerlegung auch an einem rheologischen Modell eines Maxwell-Körpers, d.h. der Hintereinanderschaltung einer Feder und eines Dämpferelementes motivieren, bei welchem der Anteil \mathbf{F}_e der Deformation der elastischen Feder und \mathbf{F}_v der Deformation des Dämpfers zugeordnet wird. In dem später verwendeten Materialmodell wird hingegen nicht nur eine Zerlegung (3.65), sondern mehrere Zerlegungen der Form

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{ek}\mathbf{F}_{vk}, \quad k = 1, \dots, n_{ov} \quad (3.66)$$

eingeführt. Obige mikromechanische Motivation läßt dann keine plausible Begründung dieser Zerlegung erkennen. Die Motivation schließt sich hier der Entwicklung von Konstitutivmodellen auf der Basis von rheologischen Ersatzmodellen an, die in Abschnitt 4.4 folgen werden. Die Einführung der Zerlegungen (3.66) impliziert die Vorstellung verschiedener und zwar n_{ov} Zwischenkonfigurationen. In den Abbildungen 3.5-3.7 sind Verzerrungs- und Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren vom Green und Almansi-Typ sowie Tensoren der zugehörigen Zwischenkonfigurationen und deren Transformationseigenschaften angegeben, wie sie aus der Literatur zur Metallplastizität bekannt sind.¹¹

Die Kombination der Zerlegung (3.40) sowie (3.66) erhält man durch die Zerlegung

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_{ek} \bar{\mathbf{F}}_{vk}, \quad k = 1, \dots, n_{ov} \quad (3.67)$$

womit sich der gesamte Deformationsgradient in

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}}_{ek} \bar{\mathbf{F}}_{vk} = J^{1/3} \bar{\mathbf{F}}_{ek} \bar{\mathbf{F}}_{vk}, \quad k = 1, \dots, n_{ov} \quad (3.68)$$

aufspaltet, $J = (\det \mathbf{F}_{ek})(\det \mathbf{F}_{vk}) = \det \mathbf{F}$ (siehe Abb. 3.3). Dabei gilt

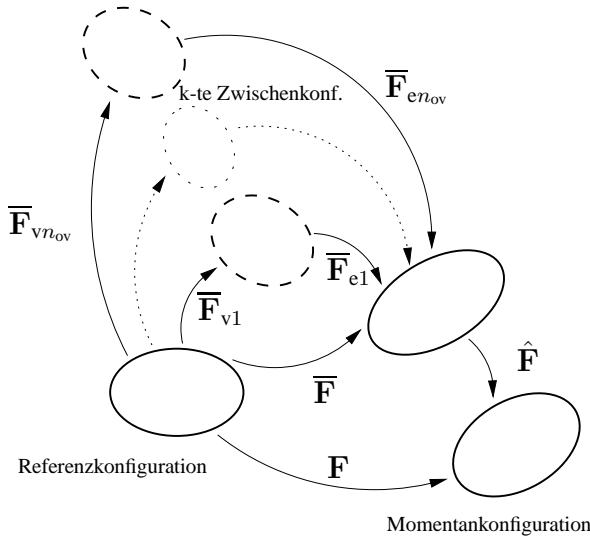


Abbildung 3.3: Einführung mehrerer inelastischer Zwischenkonfigurationen

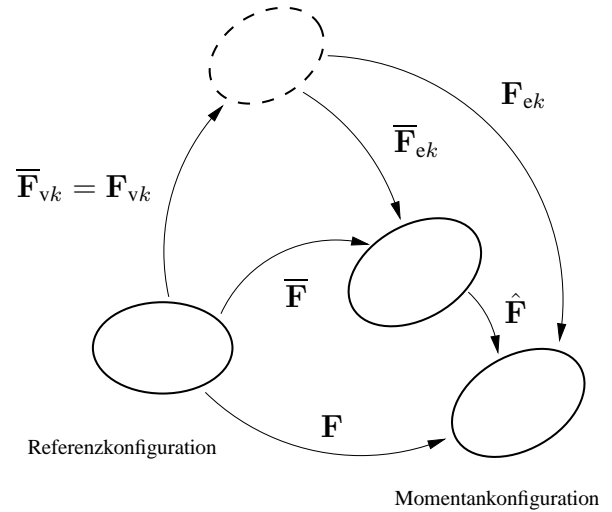


Abbildung 3.4: Isochore inelastische Zwischenkonfiguration

$$\bar{\mathbf{F}}_{ek} = (\det \mathbf{F}_{ek})^{-1/3} \mathbf{F}_{ek} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{F}}_{vk} = (\det \mathbf{F}_{vk})^{-1/3} \mathbf{F}_{vk}. \quad (3.69)$$

Aus der Zerlegung (3.67) resultieren weitere Verzerrungstensoren und deren Zeitableitungen, die wir hier nicht näher untersuchen wollen. Lediglich die unimodularen elastischen Rechten und Linken Cauchy-Green Tensoren definieren wir hier mit

$$\bar{\mathbf{C}}_{ek} = \bar{\mathbf{F}}_{ek}^T \bar{\mathbf{F}}_{ek}, \quad \bar{\mathbf{B}}_{ek} = \bar{\mathbf{F}}_{ek} \bar{\mathbf{F}}_{ek}^T. \quad (3.70)$$

Auf eine besondere Eigenschaft wollen wir jedoch noch eingehen. Hierzu betrachten wir analog zu Gl.(3.56) die materielle Zeitableitung des unimodularen inelastischen Anteils $\bar{\mathbf{F}}_{vk}$ des volumenerhaltenden Anteils des Deformationsgradienten $\bar{\mathbf{F}}$:

$$\dot{\bar{\mathbf{F}}}_{vk} = \frac{d}{dt} ((\det \mathbf{F}_{vk})^{-1/3} \mathbf{F}_{vk}) = (\det \mathbf{F}_{vk})^{-1/3} \left(-\frac{1}{3} (\text{tr} \mathbf{L}_{vk}) \mathbf{I} + \mathbf{L}_{vk} \right) \mathbf{F}_{vk} = \bar{\mathbf{L}}_{vk} \bar{\mathbf{F}}_{vk}, \quad (3.71)$$

¹¹Siehe zum Beispiel HAUPT & TSAKMAKIS [77] bzw. auch HARTMANN [60] und die dort zitierte Literatur.

mit

$$\bar{\mathbf{L}}_{vk} \equiv \mathbf{L}_{vk}^D = \dot{\bar{\mathbf{F}}}_{vk} \bar{\mathbf{F}}_{vk}^{-1}. \quad (3.72)$$

Wegen $\frac{d}{dt}(\det \bar{\mathbf{F}}_{vk}) = (\det \bar{\mathbf{F}}_{vk}) \bar{\mathbf{F}}_{vk}^{-T} \cdot \dot{\bar{\mathbf{F}}}_{vk} = \bar{\mathbf{F}}_{vk}^{-T} \cdot \dot{\bar{\mathbf{F}}}_{vk} = \text{tr } \bar{\mathbf{L}}_{vk} = 0$, $\det \bar{\mathbf{F}}_{vk} = 1$, ist der Tensor $\bar{\mathbf{L}}_{vk}$ immer ein Deviator. Weiterhin führt die Vortransformation von $\dot{\bar{\mathbf{E}}}_{vk}$ auf eine deviatorische Verzerrungsgeschwindigkeit operierend auf der inelastischen Zwischenkonfiguration

$$\bar{\mathbf{F}}_{vk}^{-T} \dot{\bar{\mathbf{E}}}_{vk} \bar{\mathbf{F}}_{vk}^{-1} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{L}}_{vk} + \bar{\mathbf{L}}_{vk}^T) = \mathbf{D}_{vk}^D = \bar{\mathbf{D}}_{vk}. \quad (3.73)$$

Diese stimmt mit der Oldroyd-Ableitung, gebildet mit $\bar{\mathbf{L}}_{vk}$, des inelastischen Verzerrungstensors überein,

$$\overset{\Delta}{\bar{\Gamma}}_{vk} = \dot{\bar{\Gamma}}_{vk} + \bar{\mathbf{L}}_{vk}^T \bar{\Gamma}_{vk} + \bar{\Gamma}_{vk} \bar{\mathbf{L}}_{vk} = \bar{\mathbf{D}}_{vk} \quad (3.74)$$

$$= \dot{\bar{\Gamma}}_{vk} + \mathbf{L}_{vk}^{D^T} \bar{\Gamma}_{vk} + \bar{\Gamma}_{vk} \mathbf{L}_{vk}^D = \mathbf{D}_{vk}^D \quad (3.75)$$

die einen Deviator darstellt.

Ein Zusammenhang der Zerlegung (3.66) und (3.68) liegt im Hinblick auf die später verwendeten Materialgleichungen vor, wenn die inelastische Zwischenkonfiguration isochor ist, $\det \mathbf{F}_{vk} = 1 \rightarrow \mathbf{F}_{vk} = \bar{\mathbf{F}}_{vk}$. In diesem Augenblick stimmen dann $\mathbf{F}_{ek} = \hat{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}}_{ek}$ überein, siehe Abb. 3.4, so daß $\overset{\Delta}{\bar{\Gamma}}_{vk} = \overset{\Delta}{\Gamma}_{vk}$ gilt. Für diesen Fall sind die Verzerrungs- und Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren der Referenz-, Momentan- und Zwischenkonfiguration in den Abb. 3.5-3.7 aufgeführt.

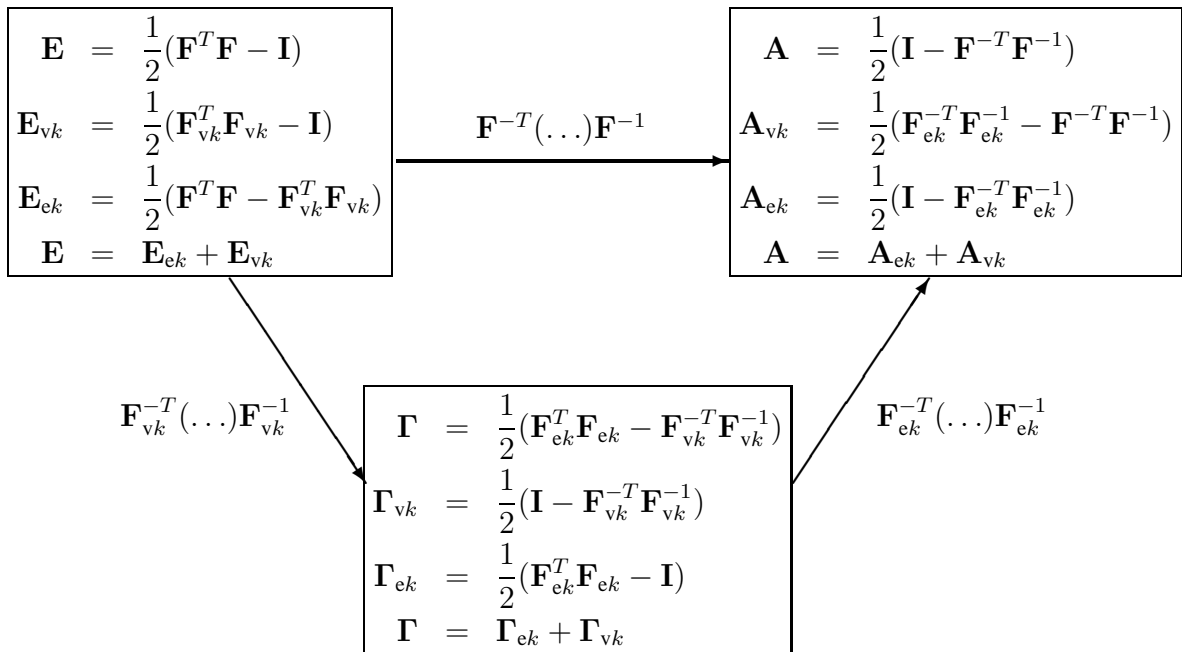


Abbildung 3.5: Verzerrungstensoren und deren Transformationseigenschaften ($k = 1, \dots, n_{ov}$)

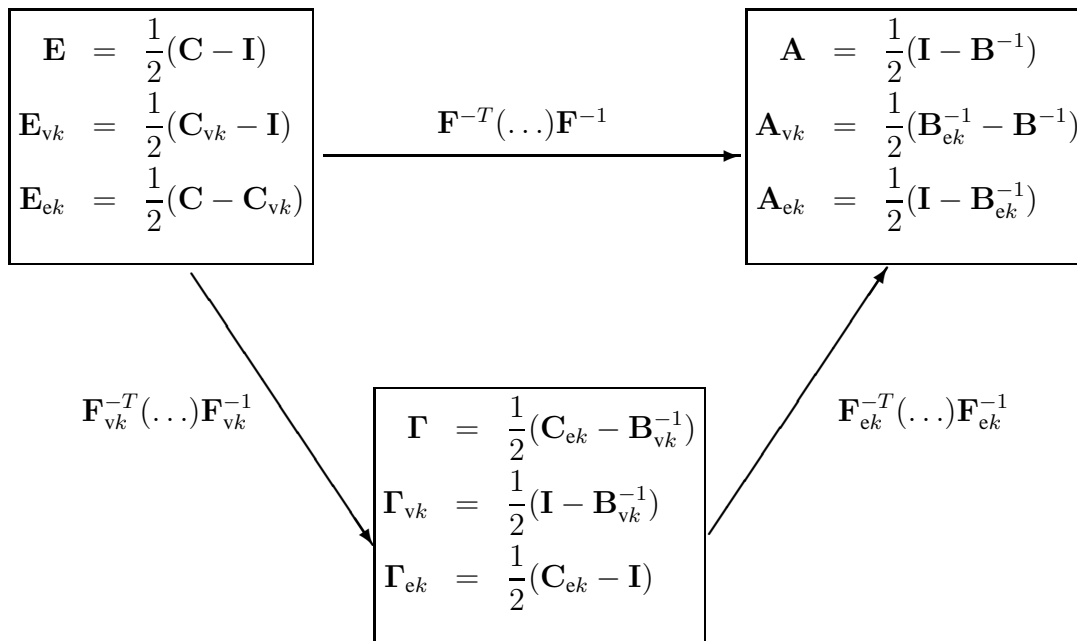


Abbildung 3.6: Verzerrungstensoren ausgedrückt durch Rechte und Linke Cauchy-Green Tensoren ($k = 1, \dots, n_{ov}$)

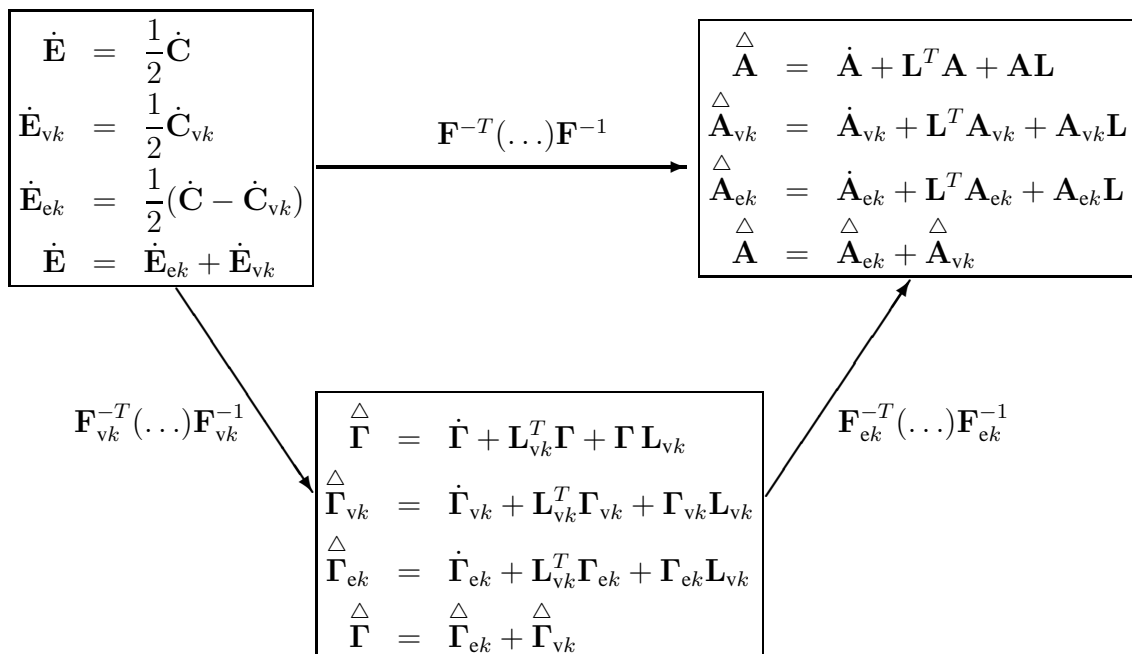


Abbildung 3.7: Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren und deren Transformationseigenschaften ($k = 1, \dots, n_{ov}$)

3.3 Bilanzgleichungen und Spannungstensoren

In den vorherigen Abschnitten sind kurz die kinematischen Grundlagen zur Beschreibung finiter Verzerrungen zusammengefaßt worden. Wir müssen nunmehr noch Bilanzgleichungen für Masse, Impuls, Drehimpuls, Energie und Entropie anführen. Bilanzgleichungen entstehen durch Herausschneiden des betrachteten materiellen Körpers aus seiner Umgebung und der “Bilanzierung” einer dem Körper zugeordneten physikalischen Größe mit Einfluß- bzw. Transportgrößen, die zu einer zeitlichen Änderung der physikalischen Größe führen. Diese Transportgrößen wirken auf die Oberfläche des Körpers bzw. können auch eine volumenhaft angreifende Wirkung haben. In HAUPT [73, S.27 ff.] ist die allgemeine Struktur von Bilanzgleichungen angegeben, bei welcher die zeitliche Änderung einer skalar- oder vektorwertigen Funktion, ψ bzw. $\vec{\psi}$, gleich der von der äußeren Umgebung über die Oberfläche des materiellen Körpers sowie der auf das Volumen einwirkenden Größen ist:¹²

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_v \psi(\vec{x}, t) \rho(\vec{x}, t) dv &= \int_a \phi(\vec{x}, t) da + \int_v (\sigma(\vec{x}, t) + p(\vec{x}, t)) dv \\ \frac{d}{dt} \int_v \vec{\psi}(\vec{x}, t) \rho(\vec{x}, t) dv &= \int_a \vec{\phi}(\vec{x}, t) da + \int_v (\vec{\sigma}(\vec{x}, t) + \vec{p}(\vec{x}, t)) dv \end{aligned} \quad (3.76)$$

$\rho(\vec{x}, t)$ stellt die Massendichte des Körpers dar. σ bzw. $\vec{\sigma}$ ist der volumenhaft einwirkende Transport, der eine zeitliche Änderung der physikalischen Größe ψ bzw. $\vec{\psi}$ bewirkt. p bzw. \vec{p} stellen Produktionsterme dar. Mit Hilfe des Lemmas von Cauchy, bei welchem die Oberflächendichte ϕ bzw. $\vec{\phi}$ linear von der Oberflächennormalen \vec{n} abhängt, $\phi = \vec{\Phi} \cdot \vec{n}$ bzw. $\vec{\phi} = \mathbf{\Phi} \vec{n}$, resultieren die in Tab. 3.1 dargestellten Bilanzgleichungen. Die Größen $\vec{\Phi}$ und $\mathbf{\Phi}$ werden auch als

Tabelle 3.1: Größen in Bilanzgleichungen

	$\psi, \vec{\Psi}$	$\vec{\Phi}, \mathbf{\Phi}$	$\sigma, \vec{\sigma}$	p, \vec{p}
Masse	1	$\vec{0}$	0	0
Impuls	\vec{v}	\mathbf{T}	$\rho \vec{k}$	$\vec{0}$
Drehimpuls	$(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{v}$	$(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \mathbf{T}$	$(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \rho \vec{k}$	$\vec{0}$
Energie	$e + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}$	$\mathbf{T}^T \vec{v} - \vec{q}$	$\rho(\vec{k} \cdot \vec{v} + r)$	0
Entropie	s	$-\frac{1}{\theta} \vec{q}$	$\frac{r}{\theta} \rho$	$\gamma \geq 0$
Mechanische Energie	$\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}$	$\mathbf{T}^T \vec{v}$	$\rho \vec{k} \cdot \vec{v} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$	0

Flüsse bezeichnet. Die Bilanz der mechanischen Energie in Tab. 3.1 ist eine Folgerung aus der Massen-, Impuls- und Drehimpulsbilanz und stellt daher keine unabhängige Bilanzrelation dar. Sie hat jedoch die Struktur einer Bilanzgleichung und ist daher in Tab. 3.1 aufgenommen. In Tab. 3.1 treten die folgenden Größen der Momentankonfiguration auf: Die Dichte $\rho(\vec{x}, t)$, das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x}, t)$, der Cauchysche Spannungstensor $\mathbf{T}(\vec{x}, t)$, die Volumenkraftdichte¹³ \vec{k} , der Bezugspunkt \vec{x}_0 , die spezifische innere Energie $e(\vec{x}, t)$, der Wärmeflußvektor $\vec{q}(\vec{x}, t)$,

¹²Siehe auch HAUPT [74, Ch. 3.5.3].

¹³Diese ist in den hier gewählten Anwendungen orts- und zeitunabhängig.

die räumlich verteilte Wärmequelle $r(\vec{x}, t)$, die Entropiedichte $s(\vec{x}, t)$ sowie die nicht-negative Entropieproduktion $\gamma(\vec{x}, t) \geq 0$. Der Term $\frac{r}{\theta}$ stellt die Entropiezufuhr pro Masseneinheit und der Term $-\frac{1}{\theta}\vec{q}$ den Entropiefluß über die Oberfläche mit der absoluten Temperatur $\theta > 0$ dar. Der Entropietransport kann in dieser Form in der Entropiebilanz angenommen werden, wenn die thermodynamischen Prozesse in asymptotischer Nähe von Gleichgewichtsprozessen ablaufen.

Aus obigen Bilanzrelationen resultieren lokale Bilanzgleichungen in räumlicher Darstellung, die in Tab. 3.2 aufgeführt sind. Hierbei ist zusätzlich die Umsetzung einer nicht-negativen Entro-

Tabelle 3.2: Lokale Bilanzgleichungen in räumlicher Darstellung

Massenbilanz	$\frac{d\rho(\vec{x}, t)}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.77)$
	$\text{bzw.} \quad \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.78)$
Impulsbilanz	$\operatorname{div} \mathbf{T}(\vec{x}, t) + \rho \vec{k} = \rho \frac{d\vec{v}(\vec{x}, t)}{dt} \quad (3.79)$
Drehimpulsbilanz	$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad (3.80)$
Energiebilanz	$\frac{de(\vec{x}, t)}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q}(\vec{x}, t) + r + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (3.81)$
Entropiebilanz	$\frac{ds(\vec{x}, t)}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \frac{\vec{q}(\vec{x}, t)}{\theta(\vec{x}, t)} + \sigma + \gamma \quad (3.82)$
Entropieungleichung	$\theta \gamma = -\dot{e} + \theta \dot{s} + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \frac{1}{\theta \rho} \vec{q} \cdot \vec{g} \geq 0 \quad (3.83)$

Tabelle 3.3: Lokale Bilanzgleichungen in materieller Darstellung

Massenbilanz	$\frac{\partial \rho_{\mathbf{R}}(\vec{X}, t)}{\partial t} = 0 \longrightarrow \rho_{\mathbf{R}}(\vec{X}) \quad (3.84)$
	$\rho_{\mathbf{R}} = \rho J \quad (3.85)$
Impulsbilanz	$\operatorname{Div} \mathbf{T}_{\mathbf{R}}(\vec{X}, t) + \rho_{\mathbf{R}} \vec{k} = \rho_{\mathbf{R}} \frac{\partial \vec{v}(\vec{X}, t)}{\partial t} \quad (3.86)$
Drehimpulsbilanz	$\mathbf{T}_{\mathbf{R}} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{T}_{\mathbf{R}}^T \quad (3.87)$
Energiebilanz	$\frac{\partial e(\vec{X}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_{\mathbf{R}}} \operatorname{Div} \vec{q}_{\mathbf{R}}(\vec{X}, t) + r + \frac{1}{\rho_{\mathbf{R}}} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} \quad (3.88)$
Entropiebilanz	$\frac{\partial s(\vec{X}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_{\mathbf{R}}} \operatorname{Div} \frac{\vec{q}_{\mathbf{R}}(\vec{X}, t)}{\theta(\vec{X}, t)} + \sigma + \gamma \quad (3.89)$
Entropieungleichung	$\theta \gamma = -\dot{e} + \theta \dot{s} + \frac{1}{\rho_{\mathbf{R}}} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{\theta \rho_{\mathbf{R}}} \vec{q}_{\mathbf{R}} \cdot \vec{g}_{\mathbf{R}} \geq 0 \quad (3.90)$

pieproduktion, $\gamma \geq 0$, angeführt, welche man als Dissipationsungleichung, $\theta \gamma \geq 0$, bezeichnet.

$\gamma \geq 0$ ist die in der Kontinuumsmechanik verwendete Formulierung des 2-ten Hauptsatzes der Thermodynamik.

Die Darstellung mit Größen in Bezug auf die Referenzkonfiguration sowie deren materielle Darstellung ist in Tab. 3.3 abgebildet, dabei ist $\rho_R(\vec{X})$ die Dichte in der Referenzkonfiguration, $\mathbf{T}_R = J\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}$ der 1-te Piola-Kirchhoff Tensor sowie $\vec{g} = \text{grad } \theta(\vec{x}, t)$ und $\vec{g}_R = \text{Grad } \theta(\vec{X}, t)$ die Temperaturgradienten. $\text{Grad} = \frac{\partial}{\partial X^K} \vec{G}^K$ beschreibt den Gradienten mit Ableitungen nach den materiellen Koordinaten und $\text{grad} = \frac{\partial}{\partial x^k} \vec{g}^k$ den Gradienten der räumlichen Koordinaten (\vec{G}^K und \vec{g}^k stellen die Gradientenvektoren der jeweiligen Koordinatenflächen dar). div und Div symbolisieren die jeweiligen Divergenzoperatoren.

Von besonderem Interesse sind weitere Spannungstensoren. Der Cauchysche Spannungstensor ist schon in den Bilanzrelationen der Tab. 3.1 aufgetreten und durch Auswertung der lokalen Drehimpulsbilanz symmetrisch (siehe Tab. 3.2). Er tritt insbesondere in der Energiebilanz in dem Term $\frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$ auf, den man als spezifische Spannungsleistung p_i bezeichnet. Diese führt, ausgedrückt mit Größen der Referenzkonfiguration, auf den 2-ten Piola-Kirchhoff Tensor $\tilde{\mathbf{T}} = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}$,

$$p_i = \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}}, \quad (3.91)$$

wobei wir die Massenbilanz, $\rho_R = \rho J$ aus Tab. 3.3 sowie die Transformationseigenschaften (3.17) ausnutzen. Ein häufig verwendeter weiterer Spannungstensor ist der Kirchhoffsche bzw. gewichtete Cauchy-Tensor $\mathbf{S} = J\mathbf{T}$. In Tab. 3.4 sind die Beziehungen der Spannungstensoren

Tabelle 3.4: Umrechnungstabelle der verwendeten Spannungen: 1-te Piola-Kirchhoff Spannung \mathbf{T}_R , 2-te Piola-Kirchhoff-Spannung $\tilde{\mathbf{T}}$, Kirchhoff-Spannung \mathbf{S} , Cauchy-Spannung \mathbf{T}

	\mathbf{T}_R	$\tilde{\mathbf{T}}$	\mathbf{S}	\mathbf{T}
\mathbf{T}_R		$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{T}}$	$\mathbf{S}\mathbf{F}^{-T}$	$J\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}$
$\tilde{\mathbf{T}}$	$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}_R$		$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{F}^{-T}$	$J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}$
\mathbf{S}	$\mathbf{T}_R\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{T}_R^T$	$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{F}^T$		$J\mathbf{T}$
\mathbf{T}	$\frac{1}{J}\mathbf{T}_R\mathbf{F}^T = \frac{1}{J}\mathbf{F}\mathbf{T}_R^T$	$\frac{1}{J}\mathbf{F}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{F}^T$	$\frac{1}{J}\mathbf{S}$	

untereinander zusammengestellt. Die Wahl der geeigneten Spannungs- und Verzerrungsvariablen zur Materialmodellierung ist immer noch Gegenstand der Forschung. Sie hängt von der geometrischen Deutung und der Eignung zur Anpassung an experimentelle Ergebnisse ab. Die Wahl eines zu einem geeigneten Verzerrungstensor zugeordneten Spannungstensors wird in den Arbeiten von HILL [79] sowie HAUPT & TSAKMAKIS [77, 78] beschrieben und ist mit den Begriffen von konjugierten und dualen Variablen verbunden. Eine detaillierte Diskussion ist in HAUPT & TSAKMAKIS [78] und OGDEN [129] sowie in der dort zitierten Literatur zu finden. Um zu den in Gl.(3.10) eingeführten verallgemeinerten Verzerrungstensoren $\mathbf{E}^{(m)}$ zugehörigen Spannungstensoren $\mathbf{T}^{(m)}$ zu gelangen, geht man von der spezifischen Spannungsleistung (3.91) aus, $p_i = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{T}^{(m)} \cdot \dot{\mathbf{E}}^{(m)}$. Danach definieren wir den 2-ten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor $\mathbf{T}^{(2)} \equiv \tilde{\mathbf{T}}$ als den zum Greenschen Verzerrungstensor $\mathbf{E}^{(2)} \equiv \mathbf{E}$ konjugierten Spannungstensor. Für einige später noch durchzuführenden Untersuchungen, siehe Abschnitt 4.1, benötigen wir noch die zu $\mathbf{E}^{(0)} = \ln \mathbf{U}$ und $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$ zugehörigen Spannungstensoren $\mathbf{T}^{(0)}$ und $\mathbf{T}^{(1)}$. Wir

beginnen zunächst mit $m = 1$, woraus mit $\mathbf{E} = 1/2(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I})$ durch Umrechnen

$$p_i = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{T}^{(1)} \cdot \dot{\mathbf{E}}^{(1)} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{U} + \mathbf{U}\tilde{\mathbf{T}}) \cdot \dot{\mathbf{U}}. \quad (3.92)$$

folgt. Den Spannungstensor

$$\mathbf{T}^{(1)} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{U} + \mathbf{U}\tilde{\mathbf{T}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{R}^T \mathbf{S} \mathbf{R}) + (\mathbf{R}^T \mathbf{S} \mathbf{R})\mathbf{U}^{-1}) \quad (3.93)$$

bezeichnet man auch als *Biotschen-Spannungstensor*.

Die Bestimmung des konjugierten Spannungstensors zu $\mathbf{E}^{(0)} = \ln \mathbf{U}$ ist komplizierter. Lediglich unter der Voraussetzung, daß das Produkt aus $\ln \mathbf{U}$ und dem Tensor

$$\mathbf{T}^{(0)} = \mathbf{T}^{(1)}\mathbf{U} = \mathbf{R}^T \mathbf{S} \mathbf{R} = \mathbf{U}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{U} \quad (3.94)$$

einen symmetrischen Tensor bildet, $\mathbf{T}^{(0)}(\ln \mathbf{U}) = (\ln \mathbf{U})\mathbf{T}^{(0)}$, sind diese zueinander konjugiert. Diese Bedingung impliziert die Koaxialität von $\mathbf{T}^{(0)}$ und $\ln \mathbf{U}$. Da dies in den in Abschnitt 4.1 durchgeführten Untersuchungen bei isotropen Elastizitätsbeziehungen der Fall ist, wenden wir diese Eigenschaft an.¹⁴ Zur Überprüfung der Beziehung $p_i = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{T}^{(0)} \cdot \frac{d}{dt}(\ln \mathbf{U})$ bilden wir unter der Annahme der Koaxialität

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} &= \left(\sum_{k=1}^3 \tilde{t}_k \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_j \dot{\lambda}_j \vec{u}_j \otimes \vec{u}_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\Omega_{ij}^L}{2} (\lambda_j^2 - \lambda_i^2) \vec{u}_i \otimes \vec{u}_j \right) = \\ &= \mathbf{T}^{(0)} \cdot \frac{d}{dt}(\ln \mathbf{U}) = \left(\sum_{k=1}^3 t_k^{(0)} \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_j}{\lambda_j} \vec{u}_j \otimes \vec{u}_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\Omega_{ij}^L}{2} (\ln \lambda_j - \ln \lambda_i) \vec{u}_i \otimes \vec{u}_j \right) = \\ &= \sum_{k=1}^3 \tilde{t}_k \lambda_k \dot{\lambda}_k = \sum_{k=1}^3 t_k^{(0)} \frac{\dot{\lambda}_k}{\lambda_k} \end{aligned}$$

bzw. $t_k^{(0)} = \tilde{t}_k \lambda_k^2$, siehe Gl.(3.94).

Aufbauend auf diesen Spannungstensen und den Deformationstensen aus den Abschnitten 3.1 und 3.2 schließen sich Untersuchungen des folgenden Kapitels an.

¹⁴Eine detaillierte Diskussion hierzu ist in OGDEN [129, S.160ff] zu finden.

Kapitel 4

Materialmodellierung

In den 40-ziger und 50-ziger Jahren entwickelte sich ein Aufschwung in der Modellierung von Elastomerwerkstoffen, die jedoch vorwiegend auf hyperelastischen Materialbeziehungen basierte. Rußgefüllte Elastomere weisen jedoch nicht nur rein elastische Materialeigenschaften, sondern auch inelastische Deformationen auf. Diese können zum einen aus geschwindigkeitsabhängigen Phänomenen und zum anderen auch aus bleibenden Deformationen bestehen. In den letzten Jahren entstand eine Art Renaissance sowohl in der Durchführung von Experimenten und der Modellierung als auch in der numerischen Simulation. Dabei stand die Beschreibung der geschwindigkeitsabhängigen Effekte sowie die Umsetzung der Modelle in Finite-Elemente Programme im Vordergrund.¹

Es gibt eine Reihe von Anwendungen solcher Elastomere, die vorwiegend Bauteile wie Dämpfungselemente, Dichtungen und Fahrzeugreifen umfassen. Die Modellierung dieser Werkstoffe wird dabei mit rein phänomenologischen Theorien oder mit Modellen, die auf die Mikrostruktur der Elastomere eingehen, durchgeführt. Diese Arbeit beschränkt sich zum einen auf eine rein phänomenologische Theorie, die die Effekte von Spannungs-Dehnungs- bzw. Kraft-Verschiebungszusammenhängen² mit Gleichungen beschreibt, zum anderen sollen rein isotherme Prozesse vorliegen. Eine umfassende Darstellung von rußgefüllten Elastomeren und deren Materialeigenschaften sowie deren phänomenologische Beschreibung ist in LION [106] zusammengefaßt.

Das hier vorgestellte bzw. untersuchte Modell basiert im wesentlichen auf den Arbeiten von LUBLINER [108], LION [102, 103, 104] und HAUPT & SEDLAN [76, 146, 147]. Darin sind folgende Gesichtspunkte enthalten: Der Deformationsgradient wird in einen volumenerhaltenden und einen volumenändernden Anteil zerlegt, siehe Gl.(3.40). Der volumenerhaltende Anteil des Deformationsgradienten wird wiederum (mehrfach) multiplikativ in elastische und inelastische Anteile zerlegt, siehe Gl.(3.66). Weiterhin wird eine Formänderungsenergie eingeführt, die sich in zwei Anteile aufspaltet. Der erste Anteil resultiert aus der gesamten Deformation und der zweite Anteil aus den isochoren elastischen Deformationen. Die Auswertung der Dissipationsungleichung für isotherme Prozesse führt dann bei einer Aufspaltung der Spannungen in Gleichgewichts- und Überspannungen auf die konstitutiven Beziehungen für die eingeführten Spannungsmaße. Die Vorgehensweise hat den Vorteil einer definierten Abhängigkeit der hydrostatischen Spannungen von dem volumenändernden Anteil der Deformation bzw. des deviatorischen Spannungszustandes von der volumenerhaltenden Deformation. In LION [104] ist das

¹Siehe zum Beispiel LUBLINER [108], SIMO [150], LE TALLEC ET AL. [97], HOLZAPFEL [82, 80], LION [102, 103, 104, 105], GOVINDJEE & REESE [53], REESE & GOVINDJEE [138], KALISKE & ROTHERT [92], BERGSTRÖM & BOYCE [14], HUBER & TSAKMAKIS [84], MIEHE & KECK [119], HAUPT & SEDLAN [74].

²Hierbei sollen natürlich auch Torsionsmoment-Winkelbeziehungen eingeschlossen sein.

vorgeschlagene Konzept zusätzlich auf bleibende Deformationen erweitert worden. Diese werden in dieser Arbeit nicht mit berücksichtigt.

Das auf den genannten Arbeiten aufbauende Materialmodell der finiten Viskoelastizität von SEDLAN [146] bzw. HAUPT & SEDLAN [76] läßt sich als ein rheologisches Modell für die volumenerhaltenden Deformationen interpretieren, bei welchem parallel zu einer nichtlinearen Feder ein bzw. mehrere Maxwell-Elemente (Feder und Dämpfungselemente in Serie geschaltet) angeordnet sind. Unter Verwendung einer Viskosität, die wiederum selbst durch eine spezielle Evolutionsgleichung definiert ist, wurde die experimentelle Überprüfung bzw. Anpassung an kombinierte Zug-Torsionsexperimente dort ebenfalls durchgeführt.³ In HUBER & TSAKMAKIS [84] wurde das Dreiparameter-Modell, bestehend aus einem Maxwell-Element und einer parallelgeschalteten Feder, mit einem ähnlichen Materialmodell untersucht bzw. verglichen, welches der Hintereinanderschaltung eines Kelvin-Elementes (Parallelschaltung des Feder- und Dämpfungselementes) mit einem Federelement im Rahmen der rheologischen Betrachtungsweise entspricht. Hierbei führen Effekte zweiter Ordnung zu unterschiedlichen Eigenschaften der Modelle, was bei einem Vergleich geometrisch linearer Kinematik nicht vorliegt.

Das vorliegende Kapitel wird folgendermaßen untergliedert: Zunächst werden Anmerkungen zur Hyperelastizität gemacht, da diese die Gleichgewichtsspannungen und damit das Modell der Viskoelastizität bestimmen. Anschließend unterscheiden wir inkompressible und nahezu-inkompressible hyperelastische Materialien.⁴ Dabei findet eine Gegenüberstellung von Formänderungsenergien in Abhängigkeit von Invarianten und Eigenwerten statt. Insbesondere die Zerlegung in volumenerhaltende und volumenändernde Anteile stehen im Vordergrund. Im darauf folgenden Abschnitt wird das gesamte Modell der finiten Viskoelastizität motiviert und zusammengefaßt.

4.1 Anmerkungen zur Hyperelastizität

Hyperelastische Materialmodelle sind dadurch definiert, daß sich der Spannungszustand, hier beschrieben durch den 2-ten Piola-Kirchhoff Tensor $\tilde{\mathbf{T}}$, durch die spezifische Verzerrungsenergie $\tilde{\psi}(\mathbf{E})$ bzw. $\psi(\mathbf{C})$ berechnen läßt,

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{E}) = \rho_{\text{R}} \frac{d\tilde{\psi}(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}} = \quad (4.1)$$

$$= \mathbf{g}(\mathbf{C}) = 2\rho_{\text{R}} \frac{d\psi(\mathbf{C})}{d\mathbf{C}}. \quad (4.2)$$

\mathbf{E} stellt den Greenschen Verzerrungstensor (3.7) dar.⁵ Der Greensche Verzerrungstensor wird des öfteren durch den Rechten Cauchy-Green Tensor \mathbf{C} (oder auch den rechten Strecktensor \mathbf{U}) ersetzt, siehe Gl.(4.2). Im Falle isotropen Materialverhaltens ist $\mathbf{g}(\mathbf{C})$ eine isotrope Tensorfunktion

$$\tilde{\mathbf{T}} = \gamma_0 \mathbf{I} + \gamma_1 \mathbf{C} + \gamma_2 \mathbf{C}^2, \quad (4.3)$$

³Siehe hierzu auch SEDLAN & HAUPT [147].

⁴Der Begriff der Nahezu-Inkompressibilität wird zum Teil auch als schwach kompressibel bezeichnet.

⁵Siehe zum Beispiel HAUPT [74, Ch.9], OGDEN [127, Ch.4.3], TRUESDELL & NOLL [164, Sec.79]. Die grundlegende Materialtheorie hyperelastischer isotroper Festkörper gilt als abgeschlossen und es existieren eine Vielzahl von Lehrbücher zur Behandlung finiter elastischer Deformationen (siehe z.B. GREEN & ADKINS [54], DROZDOV [39], OGDEN [127], ATKIN & FOX [7] und MARSDEN & HUGHES [112]). Weitere Hinweise zur finiten Elastizitätstheorie finden sich in nahezu allen Monographien zur Kontinuumsmechanik; siehe hierzu Fußnote 1 auf Seite 45.

wobei darin die γ_k , $k = 0, 1, 2$, skalare Funktionen der Grundinvarianten des Rechten Cauchy-Green Tensors darstellen, siehe zur Definition der Invarianten Gl.(2.5). Die Funktionen γ_k sind nicht unabhängig voneinander, da sie von der gewählten Formänderungsenergie abhängen. Wir gehen hier detailliert auf die Abhängigkeiten ein.

Mit Hilfe des Cayley-Hamilton Theorems, siehe Gl.(2.28), läßt sich Beziehung (4.3) auch durch den inversen Rechten Cauchy-Green Tensor darstellen, was in speziellen Fällen zu einfacheren Gleichungen führt:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \delta_0 \mathbf{I} + \delta_1 \mathbf{C} + \delta_2 \mathbf{C}^{-1}. \quad (4.4)$$

Da in der Literatur solche verschiedenen Darstellungen, auch ausgedrückt durch den gewichteten Cauchy Tensor \mathbf{S} , auftreten, sind in Tab. 4.1 die Umrechnungsmöglichkeiten aufgeführt.

Tabelle 4.1: Umrechnungstabelle der skalaren Materialfunktionen verschiedener Darstellungsweisen isotroper Tensorfunktionen

(I)	$\mathbf{S} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{B} + \alpha_2 \mathbf{B}^2$		(4.5)	
(II)	$\mathbf{S} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{B} + \beta_2 \mathbf{B}^{-1}$		(4.6)	
(III)	$\tilde{\mathbf{T}} = \gamma_0 \mathbf{I} + \gamma_1 \mathbf{C} + \gamma_2 \mathbf{C}^2$		(4.7)	
(IV)	$\tilde{\mathbf{T}} = \delta_0 \mathbf{I} + \delta_1 \mathbf{C} + \delta_2 \mathbf{C}^{-1}$		(4.8)	
	$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$	$\beta_0, \beta_1, \beta_2$	$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$	$\delta_0, \delta_1, \delta_2$
α_0		$\beta_0 + \beta_2 \frac{\mathbb{I}_B}{\mathbb{III}_B}$	$\gamma_2 \mathbb{III}_B$	δ_2
α_1		$\beta_1 - \beta_2 \frac{\mathbb{I}_B}{\mathbb{III}_B}$	$\gamma_0 - \gamma_2 \mathbb{II}_B$	δ_0
α_2		$\frac{\beta_2}{\mathbb{III}_B}$	$\gamma_1 + \gamma_2 \mathbb{I}_B$	δ_1
β_0	$\alpha_0 - \alpha_2 \mathbb{II}_B$		$\gamma_2 \mathbb{III}_B - (\gamma_1 + \gamma_2 \mathbb{I}_B) \mathbb{II}_B$	$\delta_2 - \delta_1 \mathbb{II}_B$
β_1	$\alpha_1 + \alpha_2 \mathbb{I}_B$		$\gamma_0 - \gamma_1 \mathbb{II}_B + (\gamma_1 + \gamma_2 \mathbb{I}_B) \mathbb{I}_B$	$\delta_0 + \delta_1 \mathbb{I}_B$
β_2	$\alpha_2 \mathbb{III}_B$		$(\gamma_1 + \gamma_2 \mathbb{I}_B) \mathbb{III}_B$	$\delta_1 \mathbb{III}_B$
γ_0	$\alpha_1 + \alpha_0 \frac{\mathbb{I}_C}{\mathbb{III}_C}$	$\beta_0 \frac{\mathbb{I}_C}{\mathbb{III}_C} + \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{\mathbb{II}_C^2}{\mathbb{III}_C^2} - \frac{\mathbb{I}_C}{\mathbb{III}_C} \right)$		$\delta_0 + \delta_2 \frac{\mathbb{I}_C}{\mathbb{III}_C}$
γ_1	$\alpha_2 - \alpha_0 \frac{\mathbb{I}_C}{\mathbb{III}_C}$	$-\beta_0 \frac{\mathbb{I}_C}{\mathbb{III}_C} + \frac{\beta_2}{\mathbb{III}_C} \left(1 - \frac{\mathbb{I}_C \mathbb{II}_C}{\mathbb{III}_C} \right)$		$\delta_1 - \delta_2 \frac{\mathbb{I}_C}{\mathbb{III}_C}$
γ_2	$\frac{\alpha_0}{\mathbb{III}_C}$	$\left(\beta_0 + \beta_2 \frac{\mathbb{I}_C}{\mathbb{III}_C} \right) \frac{1}{\mathbb{III}_C}$		$\frac{\delta_2}{\mathbb{III}_C}$
δ_0	α_1	$\beta_1 - \beta_2 \frac{\mathbb{I}_C}{\mathbb{III}_C}$	$\gamma_0 - \gamma_2 \mathbb{II}_C$	
δ_1	α_2	$\frac{\beta_2}{\mathbb{III}_C}$	$\gamma_1 + \gamma_2 \mathbb{I}_C$	
δ_2	α_0	$\beta_0 + \beta_2 \frac{\mathbb{I}_C}{\mathbb{III}_C}$	$\gamma_2 \mathbb{III}_C$	

Im Rahmen isotroper hyperelastischer Festkörper ist die spezifische Formänderungsenergie

eine Funktion der drei Hauptinvarianten des Rechten bzw. Linken Cauchy-Green Tensors⁶, siehe Gl.(4.2),

$$\Psi = \Psi(\mathbf{I}_C, \mathbf{II}_C, \mathbf{III}_C) = \Psi(\mathbf{I}_B, \mathbf{II}_B, \mathbf{III}_B). \quad (4.9)$$

Hieraus folgen mit

$$\frac{d\mathbf{I}_C}{d\mathbf{C}} = \mathbf{I}, \quad \frac{d\mathbf{II}_C}{d\mathbf{C}} = \mathbf{I}_C\mathbf{I} - \mathbf{C}, \quad \frac{d\mathbf{III}_C}{d\mathbf{C}} = \mathbf{III}_C\mathbf{C}^{-1} = \text{adj } \mathbf{C}, \quad (4.10)$$

und Verwendung der Kettenregel

$$\tilde{\mathbf{T}} = 2\rho_R \frac{d\Psi(\mathbf{I}_C, \mathbf{II}_C, \mathbf{III}_C)}{d\mathbf{C}} = 2\rho_R \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{I}_C} \mathbf{I} + \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{II}_C} (\mathbf{I}_C\mathbf{I} - \mathbf{C}) + \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{III}_C} \mathbf{III}_C\mathbf{C}^{-1} \right) \quad (4.11)$$

die Funktionen aus Gl.(4.4)

$$\delta_0 = 2\rho_R \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{I}_C} + \mathbf{I}_C \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{II}_C} \right), \quad \delta_1 = -2\rho_R \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{II}_C}, \quad \delta_2 = 2\rho_R \mathbf{III}_C \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{III}_C}. \quad (4.12)$$

Eine weitere Möglichkeit besteht darin die spezifische Formänderungsenergie anstatt von den Hauptinvarianten von den Eigenwerten $\mu_k > 0$, $k = 1, 2, 3$, des Rechten bzw. Linken Cauchy-Green Tensors (\mathbf{C}, \mathbf{B}), $\Upsilon = \Upsilon(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, oder von den Eigenwerten $\lambda_k = \mu_k^{1/2}$, $k = 1, 2, 3$, des rechten bzw. linken Strecktensors (\mathbf{U}, \mathbf{V}), $\hat{\Upsilon} = \hat{\Upsilon}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, abhängen zu lassen, siehe Gln.(3.20) und (3.22). Nach Gl.(4.2) muß die spezifische Formänderungsenergie nach dem Rechten Cauchy-Green Tensor differenziert werden,

$$\tilde{\mathbf{T}} = 2\rho_R \frac{d\Upsilon(\mu_1, \mu_2, \mu_3)}{d\mathbf{C}} = 2\rho_R \sum_{a=1}^3 \frac{\partial\Upsilon}{\partial\mu_a} \frac{d\mu_a}{d\mathbf{C}}. \quad (4.13)$$

Für eine gegebene Formänderungsenergie Υ ist in diesem Ausdruck der Tensor $d\mu_a/d\mathbf{C}$ gesucht, welcher mit den Eigendyaden $\mathbf{N}_a = \vec{u}_a \otimes \vec{u}_a$ des Rechten Cauchy-Green Tensors $\mathbf{C} = \sum_{a=1}^3 \mu_a \vec{u}_a \otimes \vec{u}_a = \sum_{a=1}^3 \mu_a \mathbf{N}_a$ gleich ist (siehe auch Gln.(3.22)),

$$\frac{d\mu_a}{d\mathbf{C}} = \mathbf{N}_a = \vec{u}_a \otimes \vec{u}_a, \quad (4.14)$$

wobei \vec{u}_a die Eigenvektoren von \mathbf{U} bzw. \mathbf{C} repräsentieren. Um Gl.(4.14) zu beweisen, werten wir $\vec{u}_a \cdot \vec{u}_b = \delta_{ab}$ für $\frac{d}{dt}(\vec{u}_a \cdot \vec{u}_a) = 0$ aus, was auf die Orthogonalitätseigenschaft $\dot{\vec{u}}_a \cdot \vec{u}_a = 0$ führt. Die Zeitableitung $\dot{\mu}_a$ liefert unter Ausnutzung der Orthogonalitätseigenschaft, der Symmetrie von \mathbf{C} sowie $\mu_a = \vec{u}_a \cdot \mathbf{C}\vec{u}_a$

$$\dot{\mu}_a = \frac{d\mu_a}{d\mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{C}} = \frac{d}{dt}(\vec{u}_a \cdot \mathbf{C}\vec{u}_a) = \vec{u}_a \cdot \dot{\mathbf{C}}\vec{u}_a = \text{tr}(\vec{u}_a \otimes \dot{\mathbf{C}}\vec{u}_a) = (\vec{u}_a \otimes \vec{u}_a) \cdot \dot{\mathbf{C}}.$$

Durch Auswertung von $\left(\frac{d\mu_a}{d\mathbf{C}} - \vec{u}_a \otimes \vec{u}_a\right) \cdot \dot{\mathbf{C}} = 0$, erhalten wir Gl.(4.14). Hierbei geht man natürlich davon aus, daß bei mehrfachen Eigenwerten die Eigenvektoren orthogonal zueinander gewählt sind. Wir folgern für den 2-ten Piola-Kirchhoff Tensor (4.13) für $\mu_a = \lambda_a^2$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \sum_{a=1}^3 \tilde{t}_a \mathbf{N}_a \implies \tilde{t}_a = 2\rho_R \frac{\partial\Upsilon}{\partial\mu_a} = \rho_R \lambda_a^{-1} \frac{\partial\hat{\Upsilon}}{\partial\lambda_a}. \quad (4.15)$$

⁶Sie können natürlich auch Funktionen der Hauptinvarianten des rechten oder linken Strecktensors sein, $\mathbf{I}_U = \mathbf{I}_V$, $\mathbf{II}_U = \mathbf{II}_V$, $\mathbf{III}_U = \mathbf{III}_V$.

Mit der Vortransformation auf die Momentankonfiguration, siehe Tab. 3.4, lauten die Hauptspannungen der Kirchhoff-Spannungen und der Cauchy-Spannungen

$$\mathbf{S} = \sum_{a=1}^3 s_a \vec{v}_a \otimes \vec{v}_a \quad \Longrightarrow \quad s_a = 2\rho_R \mu_a \frac{\partial \Upsilon}{\partial \mu_a} = \rho_R \lambda_a \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial \lambda_a}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{T} = \sum_{a=1}^3 t_a \vec{v}_a \otimes \vec{v}_a \quad \Longrightarrow \quad t_a = 2\rho \mu_a \frac{\partial \Upsilon}{\partial \mu_a} = \rho \lambda_a \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial \lambda_a}, \quad (4.17)$$

wobei \vec{v}_a die Eigenvektoren des linken Strecktensors $\mathbf{V} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \vec{v}_a \otimes \vec{v}_a$ bzw. Linken Cauchy-Green Tensors $\mathbf{B} = \sum_{a=1}^3 \mu_a \vec{v}_a \otimes \vec{v}_a$ sind, siehe Gln.(3.20) und (3.22).

Die prinzipielle Struktur der isotropen hyperelastischen Materialgleichungen ist mit den bisher aufgeführten Beziehungen in Invarianten- oder Eigenwertdarstellung bekannt. Trotzdem gibt es noch immer eine Vielzahl von Fragestellungen bezüglich konkreter Formen der spezifischen Formänderungsenergien, d.h. des tatsächlichen Aufbaus der Materialgleichungen zur Wiedergabe physikalisch sinnvollen Materialverhaltens. Spezielle Eigenschaften bzw. Anforderungen sind zum Beispiel Inkompressibilität, Stabilität, Monotonie, numerische Eignung, etc.. Aus mathematischer Sicht sollten zum Beispiel die Formänderungsenergien in einer speziellen Art und Weise vom Deformationsgradienten \mathbf{F} abhängen, um die Existenz einer Lösung zu garantieren.⁷ Die letzte Frage wird in dieser Arbeit nicht behandelt.

Wie bereits angeführt, hängt die spezielle Darstellung der Spannungen von den unabhängigen Variablen der spezifischen Formänderungsenergie ab (Invariante oder Eigenwerte). In derzeitigen kommerziellen Finite-Element Programmen⁸ haben sich drei spezielle Formen herauskristallisiert, die *verallgemeinerte Polynomelastizität* nach RIVLIN & SAUNDERS [141], das *Ogden-Modell*, OGDEN [127, 129], sowie das *Arruda-Boyce Modell* nach ARRUDA & BOYCE [6], die zunächst für Inkompressibilität formuliert wurden:⁹

$$w(\mathbf{I}_C, \mathbf{II}_C) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} (\mathbf{I}_C - 3)^i (\mathbf{II}_C - 3)^j \quad (4.18)$$

$$\Upsilon(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\gamma_i}{\alpha_i} (\mu_1^{\alpha_i/2} + \mu_2^{\alpha_i/2} + \mu_3^{\alpha_i/2} - 3), \quad \mu_3 = (\mu_1 \mu_2)^{-1} \quad (4.19)$$

$$w(\mathbf{I}_C) = c \sum_{i=1}^m d_i N^{1-i} (\mathbf{I}_C - 3)^i \quad (4.20)$$

Hierbei stellen c_{ij} , γ_i , α_i , c und N Materialparameter dar (die Bedeutung der Koeffizienten d_i wird in Abschnitt 4.2.3 angesprochen). Eine detaillierte Diskussion führen wir in Abschnitt 4.2 an.

Eine weit verbreitete Erweiterung auf Kompressibilität, insbesondere nahezu inkompressiblen Materialverhaltens, entsteht durch Aufteilung der spezifischen Formänderungsenergie in zwei Anteile,

$$\bar{\psi}(J, \bar{\mathbf{C}}) = U(J) + \bar{v}(\bar{\mathbf{C}}). \quad (4.21)$$

Der Anteil $U(J)$ beschreibt den Energieanteil aus der Volumendehnung J und der Anteil $\bar{v}(\bar{\mathbf{C}})$ denjenigen Anteil der volumenerhaltenden (isochoren) Deformation. Dabei wird davon ausgegangen, daß keine Koppelterme zwischen volumenerhaltenden und -ändernden Deformationen

⁷Siehe zum Beispiel BALL [9], NEFF [125].

⁸Siehe zum Beispiel [1] oder [5].

⁹D.h. sie sind unabhängig von der dritten Invariante, $\mathbf{III}_C = \det \mathbf{C} = \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1$.

in der Formänderungsenergie auftreten. Der letztere Anteil in Gl.(4.21) wird im Allgemeinen wie bei Inkompressibilität, siehe Gln.(4.18)-(4.20), jedoch in Abhängigkeit des unimodularen Tensors $\bar{\mathbf{C}}$ gewählt, so daß sich die folgenden Abschnitte zunächst mit Betrachtungen bei inkompressiblen Materialeigenschaften und anschließend die Erweiterung auf schwache Kompressibilität beschäftigen.

Jedes Materialmodell hat seine Gültigkeit innerhalb eines begrenzten Deformationsbereichs. In Abhängigkeit der Materialparameter können jedoch außerhalb dieser Bereiche unphysikalische Verläufe auftreten. Einerseits kann dies an Phänomenen liegen, die das Materialmodell nicht wiedergeben kann, andererseits kann auch das Modell durch nicht-monotone Eigenschaften charakterisiert sein. In diesem Fall müssen eventuell Einschränkungen an die Wahl der Materialparameter formuliert werden. Begleitend zu den folgenden Ausführungen fügen wir einige Anmerkungen zur physikalischen Plausibilität bei. Insbesondere verwenden wir die Baker-Ericksen Ungleichung und diskutierten eine Stabilitätsformulierung, die verhindern sollen, daß zum Beispiel nicht-monotone Spannungs-Dehnungsverläufe auftreten können, die in zuvor durchgeführten Experimenten nicht zu beobachten waren und nicht zu erwarten sind. Die Stabilität des Materialverhaltens führt auf eine Vielzahl von Stabilitätskriterien bzw. -formulierungen, die zum Beispiel verschiedene Spannungs- und Dehnungsvariablen beinhalten.¹⁰ Insbesondere bei der Annahme der Inkompressibilität versagen einige dieser Formulierungen. Die Auswahl einer speziellen Stabilitätsformulierung kann daher lediglich eine physikalische Motivation darstellen, die solange ihre Geltung behält, bis experimentelle Ergebnisse oder mathematische Folgerungen zu einem Widerspruch führen. Wir beschränken uns daher in dieser Arbeit und greifen lediglich auf die Baker-Ericksen Ungleichung und Erweiterungen der Hillsche Ungleichung¹¹ gemäß OGDEN [127, S.408] zurück.

Baker-Ericksen Ungleichung

Die Baker-Ericksen Ungleichung¹² stellt ein spezielles Kriterium dar, welches für kompressibles und inkompressibles Materialverhalten anwendbar ist. Die grundlegende Idee besagt, daß, falls eine Cauchysche Hauptspannung t_i , siehe Gl.(4.17), größer ist als die Hauptspannungen t_j , die zugehörige Hauptstreckung λ_i ebenfalls größer sein muß als λ_j , d.h. es wird

$$(t_i - t_j)(\lambda_i - \lambda_j) > 0, \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3 \quad \text{jedoch } i \neq j \quad (4.22)$$

gefordert. Wir werden die Auswirkung dieser Anforderung an die verwendeten Materialgleichungen später noch untersuchen.

Inkrementelle Stabilität

In OGDEN [127, S.408] wird eine auf materiellen Zeitableitungen basierende Ungleichung angegeben, die man auch als inkrementelle Spannungsleistung bezeichnet, $p_{\text{incr}}^{(m)} = \dot{\mathbf{T}}^{(m)} \cdot \dot{\mathbf{E}}^{(m)} > 0$. Diese Ungleichung besagt, daß ein Material stabil im Sinne der gewählten Variablen ist, falls $p_{\text{incr}}^{(m)}$ nicht negativ ist. Die Schwierigkeit liegt dabei in der Festlegung des Spannungs- bzw. dualen Dehnungsmaßes, da bei Verwendung von unterschiedlichen Variablen natürlich unterschiedliche Kriterien vorliegen. Wir wollen trotzdem kurz auf die resultierenden Einschränkungen an

¹⁰Siehe TRUESDELL & NOLL [164, Sec.51-53], WANG & TRUESDELL [169, Ch.8], OGDEN [127, Ch.6.2.8] und REESE [136] sowie die dort zitierte Literatur.

¹¹Siehe HILL [79].

¹²Siehe BAKER & ERICKSEN [8], MARSDEN & HUGHES [112, S.16ff.] sowie TRUESDELL & NOLL [164, S.158].

die Materialgleichungen zu sprechen kommen. Aufgrund der angenommenen Isotropie sind die Eigenrichtungen der Spannungen $\mathbf{T}^{(m)}$, siehe zum Beispiel Gl.(3.93) und (3.94), und der Dehnungen $\mathbf{E}^{(m)}$ gleich, so daß wir analog zu Gl.(3.32)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{T}}^{(m)} &= \sum_{k=1}^3 \dot{t}_k^{(m)} \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k + \Omega^L \mathbf{T}^{(m)} - \mathbf{T}^{(m)} \Omega^L = \\ &= \sum_{k=1}^3 \dot{t}_k^{(m)} \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Omega_{ij}^L (t_j^{(m)} - t_i^{(m)}) \vec{u}_i \otimes \vec{u}_j\end{aligned}\quad (4.23)$$

erhalten. Daraus folgt für die inkrementelle Spannungsleistung die Forderung

$$p_{\text{incr}}^{(m)} = \dot{\mathbf{T}}^{(m)} \cdot \dot{\mathbf{E}}^{(m)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial t_i^{(m)}}{\partial \epsilon_j^{(m)}} \dot{\epsilon}_i^{(m)} \dot{\epsilon}_j^{(m)} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1 \setminus i}^3 (t_i^{(m)} - t_j^{(m)}) (\epsilon_i^{(m)} - \epsilon_j^{(m)}) \Omega_{ij}^L > 0. \quad (4.24)$$

Hinreichende Bedingung für die Positivität des Skalarproduktes sind die positive Definitheit der Matrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial t_i^{(m)}}{\partial \epsilon_j^{(m)}} \end{bmatrix} \quad \text{positiv definit} \quad (4.25)$$

sowie die Erfüllung der Ungleichung

$$(t_i^{(m)} - t_j^{(m)}) (\epsilon_i^{(m)} - \epsilon_j^{(m)}) > 0, \quad i \neq j. \quad (4.26)$$

Von besonderem Interesse sind die Fälle $m = 0, 1$. Im Falle $m = 0$ folgt gemäß Gl.(3.94) sowie (4.16) und der Abhängigkeit $\hat{\Upsilon}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ für

$$\mathbf{T}^{(0)} = \mathbf{R}^T \mathbf{S} \mathbf{R} = \rho_R \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial \lambda_i} \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i, \quad (4.27)$$

d.h. mit den Eigenwerten (3.23), $\lambda_i = e^{\epsilon_i^{(0)}}$, und der Anwendung der Kettenregel gilt (keine Summe über i)

$$t_i^{(0)} = \rho_R \lambda_i \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial \lambda_i} = \rho_R \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial \epsilon_i^{(0)}} = \rho_R \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial (\ln \lambda_i)}. \quad (4.28)$$

Für $m = 1$ hingegen erhalten wir mit Gl.(3.93) sowie (4.16)

$$t_i^{(1)} = \rho_R \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial \lambda_i} = \rho_R \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial \epsilon_i^{(1)}} = \rho_R \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial (\lambda_i - 1)}, \quad (4.29)$$

mit $\epsilon_i^{(1)} = \lambda_i - 1$, den Biotschen Spannungstensor $\mathbf{T}^{(1)} = \sum_{i=1}^3 t_i^{(1)} \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i$. Wir kommen zurück auf die Bedingung (4.25) und (4.26). Danach müssen die Matrizen (je nachdem welches Stabilitätskriterium vorausgesetzt wird)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial t_i^{(0)}}{\partial \epsilon_j^{(0)}} \end{bmatrix} = \rho_R \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \hat{\Upsilon}}{\partial (\ln \lambda_i) \partial (\ln \lambda_j)} \end{bmatrix} = \rho_R \begin{bmatrix} \delta_{ij} \lambda_i \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial \lambda_i} + \lambda_i \lambda_j \frac{\partial^2 \hat{\Upsilon}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

oder

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial t_i^{(1)}}{\partial \epsilon_j^{(1)}} \end{bmatrix} = \rho_R \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \hat{\Upsilon}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

positiv definit sein. Die Forderung (4.26) stimmt weder für $m = 0$ noch für $m = 1$ überein. Mit $t_i^{(0)} = s_i = Jt_i$ sowie $t_i^{(1)} = \lambda_i^{-1}s_i = \lambda_i \tilde{t}_i$ gilt ($J > 0$):

$$(t_i - t_j) (\ln \lambda_i - \ln \lambda_j) > 0 \quad \text{für } m = 0 \quad \text{und } i \neq j \quad (4.32)$$

$$\left(\frac{t_i}{\lambda_i} - \frac{t_j}{\lambda_j} \right) (\lambda_i - \lambda_j) > 0 \quad \text{für } m = 1 \quad \text{und } i \neq j \quad (4.33)$$

Ungleichung (4.32) ist zur Baker-Ericksen Ungleichung äquivalent, da $\ln \lambda_i - \ln \lambda_j = \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_j} > 0$ nur für $\lambda_i > \lambda_j$ gilt. Wir kommen später auf die oben genannten Eigenschaften zurück.

4.2 Hyperelastizität bei Inkompressibilität

In bestimmten Deformationsbereichen zeigen experimentelle Beobachtungen bei rußgefüllten Elastomeren eine nahezu volumentreue Deformation (siehe zum Beispiel SEDLAN [146, Bild 3.5]). Dies motiviert die Annahme, daß die Deformation, beschrieben durch den Deformationsgradienten \mathbf{F} , der geometrischen Zwangsbedingung $dv = dV \longrightarrow \det \mathbf{F} = 1$, siehe Gl.(3.4), unterliegt. Dieser Zwang, der als Inkompressibilität bezeichnet wird, kann alternativ in der Form $\gamma(\mathbf{C}) = \det \mathbf{C} - 1 = 0$ notiert werden und führt unter der Annahme der Zerlegung des 2-ten Piola-Kirchhoff Tensors

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{N}} + \mathbf{g}(\mathbf{C}) \quad (4.34)$$

in den Zwangsspannungsanteil $\tilde{\mathbf{N}}$ und einen durch Materialgleichungen definierten Spannungszustand $\mathbf{g}(\mathbf{C})$. Ferner ergibt die Annahme, daß die Zwangsspannungen keinen Anteil an der spezifischen Spannungsleistung (3.91) haben, $\tilde{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{C}} = 0$, auf die Darstellung

$$\tilde{\mathbf{T}} = -\tilde{p}\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{g}(\mathbf{C}), \quad (4.35)$$

siehe HAUPT [74, Ch.7.4] bzw. TRUESDELL & NOLL [164, Sect.30]. \tilde{p} stellt den unbestimmten Druck dar, der aus der Impulsbilanz sowie den zugehörigen Randbedingungen bestimmt werden muß. Die Annahme der Hyperelastizität, siehe Gl.(4.2), führt dann auf die Darstellung

$$\tilde{\mathbf{T}} = -\tilde{p}\mathbf{C}^{-1} + \rho_R \frac{d\tilde{v}(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}} = -\tilde{p}\mathbf{C}^{-1} + 2\rho_R \frac{dv(\mathbf{C})}{d\mathbf{C}} \quad (4.36)$$

bzw. ausgedrückt durch Größen der Momentankonfiguration, siehe Abb. 3.6 und Tab. 3.4, $\mathbf{S} = \mathbf{T} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{F}^T$,

$$\mathbf{S} = -\tilde{p}\mathbf{I} + 2\rho_R \frac{dv(\mathbf{B})}{d\mathbf{B}} \mathbf{B}. \quad (4.37)$$

Zum Übergang von Beziehung (4.36) auf Gl.(4.37) siehe HAUPT [74, S.342-343]. Hierbei führt die Annahme der Isotropie auf

$$\frac{dv}{d\mathbf{B}} \mathbf{B} = \mathbf{B} \frac{dv}{d\mathbf{B}}, \quad (4.38)$$

da \mathbf{B} und $\frac{dv}{d\mathbf{B}}$ die gleichen Eigenvektoren haben.

Wir kommen zunächst auf die gewählten Kriterien (4.22) bzw. (4.24) zu sprechen. Bei der Baker-Ericksen Ungleichung (4.22) entfällt im Falle von inkompressiblem Materialverhalten aufgrund der Differenzbildung der Cauchyschen Hauptspannungen der Druck p , so daß lediglich die Differenz desjenigen Anteils verwendet wird, welcher aus den konstitutiven Annahmen resultiert, d.h. für $t_a = -p + t_a^C$, $a = 1, 2, 3$, folgt für die Ungleichung (4.22)

$$(t_i^C - t_j^C)(\lambda_i - \lambda_j) > 0 \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3 \quad \text{jedoch } i \neq j. \quad (4.39)$$

Wir werden dieses Kriterium noch näher für die speziellen Modelle (4.18)-(4.20) in den kommenden Abschnitten untersuchen. Die Verwendung der inkrementellen Stabilität (4.24) liefert nur für den Fall $m = 0$ einen Ausdruck, der bei Inkompressibilität unabhängig von dem unbestimmten Druck p bzw. \dot{p} ist. Es folgen nämlich für eine Formänderungsenergie $\hat{v} = \hat{v}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)|_{J=1}$ die Darstellung $t_i^{(0)} = -p + t_i^{C(0)}$ mit $t_i^{C(0)} = \rho_R \frac{\partial \hat{v}}{\partial \epsilon_i^{(0)}} = \rho_R \lambda_i \frac{\partial \hat{v}}{\partial \lambda_i}$

$$\dot{t}_i^{(0)} = -\dot{p} + \dot{t}_i^{C(0)} = -\dot{p} + \rho_R \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \epsilon_i^{(0)} \partial \epsilon_j^{(0)}} \dot{\epsilon}_j^{(0)} \quad (4.40)$$

und daher

$$\sum_{i=1}^3 \dot{t}_i^{(0)} \dot{\epsilon}_i^{(0)} = -\dot{p} \sum_{i=1}^3 \dot{\epsilon}_i^{(0)} + \rho_R \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \epsilon_i^{(0)} \partial \epsilon_j^{(0)}} \dot{\epsilon}_i^{(0)} \dot{\epsilon}_j^{(0)} = \rho_R \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \epsilon_i^{(0)} \partial \epsilon_j^{(0)}} \dot{\epsilon}_i^{(0)} \dot{\epsilon}_j^{(0)}. \quad (4.41)$$

Wegen der Annahme der Inkompressibilität, $\sum_{i=1}^3 \dot{\epsilon}_i^{(0)} = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt}(\ln \lambda_i) = \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} = 0$, verschwindet der Term mit dem unbestimmten Druck \dot{p} . Analog zur Darstellung (4.30) muß die Matrix

$$\left[\delta_{ij} \lambda_i \frac{\partial \hat{v}}{\partial \lambda_i} + \lambda_i \lambda_j \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right] \quad (4.42)$$

positiv definit sein und die Ungleichung $(t_i^{C(0)} - t_j^{C(0)})(\ln \lambda_i - \ln \lambda_j) > 0$ erfüllt sein, was wiederum mit der Baker-Ericksen Ungleichung (4.22) bzw. (4.32) korrespondiert.

Es gibt eine Vielzahl¹³ von Darstellungen der spezifischen Formänderungsenergie, wobei wir uns in den folgenden Abschnitten auf die drei Beziehungen (4.18)-(4.20) konzentrieren wollen. Diese Formänderungsenergien hängen entweder von den ersten beiden Invarianten (I_C, II_C) des Rechten bzw. Linken Cauchy-Green Tensors \mathbf{C} bzw. \mathbf{B} oder von den Eigenwerten λ_i des rechten bzw. linken Strecktensors \mathbf{U} bzw. \mathbf{V} ab. Wir erhalten durch Anwendung der Kettenregel für die Beziehungen (4.36) bzw. (4.37) für $v(\mathbf{C}) = w(I_C, II_C)$ die Darstellungen

$$\tilde{\mathbf{T}} = -\tilde{p}\mathbf{C}^{-1} + (\varphi_1(I_C, II_C) + \varphi_2(I_C, II_C) I_C)\mathbf{I} - \varphi_2(I_C, II_C)\mathbf{C}, \quad (4.43)$$

wobei wir die Abkürzungen

$$\varphi_1(I_C, II_C) \equiv 2\rho_R \frac{\partial w}{\partial I_C}, \quad \varphi_2(I_C, II_C) \equiv 2\rho_R \frac{\partial w}{\partial II_C} \quad (4.44)$$

verwendet sowie die Beziehungen (4.10)_{1,2} ausgenutzt haben. Bezogen auf die Momentankonfiguration berechnen sich gemäß Tab. 4.1¹⁴ für $III_C = 1$ die Cauchy-Spannungen

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} = -p\mathbf{I} + \varphi_1(I_B, II_B)\mathbf{B} - \varphi_2(I_B, II_B)\mathbf{B}^{-1}. \quad (4.45)$$

Eine weitere häufig verwendete Formulierung, wie bereits erwähnt, repräsentieren Formänderungsenergien $\hat{v}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ für $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, die von Eigenwerten der Strecktensoren \mathbf{U} bzw. \mathbf{V} abhängen. In diesem Fall berechnen sich die 2-ten Piola-Kirchhoff Spannungen analog zu Gl.(4.15) über

$$\tilde{t}_a = -p\lambda_a^{-2} + \rho_R \lambda_a^{-1} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \lambda_a} \quad (4.46)$$

bzw. die Cauchy-Spannungen gemäß

$$t_a = s_a = -p + \rho_R \lambda_a \frac{\partial \hat{v}}{\partial \lambda_a}. \quad (4.47)$$

¹³Siehe zum Beispiel DROZDOV [39, Ch.2.8-2.9].

¹⁴Bei der gewählten Darstellung der Tab. 4.1 haben wir $\delta_0 = \varphi_1 + \varphi_2 I_C$, $\delta_1 = -\varphi_2$ und $\delta_2 = -\tilde{p}$ sowie die Abkürzungen $-p = -\tilde{p} + \varphi_2 II_C$ verwendet, womit $\beta_0 = -p$, $\beta_1 = \varphi_1$ und $\beta_2 = -\varphi_2$ entstehen.

4.2.1 Verallgemeinerter Polynomansatz

Eine Möglichkeit Hyperelastizitätsbeziehungen zu formulieren, basiert auf dem Ansatz von RIVLIN & SAUNDERS [141], welche die spezifische Formänderungsenergie als ein Polynom in der ersten und zweiten Invariante des Rechten bzw. Linken Cauchy-Green Tensors, $(\mathbf{I}_C, \mathbf{II}_C)$ bzw. $(\mathbf{I}_B, \mathbf{II}_B)$, betrachten bzw. in eine abgebrochene Taylor-Reihe entwickeln:

$$w(\mathbf{I}_C, \mathbf{II}_C) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} (\mathbf{I}_C - 3)^i (\mathbf{II}_C - 3)^j \quad (4.18)$$

Je nach Wahl der maximalen Exponenten m bzw. n und der vorab zu Null definierten Materialparameter c_{ij} ergibt sich eine ganze Klasse von Modellen. In Tab. 4.2 sind eine Reihe solcher

Tabelle 4.2: Materialmodelle vom verallgemeinerten Polynom-Typ

	Autoren	verwendete Koeffizienten									
1	Mooney-Rivlin ^a	c_{10}	c_{01}								
2	James et al. [87]	c_{10}	c_{01}	c_{11}	c_{20}	c_{02}					
3	James et al. [87]	c_{10}	c_{01}	c_{11}	c_{20}	c_{02}	c_{21}	c_{12}	c_{30}	c_{03}	
4	Isihara et al. [86]	c_{10}	c_{01}		c_{20}						
5	Neo-Hooke ^b	c_{10}									
6	James et al. [87]	c_{10}	c_{01}	c_{11}	c_{20}				c_{30}		
7	James et al. [87]	c_{10}	c_{01}	c_{11}	c_{20}	c_{02}	c_{21}		c_{30}		c_{40}
8	Biderman [17]	c_{10}	c_{01}		c_{20}				c_{30}		
9	Tschoegl [165]	c_{10}	c_{01}	c_{11}							
10	Tschoegl [165]	c_{10}	c_{01}					c_{22}			
11	Lion [103]	c_{10}	c_{01}								c_{50}
12	Haupt/Sedlan [76]	c_{10}	c_{01}	c_{11}		c_{02}			c_{30}		
13	Yeoh [175]	c_{10}			c_{20}				c_{30}		
14	Hartmann [66]	c_{10}	c_{01}						c_{30}		
15	Hartmann [66]	c_{10}	c_{01}								c_{40}
16	Hartmann [66]	c_{10}	c_{01}								c_{40} c_{50}

^aDieses Modell ist nach den Arbeiten von MOONEY [120] und RIVLIN [140] bezeichnet worden.

^bSiehe RIVLIN [140].

Modelle aus der Literatur dargestellt. Die bekanntesten Modelle sind das Neo-Hooke Modell, $w_{\text{NH}}(\mathbf{I}_C) = c_{10}(\mathbf{I}_C - 3)$, und das Mooney-Rivlin Modell, $w_{\text{MR}}(\mathbf{I}_C, \mathbf{II}_C) = c_{10}(\mathbf{I}_C - 3) + c_{01}(\mathbf{II}_C - 3)$ (siehe MOONEY [120] und RIVLIN [141]). Die Materialparameter beider Modelle müssen positiv sein ($c_{10} > 0$ oder $c_{10} > 0$ und $c_{01} > 0$), damit die Formänderungsenergie stets positiv ist (siehe TRUESDELL & NOLL [164, §95], HAUPT [74, Ch. 9.2.4]). Im Falle höherer Exponenten gibt es in der Literatur keine einheitliche Anforderung an die Materialparameter. Sie werden sowohl positiv als auch negativ zugelassen. Dies führt dazu, daß bei der Identifikation der Materialparameter zwar vernünftige Ergebnisse innerhalb des Meßdatensatzes vorliegen, jedoch kann es außerhalb des Identifikationsbereiches zu unphysikalischen Verläufen kommen; zum Beispiel kann eine Druckspannung beim dehnungsgesteuerten einaxialen Zug auftreten (siehe z.B. JAMES ET AL. [87] oder HARTMANN [66]). Solche Effekte werden auch als Materialinstabilitäten bezeichnet. In den gängigen praxisorientierten Finite-Elemente Programmen möchte man diese Eigenschaften vermeiden und den Anwendern Kriterien an die Hand geben, die bei der Identifikation der Materialparameter berücksichtigt werden müssen.

Um diese nicht-monotonen Spannungs-Dehnungsverläufe zu umgehen, haben KAO & RAZGUNAS [93] einige nichtlineare Nebenbedingungen in Form von Ungleichungen entwickelt, die die Materialparameter erfüllen müssen. Diese Nebenbedingungen sind anhand von einaxialen Zug-Druckversuchen für die Modelle 2 und 6 aus Tab. 4.2 entwickelt worden. Dabei kann zum Beispiel trotz Erfüllung der Nebenbedingungen der Effekt auftreten, daß die analytische Lösung der einfachen Scherung nicht-monotone Kennlinien aufweist und zu einer negativen Scherkraft bei einer positiven Scherung führt, da das Kriterium lediglich für spezielle Deformationen entwickelt wurde.

In [1]¹⁵ wird eine spezielle Form des Drucker-Stabilitätspostulates¹⁶ angenommen, bei welcher das Skalarprodukt des Zuwachses der Cauchy-Spannungen und den Dehnungszuwächsen positiv sein sollen, $d\mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\epsilon} > 0$. Unter der Annahme der Isotropie liegen gleiche Eigenrichtungen vor und die Ungleichung lautet $\sum_{i=1}^3 d\sigma_i d\epsilon_i > 0$, wobei $d\sigma_i$ der Zuwachs der Hauptspannungen und $d\epsilon_i$ der Zuwachs der Hauptdehnungen sind. Das Verzerrungsmaß $\boldsymbol{\epsilon}$ wird dabei als logarithmisch angenommen, $d\epsilon_i = d(\ln \lambda_i)$; λ_i stellen die Hauptstreckungen dar. Aufbauend auf diesem Kriterium und der Annahme des ebenen Spannungszustandes wenden JOHNSON ET AL. [89] die Modelle 1-3 der Tabelle 4.2 bzw. PRZYBYLO & ARRUDA [134] das Kriterium auf Yeoh's Modell, Modell 13 der Tab. 4.2, an.¹⁷ Das bei JOHNSON ET AL. [89] erhaltene Ergebnis für den verallgemeinerten Polynomansatz ist die Positivität der Materialparameter $c_{ij} > 0$ und weitere nichtlineare Ungleichungsnebenbedingungen. Die zusätzlichen Ungleichungsnebenbedingungen werden bei ihnen in der Materialparameteridentifikation wieder außerachtgelassen.

Die wesentliche Frage, die sich hierbei stellt, berührt den Begriff "Zuwachs" der Spannungen bzw. Verzerrungen. Die Drucker-Stabilität in obigen Literaturstellen wird aus der Theorie kleiner Verzerrungen auf große Deformationen transferiert, ohne den Begriff der Objektivität zu streifen. Das verwendete Skalarprodukt erinnert an die Hill'sche Ungleichung, bei welcher das Skalarprodukt einer objektiven Spannungs- und konjugierter Dehnungsrate positiv sein muß, um Materialstabilität zu gewährleisten¹⁸. Wir greifen diese Fragestellung auf und werten zunächst die Baker-Ericksen Ungleichung (4.22) bzw. (4.39) für die Cauchy-Spannungen (4.45) aus. Die Eigenwerte $t_a = -p + \varphi_1 \lambda_a^2 - \varphi_2 \lambda_a^{-2}$ bilden die Differenz

$$t_a - t_b = (\lambda_a^2 - \lambda_b^2) \varphi_1 - (\lambda_a^{-2} - \lambda_b^{-2}) \varphi_2 = (\lambda_a^2 - \lambda_b^2) \left(\varphi_1 + \frac{1}{\lambda_a^2 \lambda_b^2} \varphi_2 \right), \quad (4.48)$$

woraus durch Multiplikation mit $\lambda_a - \lambda_b$

$$(t_a - t_b)(\lambda_a - \lambda_b) = (\lambda_a - \lambda_b)^2 (\lambda_a + \lambda_b) \left(\varphi_1 + \frac{1}{\lambda_a^2 \lambda_b^2} \varphi_2 \right) \quad (4.49)$$

folgt. Für $t_a > t_b$ müssten zur Erfüllung von $\lambda_a > \lambda_b$ die Funktionen $\varphi_1 \geq 0$ und $\varphi_2 \geq 0$ aus Gl.(4.44) nicht-negativ sein. Dies stellt lediglich eine hinreichende Bedingung dar. Für die Formänderungsenergie der verallgemeinerten Polynomelastizität (4.18) folgt daraus, daß nicht-negative Materialparameter, $c_{ij} \geq 0$, eine hinreichende Bedingung zur Erfüllung der Baker-Ericksen Ungleichung darstellen. Damit wird ebenfalls sichergestellt, daß die Formänderungsenergie (4.18) für alle möglichen Deformationsprozesse positiv ist. Die Ungleichungen $\varphi_1 \geq 0$

¹⁵Leider wird in diesem Handbuch keine weitere Literaturstelle zu den getroffenen Annahmen zitiert. In JOHNSON ET AL. [89] wird auf ein Theorie-Handbuch, Version 5.2 (ohne Jahresangabe) verwiesen.

¹⁶Siehe DRUCKER [40] oder CHEN & HAN [28, Ch.3.5].

¹⁷Zusätzlich vergleichen PRZYBYLO & ARRUDA [134] das Arruda-Boyce Modell, Ogden's Modell, siehe Abschnitt 4.2.2 (ein- und zweigliedriger Ansatz) und Yeoh's Modell im Hinblick auf experimentelle Daten. Hierbei lassen PRZYBYLO & ARRUDA [134] außeracht, daß schon in dem Artikel von OGDEN [127] das sogenannte Hill'sche Stabilitätskriterium angegeben wurde.

¹⁸Siehe HILL [79].

und $\varphi_2 \geq 0$ implizieren auch, daß in der einfachen Scherung der deformationsabhängige Schubmodul $\mu(\kappa) = \varphi_1 + \varphi_2$, siehe Gl.(6.5)₄ stets positiv ist.

In HARTMANN [66] ist die Annahme von nur nicht-negativen Materialparametern im Hinblick auf einfache Deformationsprozesse wie einfacher Zug, einfache Scherung, biaxialer Zug und einfache Torsion untersucht worden. Sowohl diese Belastungspfade als auch die Erfüllung der Baker-Ericksen Ungleichung erfüllen in Form von hinreichenden Bedingungen monotone Kennlinien (in den verwendeten Variablen), die mit physikalischen Beobachtungen an Elastomerproben bei kombinierten Zug-Torsionsversuchen korrespondieren.¹⁹ Jedoch werden durch die Einführung der Nebenbedingung $c_{ij} \geq 0$ bei vielen Modellen aus Tab. 4.2 mehrere Materialparameter zu Null identifiziert, d.h. diese Parameter können unter den gemachten Annahmen der Nicht-Negativität und den verwendeten experimentellen Daten entfallen. Bei kombinierten Zug-Torsionsexperimenten haben sich zwei Materialparameter als notwendig erwiesen, nämlich die Mooney-Rivlin Parameter c_{10} und c_{01} , die zusammen die Anfangssteigungen in Normalkraft-Streckungs- und Torsionsmoment-Drillungsdiagrammen wiedergeben. Zusätzlich wird dann mindestens ein weiterer Materialparameter benötigt, der den nichtlinearen Verlauf beeinflussen kann. Dieser wurde in HARTMANN [66] durch einen Term höherer Ordnung in der ersten Invariante I_C identifiziert. In Tab. 4.2 sind die Modelle 14-16 Ergebnisse dieser Identifikation, wobei sich Modell 14 als nicht sehr sensitiv gegenüber Störungen in den Meßdaten erwiesen hat sowie ausreichend genau die experimentellen Daten wiedergeben kann und daher den Modellen 15-16 vorzuziehen ist. Das Modell der Form

$$w(\mathbf{I}_C, \mathbf{II}_C) = c_{10}(\mathbf{I}_C - 3) + c_{01}(\mathbf{II}_C - 3) + c_{30}(\mathbf{I}_C - 3)^3, \quad (4.50)$$

$c_{10} > 0$, $c_{01} > 0$, $c_{30} > 0$, erscheint daher geeignet die Spannungs-Dehnungszusammenhänge in den betrachteten Deformationsbereichen für das betrachtete Material wiederzugeben.

Ein Vorteil der verallgemeinerten Polynomelastizität ist die Linearität der Formänderungsenergie in den Materialparametern c_{ij} , die sich bei der Parameteridentifikation für Zug-Druckversuche, biaxialer Streckung sowie kombinierten Zug-Torsionsexperimenten fortsetzt. Dies führt dann zur Anwendung von "Linear Least-Square" Verfahren (mit und ohne Nebenbedingungen).²⁰ Ein wesentlicher Kritikpunkt der verallgemeinerten Polynomelastizität lag bisher an den nicht-monotonen Kennlinien außerhalb des Identifikationsbereiches, was durch die Beliebigkeit der Materialparameter entstand und durch Einführung der Einschränkungen $c_{ij} \geq 0$ vermieden wird. Einem Ausschluß von "besseren" Lösungen, bei denen sowohl positive als auch negative Materialparameter auftreten, muß entgegnet werden, daß für $c_{ij} \geq 0$ genügend Freiheiten der Modellierung vorliegen.²¹

Wir kommen nochmals auf die inkrementelle Stabilität zu sprechen. Die Ungleichung (4.32) ist, wie dort angedeutet, mit der Baker-Ericksen Ungleichung äquivalent. Wir untersuchen noch die positive Definitheit der Matrix (4.42). Wegen der Darstellung

$$\hat{v}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)|_{J=1} = w(\mathbf{I}_C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \mathbf{II}_C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3))$$

¹⁹HAUPT & SEDLAN [76], SEDLAN [146].

²⁰HARTMANN [65, 66].

²¹Die Identifikation der Materialparameter der Formänderungsenergie (4.50) anhand von Zug-Torsionsprozessen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente ist in HARTMANN et al. [69] durchgeführt worden.

erhalten wir die Matrix

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \frac{\partial w}{\partial \lambda_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \lambda_1^2} & \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \lambda_1 \lambda_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_3} \\ & \lambda_2 \frac{\partial w}{\partial \lambda_2} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \lambda_2^2} & \lambda_2 \lambda_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_3} \\ \text{sym.} & & \lambda_3 \frac{\partial w}{\partial \lambda_3} + \lambda_3^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \lambda_3^2} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

mit den Koeffizienten

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda_i} = 2\lambda_i(c_{10} + 3c_{30}(\mathbf{I_C} - 3)^2 + 2c_{01}(\lambda_j^2 + \lambda_k^2)), \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \lambda_i^2} = 2(c_{10} + c_{01}(\lambda_j^2 + \lambda_k^2) + 12c_{30}\lambda_i^2(\mathbf{I_C} - 3) + 3c_{30}(\mathbf{I_C} - 3)^2), \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} = 4\lambda_i \lambda_j (c_{01} + 6c_{30}(\mathbf{I_C} - 3)). \quad (4.54)$$

Eine notwendige Bedingung für die positive Definitheit ist die Positivität der Diagonalelemente. Dies wäre durch positive Materialparameter $c_{10} > 0$, $c_{01} > 0$ und $c_{30} > 0$ gegeben. Notwendige und hinreichende Bedingungen²² entsprechen den Ungleichungen

$$a_{11} > 0 \quad \text{und} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \quad \text{und} \quad \det \mathbf{A} > 0. \quad (4.55)$$

Der Nachweis der letzten Bedingung, $\det \mathbf{A} > 0$, ist mir nicht gelungen, so daß der *a priori* Nachweis der inkrementellen Stabilität für $m = 0$ (und auch $m = 1$) offen ist.²³ Dabei bleibt der Nachweis der Erfüllung eines Stabilitätskriteriums der Form (4.24) offen. Lediglich die Annahme von $c_{10} > 0$, $c_{01} > 0$ und $c_{30} > 0$ sind hinreichend für die Erfüllung von (4.32), siehe Gl.(4.49), sowie $a_{ii} > 0$ ein Indikator für die positive Definitheit.

4.2.2 Ogden-Elastizität

Das Ogden-Modell hängt im Gegensatz zur verallgemeinerten Polynomelastizität des vorherigen Abschnitts von den Eigenwerten μ_a des Rechten bzw. Linken Cauchy-Green Tensors \mathbf{C} bzw. \mathbf{B} oder von den Eigenwerten $\lambda_i = \sqrt{\mu_i}$ des rechten oder linken Strecktensors \mathbf{U} bzw. \mathbf{V} ab, siehe Gl.(4.19). γ_i und α_i stellen die Materialparameter des Modells dar. Diese sollten zur Erfüllung des Hill'schen Stabilitätskriteriums die Bedingung $\gamma_i \alpha_i > 0$ (keine Summe über i) erfüllen, um physikalisch sinnvolle Verläufe zu garantieren (OGDEN [127]). Diese Ungleichung wollen wir zunächst aus der inkrementellen Stabilitätsbedingung (4.24) für $m = 0$ herleiten, was von der Herleitung in OGDEN [127] abweicht. Gemäß der Bedingung $\dot{\mathbf{T}}^{(0)} \cdot \overline{\ln \mathbf{U}} > 0$ muß die Matrix (4.42) positiv definit und der Ausdruck (4.32) positiv sein. Für die Ogdensche Formänderungsenergie (4.19) ausgedrückt durch Hauptstreckungen

$$\hat{\Upsilon}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\gamma_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (4.56)$$

²²Siehe SCHWARZ ET AL. [145, S.28ff].

²³Lediglich als begleitende Berechnung könnte man die Bedingungen (4.55) während einer Finite-Elemente Berechnung durchführen.

folgt

$$\frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial \lambda_i} = \sum_{r=1}^{n_0} \gamma_r \lambda_i^{\alpha_r - 1}, \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\Upsilon}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} = \delta_{ij} \sum_{r=1}^{n_0} (\alpha_r - 1) \gamma_r \lambda_i^{\alpha_r - 2}, \quad \text{keine Summe über } i. \quad (4.58)$$

Da die Formänderungsenergie die entkoppelte Struktur $\hat{\Upsilon}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \hat{w}(\lambda_1) + \hat{w}(\lambda_2) + \hat{w}(\lambda_3)$ aufweist,²⁴ liefert die Matrix (4.30) eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_i^{(0)}}{\partial \epsilon_i^{(0)}} &= \lambda_i \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial \lambda_i} + \lambda_i^2 \frac{\partial^2 \hat{\Upsilon}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_i} = \\ &= \lambda_i \sum_{r=1}^{n_0} \gamma_r \lambda_i^{\alpha_r - 1} + \lambda_i^2 \sum_{r=1}^{n_0} (\alpha_r - 1) \gamma_r \lambda_i^{\alpha_r - 2} = \sum_{r=1}^{n_0} \gamma_r \alpha_r \lambda_i^{\alpha_r}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Eine hinreichende Bedingung zur Erfüllung der positiven Definitheit wäre die Positivität des Produktes $\gamma_r \alpha_r > 0$. Die Erfüllung der Ungleichung (4.32), ausgedrückt durch die Spannungen $t_i^{(0)}$,

$$\begin{aligned} (t_i^{(0)} - t_j^{(0)}) (\ln \lambda_i - \ln \lambda_j) &= \rho_R \left(\lambda_i \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial \lambda_i} - \lambda_j \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial \lambda_j} \right) (\ln \lambda_i - \ln \lambda_j) = \\ &= \rho_R \left(\sum_{r=1}^{n_0} \gamma_r (\lambda_i^{\alpha_r} - \lambda_j^{\alpha_r}) \right) (\ln \lambda_i - \ln \lambda_j) \end{aligned} \quad (4.60)$$

ist ebenfalls für $\lambda_i > \lambda_j$ unter der Bedingung $\gamma_r \alpha_r > 0$ erfüllt, d.h. die Ogdensche Formänderungsenergie (4.56) ist im Falle von Inkompressibilität stabil im Sinne der Variablen $\mathbf{T}^{(0)}$ und $\mathbf{E}^{(0)}$ für $\gamma_r \alpha_r > 0$.

Eine weitere einschränkende Bedingung formuliert CIARLET [31]. Danach müssen die Materialparameter zusätzlich die Bedingung $\gamma_r > 0$ und $\alpha_r \geq 1$ erfüllen, um die Existenz einer Lösung zu gewährleisten. Dies impliziert auf jeden Fall auch die Stabilitätsanforderung $\gamma_r \alpha_r > 0$.

Zwei Modelle der Polynomelastizität aus Abschnitt 4.2.1 sind mit der Ogdenschen Formänderungsenergie unter der Annahme der Inkompressibilität identisch. Dies sind das Neo-Hooke Modell, Modell Nr.5 aus Tab. 4.2, mit $n_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$ und $\gamma_1 = 2c_{10}$, und das Mooney-Rivlin Modell, Modell Nr.1 der Tab. 4.2, für $n_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$, $\gamma_1 = 2c_{10}$ sowie $\gamma_2 = -2c_{01}$. Beide Modelle genügen den Stabilitätsforderungen $\gamma_1 \alpha_1 > 0$ und $\gamma_2 \alpha_2 > 0$.

Die Ogdensche Formänderungsenergie ist aufgrund obiger Stabilitätseigenschaft und der Formulierung in Eigenwerten sehr beliebt. Die Anpassung der Materialparameter an Versuche bei denen Deformationen vorliegen, wo eine Trennung der Hauptstreckungen gegeben ist (einfacher Zug, "pure shear",²⁵ biaxiale Streckung), führt unter der Annahme der Inkompressibilität auf einfache Lösungen. Im Falle der Zug-Torsionsproblematik ist die Herleitung einer analytischen

²⁴Dies wird auch als Valanis-Landel Hypothese bezeichnet, siehe VALANIS & LANDEL [167].

²⁵Die homogene Deformation des *pure shear* wird in einem mittleren Bereich einer Membran unter Zug näherungsweise erreicht und führt auf die Bewegung $\vec{x} = \chi_R(\vec{X}, t) = \lambda X_1 \vec{e}_1 + \lambda^{-1} X_2 \vec{e}_2 + X_3 \vec{e}_3$, siehe OGDEN [129, pp.100]. Dabei ist \vec{e}_1 die Zugrichtung und \vec{e}_2 die Dickenrichtung der Membran.

Lösung sehr viel schwieriger als bei Verwendung von Formänderungsenergien mit Hauptinvarianten.²⁶ Die Materialparameteridentifikation führt hingegen im Gegensatz zur verallgemeinerten Polynomelastizität immer, d.h. für alle Deformationsprozesse zu einem nichtlinearen Optimierungsproblem mit Ungleichungsnebenbedingungen. Die Identifikation ist durch TWIZELL & OGDEN [166], BENJEDDOU ET AL. [13], GENDY & SALEEB [51], PRZYBYLO & ARRUDA [134], SMEULDERS & GOVINDJEE [156], SCHEDAY & MIEHE [143] sowie RIEGER [139] durchgeführt worden.²⁷ Die maximale Anzahl von Materialparametern ist dabei $2n_0$ mit insgesamt $n_0 \leq 4$ beschränkt geblieben.²⁸

4.2.3 Arruda/Boyce-Modell

Die Formänderungsenergie von ARRUDA & BOYCE [6] hat die Struktur

$$w(\mathbf{I}_C) = c \sum_{i=1}^m d_i N^{1-i} (\mathbf{I}_C - 3)^i \quad (4.20)$$

und besitzt lediglich zwei Materialparameter c und N , wobei N nichtlinear in der Formänderungsenergie enthalten ist. Die Parameter $d_i > 0$ stellen Zahlen aus einer Reihenentwicklung basierend auf der inversen Langevin-Funktion dar. Die ersten sechs Koeffizienten lauten:

$$d_1 = \frac{1}{2}, \quad d_2 = \frac{1}{20}, \quad d_3 = \frac{11}{1050}, \quad d_4 = \frac{19}{7000}, \quad d_5 = \frac{519}{673750}, \quad d_6 = \frac{199997}{87587500} \quad (4.61)$$

An dieser Stelle soll nicht auf die mikromechanische Motivation des Modells eingegangen sondern lediglich die resultierenden Eigenschaften diskutiert werden. Die Materialparameter c und N müssen aufgrund ihrer physikalischen Bedeutung a priori positiv sein, siehe [6]. Der Nachweis eines stabilen Materialverhaltens im Sinne von $p_{\text{incr}}^{(0)} > 0$, siehe Ungleichung (4.24), kann wegen der Kopplung der Hauptstreckungen, $\mathbf{I}_C^i = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^i$, für $i > 1$ ebenfalls nicht bestätigt werden, siehe positive Definitheit der Matrix \mathbf{A} in Gl.(4.51). Die Baker-Ericksen Ungleichung (4.39) bzw. (4.49) wird hingegen erfüllt, da

$$\varphi_1 = 2\rho_R \frac{\partial w}{\partial \mathbf{I}_C} = c \sum_{i=1}^m i d_i N^{1-i} \mathbf{I}_C^{i-1} > 0 \quad (4.62)$$

ist ($\varphi_2 = 0$). Wegen der a priori Annahme positiver Materialparameter $c > 0$ und $N > 0$ und den positiven Parametern $d_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, ist die Funktion $\varphi_1 > 0$ und damit die Baker-Ericksen Ungleichung erfüllt. Das Modell kann mit seinen zwei Materialparametern sehr gut das Materialverhalten von Elastomeren in einem nicht zu großen Deformationsbereich beschreiben. Zur Bestimmung der Materialparameter siehe PRZYBYLO & ARRUDA [134] und SEIBERT & SCHÖCHE [148]. Man muß jedoch auch hier die Nebenbedingung $c > 0$ und $N > 0$ bei der Materialparameteridentifikation mitberücksichtigen.

²⁶OGDEN [129, 130].

²⁷Zum großen Teil sind die Ungleichungsnebenbedingungen $\gamma_r \alpha_r > 0$ nicht berücksichtigt worden.

²⁸Eigene Vorstudien haben gezeigt, daß die Sensitivität der Materialparameter gegenüber Störungen in den Meßdaten im allgemeinen sehr groß ist. Des weiteren hängt das Resultat sehr stark von den gewählten Startwerten der nichtlinearen Optimierung ab. Ein Befund, der ebenfalls in RIEGER [139] dargestellt wird.

Das Modell wird für $n_0 = 2$ durch ein mikromechanisches Modell von KALISKE & HEINRICH [91] motiviert.

4.3 Hyperelastizität bei Nahezu-Inkompressibilität

Die Annahme der Inkompressibilität stellt eine Idealisierung des volumetrischen Verhaltens von gummiartigen Materialien dar, welche bei vielen Elastomeren in weiten Bereichen der Deformation als gerechtfertigt erscheint. Für ein rußgefülltes Elastomer hat SEDLAN [146] in einem einaxialen Zugversuch bis ungefähr 100% Dehnung nachgewiesen, daß eine vernachlässigbare Volumendehnung auftritt und die Annahme der Inkompressibilität für den betrachteten Werkstoff bei der Höhe der Belastung als gerechtfertigt erscheint.²⁹ Der wesentliche Vorteil der Annahme der Inkompressibilität liegt im Rahmen von analytischen Lösungen spezieller Randwertprobleme und daraus resultierend die bessere Möglichkeit der Modellierung von Materialeigenschaften. Bei Strukturen hingegen können lokal solche Deformationsbereiche überschritten werden, so daß die Annahme der Inkompressibilität nicht mehr sinnvoll ist. Zum anderen bedingt die numerische Umsetzung der Annahme der Inkompressibilität mit Hilfe der Methode der finiten Elemente Schwierigkeiten. Daher führt man den Begriff der "schwachen Kompressibilität" bzw. "Nahezu-Inkompressibilität" ein, womit zumeist eine Formänderungsenergie der Form (4.21) impliziert wird. Man zerlegt dabei die Formänderungsenergie in zwei Anteile,

$$\bar{\psi}(J, \bar{\mathbf{C}}) = U(J) + \bar{v}(\bar{\mathbf{C}}). \quad (4.21)$$

Der erste Anteil $U(J)$ resultiert aus der volumenändernden Deformation $J = \det \mathbf{F}$ und der zweite Anteil $\bar{v}(\bar{\mathbf{C}})$ aus der volumenerhaltenden Deformation (3.44).³⁰ Die Festlegung des Anteils $\bar{v}(\bar{\mathbf{C}})$ erfolgt durch eine Funktion der Eigenwerte $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ und $\bar{\mu}_3$ des unimodularen Rechten Cauchy-Green Tensors $\bar{\mathbf{C}}$, $\bar{v}(\bar{\mathbf{C}}) = \Upsilon(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3)$, oder durch Formulierung in Invarianten $\bar{v}(\bar{\mathbf{C}}) = w(\mathbb{I}_{\bar{\mathbf{C}}}, \mathbb{II}_{\bar{\mathbf{C}}})$. Dies können zum Beispiel die Ansätze (4.18)-(4.20) sein.

Im folgenden betrachten wir zunächst den Spannungszustand bei einer Aufteilung der Formänderungsenergie gemäß (4.21) und dem zugehörigen Tangentenoperator, jeweils formuliert mit Größen der Referenz- und der Momentankonfiguration. Anschließend betrachten wir einige Eigenschaften des Anteils $U(J)$ sowie dessen Einfluß auf den einaxialen Zug.

4.3.1 Volumenändernder Anteil der Formänderungsenergie

Der volumenändernde Anteil $U(J)$ der Formänderungsenergie (4.21) hat zumeist die Struktur

$$U(J) = K \hat{U}(J), \quad (4.63)$$

wobei K den Kompressionsmodul darstellt und $\hat{U}(J)$ eine materialparameterunabhängige Funktion ist. Für $K \rightarrow \infty$ tendiert die Lösung gegen das Verhalten eines inkompressiblen Materials. Im Rahmen der Methode der finiten Elemente wird der Kompressionsmodul K so groß gewählt, daß das resultierende nichtlineare Gleichungssystem des diskretisierten Variationsprinzips lösbar ist. Für die Funktion $\hat{U}(J)$ gibt es in der Literatur eine Reihe von Ansätzen, die sich nicht auf experimentelle Beobachtungen stützen, sondern eher der Plausibilität und mathematischen Gesichtspunkten genügen. Diese Anforderungen sind zum Beispiel $U(1) = 0$ und

²⁹In PENN [132] wird bei Zugversuchen festgestellt, daß bei einem natürlichen Gummi eine nicht zu vernachlässigende Volumendehnung vorliegt. Die Annahme der Inkompressibilität muß daher für jeden Werkstoff untersucht werden.

³⁰Die Aussage in PENN [132], daß eine Trennung in volumenändernde und -erhaltende Anteile aufgrund der dort dargestellten experimentellen Daten nicht erfolgen kann, ist nicht nachvollziehbar. Es liegt eher die Problematik vor, daß beim einaxialen Zug aus einer impliziten Gleichungen, siehe Abschnitt 4.3.5, die Modellierung der Anteile $U(J)$ und $\bar{v}(\bar{\mathbf{C}})$ kaum möglich ist. Dies liegt jedoch ebenfalls bei allgemeineren Formänderungsenergien der Form $\Psi(\mathbb{I}_{\mathbf{C}}, \mathbb{II}_{\mathbf{C}}, \mathbb{III}_{\mathbf{C}})$ vor.

$U'(1) = 0$, welche auf eine energie- und spannungsfreie³¹ Referenzkonfiguration führen, sowie $U'''(1) = K$ bzw. $\hat{U}'''(1) = 1$, was dazu führt, daß K als der Kompressionsmodul der linearen Elastizitätstheorie interpretiert werden kann. Des weiteren sollten die Anforderungen $U(J) \rightarrow \infty$ für $J \rightarrow 0$ und $J \rightarrow \infty$ sowie $U''(J) \geq 0$ erfüllt sein, um eine Ab- bzw. Zunahme des hydrostatischen Spannungszustandes bei volumetrischer Stauchung bzw. Zug zu gewährleisten (Konvexität). In Tab. 4.3 sind einige Ansätze für $\hat{U}(J)$ aufgeführt, die in der Literatur zu finden sind.³²

Tabelle 4.3: Formänderungsenergien der volumenändernden Deformation

Nr.	$\hat{U}(J)$	$\hat{U}'(J)$	$\hat{U}''(J)$	Referenz
1	$\frac{1}{2}(J-1)^2$	$J-1$	1	
2	$\frac{1}{4}((J-1)^2 + (\ln J)^2)$	$\frac{1}{2}\left(J-1 + \frac{1}{J}\ln J\right)$	$\frac{1}{2J^2}(1+J^2 - \ln J)$	[152]
3	$\frac{1}{2}(\ln J)^2$	$\frac{1}{J}\ln J$	$\frac{1}{J^2}(1 - \ln J)$	[155]
4	$\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{J^\beta} - 1 + \beta \ln J\right)$	$\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{J} - \frac{1}{J^{1+\beta}}\right)$	$\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{J^{2+\beta}}(1 + \beta - J^\beta)\right)$	[126]
5	$\frac{1}{4}(J^2 - 1 - 2\ln J)$	$\frac{1}{2}\left(J - \frac{1}{J}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{J^2}\right)$	[154]
6	$J - \ln J - 1$	$1 - \frac{1}{J}$	$\frac{1}{J^2}$	[117]
7	$J^\beta(\beta \ln J - 1) + 1$	$\beta^2 \frac{1}{J^{1-\beta}} \ln J$	$\beta^2 J^{\beta-2}(1 + (\beta-1)\ln J)$	[67]
8	$J \ln J - J + 1$	$\ln J$	$\frac{1}{J}$	[107]
9	$\frac{1}{32}(J^2 - J^{-2})^2$	$\frac{1}{8}\left(J^3 - \frac{1}{J^5}\right)$	$\frac{1}{8}\left(5\frac{1}{J^6} + 3J^2\right)$	[5]
10	$\frac{J}{\beta}\left(1 - \frac{J^{-\beta}}{1-\beta}\right) + \frac{1}{\beta-1}$	$\frac{1}{\beta}(1 - J^{-\beta})$	$J^{-(1+\beta)}$	[122, S.68]
11	$\frac{1}{50}(J^5 + J^{-5} - 2)$	$\frac{1}{10}(J^4 - J^{-6})$	$\frac{1}{10}(4J^4 + 6J^{-7})$	[72]

In den Abb. 4.1 und 4.2 ist der Verlauf $\hat{U}(J)$ bzw. $\hat{U}'(J)$ für $0 < J \leq 5$ für die Modelle 1-3,5,6,8 sowie 9 wiedergegeben. Modell 1 repräsentiert eine lineare Approximation der hydrostatischen Spannungen bei einer Änderung der Volumendehnungen, siehe Beziehung (4.82), $(\text{tr } \mathbf{T})/3 = \rho_R U'(J)$. Jedoch hat Modell 1 einen endlichen Grenzwert für $\lim_{J \rightarrow 0} \hat{U}(J) = 1/2$ bzw. $\lim_{J \rightarrow 0} \hat{U}'(J) = -1$, was unplausibel für größere Volumendehnungen erscheint. Die Erweiterung um den natürlichen Logarithmus in Modell 2 korrigiert diese Eigenschaft.³³ Nimmt man nur den Korrekturterm, siehe Modell 3, so ist die Konvexität für $J > e = 2.718 \dots$ verletzt,

³¹Damit ist ein hydrostatischer Spannungszustand gemeint.

³²Siehe hierzu auch VAN DEN BOGERT [168, S.41].

³³Dabei muß angemerkt werden, daß in SIMO & TAYLOR [152] keine multiplikative Aufspaltung in volumenerhaltende und -ändernde Deformation vorgenommen wurde.

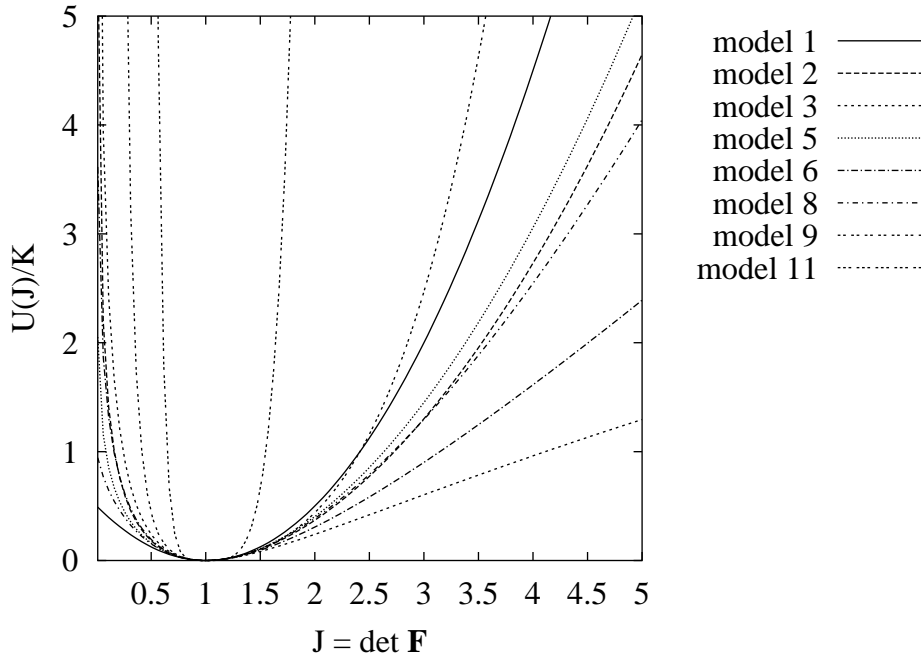


Abbildung 4.1: Verhalten der Formänderungsenergien aus Tab. 4.3

$\hat{U}''(J) < 0$. In Abb. 4.2 ist dies im Abfall des Funktionsverlaufs zu erkennen. Die Modelle 5 und 6 sind im Modell 4 von OGDEN [126] für $\beta = -2$ und $\beta = -1$ enthalten.³⁴ Modell 8 ist wiederum für $\beta = 1$ in Modell 7 enthalten. Konvexität ist für Modell 7 nicht für jedes β gewährleistet. Die Modelle 8 und 9 erfüllen alle Anforderungen.³⁵ Das Modell 10 von MURNAGHAN [122, S.68] ist für die Beschreibung der hydrostatischen Spannungen entwickelt worden, d.h. die Funktion $U'(J)$ ist vorgeschlagen worden, wobei wir hier die zugehörige Formänderungsenergie durch Integration gewinnen und zusätzlich energiefrei formulieren. Modell 11 erfüllt ebenfalls alle geforderten Bedingungen sowie weitere in Abschnitt 4.3.5 gewünschten Eigenschaften. An dieser Stelle sei im speziellen auf OGDEN [126, 128] für weitergehende Diskussionen zum kompressiblen Materialverhalten verwiesen.

4.3.2 Volumenerhaltender Anteil der Formänderungsenergie

Für den volumenerhaltenden Anteil der Formänderungsenergie $\bar{v}(\bar{\mathbf{C}}) = w(\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}})$ wählt man üblicherweise Formänderungsenergien, die für inkompressible Materialien entwickelt wurden. Dabei wird der Rechte Cauchy-Green Tensor durch seinen unimodularen Anteil ersetzt, da dieser per Definition isochor ist. Für die in den Abschnitten 4.2.1-4.2.3 dargestellten Formulierungen erhalten wir dann die modifizierte Polynomelastizität

$$w(\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}}) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} (\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}} - 3)^i (\mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}} - 3)^j \quad (4.64)$$

³⁴Der Fall $\beta = 1$ wird in EHLERS & EIPPER [42] angewendet, der jedoch nicht-konvex ist und einen Wendepunkt bei $\lambda = 2$ hat.

³⁵In dieser Arbeit sind die Vorfaktoren im Modell 2 von $1/2$ auf $1/4$ und im Modell 9 auf $1/32$ derart modifiziert worden, damit $\hat{U}''(1) = 1$ erfüllt ist. Wir weichen daher geringfügig von der Originalliteratur ab.

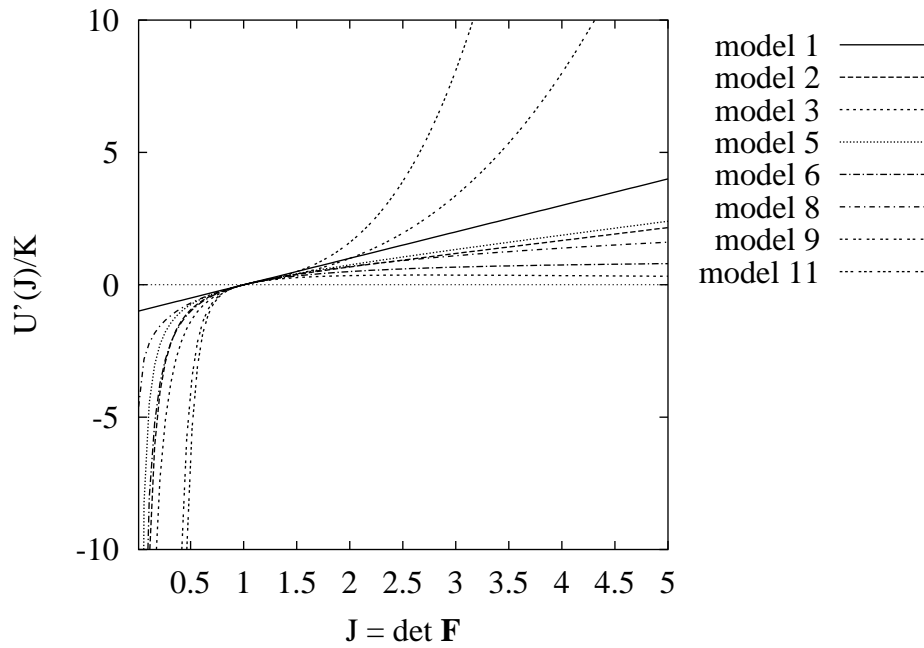


Abbildung 4.2: Verhalten der hydrostatischen Spannungen aus Tab. 4.3

und das modifizierte Ogden-Modell

$$\hat{\Upsilon}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) = \sum_{i=1}^{n_o} \frac{\gamma_i}{\alpha_i} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3) = \sum_{i=1}^{n_o} \frac{\gamma_i}{\alpha_i} (\bar{\mu}_1^{\alpha_i/2} + \bar{\mu}_2^{\alpha_i/2} + \bar{\mu}_3^{\alpha_i/2} - 3) \quad (4.65)$$

mit den isochoren Eigenstreckungen (3.45) bzw. den Eigenwerten des unimodularen Rechten Cauchy-Green Tensors $\bar{\mu}_k$ aus Gl.(3.48).

$$w(\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}) = c \sum_{i=1}^m d_i N^{1-i} (\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}^i - 3^i) \quad (4.66)$$

stellt das modifizierte Arruda & Boyce Modell dar.

4.3.3 Spannungszustand

Da wir für die späteren numerischen Berechnungen Formänderungsenergien vom Typ (4.21) verwenden, interessiert uns zunächst der resultierende Spannungszustand. Hierzu betrachten wir die Darstellungen für den 2-ten Piola-Kirchhoff Tensor und die Cauchy bzw. gewichteten Cauchy Spannungen.

Referenzkonfiguration

Zunächst benötigen wir den aus der Formänderungsenergie (4.21) resultierenden Spannungszustand. Hierzu gehen wir im folgenden von der speziellen Abhängigkeit $\bar{v}(\bar{\mathbf{C}}) = w(\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}})$ aus:

$$\psi(J, \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}}) = U(J) + w(\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}}) \quad (4.67)$$

Die 2-ten Piola-Kirchhoff Spannungen berechnen sich gemäß Gl.(4.2) zu

$$\tilde{\mathbf{T}} = 2\rho_{\text{R}} \frac{d\bar{\psi}}{d\mathbf{C}} = 2\rho_{\text{R}} \left(\frac{dU((\det \mathbf{C})^{1/2})}{d\mathbf{C}} + \frac{d\bar{v}(\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{C}))}{d\mathbf{C}} \right). \quad (4.68)$$

Die Ableitung $dU/d\mathbf{C}$ wird durch

$$\frac{dU((\det \mathbf{C})^{1/2})}{d\mathbf{C}} = \frac{1}{2} J U'(J) \mathbf{C}^{-1} \quad (4.69)$$

geliefert, wobei wir $J = (\det \mathbf{C})^{1/2}$ ausnutzen. Die Ableitung $d\bar{v}/d\mathbf{C}$ lautet

$$\frac{d\bar{v}(\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{C}))}{d\mathbf{C}} = \left[\frac{d\bar{\mathbf{C}}}{d\mathbf{C}} \right]^T \frac{d\bar{v}}{d\bar{\mathbf{C}}} \quad (4.70)$$

mit

$$\left[\frac{d\bar{\mathbf{C}}}{d\mathbf{C}} \right]^T = (\det \mathbf{C})^{-1/3} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}) \right] = J^{-2/3} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}) \right]. \quad (4.71)$$

\mathcal{I} ist der Einheitstensor vierter Stufe der Definition (2.58). Offensichtlich gilt auch $\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}$. Aufgrund der speziellen Abhängigkeit von den Invarianten des unimodularen Rechten Cauchy-Green Tensors berechnet sich die Ableitung $d\bar{v}/d\mathbf{C}$ über die Kettenregel

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{\mathbf{C}}} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}} \frac{d\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}}{d\bar{\mathbf{C}}} + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}}} \frac{d\mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}}}{d\bar{\mathbf{C}}} = (w_1 + w_2 \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}) \mathbf{I} - w_2 \bar{\mathbf{C}} \quad (4.72)$$

mit

$$w_1(\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}}) = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}} \quad \text{und} \quad w_2(\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}}) = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}}}. \quad (4.73)$$

Die 2-ten Piola-Kirchhoff Spannungen (4.68) lauten schließlich

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}} &= \rho_{\text{R}} J U'(J) \mathbf{C}^{-1} + 2\rho_{\text{R}} J^{-2/3} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}} \right] \frac{d\bar{v}}{d\bar{\mathbf{C}}} = \\ &= \rho_{\text{R}} J^{1/3} U'(J) \bar{\mathbf{C}}^{-1} + 2\rho_{\text{R}} J^{-2/3} \left((w_1 + w_2 \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}) \mathbf{I} - w_2 \bar{\mathbf{C}} - \frac{1}{3} (w_1 \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}} + 2w_2 \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}}) \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right). \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$(4.75)$$

Momentankonfiguration

Die Vortransformation des 2-ten Piola-Kirchhoff Tensors $\tilde{\mathbf{T}}$ auf die Momentankonfiguration, siehe Tab. 3.4, kann formal durch den “push-forward” Operator

$$\mathcal{F} = [\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}]^{T_{23}} \quad (4.76)$$

erfolgen, siehe Definition (2.45):

$$\mathbf{S} = \mathcal{F} \tilde{\mathbf{T}} = [\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}]^{T_{23}} \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}^T \quad (4.77)$$

Die Anwendung dieser Operation auf Beziehung (4.74) liefert unter Zuhilfenahme der Gln.(2.45), (2.48) und Definition (2.58)

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \rho_{\text{R}} J U'(J) [\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}]^{T_{23}} \mathbf{C}^{-1} + 2\rho_{\text{R}} J^{-2/3} [\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}]^{T_{23}} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right] \frac{d\bar{v}}{d\bar{\mathbf{C}}} = \\ &= \rho_{\text{R}} J U'(J) \mathbf{I} + 2\rho_{\text{R}} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] [\bar{\mathbf{F}} \otimes \bar{\mathbf{F}}]^{T_{23}} \frac{d\bar{v}}{d\bar{\mathbf{C}}} = \\ &= \rho_{\text{R}} J U'(J) \mathbf{I} + 2\rho_{\text{R}} \left(\bar{\mathbf{F}} \frac{d\bar{v}}{d\bar{\mathbf{C}}} \bar{\mathbf{F}}^T \right)^D. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Hierbei haben wir die Eigenschaft

$$[\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}]^{T_{23}} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right] = \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] [\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}]^{T_{23}} = \mathcal{D}\mathcal{F} \quad (4.79)$$

ausgenutzt. Den Tensor

$$\mathcal{D} = \mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (4.80)$$

bezeichnet man auch als Deviatoroperator, $\mathcal{D}\mathbf{A} = \mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{A})\mathbf{I}$. Unter Ausnutzung der Isotropie ist dann der Kirchhoffsche Spannungstensor

$$\mathbf{S} = \rho_{\text{R}} J U'(J) \mathbf{I} + 2\rho_{\text{R}} \left(\bar{\mathbf{B}} \frac{d\bar{v}}{d\bar{\mathbf{B}}} \right)^D, \quad (4.81)$$

bzw. der Cauchysche Spannungstensor

$$\mathbf{T} = \rho_{\text{R}} U'(J) \mathbf{I} + \frac{2\rho_{\text{R}}}{J} \left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{\mathbf{B}}} \bar{\mathbf{B}} \right)^D \quad (4.82)$$

gegeben, welche sich in reine Kugel- und Deviatoranteile zerlegen lassen. Dies ist eine natürliche Konsequenz der speziellen Aufteilung der Formänderungsenergie (4.21). Analog zu Gl.(4.72) gilt

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{\mathbf{B}}} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}}} \frac{d\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}}}{d\bar{\mathbf{B}}} + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{B}}}} \frac{d\mathbf{II}_{\bar{\mathbf{B}}}}{d\bar{\mathbf{B}}} = (w_1 + w_2 \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}}) \mathbf{I} - w_2 \bar{\mathbf{B}} \quad (4.83)$$

mit $w_1(\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}}, \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{B}}}) = \partial w / \partial \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}}$ und $w_2(\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}}, \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{B}}}) = \partial w / \partial \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{B}}}$.

Weitere Darstellungen von Gl.(4.81) erhält man durch Einsetzen von Beziehung (4.83)

$$\mathbf{S} = \rho_{\text{R}} J U'(J) \mathbf{I} + 2\rho_{\text{R}} (w_1 + w_2 \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}}) \bar{\mathbf{B}}^D - 2\rho_{\text{R}} w_2 (\bar{\mathbf{B}}^2)^D \quad (4.84)$$

bzw. in Bezug auf Gl.(4.5),

$$\mathbf{S} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{B} + \alpha_2 \mathbf{B}^2, \quad (4.85)$$

siehe Tab. 4.1, mit

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \rho_{\text{R}} J U'(J) - \frac{2\rho_{\text{R}}}{3} (w_1 \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}} + 2w_2 \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{B}}}), \\ \alpha_1 &= 2\rho_{\text{R}} (w_1 + w_2 \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}}) J^{-2/3}, \\ \alpha_2 &= -2\rho_{\text{R}} w_2 J^{-4/3}. \end{aligned}$$

Im letzteren Fall müßten noch die Umrechnungen der Invarianten eingeführt werden, damit die Eigenschaft $\alpha_k = \alpha_k(\mathbf{I}_{\mathbf{B}}, \mathbf{II}_{\mathbf{B}}, \mathbf{III}_{\mathbf{B}})$, $k = 1, 2, 3$, sofort ersichtlich wird.

4.3.4 Tangentenoperator

Referenzkonfiguration

Sowohl im Hinblick auf den Linearisierungsprozeß im Rahmen der Methode der finiten Elemente als auch um den Zusammenhang zum Elastizitätstensor 4-ter Stufe der linearen Elastizitätstheorie zu erhalten, müssen wir den Spannungszustand $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{G}(J, \mathbf{C}, \bar{\mathbf{C}})$ aus Gl.(4.74) bezüglich der Deformation, hier beschrieben durch das Verschiebungsfeld $\vec{u}(\vec{X}, t)$, linearisieren. Die Anwendung der Gateaux-Ableitung $D_x f(x)[h] = \frac{d}{d\lambda} f(x + \lambda h)|_{\lambda=0}$ liefert

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{C}(\mathbf{F}(\vec{u})))[\Delta \vec{u}] &= \frac{d\tilde{\mathbf{T}}}{d\mathbf{C}} (\mathbf{F}^T \text{Grad } \Delta \vec{u} + \text{Grad}^T \Delta \vec{u} \mathbf{F}) = \\ &= 4\rho_{\text{R}} \frac{d^2 \bar{\psi}(J, \bar{\mathbf{C}})}{d\mathbf{C} d\mathbf{C}} \text{-sym} (\mathbf{F}^T \text{Grad } \Delta \vec{u}), \end{aligned} \quad (4.86)$$

wobei $\text{Grad } \Delta \vec{u}$ der Gradientenoperator bezüglich der Koordinaten der Referenzkonfiguration ist. Hierbei haben wir die Ketten- und Produktregel angewendet.³⁶ Wir sind daher an dem Tensor 4-ter Stufe

$$\tilde{\mathbf{C}} = 2 \frac{d\tilde{\mathbf{T}}}{d\mathbf{C}} = 4\rho_{\text{R}} \frac{d^2 \bar{\psi}}{d\mathbf{C} d\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{C}}_{\text{vol}} + \tilde{\mathbf{C}}_{\text{iso}} \quad (4.87)$$

interessiert, der sich ebenfalls in zwei Anteile gemäß der Aufspaltung des 2-ten Piola-Kirchhoff Tensors in Gl.(4.74) additiv zerlegt. Für Gl.(4.68) bzw. (4.74)-(4.75) gilt

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{G}(J, \mathbf{C}, \bar{\mathbf{C}}) = \tilde{\mathbf{T}}_{\text{vol}}(J, \mathbf{C}) + \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}}(J, \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{C})) \quad (4.88)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{T}}_{\text{vol}}(J(\text{III}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})), \mathbf{C}) = \rho_{\text{R}} J U'(J) \mathbf{C}^{-1}, \quad (4.89)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}}(J(\text{III}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})), \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{C})) = 2\rho_{\text{R}} J^{-2/3} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}} \right] \frac{d\bar{v}}{d\bar{\mathbf{C}}}. \quad (4.90)$$

Wir erhalten mit $J = (\det \mathbf{C})^{1/2} = \text{III}_{\mathbf{C}}^{1/2}$ das Gateaux-Differential

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{T}}_{\text{vol}}(J(\text{III}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})), \mathbf{C})[\mathbf{H}] &= \left[\frac{dJ}{d\text{III}_{\mathbf{C}}} \left[\frac{d\tilde{\mathbf{T}}_{\text{vol}}}{dJ} \otimes \frac{d\text{III}_{\mathbf{C}}}{d\mathbf{C}} \right] + \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{\text{vol}}}{\partial \mathbf{C}} \right] \mathbf{H} = \\ &= \rho_{\text{R}} \left[\frac{J}{2} (U'(J) + J U''(J)) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - J U'(J) [\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}]^{T_{23}} \right] \mathbf{H} \end{aligned} \quad (4.91)$$

unter Verwendung von

$$\frac{dJ}{d\text{III}_{\mathbf{C}}} = \frac{1}{2} \text{III}_{\mathbf{C}}^{-1/2} = \frac{1}{2} J^{-1} \quad \text{sowie} \quad \frac{d\text{III}_{\mathbf{C}}}{d\mathbf{C}} = J^2 \mathbf{C}^{-1}. \quad (4.92)$$

Für denjenigen Anteil, der aus der volumenändernden Deformation resultiert, lautet der Tangentenoperator

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\text{vol}} = \rho_{\text{R}} J \left[(U'(J) + J U''(J)) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2U'(J) [\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}]^{T_{23}} \right] = \quad (4.93)$$

$$= \rho_{\text{R}} J^{-1/3} \left[(U'(J) + J U''(J)) \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} - 2U'(J) [\bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1}]^{T_{23}} \right]. \quad (4.94)$$

³⁶Siehe zum Beispiel GURTIN [57, Ch.II].

Die Berechnung des Tangentenoperators des isochoren Anteils $\tilde{\mathbf{C}}_{\text{iso}}$ ist etwas aufwendiger. Wir untersuchen hierzu das Gateaux-Differential

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\text{iso}} \mathbf{H} = 2D_{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}}(J(\mathbb{III}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})), \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{C}))[\mathbf{H}] = 2 \left[\frac{dJ}{d\mathbb{III}_{\mathbf{C}}} \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}}}{\partial J} \otimes \frac{d\mathbb{III}_{\mathbf{C}}}{d\mathbf{C}} \right] + \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \frac{d\bar{\mathbf{C}}}{d\mathbf{C}} \right] \mathbf{H}. \quad (4.95)$$

Bei Ausnutzung von Gl.(4.92) sowie

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}}}{\partial J} = -\frac{4}{3} \rho_{\text{R}} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}} \right] \frac{d\bar{v}}{d\bar{\mathbf{C}}} = \frac{2J^{-1}}{3} \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}} \quad (4.96)$$

lautet der linke Summand in (4.95)

$$2 \frac{dJ}{d\mathbb{III}_{\mathbf{C}}} \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}}}{\partial J} \otimes \frac{d\mathbb{III}_{\mathbf{C}}}{d\mathbf{C}} \right] = -\frac{2}{3} \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}} \otimes \mathbf{C}^{-1}. \quad (4.97)$$

Mit der Abkürzung

$$\bar{\bar{\mathbf{T}}} = \bar{\bar{\mathbf{T}}}(\bar{\mathbf{C}}) = 2\rho_{\text{R}} \frac{d\bar{v}}{d\bar{\mathbf{C}}} \quad (4.98)$$

gilt

$$\tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}} = J^{-2/3} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}} \right] \bar{\bar{\mathbf{T}}} = J^{-2/3} \left(\bar{\bar{\mathbf{T}}} - \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{T}}}) \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right) \quad (4.99)$$

und es folgt mit Hilfe der Produktregel

$$\begin{aligned} D_{\bar{\mathbf{C}}} \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}}(J, \bar{\mathbf{C}})[\mathbf{H}] &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \mathbf{H} = \\ &= J^{-2/3} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}} \right] D_{\bar{\mathbf{C}}} \bar{\bar{\mathbf{T}}}(\bar{\mathbf{C}})[\mathbf{H}] - \frac{J^{-2/3}}{3} \left[\bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\bar{\mathbf{T}}} - (\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{T}}}) \left[\bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right]^{T_{23}} \right] \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Das linke Differential entspricht unter Verwendung von Gl.(4.98)

$$D_{\bar{\mathbf{C}}} \bar{\bar{\mathbf{T}}}(\bar{\mathbf{C}})[\mathbf{H}] = \frac{d\bar{\bar{\mathbf{T}}}}{d\bar{\mathbf{C}}} \mathbf{H} = 2 \frac{d^2 \bar{v}}{d\bar{\mathbf{C}} d\bar{\mathbf{C}}} \mathbf{H}. \quad (4.101)$$

Der vierstufige Operator des zweiten Anteils des Differentials (4.100) wird umformuliert. Wegen der Eigenschaft

$$\left[\bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\bar{\mathbf{T}}} - (\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{T}}}) \left[\bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right]^{T_{23}} \right] \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right] = \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\bar{\mathbf{T}}} - (\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{T}}}) \left[\bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right]^{T_{23}}$$

multiplizieren wir das zweite Differential in Beziehung (4.100) von rechts mit $\mathcal{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1}$ und erhalten mit dem Zusammenhang (4.99)

$$\begin{aligned} -\frac{J^{-2/3}}{3} \left[\bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right] \bar{\bar{\mathbf{T}}} - (\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{T}}}) \left[\bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right]^{T_{23}} + \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{T}}}) \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right] = \\ -\frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}} + \frac{J^{-2/3}}{3} (\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{T}}}) \left[\left[\bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right]^{T_{23}} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Der Zusammenbau von Gl.(4.97), (4.100) sowie (4.102) führt schließlich für den vierstufigen Tensor (4.95) auf

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\text{iso}} = & 4\rho_{\text{R}} J^{-4/3} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \overline{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \overline{\mathbf{C}} \right] \frac{d^2 \bar{v}}{d\overline{\mathbf{C}} d\overline{\mathbf{C}}} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \overline{\mathbf{C}} \otimes \overline{\mathbf{C}}^{-1} \right] - \\ & - \frac{2J^{-2/3}}{3} \left[\tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}} \otimes \overline{\mathbf{C}}^{-1} + \overline{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}} \right] + \\ & + \frac{4\rho_{\text{R}} J^{-4/3}}{3} \left(\overline{\mathbf{C}} \cdot \frac{d\bar{v}}{d\overline{\mathbf{C}}} \right) \left[\left[\overline{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \overline{\mathbf{C}}^{-1} \right]^{T_{23}} - \frac{1}{3} \overline{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \overline{\mathbf{C}}^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (4.103)$$

ANMERKUNG 4.1

Zur vereinfachten numerischen Berechnung (im Rahmen der 6×6 -Darstellung der Tensoren 4-ter Stufe) ist es einfacher den ersten Summanden auszumultiplizieren und für $\mathcal{A} = d^2 \bar{v} / d\overline{\mathbf{C}} d\overline{\mathbf{C}}$ die Symmetrieeigenschaften $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$ auszunutzen. Wir erhalten dann die Umrechnung

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \overline{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \overline{\mathbf{C}} \right] \mathcal{A} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \overline{\mathbf{C}} \otimes \overline{\mathbf{C}}^{-1} \right] = \\ = \mathcal{A} - \frac{1}{3} \left[\overline{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \mathcal{A} \overline{\mathbf{C}} + \mathcal{A} \overline{\mathbf{C}} \otimes \overline{\mathbf{C}}^{-1} \right] + \frac{1}{9} (\mathcal{A} \overline{\mathbf{C}} \cdot \overline{\mathbf{C}}) \overline{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \overline{\mathbf{C}}^{-1}. \end{aligned}$$

□

Für die Abhängigkeit $\bar{v}(\overline{\mathbf{C}}) = w(\mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{C}}})$ müssen wir noch die zweite Ableitung in (4.103) bilden. Hierzu muß Beziehung (4.72) erneut differenziert werden. Mit $w_k(\mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{C}}})$, $k = 1, 2$, aus den Definitionen (4.73) berechnen wir zunächst

$$\frac{dw_k}{d\overline{\mathbf{C}}} = \frac{\partial w_k}{\partial \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}} \frac{d\mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}}{d\overline{\mathbf{C}}} + \frac{\partial w_k}{\partial \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{C}}}} \frac{d\mathbf{II}_{\overline{\mathbf{C}}}}{d\overline{\mathbf{C}}} = (w_{k1} + w_{k2} \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}) \mathbf{I} - w_{k2} \overline{\mathbf{C}} \quad (4.104)$$

analog zu Beziehung (4.72) mit den Abkürzungen

$$w_{k1}(\mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{C}}}) = \frac{\partial w_k}{\partial \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}} \quad \text{und} \quad w_{k2}(\mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{C}}}) = \frac{\partial w_k}{\partial \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{C}}}} \quad (4.105)$$

für $k = 1, 2$. Dann gilt durch Anwendung der Gateaux-Ableitung auf Beziehung (4.72)

$$\begin{aligned} D_{\overline{\mathbf{C}}} \frac{d\bar{v}}{d\overline{\mathbf{C}}}(\overline{\mathbf{C}})[\mathbf{H}] &= \frac{d^2 \bar{v}}{d\overline{\mathbf{C}} d\overline{\mathbf{C}}} \mathbf{H} = \\ &= \left(\frac{dw_1}{d\overline{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{H} + \left(\frac{dw_2}{d\overline{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{H} \right) \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}} + w_2 (\mathbf{I} \cdot \mathbf{H}) \right) \mathbf{I} - \left(\frac{dw_2}{d\overline{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{H} \right) \overline{\mathbf{C}} - w_2 \mathbf{H} = \\ &= \left[\mathbf{I} \otimes \left(\frac{dw_1}{d\overline{\mathbf{C}}} + \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}} \frac{dw_2}{d\overline{\mathbf{C}}} + w_2 \mathbf{I} \right) - \overline{\mathbf{C}} \otimes \frac{dw_2}{d\overline{\mathbf{C}}} - w_2 \mathcal{I} \right] \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Durch Ausnutzung der Ableitungen (4.104) und der Verwendung der Eigenschaften $w_{kj} = w_{jk}$ folgt der Tensor 4-ter Stufe

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{v}}{d\overline{\mathbf{C}} d\overline{\mathbf{C}}} &= (w_{11} + 2w_{12} \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}} + w_{22} \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}^2 + w_2) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - (w_{12} + \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}} w_{22}) [\mathbf{I} \otimes \overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{I}] - \\ &- w_2 \mathcal{I} + w_{22} \overline{\mathbf{C}} \otimes \overline{\mathbf{C}}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Mit der Beziehung (4.107) ist der isochore Anteil des Tangentenoperators (4.103) vollständig bestimmt. Der gesamte Tangentenoperator \tilde{C} ist daher mit den Operatoren (4.93) und (4.103) für eine Formänderungsenergie der Form (4.67) bekannt.

Momentankonfiguration

Zum Teil ist es notwendig den auf der Referenzkonfiguration operierenden Tangentenoperator (4.87) auf die Momentankonfiguration zu transformieren,³⁷

$$\mathcal{C} = \frac{1}{J} \mathcal{F} \tilde{\mathcal{C}} \mathcal{F}^T = \frac{1}{J} [\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}]^{T_{23}} \tilde{\mathcal{C}} [\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{F}^T]^{T_{23}} \quad (4.108)$$

d.h.

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\text{vol}} + \mathcal{C}_{\text{iso}} \quad \text{mit} \quad \mathcal{C}_{\text{vol}} = \frac{1}{J} \mathcal{F} \tilde{\mathcal{C}}_{\text{vol}} \mathcal{F}^T \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_{\text{iso}} = \frac{1}{J} \mathcal{F} \tilde{\mathcal{C}}_{\text{iso}} \mathcal{F}^T. \quad (4.109)$$

Mit dem Operator (4.76) sieht die Vortransformation (4.108) analog zur Vortransformation des 2-ten Piola-Kirchhoff Tensors in Tab. 3.4 auf den Cauchyschen Spannungstensor aus, $\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}^T$.

Unter Ausnutzung der Eigenschaften (2.48)-(2.50) erhalten wir mit

$$[\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}]^{T_{23}} [\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}] [\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{F}^T]^{T_{23}} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (4.110)$$

$$[\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}]^{T_{23}} [\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}]^{T_{23}} [\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{F}^T]^{T_{23}} = \mathcal{I} \quad (4.111)$$

für die Vortransformation des volumetrischen Anteils (4.93)

$$\mathcal{C}_{\text{vol}} = \rho_{\text{R}} [(U'(J) + JU''(J)) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - 2U'(J)\mathcal{I}]. \quad (4.112)$$

Bei der Vortransformation des isochoren Anteils (4.103) verwenden wir die unimodularen Größen $\mathcal{F} = J^{2/3} \bar{\mathcal{F}}$ mit $\bar{\mathcal{F}} = [\bar{\mathbf{F}} \otimes \bar{\mathbf{F}}]^{T_{23}}$:

$$\mathcal{C}_{\text{vol}} = \frac{1}{J} \mathcal{F} \tilde{\mathcal{C}}_{\text{vol}} \mathcal{F}^T = J^{1/3} \bar{\mathcal{F}} \tilde{\mathcal{C}}_{\text{vol}} \bar{\mathcal{F}}^T. \quad (4.113)$$

Wir behandeln zunächst den ersten Summanden in Gl.(4.103). Mit

$$[\bar{\mathbf{F}} \otimes \bar{\mathbf{F}}]^{T_{23}} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}} \right] = \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] [\bar{\mathbf{F}} \otimes \bar{\mathbf{F}}]^{T_{23}} \quad (4.114)$$

$$\left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right] [\bar{\mathbf{F}}^T \otimes \bar{\mathbf{F}}^T]^{T_{23}} = [\bar{\mathbf{F}}^T \otimes \bar{\mathbf{F}}^T]^{T_{23}} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] \quad (4.115)$$

müssen wir für die Vortransformation von Gl.(4.107)

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{F}} \otimes \bar{\mathbf{F}}]^{T_{23}} \frac{d^2 \bar{v}}{d\bar{\mathbf{C}} d\bar{\mathbf{C}}} [\bar{\mathbf{F}}^T \otimes \bar{\mathbf{F}}^T]^{T_{23}} &= (w_{11} + 2w_{12} \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}} + w_{22} \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}}^2 + w_2) \bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{B}} - \\ &- (w_{12} + \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}} w_{22}) [\bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{B}}^2 + \bar{\mathbf{B}}^2 \otimes \bar{\mathbf{B}}] - w_2 [\bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{B}}]^{T_{23}} + w_{22} \bar{\mathbf{B}}^2 \otimes \bar{\mathbf{B}}^2 = \\ &= [\bar{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{I}]^{T_{23}} [(w_{11} + 2w_{12} \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}} + w_{22} \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}}^2 + w_2) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - (w_{12} + \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}} w_{22}) [\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{I}] - \\ &- w_2 \mathcal{I} + w_{22} \bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{B}}] [\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{B}}]^{T_{23}} = \\ &= [\bar{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{I}]^{T_{23}} \frac{d^2 \bar{v}}{d\bar{\mathbf{B}} d\bar{\mathbf{B}}} [\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{B}}]^{T_{23}} \quad (4.116) \end{aligned}$$

³⁷Als Beispiel seien hier Finite-Elemente Formulierungen, ausgedrückt durch Größen der Momentankonfiguration, angesprochen.

bilden. Mit $\mathbf{S}_{\text{iso}} = \mathbf{S}^D = \mathcal{F}\tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}} = J^{2/3}\overline{\mathcal{F}}\tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}}$, siehe Deviatoranteil in Gl.(4.81), berechnet sich der zweite Summand in Gl.(4.103) gemäß

$$\overline{\mathcal{F}} \left[\tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}} \otimes \overline{\mathbf{C}}^{-1} + \overline{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}} \right] \overline{\mathcal{F}}^T = J^{-2/3} [\mathbf{S}_{\text{iso}} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{S}_{\text{iso}}]. \quad (4.117)$$

Für das Skalarprodukt $\overline{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{T}}$ im dritten Summanden der Gl.(4.103) ergibt sich mittels (4.98) sowie (4.72) durch Ausrechnen

$$\overline{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{T}} = 2\rho_{\text{R}} \overline{\mathbf{B}} \cdot \frac{d\overline{v}}{d\overline{\mathbf{B}}}, \quad (4.118)$$

womit wir schließlich unter Verwendung der Beziehungen (4.116)-(4.118) den Tangentenoperator operierend auf der Momentankonfiguration

$$\begin{aligned} J\mathcal{C}_{\text{iso}} &= 4\rho_{\text{R}} \mathcal{D} [\overline{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{I}]^{T_{23}} \frac{d^2\overline{v}}{d\overline{\mathbf{B}} d\overline{\mathbf{B}}} [\mathbf{I} \otimes \overline{\mathbf{B}}]^{T_{23}} \mathcal{D} + \\ &+ \frac{4}{3}\rho_{\text{R}} \left(\frac{d\overline{v}}{d\overline{\mathbf{B}}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \right) \mathcal{D} - \frac{2}{3} [\mathbf{S}_{\text{iso}} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{S}_{\text{iso}}] \end{aligned} \quad (4.119)$$

erhalten. \mathcal{D} stellt den in (4.80) definierten Deviatoroperator dar. Wir haben hier stillschweigend die Eigenschaft $w(\mathbf{I}_{\overline{\mathbf{B}}}, \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{B}}}) = w(\mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{C}}})$ und deren identische Ableitungen nach den Argumenten ausgenutzt, womit $d\overline{v}/d\overline{\mathbf{B}}$ das gleiche Aussehen wie Gl.(4.72) hat und lediglich der Tensor $\overline{\mathbf{C}}$ durch $\overline{\mathbf{B}}$ ersetzt werden muß. Dies gilt natürlich auch für die zweite Ableitung (4.107). Die Addition von \mathcal{C}_{vol} aus Gl.(4.112) und \mathcal{C}_{iso} aus Gl.(4.119) liefert den Tangentenoperator \mathcal{C} in Gl.(4.108) bezogen auf die Momentankonfiguration. In den Tabellen 4.4 und 4.5 sind die Spannungen und die Tangentenoperatoren nochmals zusammengefaßt.

Zusammenhang zur Theorie kleiner Verzerrungen

Wir kommen im folgenden auf den Zusammenhang zwischen den in der Formänderungsenergie (4.67) mit $w(\mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{C}}})$ aus Gl.(4.18) vorliegenden Materialparametern und dem Kompressions- und Schubmodul K und G der linearen Elastizitätstheorie zu sprechen (siehe Anhang B im Hinblick auf die Darstellung und der Zusammenhänge in der linearen Theorie). Hierzu müssen wir $\tilde{\mathcal{C}}|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}}$ aus Gl.(4.87) für $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ auswerten. Zunächst gehen wir davon aus, daß ein Anteil $U(J)$ mit den Eigenschaften $U'(1) = 0$ und $\hat{U}''(1) = 1$ vorliegt. Wir erhalten für den volumetrischen Anteil aus Gl.(4.93) für $\hat{K} = K\rho_{\text{R}}$

$$\tilde{\mathcal{C}}_{\text{vol}}|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = \hat{K}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (4.120)$$

so daß \hat{K} den Kompressionsmodul der linearen Theorie darstellt. Für den isochoren Anteil des Tangentenoperators (4.103), $\tilde{\mathcal{C}}_{\text{iso}}|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}}$, greifen wir zunächst auf die spezielle Materialgleichung (4.64) zurück. Mit

$$w_1|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = c_{10}, \quad w_2|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = c_{01}, \quad (4.121)$$

$$w_{11}|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = 2c_{20}, \quad w_{12}|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = c_{11}, \quad w_{22}|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = 2c_{02} \quad (4.122)$$

erhalten wir dann

$$\tilde{\mathcal{C}}_{\text{iso}}|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = 4\rho_{\text{R}}(c_{10} + c_{01}) \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right]. \quad (4.123)$$

Im Vergleich zur linearen Theorie, siehe Anhang B, Gl.(B.6), ist der Schubmodul

$$\hat{G} = G\rho_{\text{R}} = 2\rho_{\text{R}}(c_{10} + c_{01}) \quad (4.124)$$

Tabelle 4.4: Spannung und Tangentenoperator der Formänderungsenergie (4.21) bezogen auf die Referenzkonfiguration**2-te Piola-Kirchhoff Spannung**

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{T}} &= \rho_{\text{R}} J U'(J) \mathbf{C}^{-1} + \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}} \\ w_1 &= \frac{\partial w}{\partial \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}}, \quad w_2 = \frac{\partial w}{\partial \Pi_{\overline{\mathbf{C}}}}, \quad \frac{d\bar{v}}{d\overline{\mathbf{C}}} = (w_1 + w_2 \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}) \mathbf{I} - w_2 \overline{\mathbf{C}} \\ \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}} &= 2\rho_{\text{R}} J^{-2/3} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \overline{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \overline{\mathbf{C}} \right] \frac{d\bar{v}}{d\overline{\mathbf{C}}}\end{aligned}$$

Tangentenoperator

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{C}} &= \tilde{\mathbf{C}}_{\text{vol}} + \tilde{\mathbf{C}}_{\text{iso}} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{\text{vol}} &= \rho_{\text{R}} J^{-1/3} \left[(U'(J) + J U''(J)) \overline{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \overline{\mathbf{C}}^{-1} - 2U'(J) \left[\overline{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \overline{\mathbf{C}}^{-1} \right]^{T_{23}} \right] \\ \tilde{\mathbf{C}}_{\text{iso}} &= 4\rho_{\text{R}} J^{-4/3} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \overline{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \overline{\mathbf{C}} \right] \frac{d^2\bar{v}}{d\overline{\mathbf{C}} d\overline{\mathbf{C}}} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \overline{\mathbf{C}} \otimes \overline{\mathbf{C}}^{-1} \right] - \\ &\quad - \frac{2J^{-2/3}}{3} \left[\tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}} \otimes \overline{\mathbf{C}}^{-1} + \overline{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}} \right] + \\ &\quad + \frac{4\rho_{\text{R}} J^{-4/3}}{3} \left(\overline{\mathbf{C}} \cdot \frac{d\bar{v}}{d\overline{\mathbf{C}}} \right) \left[\left[\overline{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \overline{\mathbf{C}}^{-1} \right]^{T_{23}} - \frac{1}{3} \overline{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \overline{\mathbf{C}}^{-1} \right] \\ \frac{d^2\bar{v}}{d\overline{\mathbf{C}} d\overline{\mathbf{C}}} &= (w_{11} + 2w_{12} \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}} + w_{22} \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}^2 + w_2) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - (w_{12} + \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}} w_{22}) [\mathbf{I} \otimes \overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{I}] - \\ &\quad - w_2 \mathcal{I} + w_{22} \overline{\mathbf{C}} \otimes \overline{\mathbf{C}} \\ w_{k1} &= \frac{\partial w_k}{\partial \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}}, \quad w_{k2} = \frac{\partial w_k}{\partial \Pi_{\overline{\mathbf{C}}}}, \quad k = 1, 2\end{aligned}$$

mit den Materialparametern c_{10} und c_{01} gekoppelt. Setzt man die Forderung einer positiven Querkontraktionszahl voraus, $\nu > 0$, so muß gemäß Gl.(B.8)

$$\frac{\hat{K}}{\hat{G}} = \frac{K}{2(c_{10} + c_{01})} > \frac{2}{3} \quad (4.125)$$

als untere Schranke gelten.

Im Falle des Arruda & Boyce-Modells (4.20) haben wir

$$w_1|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = c \sum_{i=1}^m d_i N^{1-i} i 3^{i-1}, \quad w_{11}|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = c \sum_{i=1}^m d_i N^{1-i} i (i-1) 3^{i-2}, \quad (4.126)$$

sowie $w_2 = w_{12} = w_{22} = 0$, womit nach kurzer Rechnung

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\text{iso}}|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = 4\rho_{\text{R}} w_1|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] \quad (4.127)$$

folgt und sich der Schubmodul

$$\hat{G} = 2c \sum_{i=1}^m d_i N^{1-i} i 3^{i-1} \quad (4.128)$$

Tabelle 4.5: Spannung und Tangentenoperator der Formänderungsenergie (4.21) bezogen auf die Momentankonfiguration

Cauchy-Spannung

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \rho_{\text{R}} U'(J) \mathbf{I} + \frac{1}{J} \mathbf{S}_{\text{iso}} \\ w_1 &= \frac{\partial w}{\partial \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{B}}}}, \quad w_2 = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{B}}}}, \quad \frac{d\overline{v}}{d\overline{\mathbf{B}}} = (w_1 + w_2 \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{B}}}) \mathbf{I} - w_2 \overline{\mathbf{B}} \\ \mathbf{S}_{\text{iso}} &= 2\rho_{\text{R}} \left(\frac{d\overline{v}}{d\overline{\mathbf{B}}} \overline{\mathbf{B}} \right)^D\end{aligned}$$

Tangentenoperator

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \mathcal{C}_{\text{vol}} + \mathcal{C}_{\text{iso}} \\ \mathcal{C}_{\text{vol}} &= \rho_{\text{R}} [(U'(J) + JU''(J)) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - 2U'(J)\mathcal{I}] \\ J\mathcal{C}_{\text{iso}} &= 4\rho_{\text{R}} \mathcal{D} [\overline{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{I}]^{T_{23}} \frac{d^2\overline{v}}{d\overline{\mathbf{B}} d\overline{\mathbf{B}}} [\mathbf{I} \otimes \overline{\mathbf{B}}]^{T_{23}} \mathcal{D} + \\ &\quad + \frac{4}{3} \rho_{\text{R}} \left(\frac{d\overline{v}}{d\overline{\mathbf{B}}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \right) \mathcal{D} - \frac{2}{3} [\mathbf{S}_{\text{iso}} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{S}_{\text{iso}}] \\ \frac{d^2\overline{v}}{d\overline{\mathbf{B}} d\overline{\mathbf{B}}} &= (w_{11} + 2w_{12} \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{B}}} + w_{22} \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{B}}}^2 + w_2) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - (w_{12} + \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{B}}} w_{22}) [\mathbf{I} \otimes \overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{I}] - \\ &\quad - w_2 \mathcal{I} + w_{22} \overline{\mathbf{B}} \otimes \overline{\mathbf{B}} \\ w_{k1} &= \frac{\partial w_k}{\partial \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{B}}}}, \quad w_{k2} = \frac{\partial w_k}{\partial \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{B}}}}, \quad k = 1, 2 \\ \mathcal{D} &= \mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}\end{aligned}$$

bzw. die Bedingung

$$\frac{\hat{K}}{\hat{G}} = \frac{K}{2c \sum_{i=1}^m d_i N^{1-i} i 3^{i-1}} > \frac{2}{3} \quad (4.129)$$

ergibt.

4.3.5 Problematik des einaxialen Zuges

Die gewählten Materialparameter unterliegen bis auf die Anforderung an die Positivität der Formänderungsenergie und dem Nichtauftreten von Instabilitäten weiteren Anforderungen, um physikalischen Beobachtungen nicht zu widersprechen. Im Rahmen der linearen Elastizität sollte zum Beispiel die Querkontraktionszahl ν positiv sein, um bei einem Zugversuch zu einer Verjüngung oder beim Druckversuch zum Verbreitern der Probe zu führen. In diesem Fall müssen die Materialparameter der gewählten Formänderungsenergie (4.18) bzw. (4.20) die Bedingung (4.125) bzw. (4.129) erfüllen. Bei großen Deformationen ist hingegen die Querdehnungszahl von der Deformation abhängig, so daß eine negative Querdehnung bei Zug von der Wahl der Materialgleichungen $U(J)$ und $w(\mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{C}}})$ abhängt. Um dies zu untersuchen gehen wir von einem streckungsgesteuerten einaxialen Zug-Druckprozeß, $\mathbf{F} = \lambda \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \lambda_Q \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \lambda_Q \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3$ aus, wobei λ die gegebene Axialstreckung und λ_Q die unbekannte Querstreckung ist. Wir erhalten für die

Komponenten des 2-ten Piola-Kirchhoff Tensors (4.75) die zwei Gleichungen ($\tilde{T}_{22} = \tilde{T}_{33} = 0$, $\tilde{T}_{ij} = 0$ für $i \neq j$)

$$\tilde{T}_{11} = \rho_{\text{R}} f(\lambda, \lambda_Q) \quad (4.130)$$

$$0 = g(\lambda, \lambda_Q) \quad (4.131)$$

mit

$$f(\lambda, \lambda_Q) \equiv JU'(J)\lambda^{-2} + 2J^{-2/3} \left(w_1 + w_2 \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}} - w_2 \lambda^2 J^{-2/3} - \frac{1}{3} (w_1 \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}} + 2w_2 \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{C}}}) \lambda^{-2} J^{2/3} \right) \quad (4.132)$$

$$g(\lambda, \lambda_Q) \equiv JU'(J)\lambda_Q^{-2} + 2J^{-2/3} \left(w_1 + w_2 \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}} - w_2 \lambda_Q^2 J^{-2/3} - \frac{1}{3} (w_1 \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}} + 2w_2 \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{C}}}) \lambda_Q^{-2} J^{2/3} \right) \quad (4.133)$$

Hierbei sind $J = \lambda \lambda_Q^2$, $\mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}} = J^{-2/3}(\lambda^2 + 2\lambda_Q^2)$ und $\mathbf{II}_{\overline{\mathbf{C}}} = J^{2/3}(\lambda^{-2} + 2\lambda_Q^{-2})$ gleichfalls Funktionen der Streckung λ und Querstreckung λ_Q . Gl.(4.131) stellt eine skalare nichtlineare Gleichung zur Berechnung der Querstreckung λ_Q dar. In EIPPER [44] bzw. EHLERS & EIPPER [42] wird die Problematik angesprochen, daß beim einaxialen Zug für Modelle mit der Aufteilung (4.21) in einen volumenerhaltenden und volumenändernden Anteil unphysikalische Verläufe auftreten können. Dies wird in den Arbeiten an verschiedenen Formänderungsenergien untersucht und führt zu einer Querstreckungsabnahme im Druckversuch und zu Querstreckungen $\lambda_Q > 1$ im Zugbereich.³⁸ Sie verwendeten die Funktion 3 aus Tab. 4.3 in Kombination mit einem ‘‘Neo-Hooke’’-Ansatz, siehe Tab. 4.2 Modell Nr.5, jedoch in der Darstellung der Gl.(4.64). Ferner kam neben dem gestaltsändernden Anteil (4.65) eine Formänderungsenergie $U(J)$ der Form 4 aus Tab. 4.3 für $\beta = 1$ zum Einsatz. Leider sind beide Funktionen $U(J)$ keine konvexe Funktionen. Trotzdem muß angemerkt werden, daß selbst bei konvexen Funktionen $U(J)$ ähnliche Effekte auftreten können.

Daher ist in HARTMANN & NEFF [72] eine Formänderungsenergie der Form

$$U(J) = \frac{K}{50} (J^5 + J^{-5} - 2) \quad (4.134)$$

gewählt worden, welche die genannten Effekte für verschiedene Formänderungsenergien des volumenerhaltenden Anteils und fest gewählten Materialparametern im Zusammenhang mit numerischen Auswertungen nicht erkennen läßt. Hierzu kann jedoch kein Beweis angegeben werden. In Abb. 4.3 ist für verschiedene Kompressionsmoduli der Querstreckungsverlauf dargestellt, der keine derartigen Probleme erkennen läßt. Hierbei haben wir für den isochoren Anteil die Funktion (4.50) angenommen.³⁹ Es kommt daher auf die Interaktion zwischen den Formänderungsenergien $U(J)$ und $w(\mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{C}}})$ an, ob solche nicht zu erwartenden Verläufe auftreten. Die Schwierigkeiten liegen gerade bei kompressiblen Materialien in der Entwicklung von geeigneten Materialmodellen, da eine einfache Modellierung, wie die implizite Gleichung (4.130) bzw. (4.131) vermittelt, nur sehr schwer möglich ist. Da wir uns in dieser Arbeit auf nur schwach kompressible Materialien beschränken, gehen wir nicht weiter darauf ein. Abschließend sei noch das

³⁸In EIPPER [44, S.59] wird auf prinzipiell unphysikalische Verläufe hingewiesen, was abgeschwächt formuliert ‘‘die Schwierigkeit bei der Annahme für das Zusammenspiel von $U(J)$ und $w(\mathbf{I}_{\overline{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\overline{\mathbf{C}}})$ ’’ bedeuten sollte.

³⁹Wir wählen $\hat{c}_{10} = 0.264$ [MPa], $\hat{c}_{01} = 0.5$ [MPa] und $\hat{c}_{30} = 0.019$ [MPa] mit $\hat{c}_{ij} = \rho_{\text{R}} c_{ij}$. Gemäß Gl.(4.125) muß der Kompressionsmodul der Bedingung $\hat{K} > (4/3)(\hat{c}_{10} + \hat{c}_{01}) \approx 1.02$ [MPa] genügen.

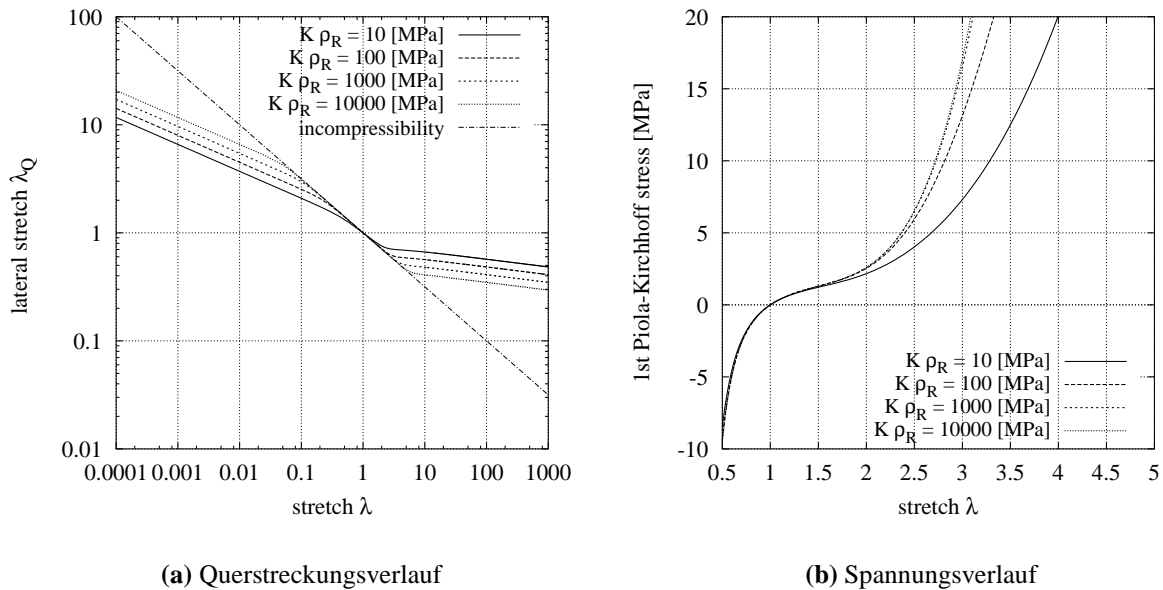


Abbildung 4.3: Querstreckungs- und Spannungsverlauf bei unterschiedlichen Kompressionsmoduli

Verhalten der Spannungen beim einaxialen Zug in Abb. 4.3 wiedergeben. Aufgrund der gewählten Materialparameter ist der bei Elastomeren typische S-förmige Verlauf zu erkennen.

Obige Untersuchungen stellen natürlich keinen Beweis für physikalisch sinnvolle Verläufe dar, da für andere Materialparametersätze oder andere Funktionen des isochoren oder volumetrischen Anteils der Formänderungsenergie und auch anderen Deformationsbereichen unphysikalische Effekte auftreten können. Ebenso kann nicht die in EHLERS & EIPPER [42] beschriebenen Eigenschaften der nicht-monotonen Kennlinien ausgeschlossen werden, da in Lateralrichtung keine Spannungen auftreten. Obige Untersuchungen sind daher nur ein Indikator für geeignete Materialgleichungen zur Beschreibung von bestimmten Elastomeren bei Nahezu-Inkompressibilität. In der Lösung der Gl.(4.131) können natürlich auch Mehrdeutigkeiten auftreten, die jedoch hier nicht weiter untersucht werden.

4.3.6 Weitere Anmerkungen

Obigen Materialmodellen, die auf der Trennung in volumenerhaltende und volumenändernde Anteile basieren, kann noch die Frage gestellt werden, ob sie zum Nachweis der Existenz einer Lösung eines zugrundeliegenden Randwertproblems führen können. Der mathematische Nachweis für das Modell von Ogden aus Abschnitt 4.3.2 ist in CHARRIER ET AL. [27] geführt worden. Neuere Untersuchungen behandeln die Darstellung mit Invarianten, wie die Modellstruktur der verallgemeinerten Polynomelastizität oder das Arruda & Boyce Modell. Für letzteres Modell ist ein Beweis in HARTMANN & NEFF [72] geführt worden, jedoch gelingt kein Beweis für die verallgemeinerte Polynomelastizität im Rahmen polykonvexer Energiefunktionen. Für eine Änderung der Polynomfunktion kann wiederum ein Existenzbeweis erbracht werden, worauf wir im Rahmen dieser Arbeit nicht eingehen.

Wir kommen jedoch nochmals auf die Baker-Ericksen Ungleichung (4.22) angewendet auf die speziellen Formänderungsenergien (4.21) zu sprechen. Gl.(4.22) erfordert zunächst die Bestimmung der Hauptspannungen t_i . Die Cauchy-Spannungen in der Form

$$\mathbf{T} = f_0 \mathbf{1} + f_1 \overline{\mathbf{B}} + f_2 \overline{\mathbf{B}}^2 \quad (4.135)$$

mit

$$f_0 = \rho_R U'(J) - \frac{2\rho_R}{3J}(w_1 \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}} + 2w_2 \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{B}}}), \quad f_1 = \frac{2\rho_R}{J}(w_1 + w_2 \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}}), \quad f_2 = -\frac{2\rho_R}{J}w_2, \quad (4.136)$$

liefert die Hauptspannungen

$$t_i = f_0 + f_1 \bar{\mu}_i + f_2 \bar{\mu}_i^2 \quad (4.137)$$

für $\bar{\mathbf{B}}$ aus Gl.(3.47). Die Differenz zweier verschiedener Hauptspannungen ergibt

$$\begin{aligned} t_i - t_j &= (\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_j) (f_1 + f_2(\bar{\mu}_i + \bar{\mu}_j)) = \\ &= (\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i + \lambda_j) J^{-2/3} (f_1 + f_2(\bar{\mu}_i + \bar{\mu}_j)) \end{aligned} \quad (4.138)$$

mit $\bar{\mu}_i = \mu_i J^{-2/3}$ und $\mu_i = \lambda_i^2$. Dieser Ausdruck ist dann positiv, wenn

$$\begin{aligned} f_1 + f_2(\bar{\mu}_i + \bar{\mu}_j) &= \frac{\partial w}{\partial \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}}} + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{B}}}} \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}} - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{B}}}} (\bar{\mu}_i + \bar{\mu}_j) = \\ &= \frac{\partial w}{\partial \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}}} + \bar{\mu}_k \frac{\partial w}{\partial \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{B}}}} > 0 \end{aligned} \quad (4.139)$$

erfüllt ist. Eine hinreichende Bedingung in Bezug auf die Formänderungsenergien (4.64) und (4.66) ist hierfür die Nichtnegativität der Materialparameter $c_{ij} \geq 0$ bzw. $c > 0$ und $N > 0$, da dann die Ableitungen $\partial w / \partial \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}} \geq 0$ und $\partial w / \partial \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{B}}} \geq 0$ nicht-negativ sind. Interessanterweise hat die Wahl des Anteils $U(J)$ keinen Einfluß auf die Ungleichung (was im Zusammenhang mit dem Fall der Inkompressibilität gerade zur Elimination des unbestimmten Druckes ausgenutzt wird). Der Nachweis der inkrementellen Stabilität, positiv-definite Matrizen (4.30) oder (4.31), ist kaum möglich. Selbst für das Ogden-Modell tritt aufgrund der Koppelung der Eigenwerte durch die unimodularen Größen $\bar{\lambda}_i = J^{-1/3} \lambda_i$ eine vollbesetzte Matrix auf, so daß auch hier kein Stabilitätsnachweis in Form (4.30)-(4.32) erfolgen kann.

Die Baker-Ericksen Ungleichung kann hingegen unter zu definierenden Bedingungen für Modelle des Typs

$$\hat{\mathbf{Y}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \hat{\psi}(J, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) = U(J) + \hat{w}(\bar{\lambda}_1) + \hat{w}(\bar{\lambda}_2) + \hat{w}(\bar{\lambda}_3) \quad (4.140)$$

nachgewiesen werden.⁴⁰ In der Baker-Ericksen Ungleichung (4.22) sind die Spannungen $t_i = \rho_R \lambda_i J^{-1} \partial \hat{\mathbf{Y}} / \partial \lambda_i$ zu berechnen. Mit $\bar{\lambda}_i = J^{-1/3} \lambda_i$ gilt zunächst

$$\frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial \lambda_j} = \begin{cases} \frac{2}{3} J^{-1/3} & \text{für } i = j \\ -\frac{1}{3} J^{-1/3} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (4.141)$$

sowie

$$t_i = \rho_R U'(J) + \frac{\rho_R}{3J^{4/3}} (2\hat{w}'(\bar{\lambda}_i) \lambda_i - \hat{w}'(\bar{\lambda}_j) \lambda_j - \hat{w}'(\bar{\lambda}_k) \lambda_k), \quad (4.142)$$

so daß die Differenz

$$t_i - t_j = \rho_R J^{-4/3} (\lambda_i \hat{w}'(\bar{\lambda}_i) - \lambda_j \hat{w}'(\bar{\lambda}_j)) \quad (4.143)$$

resultiert. Für das modifizierte Ogden-Modell gilt konkret

$$\hat{w}(\bar{\lambda}_i) = \sum_{r=1}^{n_o} \frac{\gamma_r}{\alpha_r} \bar{\lambda}_i^{\alpha_r} \quad \text{sowie} \quad \hat{w}'(\bar{\lambda}_i) = \sum_{r=1}^{n_o} \gamma_r \bar{\lambda}_i^{\alpha_r - 1} \quad (4.144)$$

⁴⁰Wenn die zugrundeliegende Formänderungsenergie die Eigenschaft der Polykonvexität erfüllt, so impliziert dies die Erfüllung der Baker-Ericksen Ungleichung. Daher dient die durchgeführte Untersuchung lediglich der Vollständigkeit bzw. der Anschauung.

und wir erhalten die Baker-Ericksen Ungleichung in der Form

$$(t_i - t_j)(\lambda_i - \lambda_j) = \rho_R J^{-4/3} (\lambda_i - \lambda_j) \left(\sum_{r=1}^{n_0} \gamma_r J^{-\alpha_r/3} (\lambda_i^{\alpha_r} - \lambda_j^{\alpha_r}) \right). \quad (4.145)$$

Für $\alpha_r \gamma_r > 0$ ist dieser Ausdruck stets positiv.

Wir schließen an dieser Stelle die Darstellung zur Hyperelastizität und betrachten im folgenden Abschnitt ein Materialmodell der finiten Viskoelastizität, welches auf die hier entwickelten Gleichungen zurückgreift.

4.4 Viskoelastizität

In der Theorie viskoelastischer Materialien wird der Spannungszustand entweder mit Hilfe von Funktionalen in Form von Integralgleichungen oder unter Verwendung von gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Beschreibung von sogenannten *Inneren Variablen* bestimmt.⁴¹ Wir beschränken uns hier auf die Theorie der Inneren Variablen. Danach ist der Spannungszustand, hier repräsentiert durch den 2-ten Piola-Kirchhoff Tensor $\tilde{\mathbf{T}}$, über die Materialgleichungen

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{q}) \quad (4.146)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{r}(\mathbf{E}, \mathbf{q}) \quad (4.147)$$

zu bestimmen, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_q}$. n_q stellt die Anzahl der Inneren Variablen \mathbf{q} dar, die durch gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmt werden. Die Inneren Variablen können in Form von tensoriellen, vektoriellen oder skalaren Größen formuliert werden. Wir stellen sie daher in Gestalt eines Tupels $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_q}$ dar. Die Evolutionsgleichungen der Inneren Variablen (4.147) dienen dazu, die Materialantwort (4.146) zu beeinflussen, so daß der Einfluß der Prozeßgeschichte auf die Materialantwort berücksichtigt wird und die wichtigsten phänomenologischen Beobachtungen wiedergegeben werden können. Dabei wäre es wünschenswert, daß die Evolutionsgleichungen bzw. die Inneren Variablen eine physikalisch Bedeutung hätten. Eine mikromechanische Motivation erweist sich jedoch in vielen Fällen als sehr schwierig. Wir beschränken uns daher auf eine rein phänomenologische Theorie.

Folgende Eigenschaften definieren ein Modell der Viskoelastizität: Zu jedem Verzerrungszustand existiert genau eine Gleichgewichtslösung ($\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$), wonach gemäß Gl.(4.147) das nichtlineare Gleichungssystem $\mathbf{0} = \mathbf{r}(\mathbf{E}, \hat{\mathbf{q}})$ resultiert. Nach dem Satz über implizite Funktionen stellen nahe der Lösung die Inneren Variablen \mathbf{q} Funktionen der Verzerrungen dar, $\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{E})$. Diese Lösungen werden als Gleichgewichtslösungen bezeichnet. Des weiteren müssen die Differentialgleichungen die Eigenschaft der asymptotischen Stabilität für einen konstanten Verzerrungszustand erfüllen, d.h. für $\mathbf{E}_0 = \text{const.}$ und beliebigen Anfangsbedingungen $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ muß die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{r}(\mathbf{E}_0, \mathbf{q})$ für $t \rightarrow \infty$ gegen diese Gleichgewichtslösung konvergieren, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{E}_0)$. Den zu der Gleichgewichtslösung $\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{E}_0)$ zugehörigen Spannungszustand bezeichnet man als Gleichgewichtsspannung

$$\tilde{\mathbf{T}}_{\text{eq}} = \tilde{\Phi}_{\text{eq}}(\mathbf{E}) = \hat{\Phi}_{\text{eq}}(\mathbf{E}, \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{E})). \quad (4.148)$$

Der gesamte Spannungszustand $\tilde{\mathbf{T}}$ wird zur Modellierung aus zwei Anteilen zusammengesetzt, nämlich den Gleichgewichtsspannungen $\tilde{\mathbf{T}}_{\text{eq}}$ und weiteren Spannungen, den sogenannten Überspannungen $\tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}}$, die das inelastische bzw. viskose Materialverhalten beschreiben:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}_{\text{eq}} + \tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}} \quad (4.149)$$

⁴¹Siehe COLEMAN & GURTIN [32], HAUPT [74, Ch.10].

Die Überspannungen berechnen sich dann, siehe Gl.(4.146), (4.148) und (4.149), aus einer Materialgleichung der Form

$$\tilde{\mathbf{T}}_{ov} = \Phi_{ov}(\mathbf{E}, \mathbf{q}), \quad (4.150)$$

die im Gleichgewichtszustand $\hat{\mathbf{q}}$ verschwinden müssen, $\Phi_{ov}(\mathbf{E}, \hat{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$.

Aufbauend auf den Arbeiten von LUBLINER [108], LION [103] sowie HAUPT & SEDLAN [76], siehe auch HAUPT [74, Ch. 10.2.2-10.2.3], konstruieren wir im folgenden ein Modell der finiten Viskoelastizität, welches die Funktionen Φ_{eq} , Φ_{ov} und \mathbf{r} konkretisiert. Wie in der Einleitung dieses Kapitels bereits erwähnt wird, beinhaltet das Modell folgende Annahmen:

1. Das Material weist in dem untersuchten Deformationsbereich nahezu inkompressibles Materialverhalten auf und ist isotrop. Der hydrostatische Spannungszustand entsteht aus rein elastischen Deformationen.
2. Die untersuchten Deformationen sind endlich, so daß eine vollständig geometrisch nicht-lineare Theorie herangezogen werden muß.
3. Das untersuchte Material zeigt nichtlineare geschwindigkeitsabhängige Phänomene. Eine mögliche Gleichgewichtshysterese sei derart klein, daß diese vernachlässigt werden kann und wir eine Theorie der Viskoelastizität heranziehen können, d.h. die Gleichgewichtsspannungen berechnen sich aus einer Elastizitätsbeziehung, siehe Gl.(4.148).
4. Spezielle Effekte, wie zum Beispiel der Mullins-Effekt, werden nicht betrachtet.
5. Es werden isotherme Prozesse untersucht.

Zur Entwicklung der Grundstruktur geeigneter Materialgleichungen wählt man zunächst ein sogenanntes rheologisches Ersatzmodell, welches aus einer Struktur von elastischen Feder- und viskosen Dämpferelementen besteht. In, zum Beispiel, HAUPT & SEDLAN [76] entspricht dies der Parallelschaltung von mehreren Maxwell-Elementen⁴² und einem dazu parallelgeschalteten Federelement. Den Dämpferelementen ordnet man Viskositäten und den Federelementen eine Formänderungsenergie zu. Dabei entspricht die Gleichgewichtsspannung dem Spannungszustand der einzelnen Feder und die Überspannungen resultieren aus der Summe der Teilüberspannungen der Maxwell-Elemente. In Abb. 4.4 ist beispielhaft ein 3-Parameter Modell aufgeführt,

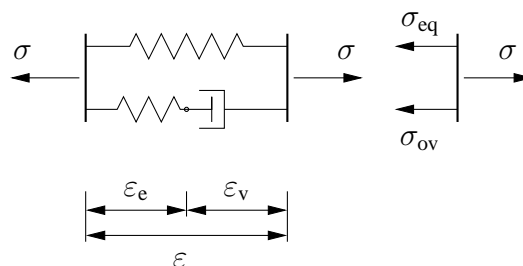


Abbildung 4.4: 3-Parametermodell der Viskoelastizität

welches für $n_{ov} = 1$ die diskutierten Größen verbildlicht.

⁴²Ein Maxwell-Element entspricht der Hintereinanderschaltung einer Feder und eines Dämpfers.

Bezogen auf die Größen der Momentankonfiguration resultieren aus Gl.(4.149) die Cauchy-Spannungen

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\text{eq}} + \mathbf{T}_{\text{ov}}. \quad (4.151)$$

Wir werden bei dem verwendeten Modell erkennen, daß lediglich der deviatorische Anteil der Überspannungen durch Materialgleichungen bestimmt ist, d.h. die deviatorischen Überspannungen resultieren aus der Summe der in den Maxwell-Elementen vorliegenden Teilüberspannungen

$$\mathbf{T}_{\text{ov}} = \mathbf{T}_{\text{ov}}^D = \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \mathbf{T}_{\text{ov}k}^D. \quad (4.152)$$

Ein Kugelanteil der Überspannungen ist nicht definiert, was der Annahme 1 entspricht und aus der nachfolgend gewählten Formänderungsenergie resultiert, siehe Abschnitt 4.4.1. Wir haben demnach $n_{\text{ov}} + 1$ Federn und n_{ov} Dämpfungselemente. Die Letzteren beschreiben die geschwindigkeitsabhängigen Effekte des Materials. Den Federn wird jeweils eine Formänderungsenergie zugeordnet, die von der zugehörigen Deformation abhängt. Wir wählen

$$\psi(J, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{C}}_{e1}, \dots, \bar{\mathbf{C}}_{en_{\text{ov}}}) = U(J) + w_{\text{eq}}(\bar{\mathbf{C}}) + \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} w_{\text{ov}}(\bar{\mathbf{C}}_{ek}), \quad (4.153)$$

wobei für die Volumendehnung, repräsentiert durch $J = \det \mathbf{F}$, ein Anteil $U(J)$ zugewiesen wird. Die Formänderungsenergie w_{eq} hängt vom volumenerhaltenden Anteil der Deformation mittels unimodularem Rechten Cauchy-Green Tensor $\bar{\mathbf{C}}$, siehe Gl.(3.44), und die Formänderungsenergien $w_{\text{ov}k} = w_{\text{ov}}(\bar{\mathbf{C}}_{ek})$ in den Federn der Maxwell-Elemente von den elastischen volumenerhaltenden Deformationen $\bar{\mathbf{C}}_{ek}$, dargestellt durch den unimodularen elastischen Rechten Cauchy-Green Tensor $(3.70)_1$ ab. Die Kugelspannungen resultieren dann lediglich aus einer geschwindigkeitsunabhängigen Formulierung basierend auf volumenändernden Deformation, was im kommenden Abschnitt offensichtlich wird.

4.4.1 Thermodynamisch konsistente Materialgleichungen

In diesem Abschnitt sollen – auch wenn alle Prozesse als isotherm vorausgesetzt werden – thermodynamisch konsistente Materialgleichungen motiviert werden. Diese müssen der Entropiegleichung (3.83) bzw. (3.90) genügen, welche sich im Rahmen von isothermen Betrachtungen ($\dot{\theta} = 0$, $\vec{g} = \vec{0}$, $\vec{g}_{\text{R}} = \vec{0}$, $\dot{s} = 0$) auf die Bedingung

$$\theta\gamma = -\dot{\psi} + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} = -\dot{\psi} + \frac{1}{\rho_{\text{R}}} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} \geq 0 \quad (4.154)$$

vereinfacht. Hierbei haben sich zwei Vorgehensweisen für den Nachweis der Erfüllung der Dissipationsungleichungen (4.154) herauskristallisiert. In der ersten Art werden zunächst Materialgleichungen formuliert und anschließend deren Erfüllung von Bedingung (4.154) überprüft. In der anderen Vorgehensweise wird zu dem rheologischen Ersatzmodell eine Formänderungsenergie formuliert und nachgeprüft, welche Struktur mögliche Evolutionsgleichungen für Innere Variablen haben sollten, um die Dissipationsungleichung (4.154) zu erfüllen. Wir schließen uns hier dem zweiten Konzept in Analogie zu HAUPT & SEDLAN [76] bzw. SEDLAN [146] an, betrachten hingegen die Auswirkung der Zerlegungen (3.40) und (3.67) in volumenerhaltende und -ändernde sowie elastische und inelastische Anteile.

Das Einsetzen der Aufspaltung der Spannungen (4.151) sowie der Formänderungsenergie (4.153) liefert die Ungleichung

$$\underbrace{\frac{1}{\rho} \mathbf{T}_{\text{eq}} \cdot \mathbf{D}}_{(a)} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \mathbf{T}_{\text{ov}} \cdot \mathbf{D}}_{(b)} - \underbrace{U'(J)\dot{J}}_{(c)} - \underbrace{\frac{dw_{\text{eq}}}{d\mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{C}}}_{(d)} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \frac{dw_{\text{ov}}}{d\mathbf{C}_{ek}} \cdot \dot{\mathbf{C}}_{ek}}_{(e)} \geq 0, \quad (4.155)$$

in welcher die einzelnen Terme umformuliert werden müssen, um eine geeignete Darstellung möglicher thermomechanisch konsistenter Materialgleichungen zu erlangen. Zunächst gilt für Term (a)

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{T}_{\text{eq}} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{3\rho} (\text{tr } \mathbf{T}_{\text{eq}}) (\text{tr } \mathbf{D}) + \frac{1}{\rho} \mathbf{T}_{\text{eq}}^D \cdot \mathbf{D}^D. \quad (4.156)$$

Term (b) erfordert den Zusammenhang $\overset{\Delta}{\Gamma} = \mathbf{F}_{ek}^T \mathbf{D} \mathbf{F}_{ek}$ sowie die Einführung der Spannungstensoren der Zwischenkonfigurationen

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k} = J \mathbf{F}_{ek}^{-1} \mathbf{T}_{\text{ov}k} \mathbf{F}_{ek}^{-T}, \quad (4.157)$$

woraus mit Beziehung (3.85)

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{T}_{\text{ov}} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \left(\sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \mathbf{T}_{\text{ov}k} \right) \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho_{\text{R}}} \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k} \cdot \overset{\Delta}{\Gamma} \quad (4.158)$$

resultiert.

Term (c) liefert mit Gl.(3.15) den einfachen Zusammenhang

$$U'(J)\dot{J} = JU'(J)(\text{tr } \mathbf{D}). \quad (4.159)$$

Mit Hilfe von $\dot{\mathbf{C}} = 2\dot{\mathbf{E}} = 2\mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F}$ erhalten wir zunächst für Term (d)

$$\frac{dw_{\text{eq}}}{d\mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{C}} = 2\mathbf{F} \frac{dw_{\text{eq}}}{d\mathbf{C}} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D}.$$

Wegen der speziellen Abhängigkeit $w_{\text{eq}}(\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{C}))$ berechnet sich analog zu den Gln.(4.70)-(4.82)

$$\mathbf{F} \frac{dw_{\text{eq}}}{d\mathbf{C}} \mathbf{F}^T = \left(\bar{\mathbf{B}} \frac{dw_{\text{eq}}}{d\bar{\mathbf{B}}} \right)^D, \quad (4.160)$$

womit sich für Term (d)

$$\frac{dw_{\text{eq}}}{d\mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{C}} = 2 \left(\bar{\mathbf{B}} \frac{dw_{\text{eq}}}{d\bar{\mathbf{B}}} \right)^D \cdot \mathbf{D}^D \quad (4.161)$$

ergibt.

Für den Term (e) benötigen wir die Beziehungen $\dot{\mathbf{C}}_{ek} = 2\overset{\Delta}{\Gamma}_{ek}$ mit $\Gamma_{ek} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{ek} - \mathbf{I})$, siehe auch Abschnitt 3.2.2 Abb. 3.5-3.7, $\Gamma_k = \Gamma_{ek} + \Gamma_{vk}$ bzw. $\overset{\Delta}{\Gamma} = \overset{\Delta}{\Gamma}_{ek} + \overset{\Delta}{\Gamma}_{vk}$ womit für $\overset{\Delta}{\Gamma}_{vk} = \dot{\Gamma}_{vk} + \mathbf{L}_{vk}^T \Gamma_{vk} + \Gamma_{vk} \mathbf{L}_{vk}$ das Skalarprodukt

$$\frac{dw_{\text{ov}}}{d\mathbf{C}_{ek}} \cdot \dot{\mathbf{C}}_{ek} = 2 \frac{dw_{\text{ov}}}{d\mathbf{C}_{ek}} \cdot \dot{\Gamma}_{ek} = 2 \frac{dw_{\text{ov}}}{d\mathbf{C}_{ek}} \cdot \dot{\Gamma}_k - 2 \frac{dw_{\text{ov}}}{d\mathbf{C}_{ek}} \cdot \left(\overset{\Delta}{\Gamma}_{vk} - \mathbf{L}_{vk}^T \Gamma_{vk} - \Gamma_{vk} \mathbf{L}_{vk} \right) \quad (4.162)$$

folgt.

Der Zusammenbau der Beziehungen (4.156), (4.158), (4.159), (4.161) und (4.162) führt schließlich auf die Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{3\rho} (\text{tr } \mathbf{T}_{\text{eq}}) - JU'(J) \right) \text{tr } \mathbf{D} + \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{T}_{\text{eq}}^D - 2 \left(\overline{\mathbf{B}} \frac{dw_{\text{eq}}}{d\overline{\mathbf{B}}} \right)^D \right) \cdot \mathbf{D}^D + \\
& + \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \left(\frac{1}{\rho_{\text{R}}} \boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k} - 2 \frac{dw_{\text{ov}}}{d\mathbf{C}_{\text{ek}}} \right) \cdot \dot{\mathbf{\Gamma}}_k + \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \frac{1}{\rho_{\text{R}}} \boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k} \cdot (\mathbf{L}_{\text{vk}}^T (\boldsymbol{\Gamma}_{\text{ek}} + \boldsymbol{\Gamma}_{\text{vk}}) + (\boldsymbol{\Gamma}_{\text{ek}} + \boldsymbol{\Gamma}_{\text{vk}}) \mathbf{L}_{\text{vk}}) + \\
& + 2 \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \frac{dw_{\text{ov}}}{d\mathbf{C}_{\text{ek}}} \cdot \left(\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_{\text{vk}} - \mathbf{L}_{\text{vk}}^T \boldsymbol{\Gamma}_{\text{vk}} - \boldsymbol{\Gamma}_{\text{vk}} \mathbf{L}_{\text{vk}} \right) = \\
& = \left(\frac{1}{3\rho} (\text{tr } \mathbf{T}_{\text{eq}}) - JU'(J) \right) \text{tr } \mathbf{D} + \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{T}_{\text{eq}}^D - 2 \left(\overline{\mathbf{B}} \frac{dw_{\text{eq}}}{d\overline{\mathbf{B}}} \right)^D \right) \cdot \mathbf{D}^D + \\
& + \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \left(\frac{1}{\rho_{\text{R}}} \boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k} - 2 \frac{dw_{\text{ov}}}{d\mathbf{C}_{\text{ek}}} \right) \cdot \dot{\mathbf{\Gamma}}_k + \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \left(\frac{1}{\rho_{\text{R}}} \boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k} - 2 \frac{dw_{\text{ov}}}{d\mathbf{C}_{\text{ek}}} \right) \cdot (\mathbf{L}_{\text{vk}}^T \boldsymbol{\Gamma}_{\text{vk}} + \boldsymbol{\Gamma}_{\text{vk}} \mathbf{L}_{\text{vk}}) + \\
& + 2 \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \frac{dw_{\text{ov}}}{d\mathbf{C}_{\text{ek}}} \cdot \overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_{\text{vk}} + \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \frac{1}{\rho_{\text{R}}} \boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k} \cdot (\mathbf{L}_{\text{vk}}^T \boldsymbol{\Gamma}_{\text{ek}} + \boldsymbol{\Gamma}_{\text{ek}} \mathbf{L}_{\text{vk}}) \geq 0. \tag{4.163}
\end{aligned}$$

Zur Erfüllung dieser Ungleichung definiert man mit den üblichen Argumenten zunächst die folgenden Materialgleichungen

$$\text{tr } \mathbf{T}_{\text{eq}} = 3\rho JU'(J) = 3\rho_{\text{R}} U'(J), \tag{4.164}$$

$$\mathbf{T}_{\text{eq}}^D = 2\rho \left(\overline{\mathbf{B}} \frac{dw_{\text{eq}}}{d\overline{\mathbf{B}}} \right)^D, \tag{4.165}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k} = 2\rho_{\text{R}} \frac{dw_{\text{ov}k}}{d\mathbf{C}_{\text{ek}}}, \quad k = 1, \dots, n_{\text{ov}}. \tag{4.166}$$

Für die verbleibende Restungleichung, letzte Zeile in Beziehung (4.163), nutzen wir Beziehung (4.166), $\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_{\text{vk}} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_{\text{vk}} + \mathbf{L}_{\text{vk}}^T)$ sowie die Eigenschaft der Isotropie aus und erhalten

$$\sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \left(2 \frac{dw_{\text{ov}}}{d\mathbf{C}_{\text{ek}}} \cdot \overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_{\text{vk}} + \frac{1}{\rho_{\text{R}}} (\boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k} \boldsymbol{\Gamma}_{\text{ek}} \cdot \mathbf{L}_{\text{vk}}^T + \boldsymbol{\Gamma}_{\text{ek}} \boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k} \cdot \mathbf{L}_{\text{vk}}) \right) = \frac{1}{\rho_{\text{R}}} \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} (\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\Gamma}_{\text{ek}}) \boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k} \cdot \overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_{\text{vk}} \geq 0. \tag{4.167}$$

Bei einer Proportionalität

$$\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_{\text{vk}} \sim \mathbf{C}_{\text{ek}} \boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k}, \quad k = 1, \dots, n_{\text{ov}} \tag{4.168}$$

wäre demnach die Dissipationsungleichung (4.154) bzw. (4.155) im Sinne hinreichender Bedingungen erfüllt. Wir wählen daher Evolutionsgleichungen für die Inneren Variablen der viskosen Dehnungen mit einem skalaren, positiven Proportionalitätsfaktor $1/\eta_k$,

$$\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_{\text{vk}} = \frac{1}{\eta_k} \mathbf{C}_{\text{ek}} \boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k}, \quad \eta_k > 0 \tag{4.169}$$

wobei η_k auch als Viskositätsparameter und die gesamte Gleichung auch als Fließregel bezeichnet wird. Sie beschreibt die Entwicklung der inelastischen Verzerrungen. Eine Verallgemeinerung der Entwicklung der inelastischen Verzerrungen kann dadurch erreicht werden, daß die

Viskosität eine Funktion eines sinnvollen Spannungs- oder Verzerrungsmaßes bzw. selbst wieder durch weitere Innere Variable beeinflusst wird. Dabei muß lediglich die Positivität gewährleistet werden, um ein thermodynamisch konsistentes Materialmodell zu behalten.

Wegen der speziellen Abhängigkeit der Formänderungsenergie $w_{ov}(\bar{\mathbf{C}}_{ek}(\mathbf{C}_{ek}))$ erhalten wir analog zu (4.70)-(4.71)

$$\frac{dw_{ov}(\bar{\mathbf{C}}_{ek}(\mathbf{C}_{ek}))}{d\mathbf{C}_{ek}} = (\det \mathbf{C}_{ek})^{-1/3} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}_{ek}^{-1} \otimes \mathbf{C}_{ek} \right] \frac{dw_{ov}}{d\bar{\mathbf{C}}_{ek}} \quad (4.170)$$

und damit die Überspannungen

$$\boldsymbol{\tau}_{ovk} = 2\rho_R \frac{dw_{ov}(\bar{\mathbf{C}}_{ek}(\mathbf{C}_{ek}))}{d\mathbf{C}_{ek}} = 2\rho_R (\det \mathbf{C}_{ek})^{-1/3} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}_{ek}^{-1} \otimes \mathbf{C}_{ek} \right] \frac{dw_{ov}}{d\bar{\mathbf{C}}_{ek}} = \quad (4.171)$$

$$= 2\rho_R \mathbf{C}_{ek}^{-1} \left(\bar{\mathbf{C}}_{ek} \frac{dw_{ov}}{d\bar{\mathbf{C}}_{ek}} \right)^D, \quad (4.172)$$

bzw. die Fließregeln

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\Gamma}}_{vk} = \frac{2\rho_R}{\eta_k} \mathbf{C}_{ek} \frac{dw_{ov}}{d\mathbf{C}_{ek}} = \frac{2\rho_R}{\eta_k} \left(\bar{\mathbf{C}}_{ek} \frac{dw_{ov}}{d\bar{\mathbf{C}}_{ek}} \right)^D. \quad (4.173)$$

Aufgrund der speziellen Abhängigkeit der Formänderungsenergie w_{ov} stellt $\overset{\Delta}{\boldsymbol{\Gamma}}_{vk}$ ein Deviator dar, so daß die Zwischenkonfiguration demnach isochor ist, $\det \mathbf{F}_{vk} = 1$, woraus $\mathbf{F}_{vk} = \bar{\mathbf{F}}_{vk}$ folgt.

Zwecks einer allgemeinen Darstellung und der Erfassung der Abhängigkeit der Spannungen der Referenz- und der Momentankonfiguration von den auftretenden kinematischen und Inneren Variablen, transformieren wir die Überspannungen zunächst zurück auf die Referenzkonfiguration. Mit

$$[\mathbf{F}_{vk}^{-1} \otimes \mathbf{F}_{vk}^{-1}]^{T_{23}} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}_{ek}^{-1} \otimes \mathbf{C}_{ek} \right] = \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right] [\mathbf{F}_{vk}^{-1} \otimes \mathbf{F}_{vk}^{-1}]^{T_{23}} \quad (4.174)$$

folgt für die k -te Teilüberspannung

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{ovk} = [\mathbf{F}_{vk}^{-1} \otimes \mathbf{F}_{vk}^{-1}]^{T_{23}} \boldsymbol{\tau}_{ovk} = \mathbf{F}_{vk}^{-1} \boldsymbol{\tau}_{ovk} \mathbf{F}_{vk}^{-T} = \quad (4.175)$$

$$= 2\rho_R \left(\frac{\det \mathbf{C}_{vk}}{\det \mathbf{C}} \right)^{1/3} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right] [\mathbf{F}_{vk}^{-1} \otimes \mathbf{F}_{vk}^{-1}]^{T_{23}} \frac{dw_{ov}}{d\bar{\mathbf{C}}_{ek}}. \quad (4.176)$$

Aufgrund der Isotropie der Formänderungsenergie w_{ov} gilt

$$\left[\bar{\mathbf{F}}_{vk}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{F}}_{vk}^{-1} \right]^{T_{23}} \frac{dw_{ov}}{d\bar{\mathbf{C}}_{ek}} = \frac{dw_{ov}}{d(\bar{\mathbf{C}}_{vk}^{-1} \bar{\mathbf{C}})} \bar{\mathbf{C}}_{vk}^{-1}. \quad (4.177)$$

Um dies zu zeigen, stellen wir $dw_{ov}/d\bar{\mathbf{C}}_{ek}$ als isotrope Tensorfunktion dar, verwenden die Beziehung $\bar{\mathbf{C}}_{ek} = \bar{\mathbf{F}}_{vk}^{-T} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{F}}_{vk}^{-1}$ und klammern anschließend $\bar{\mathbf{C}}_{vk}^{-1}$ wieder aus:

$$\begin{aligned} \left[\bar{\mathbf{F}}_{vk}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{F}}_{vk}^{-1} \right]^{T_{23}} \frac{dw_{ov}}{d\bar{\mathbf{C}}_{ek}} &= \bar{\mathbf{F}}_{vk}^{-1} \frac{dw_{ov}}{d\bar{\mathbf{C}}_{ek}} \bar{\mathbf{F}}_{vk}^{-T} = \\ &= \bar{\mathbf{F}}_{vk}^{-1} (\alpha_1 \mathbf{I} + \alpha_2 \bar{\mathbf{C}}_{ek} + \alpha_3 \bar{\mathbf{C}}_{ek}^2) \bar{\mathbf{F}}_{vk}^{-T} = \\ &= \left(\alpha_1 \mathbf{I} + \alpha_2 \bar{\mathbf{C}}_{vk}^{-1} \bar{\mathbf{C}} + \alpha_3 (\bar{\mathbf{C}}_{vk}^{-1} \bar{\mathbf{C}})^2 \right) \bar{\mathbf{C}}_{vk}^{-1} \end{aligned}$$

Die $\alpha_i = \alpha_i(\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}_{ek}}, \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}_{ek}}, \mathbf{III}_{\bar{\mathbf{C}}_{ek}})$ stellen wiederum Funktionen der Hauptinvarianten von $\bar{\mathbf{C}}_{ek}$ dar,

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}_{ek}} &= \text{tr } \bar{\mathbf{C}}_{ek} = \text{tr } (\bar{\mathbf{C}}_{vk}^{-1} \bar{\mathbf{C}}), \\ \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}_{ek}} &= \frac{1}{2} \left((\text{tr } \bar{\mathbf{C}}_{ek})^2 - \text{tr } \bar{\mathbf{C}}_{ek}^2 \right) = \frac{1}{2} \left((\text{tr } \bar{\mathbf{C}}_{vk}^{-1} \bar{\mathbf{C}})^2 - \text{tr } (\bar{\mathbf{C}}_{vk}^{-1} \bar{\mathbf{C}})^2 \right), \\ \mathbf{III}_{\bar{\mathbf{C}}_{ek}} &= \det \bar{\mathbf{C}}_{ek} = \det (\bar{\mathbf{C}}_{vk}^{-1} \bar{\mathbf{C}}).\end{aligned}$$

Mit diesen Relationen wird dann Beziehung (4.177) ersichtlich. Für die Spannungen (4.176) resultiert schließlich

$$\tilde{\mathbf{T}}_{ovk} = \frac{2\rho_R}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right] \left(\frac{dw_{ov}}{d(\bar{\mathbf{C}}_{vk}^{-1} \bar{\mathbf{C}})} \bar{\mathbf{C}}_{vk}^{-1} \right), \quad (4.178)$$

da in diesem Fall $\bar{\mathbf{C}}_{ek}$ durch $\bar{\mathbf{C}}_{vk}^{-1} \bar{\mathbf{C}}$ ersetzt werden kann. Wir erhalten somit für die Gesamtspannungen $\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}_{eq} + \sum_{k=1}^{n_{ov}} \tilde{\mathbf{T}}_{ovk}$ die Elastizitätsbeziehung der Gestalt

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\Phi}(\mathbf{C}, \mathbf{C}_{v1}, \dots, \mathbf{C}_{vn_{ov}}) \quad (4.179)$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} &= \rho_R \sqrt{\det \bar{\mathbf{C}}} U' \left(\sqrt{\det \bar{\mathbf{C}}} \right) \mathbf{C}^{-1} + \\ &+ \frac{2\rho_R}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right] \left(\frac{dw_{eq}}{d\bar{\mathbf{C}}} + \sum_{k=1}^{n_{ov}} \frac{dw_{ov}}{d(\bar{\mathbf{C}}_{vk}^{-1} \bar{\mathbf{C}})} \bar{\mathbf{C}}_{vk}^{-1} \right).\end{aligned} \quad (4.180)$$

Die Inneren Variablen \mathbf{C}_{vk} in Gl.(4.179) bestimmen sich mit Hilfe der Rücktransformation $\dot{\mathbf{C}}_{vk} = 2\mathbf{F}_{vk}^T \overset{\Delta}{\Gamma}_{vk} \mathbf{F}_{vk}$ aus Abb. 3.7 und den Überspannungen (4.175) gemäß einer Evolutionsgleichung

$$\dot{\mathbf{C}}_{vk} = \tilde{\mathbf{r}}_k(\mathbf{C}, \mathbf{C}_{v1}, \dots, \mathbf{C}_{vn_{ov}}) \quad (4.181)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{r}}_k = \frac{2}{\eta_k} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{T}}_{ovk} \mathbf{C}_{vk}. \quad (4.182)$$

Da in einigen Literaturstellen die Darstellung mit Größen der Momentankonfiguration präferiert wird, erhalten wir auf analoge Art und Weise die allgemeine Darstellung der Cauchy-Spannungen

$$\mathbf{T} = \Phi(\mathbf{B}, \mathbf{B}_{e1}, \dots, \mathbf{B}_{en_{ov}}) \quad (4.183)$$

mit

$$\Phi = \rho_R U' \left(\sqrt{\det \bar{\mathbf{B}}} \right) \mathbf{I} + \frac{2\rho_R}{\sqrt{\det \bar{\mathbf{B}}}} \left(\bar{\mathbf{B}} \frac{dw_{eq}}{d\bar{\mathbf{B}}} + \sum_{k=1}^{n_{ov}} \bar{\mathbf{B}}_{ek} \frac{dw_{ov}}{d\bar{\mathbf{B}}_{ek}} \right)^D \quad (4.184)$$

und die Evolutionsgleichungen für die elastischen Linken Cauchy-Green Tensoren

$$\overset{\nabla}{\mathbf{B}}_{ek} = -\frac{4\rho_R}{\eta_k} \bar{\mathbf{B}}_{ek} \left(\frac{dw_{ov}}{d\bar{\mathbf{B}}_{ek}} \bar{\mathbf{B}}_{ek} \right)^D = -\frac{4\rho_R}{\eta_k} \left(\frac{dw_{ov}}{d\bar{\mathbf{B}}_{ek}} \bar{\mathbf{B}}_{ek} \right)^D \bar{\mathbf{B}}_{ek} \quad (4.185)$$

mit $\overset{\nabla}{\mathbf{B}}_{ek} = -2\mathbf{F}_{ek} \overset{\Delta}{\Gamma}_{vk} \mathbf{F}_{ek}^T = \dot{\mathbf{B}}_{ek} - \mathbf{L} \mathbf{B}_{ek} - \mathbf{B}_{ek} \mathbf{L}^T$. Prinzipiell kann die Viskosität $\eta_k > 0$ in den hier verwendeten thermodynamisch konsistenten Materialgleichungen noch von der Deformation selbst, den Deformationsgeschwindigkeiten, den viskosen Dehnungen und weiteren Inneren Variablen $\tilde{\mathbf{q}}$ abhängen, $\eta_k(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \mathbf{C}_{v1}, \dots, \mathbf{C}_{vn_{ov}}, \tilde{\mathbf{q}})$ bzw. $\hat{\eta}_k(\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{B}_{e1}, \dots, \mathbf{B}_{en_{ov}}, \tilde{\mathbf{q}})$.⁴³ Wir gehen jedoch hier nicht weiter darauf ein.

⁴³Siehe Abschnitt 4.4.2 und die darin zitierte Literatur.

4.4.2 Ein Modell der finiten Viskoelastizität

Aufbauend auf den vorherigen Erkenntnissen müssen die Materialgleichungen (4.164)-(4.166) sowie (4.169), im speziellen die Formänderungsenergien U , w_{eq} und w_{ov} und der Proportionalitätsfaktor η_k den speziellen experimentellen Beobachtungen angepaßt werden. Der Anteil $U(J)$ wird bei der später verwendeten Finiten-Elemente Formulierung vorwiegend aufgrund von numerischen Gesichtspunkten gewählt, siehe Gl.(4.134) bzw. Abschnitt 4.3.1.⁴⁴ Für den Anteil der spezifischen Formänderungsenergie w_{eq} verwenden wir die Form $w_{\text{eq}}(\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}}) = w(\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}, \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{C}}})$ aus Gl.(4.50). Wir erhalten dann die in Tab. 4.6 bzw. 4.7 abgebildeten Darstellungen. Analog zu den Vorschlägen von LION [103], HAUPT & SEDLAN [76] und REESE & GOVINDJEE [138] wählen wir ein Modell vom Neo-Hooke Typ für die Teilüberspannungen

$$w_{\text{ov}k} = w_{\text{ov}}(\bar{\mathbf{C}}_{\text{ek}}) = \mu_k(\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}_{\text{ek}}} - 3). \quad (4.186)$$

Nach Gl.(4.172) gilt dann

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k} = 2\rho_{\text{R}}\mu_k\mathbf{C}_{\text{ek}}^{-1}\bar{\mathbf{C}}_{\text{ek}}^D. \quad (4.187)$$

Die Vortransformation auf die Momentankonfiguration berechnet sich mit Gl.(4.157) sowie der Einführung der Spannungen vom Kirchhoff-Typ

$$\mathbf{S}_{\text{ov}k} = J\mathbf{T}_{\text{ov}k} = \mathbf{F}_{\text{ek}}\boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k}\mathbf{F}_{\text{ek}}^T \quad (4.188)$$

allgemein zu

$$\mathbf{S}_{\text{ov}k} = J\mathbf{T}_{\text{ov}k} = 2\rho_{\text{R}}\left(\bar{\mathbf{B}}_{\text{ek}}\frac{dw_{\text{ov}}}{d\bar{\mathbf{B}}_{\text{ek}}}\right)^D, \quad (4.189)$$

siehe auch Gl.(4.184), und für den Spezialfall der Formänderungsenergie (4.186) zu

$$\mathbf{S}_{\text{ov}k} = \mathbf{S}_{\text{ov}k}^D = 2\rho_{\text{R}}\mu_k\bar{\mathbf{B}}_{\text{ek}}^D. \quad (4.190)$$

Die Überspannungsanteile der Cauchy-Spannungen repräsentieren damit immer einen deviatorischen Spannungszustand, so daß nur der gesamte deviatorische Spannungszustand durch geschwindigkeitsabhängige Materialeigenschaften bestimmt ist. Der Kugelanteil ist daher rein elastisch. Die Darstellung mit Größen der Referenzkonfiguration ist in Tab. 4.6 wiedergegeben und kann für die Formänderungsenergie (4.186) mit Hilfe von Gl.(4.180) berechnet werden.

Wir kommen noch auf die Viskositätsparameter bzw. -funktionen η_k zu sprechen. Experimentelle Beobachtungen legen es nahe, daß eine prozeßabhängige Viskosität sinnvoll ist. Hierzu sind eine Reihe von Vorschlägen gemacht worden.⁴⁵ Wir wählen eine Viskosität der Form

$$\eta_k = \eta_{0k} \exp(-s_k \|\mathbf{C}_{\text{ek}}\boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k}\|), \quad (4.203)$$

d.h. der Viskositätsparameter wird kleiner für größer werdende Spannungen, was über die Fließregel (4.169) mit der Abnahme der inelastischen Verzerrungszuwächse verbunden ist. Die Formulierung mit Größen der Momentankonfiguration liefert nach Definition (4.188) und der Ausnutzung der Isotropieeigenschaften $\mathbf{C}_{\text{ek}}\boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k}\mathbf{C}_{\text{ek}}$, siehe Elastizitätsbeziehung (4.172),

$$\|\mathbf{C}_{\text{ek}}\boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k}\| = \sqrt{\mathbf{C}_{\text{ek}}\boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k} \cdot \mathbf{C}_{\text{ek}}\boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k}} = \sqrt{\mathbf{C}_{\text{ek}}\boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k}\mathbf{C}_{\text{ek}}} = \|\mathbf{S}_{\text{ov}k}\| = \|\mathbf{S}_{\text{ov}k}^D\|.$$

Mit Größen der Referenzkonfiguration, $\tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}k} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{S}_{\text{ov}k}\mathbf{F}^{-T}$, erhalten wir auch den Zusammenhang

$$\|\mathbf{C}_{\text{ek}}\boldsymbol{\tau}_{\text{ov}k}\| = \|\mathbf{S}_{\text{ov}k}\| = \|\mathbf{C}\tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}k}\|. \quad (4.204)$$

Tabelle 4.6: Materialmodell, ausgedrückt mit Größen der Referenzkonfiguration

(1) 2-te Piola-Kirchhoff Spannungen	
$\tilde{\mathbf{T}} = J\rho_{\text{R}}U'(J)\mathbf{C}^{-1} + \tilde{\mathbf{T}}_{\text{eq}}^{\text{iso}} + \tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}}$	(4.191)
$U'(J) = \frac{K}{10}(J^4 - J^{-6})$	(4.192)
(2) Gleichgewichtsspannungen	
$\tilde{\mathbf{T}}_{\text{eq}}^{\text{iso}} = \varphi_1\mathbf{I} + \varphi_2\bar{\mathbf{C}} + \varphi_3\bar{\mathbf{C}}^{-1}$	(4.193)
$\varphi_1 = 2\rho_{\text{R}}(\det \mathbf{C})^{-1/3} (w_1 + w_2\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}})$	(4.194)
$\varphi_2 = -2\rho_{\text{R}}(\det \mathbf{C})^{-1/3} w_2$	(4.195)
$\varphi_3 = -\frac{2}{3}\rho_{\text{R}}(\det \mathbf{C})^{-1/3} (w_1\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}} + 2w_2\Pi_{\bar{\mathbf{C}}})$	(4.196)
$w_1 = \frac{\partial w_{\text{eq}}}{\partial \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}}} = c_{10} + 3c_{30}(\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{C}}} - 3)^2$	(4.197)
$w_2 = \frac{\partial w_{\text{eq}}}{\partial \Pi_{\bar{\mathbf{C}}}} = c_{01}$	(4.198)
(3) Überspannungen	
$\tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}} = \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}k}$	(4.199)
$\tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}k} = 2\rho_{\text{R}}\mu_k \frac{(\det \mathbf{C}_{vk})^{1/3}}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \left(\mathbf{C}_{vk}^{-1} - \frac{1}{3}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}_{vk}^{-1})\mathbf{C}^{-1} \right)$	(4.200)
$\dot{\mathbf{C}}_{vk} = \frac{4\rho_{\text{R}}\mu_k}{\eta_k} \frac{(\det \mathbf{C}_{vk})^{1/3}}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \left(\mathbf{C} - \frac{1}{3}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}_{vk}^{-1})\mathbf{C}_{vk} \right)$	(4.201)
$\eta_k = \eta_{k0} \exp \left(-s_k \sqrt{\mathbf{C}\tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}k} \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}k}\mathbf{C}} \right)$	(4.202)

Die Materialgleichungen sind in Tab. 4.6 mit Größen der Referenzkonfiguration und in Tab. 4.7 mit Größen der Momentankonfiguration dargestellt und haben folgende zu bestimmenden Materialparameter: Der Kompressionsmodul K wird gemäß numerischen Gesichtspunkten fiktiv gewählt. Die Durchführung von sehr langsamen monotonen Belastungsprozessen bzw. Belastungsprozessen mit eingefügten Haltezeiten ausreichender Dauer führen auf die Gleichgewichtsspannungen, so daß aus diesen Versuchen die drei Materialparameter c_{10} , c_{01} und c_{30} bestimmt werden können (siehe hierzu HAUPT & SEDLAN [76] und HARTMANN [66]). Nachdem diese Materialparameter bestimmt worden sind, müssen Versuche mit unterschiedlichen Prozeßgeschwindigkeiten sowie Kriech- und (oder) Relaxationsversuche zur Bestimmung der Material-

⁴⁴Meßtechnisch ist das schwach kompressible Verhalten des betrachteten Werkstoffs nur sehr schwer zugänglich.

⁴⁵Siehe zum Beispiel LION [103, 104, 106], HAUPT & SEDLAN [76] bzw. SEDLAN [146] und die dort zitierte Literatur.

Tabelle 4.7: Materialmodell, ausgedrückt mit Größen der Momentankonfiguration

(1) Cauchy Spannungen	
\mathbf{T}	$= \rho_{\mathbf{R}} U'(J) \mathbf{I} + \mathbf{S}_{\text{eq}}^D + \mathbf{S}_{\text{ov}}$ (4.205)
$U'(J)$	$= \frac{K}{10} (J^4 - J^{-6})$ (4.206)
(2) Gleichgewichtsspannungen	
\mathbf{S}_{eq}^D	$= (\phi_1 \mathbf{I} + \phi_2 \bar{\mathbf{B}} + \phi_3 \bar{\mathbf{B}}^{-1}) \bar{\mathbf{B}}$ (4.207)
ϕ_1	$= 2\rho_{\mathbf{R}} (w_1 + w_2 \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}})$ (4.208)
ϕ_2	$= -2\rho_{\mathbf{R}} w_2$ (4.209)
ϕ_3	$= -\frac{2}{3} \rho_{\mathbf{R}} (w_1 \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}} + 2w_2 \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{B}}})$ (4.210)
w_1	$= \frac{\partial w_{\text{eq}}}{\partial \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}}} = c_{10} + 3c_{30} (\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{B}}} - 3)^2$ (4.211)
w_2	$= \frac{\partial w_{\text{eq}}}{\partial \mathbf{II}_{\bar{\mathbf{B}}}} = c_{01}$ (4.212)
(3) Überspannungen	
\mathbf{S}_{ov}	$= \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \mathbf{S}_{\text{ov}k}$ (4.213)
$\mathbf{S}_{\text{ov}k}$	$= 2\rho_{\mathbf{R}} \mu_k \bar{\mathbf{B}}_{\text{ek}}^D$ (4.214)
$\bar{\mathbf{B}}_{\text{ek}}^{\nabla}$	$= -\frac{4\rho_{\mathbf{R}} \mu_k}{\eta_k} \bar{\mathbf{B}}_{\text{ek}}^D \bar{\mathbf{B}}_{\text{ek}}$ (4.215)
η_k	$= \eta_{k0} \exp(-s_k \ \mathbf{S}_{\text{ov}k}\)$ (4.216)

parameter $\mu_k, \eta_{0k}, s_k, k = 1, \dots, n_{\text{ov}}$, herangezogen werden. Eine Vorgehensweise unter Heranziehung einer nichtlinearen Optimierungsstrategie zeigt SEDLAN [146] ausführlich an Zug-, Torsions- sowie kombinierten Zug-Torsionsexperimenten.

Kapitel 5

Numerische Lösung des ARWP

Die Berechnung von Bauteilen oder Strukturen erfordert die Herleitung von numerischen Verfahren, die auf den Bilanzgleichungen der Tabellen 3.2 bzw. 3.3 unter Berücksichtigung der verwendeten Materialgleichungen aufbauen. Bei isothermen Prozessen von Festkörpern benötigen wir lediglich die Auswertung der lokalen Impulsbilanz (3.86) bzw. (3.79). Die Massenbilanz wird in der Festkörpermechanik dadurch berücksichtigt, daß das Kontrollvolumen mit dem des materiellen Körpers übereinstimmt und keine Massenflüsse über die Oberfläche stattfinden. Die verwendeten Materialgleichungen werden derart formuliert, daß die Drehimpulsbilanz befriedigt wird. Des weiteren führt die Annahme von isothermen Prozessen sowie die in Abschnitt 4.4.1 verwendeten Materialgleichungen zur Erfüllung der Energie- und Entropiebilanz bzw. -ungleichung. Eine weitere Beschränkung liegt in der Annahme quasistatischer Prozesse. Damit ist gemeint, daß die Beschleunigungsterme in der Impulsbilanz (3.86) bzw. (3.79) vernachlässigt werden, die Impulsbilanz jedoch weiterhin über die Spannungen (Materialgleichungen) und die äußere Belastung zeitlich abhängige partielle Differentialgleichungen darstellen. Wir haben daher die lokale Impulsbilanz (hier ausgedrückt durch den 2-ten Piola-Kirchhoff Tensor $\tilde{\mathbf{T}}$)

$$\text{Div}(\mathbf{F}(\vec{X}, t)\tilde{\mathbf{T}}(\vec{X}, t)) + \rho_{\mathbf{R}}(\vec{X})\vec{k} = \vec{0} \quad (5.1)$$

in jedem Punkt des untersuchten Gebietes und zu jedem Zeitpunkt zu befriedigen. Zusätzlich müssen geometrische und dynamische Randbedingungen erfüllt werden, um die gesuchte Bewegung $\vec{\Phi}_{t_0}(\vec{X}, t)$ zu bestimmen. Zur Vervollständigung der Gleichungen verwendet man die den Spannungszustand $\tilde{\mathbf{T}}$ bestimmenden Materialgleichungen, die in dieser Arbeit die Struktur

$$\tilde{\mathbf{T}}(\vec{X}, t) = \tilde{\Phi}(\mathbf{C}(\vec{X}, t), \mathbf{q}(\vec{X}, t)) \quad (5.2)$$

$$\dot{\mathbf{q}}(\vec{X}, t) = \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{C}(\vec{X}, t), \mathbf{q}(\vec{X}, t)) \quad (5.3)$$

innehaben, siehe Gln.(4.179) und (4.181), und den Anfangsbedingungen $\mathbf{q}(\vec{X}, t_0) = \mathbf{q}_0(\vec{X})$ genügen müssen. Zusätzlich haben wir die Anfangsbedingung für die Bewegung $\vec{\Phi}_{t_0}(\vec{X}, t)$ bzw. für das Verschiebungsfeld $\vec{u}(\vec{X}, t_0) = \vec{u}_0(\vec{X}) = \vec{0}$ zu erfüllen, siehe Abb. 3.1.¹ Die Struktur der Gleichungen (5.2) und (5.3) haben eine Vielzahl von Materialmodellen, bei denen die Spannungen durch eine Elastizitätsbeziehung und von weiteren Inneren Variablen $\mathbf{q}(\vec{X}, t)$ abhängen, die wiederum durch Evolutionsgleichungen, also gewöhnlichen Differentialgleichungen 1-ter Ordnung, definiert sind. Dabei ist offensichtlich, daß die Bewegung $\vec{\Phi}_{t_0}(\vec{X}, t)$ bzw. das Verschiebungsfeld $\vec{u}(\vec{X}, t)$ und die Inneren Variablen $\mathbf{q}(\vec{X}, t)$ die gesuchten Größen repräsentieren. Der

¹Wir gehen in dieser Arbeit davon aus, daß die Bezugskonfiguration deformations- und eigenspannungsfrei ist.

Spannungszustand $\tilde{\mathbf{T}}$ stellt gemäß Gl.(5.2) eine von der Deformation und den Inneren Variablen abhängige Größe dar. Nun gibt es in der Literatur eine Vielzahl von Materialmodellen (5.2) und (5.3), die eine sehr große Komplexität haben können. Zum Beispiel können Materialgleichungen aufgrund von eingeführten Fallunterscheidungen zu Spannungsverläufen führen, die nicht stetig differenzierbar in der Zeit t sind. Im Falle von Materialmodellen der Elastoplastizität mit Fließfläche entwickeln sich die Inneren Variablen zusätzlich erst bei Erfüllung der Belastungsbedingung und es liegen dann zur Bestimmung der Inneren Variablen \mathbf{q} nicht nur gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung vor, sondern Algebro-Differentialgleichungen der Form

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{C}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

mit der singulären Matrix \mathbf{A} , die dort die Struktur

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

innehalt.² Die algebraische Gleichung repräsentiert die Fließbedingung. Bei elastischer Be- oder Entlastung ist $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$, was zur Nichtglattheit der Lösung führt. Im Falle der Viskoelastizität, siehe Gl.(5.3), ist $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, so daß Gl.(5.4) ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1-ter Ordnung darstellt. Die prinzipielle Vorgehensweise solcher Gleichungen bleibt jedoch von der konkreten Interpretation unbeeinflusst.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der numerischen Lösung der Gleichungen (5.1) sowie (5.2) und (5.3) unter Verwendung der Methode der finiten Elemente. Die hier verwendete Methodik verbindet die traditionelle Vorgehensweise in den Ingenieurwissenschaften zur Lösung quasistatischer nichtlinearer Finite-Elemente Berechnungen unter Anwendung von Materialmodellen vom Evolutionsgleichungstyp mit Verfahren der Numerischen Mathematik, die in den Abschnitten 2.3.1 und 2.4 aufgeführt sind.³ Zur Verdeutlichung gehen wir dabei zunächst von der Problemklasse kleiner Verzerrungen aus, um dies anschließend auf finite Deformationen zu verallgemeinern. Insbesondere die Betrachtung gemischter Elementformulierungen soll untersucht werden. Als Beispiel wählen wir eine Verschiebungs-, Druck- und Volumendehnungsformulierung. Abschließend betrachten wir die Spannungsberechnung (Integrationsschritt für den differentiellen Anteil des vorliegenden DAE-Systems) sowie die Berechnung des Tangentenoperators im Sinne des Multilevel-Newton Verfahrens aus Abschnitt 2.4.2.

5.1 Variationsprinzipien

In diesem Abschnitt skizzieren wir die Lösung der gekoppelten partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungen (5.1) und (5.3) im Rahmen der Methode der finiten Elemente. Hierzu leitet man zunächst die Variationsgleichung (schwache Formulierung, Prinzip der virtuellen Verschiebung) her, was je nach Anwendung auf zwei verschiedene Arten geschehen kann. Bei der einen Möglichkeit geht man von der partiellen Differentialgleichung (5.1) aus und multipliziert diese mit Testfunktionen (bzw. bei der hier vorgestellten Problemstellung den virtuellen Verschiebungen), integriert über das Volumen (Gebiet) und wendet den Gaußschen Integralsatz an. Diese Möglichkeit ist relativ beschränkt, d.h. man hat keine wesentlichen Variationsmöglichkeiten einer resultierenden Elementformulierung. Bei der anderen Vorgehensweise formuliert man eine

²Siehe Anmerkung 2.2 auf Seite 34 bzw. ELLSIEPEN & HARTMANN [46].

³Siehe hierzu auch ELLSIEPEN [45], ELLSIEPEN & HARTMANN [46], HARTMANN [62, 63, 64, 67, 68]. Weitere Abhandlungen sind auch in KIRCHNER & SIMEON [96] und SCHERF [144] gegeben.

Funktionalgleichung (Energiefunktional) in Abhängigkeit von speziellen Variablen, welches stationär werden soll. Die Bildung des totalen Differentials, welches im Falle der Stationarität verschwinden muß, liefert dann die schwache Formulierung. Hierauf aufbauend knüpft eine spezielle Elementformulierung an. Formal muß man dann noch zeigen, daß aus der Variationsgleichung die partielle Differentialgleichung (5.1) (Euler-Lagrange Gleichungen) und weitere Nebenbedingungen sowie die natürlichen Randbedingungen resultieren. Diese zweite Vorgehensweise dient lediglich zur Herleitung der Variationsgleichung und einer daraus entstehenden Elementformulierung, da im allgemeinen kein Extremalprinzip (Funktionalgleichung) existiert.

Die einfachste Variationsgleichung stellt das Prinzip der virtuellen Verschiebung dar, welches wir im folgenden im Falle kleiner und großer Deformationen angeben. Dies dient zum prinzipiellen Erkennen der hier vorgestellten Diskretisierungsprozedur. Am Beispiel eines speziellen gemischten Ansatzes wird die zweite Vorgehensweise ebenfalls diskutiert, die vornehmlich Vorteile zur Berücksichtigung des hier diskutierten schwach kompressiblen Materialverhaltens mit sich bringt. Des weiteren wird hier ein spezielles Augenmerk auf die Fragestellung der Verschiebungssteuerung gerichtet, da dies im allgemeinen in den Darstellungen der Lehrbücher über nichtlineare Finite-Elemente außer Acht gelassen wird. Insbesondere die klare Darstellung von bekannten und unbekanntem Größen wird angestrebt und auf den Zusammenhang zur Berechnung der Reaktionskräfte (Lagerkräfte) eingegangen.

5.1.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen bei kleinen Deformationen

Wir gehen zunächst von der Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}) \vec{k} = \vec{0} \quad (5.6)$$

für kleine Deformationen aus, d.h. wir treffen keine Unterscheidung zwischen Koordinaten der Referenz- und der Momentankonfiguration sowie der Spannungstensoren und der Dichte ρ .⁴ Vergleiche hierzu Abschnitt 3.3. Auch seien die durchgeführten Prozesse quasistatisch, so daß keine Beschleunigungsterme eingehen. Die meisten Materialmodelle zur Beschreibung inelastischer Materialien beruhen auf einer Elastizitätsbeziehung

$$\mathbf{T} = \mathbf{h}(\mathbf{E}, \mathbf{q}), \quad (5.7)$$

welche von dem linearisierten Greenschen Verzerrungstensor $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \vec{u} + \operatorname{grad}^T \vec{u})$ bzw. dem Verschiebungsfeld $\vec{u}(\vec{x}, t) \in \mathbb{V}^3$ und von Inneren Variablen $q_i(\vec{x}, t)$, $i = 1, \dots, n_q$, abhängen. Diese sind üblicherweise skalar- oder tensorwertig und lokal als gewöhnliche Differentialgleichungen oder als Algebro-Differentialgleichungen definiert,

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{r}(\mathbf{E}, \mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (5.8)$$

mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{q}(\vec{x}, t_0) = \mathbf{q}_0(\vec{x})$, siehe auch Gln.(5.1)-(5.3).

Die numerische Lösung des Anfangsrandwertproblems (5.6)-(5.8) zur Berechnung des Verschiebungsfeldes $\vec{u}(\vec{x}, t) \in \mathbb{V}^3$ und der Inneren Variablen $q_i(\vec{x}, t)$, $i = 1, \dots, n_q$, erfolgt im Rahmen der nichtlinearen Finite-Elemente Methode folgendermaßen: Äquivalent zur Gleichgewichtsbedingung (5.6) formuliert man die Variationsgleichung, im einfachsten Fall das Prinzip der

⁴Für technische Anwendungen auf der Erde ist \vec{k} die Erdbeschleunigung und wird als zeit- und ortsunabhängig angenommen.

virtuellen Verschiebungen, welches von dem Verschiebungsvektor $\vec{u}(\vec{x}, t)$, den virtuellen Verschiebungen $\delta\vec{u}(\vec{x})$ und den Inneren Variablen $\mathbf{q}(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^{n_q}$ abhängt.⁵ Wir betrachten zunächst die geometrischen (wesentliche bzw. Dirichlet Randbedingungen) sowie die dynamischen Randbedingungen (natürliche bzw. Neumann Randbedingungen) und zerlegen für jede Koordinatenrichtung $d, d = 1, 2, 3$, die gesamte Oberfläche des materiellen Körpers in einen Anteil A_{u_d} — die geometrische Randbedingung mit der Verschiebungskomponente $u_d(\vec{x}, t) = \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{e}_d = \bar{u}_d(\vec{x}, t)$ ist für $\vec{x} \in A_{u_d}$ gegeben — und die übrige Oberfläche A_{t_d} — die dynamischen Randbedingungen mit der Oberflächenspannung $t_d(\vec{x}, t) = \vec{t}(\vec{x}, t) \cdot \vec{e}_d = \mathbf{T}\vec{n} \cdot \vec{e}_d = \bar{t}_d(\vec{x}, t)$ sind auf $\vec{x} \in A_{t_d}$ gegeben.⁶ \vec{e}_d ist der Einheitsvektor in Richtung d und \vec{n} der Normaleneinheitsvektor auf der Oberfläche. Die Teilerflächen haben den Zusammenhang

$$A = A_{u_d} \cup A_{t_d}, \quad A_{u_d} \cap A_{t_d} = \emptyset, \quad d = 1, 2, 3. \quad (5.9)$$

Auf dem Gebiet A_{u_d} ist demnach die Verschiebungskomponente $\bar{u}_d(\vec{x}, t)$ und auf der Oberfläche A_{t_d} ist hingegen die Oberflächenspannung $\bar{t}_d(\vec{x}, t)$ gegeben.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen erhält man nun durch Multiplikation von Gl.(5.6) mit den virtuellen Verschiebungen $\delta\vec{u}(\vec{x})$, mit der Eigenschaft $\delta u_d(\vec{x}) = 0$ auf A_{u_d} ,⁷ Integration über das Volumen des materiellen Körpers und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\pi(t, \vec{u}, \delta\vec{u}, \mathbf{q}) \equiv \int_V \delta\mathbf{E} \cdot \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{E}(\vec{u}), \mathbf{q})}_{\mathbf{T}} dV - \int_V \delta\vec{u} \cdot \rho\vec{k} dV - \int_A \delta\vec{u} \cdot \vec{t} dA = 0 \quad (5.10)$$

Der Tensor $\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\text{grad } \delta\vec{u} + \text{grad}^T \delta\vec{u})$ stellt die virtuellen Verzerrungen dar. Wir erinnern uns weiterhin, daß die Abhängigkeit von \mathbf{q} über die Elastizitätsbeziehung (5.7) gegeben ist und nehmen an, daß die Oberflächenkraftdichte \vec{t} nicht von der Deformation abhängt.⁸

Wir müssen demnach Gl.(5.10) sowie die Materialgleichungen der Inneren Variablen (5.8) lösen. Hierzu hat sich im Rahmen der Methode der finiten Elemente folgende Vorgehensweise etabliert: Im ersten Schritt führt man die Ortsdiskretisierung durch, womit die Einführung von Elementen (Teilgebiete), Ansatzfunktionen für die Verschiebungen sowie virtuellen Verschiebungen, die Koordinatentransformation der Elemente in Referenzelemente (Einführung von lokalen Koordinaten) sowie die Auswertung der in der Variationsgleichung (5.10) auftretenden Integrale gemeint ist. Hierbei entsteht aus der raumdiskretisierten Variationsgleichung ein System von nichtlinearen Gleichungen in den Knotenverschiebungen, wobei die Abhängigkeit von den Inneren Variablen erhalten bleibt. Bei genauer Betrachtung entsteht durch die Ortsdiskretisierung ein System von Algebra-Differentialgleichungen, die wir im folgenden kurz als DAE-System bezeichnen. Wir wenden dann für den zweiten Schritt, der Zeitdiskretisierung, die in Abschnitt

⁵ Die virtuellen Verschiebungen werden üblicherweise in der Literatur lediglich als Funktionen des Ortes angenommen. Da die virtuellen Verschiebungen jedoch den homogenisierten geometrischen Randbedingungen genügen müssen und sich diese im Laufe der Prozeßführung auch ändern können, liegt eine bekannte Abhängigkeit von der Zeit t vor (i.a. stückweise konstant). Die Zeit t repräsentiert jedoch lediglich einen Parameter. Diese Abhängigkeit wird im folgenden nicht berücksichtigt. Kontaktprobleme, bei denen die Zeitabhängigkeit der Oberfläche A_{u_d} unbekannt ist, werden in dieser Arbeit nicht behandelt.

⁶ Formal müßte man auf gekrümmten Oberflächen auch Komponenten in Normalen- und Tangentialrichtung zulassen und diese in die Betrachtungen mit einbeziehen. Dies wird hier aus Übersichtlichkeitsgründen fortgelassen. Im übertragenen Sinne liegt dann eine Abhängigkeit zwischen den Verschiebungskomponenten u_d vor, die dann einer Nebenbedingung $g(u_1, u_2, u_3) = 0$ genügen müssen.

⁷ Die Oberflächen A_{u_d} und A_{t_d} können, wie dies schon bei den virtuellen Verschiebungen angedeutet wurde, ebenfalls von der Zeit t abhängig sein, siehe Fußnote 5, S.106.

⁸ Dies ist natürlich prinzipiell möglich und tritt zum Beispiel bei Spannungszuständen auf, die normal auf die Oberfläche wirken, die sich natürlich während der Belastung deformiert.

2.3.1 eingeführten Verfahren zur Lösung des DAE-Systems an, so daß die Struktur derzeitiger FE-Programme erhalten bleibt. Diese Vorgehensweise der Trennung in Orts- und Zeitdiskretisierung bezeichnet man im Rahmen von Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen als Linienmethode. Die Durchführung der Ortsdiskretisierung mit anschließender Zeitdiskretisierung stellt dabei die vertikale Linienmethode dar.⁹

ANMERKUNG 5.1

Die Vorgehensweise der Trennung in Orts- und Zeitdiskretisierung wird zum Beispiel auch in der Strukturdynamik (Annahme der linearen Elastizität und kleiner Deformationen) angewendet, bei welcher man nach der Raumdiskretisierung zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 2-ter Ordnung gelangt: $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t)$. Oder bei Lösung der Wärmeleitungsgleichung, die nach der Ortsdiskretisierung auf gewöhnliche Differentialgleichungen 1-ter Ordnung führt, $\mathbf{M}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{p}(t)$. Siehe hierzu auch HUGHES [85, S.421 und S.424]. Daher ist die hier vorgestellte Methodik eine konsequente Weiterverfolgung der vertikalen Linienmethode auf inelastische Problemstellungen. \square

Im Sinne der Methode von Galerkin formulieren wir Ansatzfunktionen für die Verschiebungen und virtuellen Verschiebungen

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{n_{\text{nodes}}} N_j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j(t) = \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \mathbf{u}_a(t), \quad \mathbf{u}^h \in \mathbb{R}^3 \quad (5.11)$$

$$\delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_{\text{nodes}}} N_j(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}_j = \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}_a, \quad \delta \mathbf{u}^h \in \mathbb{R}^3 \quad (5.12)$$

mit den Knotenverschiebungen $\mathbf{u}_j(t) \in \mathbb{R}^3$, den virtuellen Knotenverschiebungen $\delta \mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^3$ und den Ansatzfunktionen $N_j(\mathbf{x})$ des Knotens j für $j = 1, \dots, n_{\text{nodes}}$, für $\mathbf{x} \in \Omega$. Hierbei gehen wir davon aus, daß das ursprüngliche Gebiet V durch die Gebietsapproximation in Ω übergeht. Analog gilt für die Oberfläche $A \rightarrow \Gamma$. Wir beschränken uns auf die Darstellung von dreidimensionalen Kontinuumelementen. Die Anordnung in Spaltenmatrizen bzw. Matrizen führt dann auf die Matrix der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{3 \times n_{\text{dof}}}$, den Gesamtvektor der Knotenverschiebungen $\mathbf{u}_a(t) \in \mathbb{R}^{n_{\text{dof}}}$ und den Gesamtvektor der virtuellen Knotenverschiebungen $\delta \mathbf{u}_a \in \mathbb{R}^{n_{\text{dof}}}$. Dabei ist die Anzahl der Freiheitsgrade, $n_{\text{dof}} = 3 \times n_{\text{nodes}}$, das Produkt aus der Anzahl der Knoten der Struktur und der Anzahl der Freiheitsgrade pro Knoten — hier entspricht dies der Dimension. O.b.d.A. stellt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ den Ortsvektor in kartesischen Koordinaten dar. Der Index a soll andeuten, daß alle Verschiebungsfreiheitsgrade in dem Vektor \mathbf{u}_a bzw. $\delta \mathbf{u}_a$ enthalten sind.

Den Verschiebungs- und virtuellen Verschiebungsvektor müssen wir noch (formal) in bekannte und unbekannte Größen zerlegen bzw. partitionieren. $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ stellen die unbekanntes und $\bar{\mathbf{u}}(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ die bekannten, vorgegebenen Knotenverschiebungen dar. n_u ist die Anzahl der unbekanntes und n_p die Anzahl der bekannten Knotenverschiebungen, $n_{\text{dof}} = n_u + n_p$. Dort wo bekannte Knotenverschiebungen vorliegen, verschwinden die virtuellen Knotenverschiebungen, $\delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_p}$. Die übrigen virtuellen Knotenverschiebungen $\delta \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ sind beliebig. Mit dieser

⁹Siehe zum Beispiel GROSSMANN & ROOS [56, S.306].

Aufteilung folgt für den Ansatz (5.11) bzw. (5.12)

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \underbrace{[\mathbf{N}(\mathbf{x}) \ \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x})]}_{\mathbf{N}_a(\mathbf{x})} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}(t) \\ \bar{\mathbf{u}}(t) \end{array} \right\}}_{\mathbf{u}_a(t)} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}(t) \quad (5.13)$$

$$\delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{[\mathbf{N}(\mathbf{x}) \ \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x})]}_{\mathbf{N}_a(\mathbf{x})} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \delta \mathbf{u} \\ \delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \end{array} \right\}}_{\delta \mathbf{u}_a} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u} \quad (5.14)$$

mit

$$\mathbf{u}_a(t) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}(t) \\ \bar{\mathbf{u}}(t) \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \delta \mathbf{u}_a = \left\{ \begin{array}{c} \delta \mathbf{u} \\ \delta \bar{\mathbf{u}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \delta \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}. \quad (5.15)$$

Die Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t)$ erfüllen die homogenisierten geometrischen Randbedingungen und die Funktionen $\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}(t)$ die geometrischen Randbedingungen selbst. Aufbauend auf den Verschiebungen $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)$ berechnen wir mit diesen Ansätzen den Verzerrungsvektor $\mathbf{E}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_a(\mathbf{x})\mathbf{u}_a(t)$, wobei $\mathbf{B}_a(\mathbf{x})$ die globale Verzerrungs-Verschiebungsmatrix darstellt. Im Dreidimensionalen liefert die Ausnutzung der Symmetrie, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$, einen Verzerrungsvektor der Dimension $\mathbf{E}^h \in \mathbb{R}^6$,

$$\mathbf{E}^h = \{E_{11}^h, E_{22}^h, E_{33}^h, 2E_{12}^h, 2E_{23}^h, 2E_{31}^h\}^T, \quad (5.16)$$

siehe Anhang A.2.2, Gl.(A.37). Mit der Aufspaltung (5.15)₁ gilt $\mathbf{B}_a(\mathbf{x}) = [\mathbf{B}(\mathbf{x}) \ \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x})]$ mit $\mathbf{B}_a \in \mathbb{R}^{6 \times n_{\text{dof}}}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{6 \times n_u}$ und $\bar{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{6 \times n_p}$, was zu der Aufteilung

$$\mathbf{E}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}(t) \quad (5.17)$$

führt. Für die Approximation der virtuellen Verzerrungen $\delta \mathbf{E}$ folgt mit dem Ansatz (5.14) analog

$$\delta \mathbf{E}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\delta \mathbf{u} \quad (5.18)$$

mit $\delta \mathbf{E}^h \in \mathbb{R}^6$.

Die Spannungen $\mathbf{T}^h(\mathbf{x}, t) = \{T_{11}^h, T_{22}^h, T_{33}^h, T_{12}^h, T_{23}^h, T_{31}^h\}^T$, werden ebenfalls in Spaltenform notiert und sind über die Elastizitätsbeziehung (5.7) definiert,

$$\mathbf{T}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{E}^h(\mathbf{x}, t), \mathbf{q}^h(\mathbf{x}, t)). \quad (5.19)$$

Die Abhängigkeit der Inneren Variablen $\mathbf{q}^h(\mathbf{x}, t)$ von den räumlichen Koordinaten \mathbf{x} resultiert aus der Abhängigkeit von den Verzerrungen $\mathbf{E}^h(\mathbf{x}, t)$, die durch das Anfangswertproblem

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}^h(\mathbf{x}, t) - \mathbf{r}(\mathbf{E}^h(\mathbf{x}, t), \mathbf{q}^h(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}^h(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{q}_0^h(\mathbf{x}). \quad (5.20)$$

gegeben ist. Hierbei hängt natürlich die Verzerrung \mathbf{E}^h vom Verschiebungsfeld \mathbf{u}^h ab. Wenn wir nunmehr die Ansätze (5.13), (5.14), (5.17) und (5.18) in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (5.10) einsetzen, so erhalten wir

$$\pi(t, \mathbf{u}^h, \delta \mathbf{u}^h, \mathbf{q}^h) = \int_{\Omega} \delta \mathbf{E}^{hT} \mathbf{h}(\mathbf{E}^h, \mathbf{q}^h) \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^{hT} \rho \mathbf{k} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^{hT} \mathbf{t} \, d\Gamma_t = \quad (5.21)$$

$$= \delta \mathbf{u}^T \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{h}(\mathbf{B}_a(\mathbf{x})\mathbf{u}_a(t), \mathbf{q}^h(\mathbf{x}, t)) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \mathbf{k} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \, d\Gamma_t \right\} = 0. \quad (5.22)$$

Γ_t ist derjenige Anteil der Oberfläche, auf dem die Spannungen (bzw. die Komponenten des Spannungsvektors) bekannt sind. Um den Aufbau der Elementmatrizen innerhalb eines Elementes zu erkennen, zerlegen wir das erste Integral in Gl.(5.22) in die Summe der Integrale über die Elementgebiete Ω^e . Des weiteren ist im Sinne der Methode der finiten Elemente klar, daß der Verlauf der global definierten Verschiebungen (und damit auch der Verzerrungen) mit den lokal innerhalb eines Elementes definierten Verschiebungen $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_a(\mathbf{x})\mathbf{u}_a(t) = \mathbf{N}^e(\boldsymbol{\varphi}^e(\mathbf{x}))\mathbf{u}^e(t)$ bzw. $\mathbf{E}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_a(\mathbf{x})\mathbf{u}_a(t) = \mathbf{B}^e(\boldsymbol{\varphi}^e(\mathbf{x}))\mathbf{u}^e(t) \equiv \mathbf{E}^e(\boldsymbol{\varphi}^e(\mathbf{x}), t)$ für $\mathbf{x} \in \Omega^e$ übereinstimmt; analog gilt $\delta\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_a(\mathbf{x})\delta\mathbf{u}_a = \mathbf{N}^e(\boldsymbol{\varphi}^e(\mathbf{x}))\delta\mathbf{u}^e$ und $\delta\mathbf{E}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_a(\mathbf{x})\delta\mathbf{u}_a = \mathbf{B}^e(\boldsymbol{\varphi}^e(\mathbf{x}))\delta\mathbf{u}^e \equiv \delta\mathbf{E}^e(\boldsymbol{\varphi}^e(\mathbf{x}))$ für $\mathbf{x} \in \Omega^e$. $\mathbf{u}^e \in \mathbb{R}^{n_{eu}}$ ist der Vektor der Elementknotenverschiebungen und n_{eu} die Anzahl der Knotenverschiebungen eines Elementes.¹⁰ $\boldsymbol{\xi}^T = \{\xi, \eta, \zeta\}$, $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}^e(\mathbf{x})$, sind die lokalen Koordinaten des normierten Elementgebiets $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_{ref}$, $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$, $-1 \leq \zeta \leq 1$. Die Koordinatentransformation ist dabei durch $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}^e(\boldsymbol{\xi})$ gegeben, wobei $\boldsymbol{\varphi}^e = \boldsymbol{\chi}^{e-1}$ darstellt. Eine Zuordnung zwischen den Elementknotenverschiebungen $\mathbf{u}^e(t)$ und dem Vektor aller Verschiebungen $\mathbf{u}_a(t)$ lautet formal $\mathbf{u}^e = \mathbf{Z}_a^e \mathbf{u}_a$. $\mathbf{Z}_a^e \in \mathbb{R}^{n_{eu} \times n_{dof}}$ entspricht der Koinzidenz- bzw. Zuordnungsmatrix, die sich mit der Zerlegung in bekannte und unbekannte Verschiebungsfreiheitsgrade (5.15) ebenfalls zerlegt, $\mathbf{Z}_a^e = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^e & \bar{\mathbf{Z}}^e \end{bmatrix}$. Weiterhin gilt $\mathbf{Z}^e \in \mathbb{R}^{n_{eu} \times n_u}$ und $\bar{\mathbf{Z}}^e \in \mathbb{R}^{n_{eu} \times n_p}$ und damit

$$\mathbf{E}^e = \mathbf{B}^e \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^e & \bar{\mathbf{Z}}^e \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{array} \right\} = \mathbf{B}^e \left\{ \mathbf{Z}^e \mathbf{u} + \bar{\mathbf{Z}}^e \bar{\mathbf{u}} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \delta\mathbf{E}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{Z}^e \delta\mathbf{u}. \quad (5.23)$$

Die Koinzidenzmatrizen \mathbf{Z}^e und $\bar{\mathbf{Z}}^e$ enthalten nur Nullen und Einsen und dienen der Zuordnung der Werte von \mathbf{u}_a nach \mathbf{u}^e ,

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{Z}^e \mathbf{u} + \bar{\mathbf{Z}}^e \bar{\mathbf{u}}. \quad (5.24)$$

ANMERKUNG 5.2

Die Koinzidenzmatrizen \mathbf{Z}_a^e und damit auch \mathbf{Z}^e sowie $\bar{\mathbf{Z}}^e$ dienen hier lediglich zur formalen Darstellung der Zuordnung zwischen Elementgrößen und den allgemein eingeführten Größen, zum Beispiel \mathbf{B}_a , welche nicht mehr explizit darstellbar sind. Die konkreten Zuordnungs- bzw. Implementierungsanweisungen, die durch die Koinzidenzmatrizen beschrieben werden, sind zum Beispiel in HUGHES [85, S.92] dargestellt. Eine andere als die hier gewählte Notation der Assemblierungsanweisung in globale Matrizen ist zum Beispiel in WRIGGERS [174, S.120] mit Hilfe von

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} (\dots) d\Omega^e$$

angegeben. Die Darstellung hier wurde gewählt, um einen Übergang von elementbezogenen (lokalen) und "globalen" Matrizen zu erhalten. \square

ANMERKUNG 5.3

Die Verzerrungs-Verschiebungsmatrix \mathbf{B}^e in Gl.(5.23) hat bei Verwendung von dreidimensionalen Quaderelementen die Darstellung

$$\mathbf{B}^e(\boldsymbol{\varphi}^e(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^e & \dots & \mathbf{B}_{n_{en}}^e \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3n_{en}} \quad (5.25)$$

¹⁰Bei einem achtknotigen Volumenelement wäre $n_{eu} = 8 \times 3 = 24$.

mit

$$\mathbf{B}_a^e(\boldsymbol{\varphi}^e(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} n_{a,x}^e & 0 & 0 \\ 0 & n_{a,y}^e & 0 \\ 0 & 0 & n_{a,z}^e \\ n_{a,y}^e & n_{a,x}^e & 0 \\ 0 & n_{a,z}^e & n_{a,y}^e \\ n_{a,z}^e & n_{a,x}^e & 0 \end{bmatrix}, \quad a = 1, \dots, n_{\text{en}} \quad (5.26)$$

und den in Elementkoordinaten definierten Ansatzfunktionen $n_a^e(\boldsymbol{\xi}) = n_a^e(\xi, \eta, \zeta)$, wenn der Verzerrungsvektor die Anordnung (5.16) hat. \square

Da $\delta \mathbf{u}$ beliebig ist, muß der Klammerausdruck in Gl.(5.22) verschwinden. Wenn wir zusätzlich noch die Integration über die Elementgebiete durchführen, so muß der Ausdruck

$$\hat{\mathbf{g}}(t, \mathbf{u}, \mathbf{q}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{h}(\mathbf{B}_a(\mathbf{x}) \mathbf{u}_a(t), \mathbf{q}^h(\mathbf{x}, t)) \, d\Omega - \bar{\mathbf{p}}(t) = \quad (5.27)$$

$$\approx \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{z}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{h}(\mathbf{E}^e(\mathbf{x}, t), \mathbf{q}^h(\mathbf{x}, t)) \, d\Omega^e - \bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0} \quad (5.28)$$

verschwinden. Dabei ist $\bar{\mathbf{p}}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ die äußere Belastung aus den volumenhaft und den auf der Oberfläche flächenhaft verteilt angreifenden Lasten sowie möglichen (Einzel-)Knotenkräften $\bar{\mathbf{F}}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$:

$$\bar{\mathbf{p}}(t) \equiv \int_{\Omega} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \mathbf{k} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \, d\Gamma_t + \bar{\mathbf{F}}(t). \quad (5.29)$$

Die einzigen explizit von der Zeit t abhängenden Größen sind die äußere gegebene Belastung $\bar{\mathbf{p}}(t)$ und die gegebenen Knotenverschiebungen $\bar{\mathbf{u}}(t)$.

Die numerische Integration der Gl.(5.27) liefert formal

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t)) \equiv \sum_{k=1}^{n_i} w_k \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{h}(\mathbf{B}(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}_k) \bar{\mathbf{u}}(t), \mathbf{q}_k(t)) - \bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0} \quad (5.30)$$

bzw. bei Integration über das Elementgebiet, siehe Gl.(5.28), und Anwendung der Gauß-Quadratur

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t)) \equiv \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{z}^{eT} \left\{ \sum_{i=1}^{n_{\xi}} \sum_{j=1}^{n_{\eta}} \sum_{k=1}^{n_{\zeta}} w_i^G w_j^G w_k^G \mathbf{B}^{eT}(\boldsymbol{\xi}_{ijk}) \mathbf{h}(\mathbf{E}^e(\boldsymbol{\xi}_{ijk}, t), \mathbf{q}_{ijk}^e(t)) \det \mathbf{J}^e(\boldsymbol{\xi}_{ijk}) \right\} - \bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0} \quad (5.31)$$

mit den Gauß-Punkt Koordinaten $\boldsymbol{\xi}_{ijk}^T = \{\xi_i, \eta_j, \zeta_k\}$, den Wichtungsfaktoren w_i^G , w_j^G und w_k^G sowie der Anzahl der Gauß-Punkte n_{ξ} , n_{η} und n_{ζ} in die einzelnen lokalen Koordinatenrichtungen. Natürlich wird mit Gl.(5.30) nicht die konkrete Umsetzung in einem FE-Programm angesprochen, dies ist eher durch Gl.(5.31) gegeben. Jedoch stellt Gl.(5.30) eine kürzere, dabei aber ebenfalls korrekte Darstellung dar. Die Koeffizienten w_k sind Wichtungsfaktoren und die \mathbf{x}_k die Stützstellen eines beliebigen Quadraturverfahrens. Konkreter deutet Gl.(5.31) den Übergang auf das Einheitsgebiet eines Elementes an. Dabei gilt für die Anzahl aller Integrationspunkte einer Struktur $n_i = n_e \times n_{\xi} \times n_{\eta} \times n_{\zeta}$ mit n_e der Anzahl der Elemente. \mathbf{J}^e definiert die Jacobi-Matrix

wobei wir die Funktionen

$$\mathbf{y}(t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{Bmatrix} \text{ und die Anfangsbedingungen } \mathbf{y}(t_0) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t_0) \\ \mathbf{q}(t_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{y}_0 \quad (5.37)$$

einführen, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_u+n_q}$. Die diskretisierte Variationsgleichung stellt in Gl.(5.36) den algebraischen Anteil und die Evolutionsgleichungen der Inneren Variablen den differentiellen Anteil dar.¹¹

Wir haben im Abschnitt 2.3 die numerische Lösung dieses DAE-Systems mit Hilfe von diagonal-impliziten Runge-Kutta Verfahren kennengelernt, welches in dieser Arbeit gemäß Tab. 2.8 gelöst wird. Nach Gl.(2.74), mit den Abkürzungen (2.75) und (2.76), müssen wir in jeder Stufe T_{ni} das nichtlineare Gleichungssystem mit den Funktionen

$$\mathbf{G}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \equiv \sum_{k=1}^{n_i} w_k \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{h}(\mathbf{B}(\mathbf{x}_k) \mathbf{U}_{ni} + \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}_k) \bar{\mathbf{u}}(T_{ni}), \mathbf{z}_q^k \mathbf{Q}_{ni}) - \bar{\mathbf{p}}(T_{ni}) = \mathbf{0} \quad (5.38)$$

$$\mathbf{L}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \equiv \mathbf{A} \left\{ \frac{\mathbf{Q}_{ni} - \mathbf{S}_{ni}^q}{\Delta t_n a_{ii}} \right\} - \mathbf{r}(T_{ni}, \mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) = \mathbf{0} \quad (5.39)$$

lösen, $\mathbf{Q}_{ni} \in \mathbb{R}^{n_q}$. Demnach wird in jeder Stufe T_{ni} das diskretisierte Prinzip der virtuellen Verschiebungen (Gleichgewicht), repräsentiert durch $\mathbf{G}_{ni} = \mathbf{0}$, erfüllt. In der detaillierteren Form (5.31) lautet Gl.(5.38)

$$\mathbf{G}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \equiv \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{z}^{eT} \left\{ \sum_{i=1}^{n_\xi} \sum_{j=1}^{n_\eta} \sum_{k=1}^{n_\zeta} w_i^G w_j^G w_k^G \mathbf{B}^{eT}(\xi_{ijk}) \mathbf{h}(\mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)}, \mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)}) \det \mathbf{J}^e(\xi_{ijk}) \right\} - \bar{\mathbf{p}}(T_{ni}) = \mathbf{0} \quad (5.40)$$

mit $\mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)} = \mathbf{B}^e(\xi_{ijk}) \mathbf{U}_{ni}^e$ und $\mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)} = \mathbf{z}_q^{e(ijk)} \mathbf{Q}_{ni}$ den Verzerrungen und Inneren Variablen am Gauß-Punkt ξ_{ijk} des Elementes e zur Stufe T_{ni} . $\mathbf{U}_{ni}^e = \mathbf{z}^e \mathbf{U}_{ni} + \bar{\mathbf{z}}^e \bar{\mathbf{u}}(T_{ni})$, $\mathbf{U}_{ni}^e \in \mathbb{R}^{n_e}$, sind die Elementknotenverschiebungen im Element e zur Zeit T_{ni} . Weiterhin ist für den differentiellen Anteil des DAE-Systems die diskretisierte Gl.(5.39) zu lösen, welche aufgrund ihrer formalen Einführung in den Gesamtvektor \mathbf{q} bzw. $\mathbf{Q}_{ni} \in \mathbb{R}^{n_q}$ in Gauß-Punkt bezogene Integrationsgrößen von $\mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)} \in \mathbb{R}^{n_q}$ zerfällt. An den Gauß-Punkten ξ_{ijk} sind daher die nichtlinearen Gleichungssysteme

$$\mathbf{L}_{ni}^{e(ijk)}(\mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)}(\mathbf{U}_{ni}^e), \mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)}) \equiv \mathbf{A} \left\{ \frac{\mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)} - \mathbf{S}_{ni}^{qe(ijk)}}{\Delta t_n a_{ii}} \right\} - \mathbf{r}(\mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)}(\mathbf{U}_{ni}^e), \mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)}) = \mathbf{0} \quad (5.41)$$

aufzubauen, bzw. wegen der Entkoppelung der Gleichungen müssen diese jede für sich verschwinden, $\mathbf{L}_{ni}^{e(ijk)} = \mathbf{0}$. $\mathbf{S}_{ni}^{qe(ijk)} \in \mathbb{R}^{n_q}$ sind die Startvektoren der Inneren Variablen an dem jeweiligen Gauß-Punkt. Die Anordnung aller dieser Gleichungen liefert Gl.(5.39) unter Verwendung der Koinzidenzmatrizen in Gl.(5.34)

$$\mathbf{L}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) = \sum_{e=1}^{n_e} \left\{ \sum_{i=1}^{n_\xi} \sum_{j=1}^{n_\eta} \sum_{k=1}^{n_\zeta} \mathbf{z}_q^{e(ijk)T} \mathbf{L}_{ni}^{e(ijk)}(\mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)}(\mathbf{U}_{ni}^e), \mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)}) \right\} = \mathbf{0}. \quad (5.42)$$

¹¹Im Rahmen der Elastoplastizität mit Fließfläche (Fallunterscheidung) stellen die Materialgleichungen der Inneren Variablen selbst wieder ein DAE-System dar (\mathbf{A} wäre dann singulär).

Anwendung des Multilevel-Newton Verfahrens

Bei Anwendung des Multilevel-Newton Verfahrens aus Tab. 2.11 erklären wir im folgenden die beiden Schritte "lokale" und "globale" Ebene. Da im Rahmen der Methode der finiten Elemente die Gleichungen (2.74)₂ für im Iterationsprozeß gegebene Knotenverschiebungen $\mathbf{U}_{ni}^{(m)}$ des Iterationsschrittes (m) aufgrund der Ansatzfunktionen elementweise bzw. Gauß-punktweise gelöst werden können und die Inneren Variablen für die Elastizitätsbeziehung (5.19) in Gl.(5.40) benötigt werden, nennt man diese Berechnung auch *Spannungsalgorithmus*. Bei gegebener Deformation $\mathbf{U}_{ni}^{(m)}$, und daher $\mathbf{U}_{ni}^{e(m)}$ bzw. $\mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)(m)}$, werden demnach an einem Gauß-Punkt die Stufengrößen der Inneren Variablen $\mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)}$ mit Hilfe von Definition (5.41),

$$\mathbf{L}_{ni}^{e(ijk)} = \mathbf{0} \quad \rightsquigarrow \mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)} \quad (5.43)$$

berechnet und damit indirekt die Spannungen $\mathbf{T}^e(\xi_{ijk}, T_{ni})$ iterativ ermittelt.

Die iterative Berechnung dieses nichtlinearen Gleichungssystems der Dimension n_q muß im Rahmen des Multilevel-Newton Verfahrens an jedem Gauß-Punkt durchgeführt werden. Um diesen Rechenaufwand zu minimieren, untersucht man sinnvollerweise die Gleichungen vorab analytisch und versucht diese auf eine geringere Anzahl von Unbekannten zu reduzieren.¹² Diese Vorgehensweise wird zum Teil auch als "problem-angepaßte" oder "effiziente" Spannungsbeziehung bezeichnet. Im günstigsten Fall kann das nichtlineare Gleichungssystem (oder auch zum Teil lineare Gleichungssystem) analytisch gelöst werden. Diese Vorgehensweise wird auch in Abschnitt 5.2 an dem hier vorgestellten Modell der Viskoelastizität exerziert. Es ist auch offensichtlich (erinnere: $\mathbf{U}_{ni}^{(m)}$ ist im Rahmen des Multilevel-Newton Verfahrens zur Berechnung der Inneren Variablen $\mathbf{Q}_{ni}^{(m)}$ gegeben), daß das in einigen Artikeln erwähnte Konstanthalten der Deformation (Verzerrungen) und der anschließenden Integration auf Elementebene, keine Eigenschaft des Zeitintegrators, sondern des Multilevel-Newton Verfahrens ist, siehe Tab. 2.11.

Wir kommen zuletzt noch auf die Berechnung des konsistenten Tangentenoperators im Rahmen des Multilevel-Newton Verfahrens aus Tab. 2.11 zu sprechen. Analog zum Aufbau der Gleichungen (5.41) zur Berechnung der Inneren Variablen, führt auch die Berechnung des *konsistenten Tangentenoperators* (2.111) auf die Berechnung eines linearen Gleichungssystems an jedem Gauß-Punkt. Um dies zu zeigen beginnen wir bei Gl.(5.42) und wenden die Kettenregel nach Gl.(2.111) bzw. Tab. 2.11 an. Wir haben dann mit $\mathbf{z} \equiv (\mathbf{U}_{ni}^{(m)}, \mathbf{Q}_{ni}^{(m)})$ die Terme

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{z}} &= \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{i=1}^{n_\xi} \sum_{j=1}^{n_\eta} \sum_{k=1}^{n_\zeta} \mathbf{z}_q^{e(ijk)T} \frac{\partial \mathbf{L}_{ni}^{e(ijk)}}{\partial \mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)}} \mathbf{z}_q^{e(ijk)}, \\ \left. \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{U}} \right|_{\mathbf{z}} &= \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{i=1}^{n_\xi} \sum_{j=1}^{n_\eta} \sum_{k=1}^{n_\zeta} \mathbf{z}_q^{e(ijk)T} \frac{d\mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)}}{d\mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)}} \mathbf{B}^e(\xi_{ijk}) \mathbf{z}_{ijk}^e, \\ \left. \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{z}} &= \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{i=1}^{n_\xi} \sum_{j=1}^{n_\eta} \sum_{k=1}^{n_\zeta} \mathbf{z}_q^{e(ijk)T} \frac{\partial \mathbf{L}_{ni}^{e(ijk)}}{\partial \mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)}} \mathbf{B}^e(\xi_{ijk}) \mathbf{z}_{ijk}^e, \end{aligned} \quad (5.44)$$

wobei gemäß Gl.(5.23)₁

$$\mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)} = \mathbf{B}^e(\xi_{ijk}) \mathbf{z}^e \mathbf{U}_{ni} + \mathbf{B}^e(\xi_{ijk}) \bar{\mathbf{z}}^e \bar{\mathbf{u}}(T_{ni}) \quad (5.45)$$

¹²Siehe, zum Beispiel, im Zusammenhang von elastoplastischen und viskoplastischen Deformationen HARTMANN ET AL. [71, 70, 61, 110] und die dort zitierte Literatur.

ausgenutzt wird. Wegen $\mathbf{Z}_q^{e(ijk)} \mathbf{Z}_q^{e(ijk)T} = \mathbf{I}_{n_q}$ folgt daraus

$$\left[\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{U}} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{U}} \right] \Big|_{\mathbf{z}} = \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{i=1}^{n_\xi} \sum_{j=1}^{n_\eta} \sum_{k=1}^{n_\zeta} \mathbf{Z}_q^{e(ijk)T} \left[\frac{\partial \mathbf{L}_{ni}^{e(ijk)}}{\partial \mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)}} \frac{d\mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)}}{d\mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)}} + \frac{\partial \mathbf{L}_{ni}^{e(ijk)}}{\partial \mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)}} \right] \mathbf{B}^e(\xi_{ijk}) \mathbf{Z}_{ijk}^e = \mathbf{0} \quad (5.46)$$

und schließlich

$$\frac{\partial \mathbf{L}_{ni}^{e(ijk)}}{\partial \mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)}} \frac{d\mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)}}{d\mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)}} = - \frac{\partial \mathbf{L}_{ni}^{e(ijk)}}{\partial \mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)}}. \quad (5.47)$$

Man muß demnach an jedem Gauß-Punkt das lineare Gleichungssystem der Dimension n_q mit mehreren rechten Seiten, nämlich 6, lösen.

Die Linearisierung der Funktion (5.31) im Rahmen des Multilevel-Newton Verfahrens aus Abschnitt 2.4.2 berechnet sich dann zu

$$\mathbf{D}_U \mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{Q}(\mathbf{U}))[\Delta \mathbf{U}] \Big|_{\mathbf{z}} = \left[\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}^e T \mathbf{k}^e \mathbf{Z}^e \right] \Big|_{\mathbf{z}} \Delta \mathbf{U}_{ni} \quad (5.48)$$

mit der Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}^e \Big|_{\mathbf{z}} = \left[\sum_{i=1}^{n_\xi} \sum_{j=1}^{n_\eta} \sum_{k=1}^{n_\zeta} w_i^G w_j^G w_k^G \mathbf{B}^{eT}(\xi_{ijk}) \mathbf{C}_L^e(\xi_{ijk}) \mathbf{B}^e(\xi_{ijk}) \det \mathbf{J}^e(\xi_{ijk}) \right] \Big|_{\mathbf{z}} \quad (5.49)$$

und dem Tangentenoperator

$$\mathbf{C}_L^e(\xi_{ijk}) \Big|_{\mathbf{z}} = \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)}} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)}} \frac{d\mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)}}{d\mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)}} \right], \quad (5.50)$$

der aus dem Differential der Funktion

$$\mathbf{h}(\mathbf{E}^e, \mathbf{Q}^e) \Big|_{\mathbf{z}, \xi_{ijk}} = \mathbf{h} \left(\mathbf{B}^e \mathbf{Z}^e \mathbf{U} + \mathbf{B}^e \bar{\mathbf{Z}}^e \bar{\mathbf{u}}(T_{ni}), \mathbf{Q}^e \left(\mathbf{B}^e \mathbf{Z}^e \mathbf{U}_{ni} + \mathbf{B}^e \bar{\mathbf{Z}}^e \bar{\mathbf{u}} \right) \right) \Big|_{\mathbf{z}, \xi_{ijk}}$$

in Richtung der unbekanntenen Knotenverschiebungszuwächse

$$\frac{d\mathbf{h}}{d\mathbf{U}} \Delta \mathbf{U}_{ni} = \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{E}^e} \mathbf{B}^e \mathbf{Z}^e + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{Q}^e} \frac{d\mathbf{Q}^e}{d\mathbf{E}^e} \mathbf{B}^e \mathbf{Z}^e \right] \Big|_{\mathbf{z}, \xi_{ijk}} \Delta \mathbf{U}_{ni}$$

resultiert. Der Ausdruck $d\mathbf{Q}^e/d\mathbf{E}^e$ ist in Gl.(5.47) berechnet worden. Der Iterationsindex (m) ist hierbei aus Übersichtlichkeitsgründen fortgelassen worden.

Aufbauend auf der Arbeit von NAGTEGAAL [123] haben SIMO & TAYLOR [153] im Zusammenhang eines Modells der Elastoplastizität kleiner Deformationen den Begriff der “konsistenten Linearisierung” (des Spannungsalgorithmus) geprägt. Leider wird in deren Arbeiten die Gleichungsstruktur und der Zusammenhang zu den Verfahren der Numerischen Mathematik nicht deutlich. In der vorliegenden Arbeit entsteht der konsistente Tangentenoperator (5.50) aus der Anwendung des Multilevel-Newton Verfahrens.¹³

¹³Da die Elastoplastizität auf nichtlineare Gleichungssysteme mit nicht-stetig differenzierbaren Funktionen aufgrund der Fallunterscheidung in elastischen und plastischen Bereich führt, wendete CHRISTENSEN [29, 30] ein spezielles Newton-Verfahren für nichtglatte Probleme an, welches jedoch alle Gleichungen (2.97) in einem Schritt löst.

Würden wir in diesem Rahmen nur eine Stufe verwenden, $s = 1$, d.h. das implizite Euler-Verfahren¹⁴ heranziehen, so entspricht dies der Vorgehensweise einer “klassischen” impliziten FE-Berechnung, bei der wir lokal die Zeitintegration und den konsistenten Tangentenoperator berechnen sowie global die äußere Belastung ($\bar{\mathbf{u}}(t)$ und $\bar{\mathbf{p}}(t)$) zum Zeitpunkt $t = t_{n+1}$ vorgeben ($\mathbf{G}_{ns} = \mathbf{G}_{n+1} = \mathbf{g}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1})$):

$$\mathbf{F}\left(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}, \frac{\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n}{\Delta t_n}\right) = \left\{ \mathbf{A} \left\{ \frac{\mathbf{g}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1})}{\Delta t_n} \right\} - \mathbf{r}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) \right\} = \mathbf{0} \quad (5.51)$$

mit

$$\mathbf{g}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n_i} w_k \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{h}(\mathbf{B}(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}_{n+1} + \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}_k) \bar{\mathbf{u}}(t_{n+1}), \mathbf{q}_{n+1}) - \bar{\mathbf{p}}(t_{n+1}) \quad (5.52)$$

Bei einem Vergleich der Beziehungen (5.38) und (5.39) mit (5.51) wird offensichtlich, daß bei einer Implementation eines impliziten Euler-Verfahrens auf Elementebene sich lediglich der Startvektor \mathbf{S}_{ni}^q sowie die gewichtete Schrittweite $a_{ii} \Delta t_n$ bei DIRK-Verfahren höherer Ordnung ändern. Auf globaler Ebene müssen zusätzlich die Stufengrößen \mathbf{Y}_{ni} , $i = 1, \dots, s$, gespeichert und die äußere Last $\bar{\mathbf{p}}(T_{ni})$ zu den Stufen T_{ni} ausgewertet werden. Wir können als Fazit resümieren, daß die Anwendung von diagonal-impliziten Runge-Kutta Verfahren in Verbindung mit dem Multilevel-Newton Verfahren die Struktur von impliziten FE-Programmen erhält, falls lokal auf Elementebene ein implizites Euler-Verfahren zur Integration der Evolutionsgleichungen für die Inneren Variablen herangezogen wird. Damit wird jedoch auch klar, daß man in der Methode der finiten Elemente bei Materialgleichungen vom Evolutionsgleichungstyp nicht das klassische Newton-Verfahren anwendet (siehe Abschnitt 2.4.1, Tab. 2.10).

Die vorgestellte Prozedur, also die Anwendung eines impliziten Einschritt-Verfahrens zur Lösung eines DAE-Systems und dem Mehrebenen-Newton Verfahren, ist bereits in RABBAT ET AL. [135] 1979 im Zusammenhang mit elektrischen Netzwerken durchgeführt worden, womit angedeutet werden soll, daß die konsistente Linearisierung im Zusammenhang mit der Lösung von DAE-Systemen und Verwendung eines impliziten Euler-Verfahrens sowie eines Mehrebenen-Newton Verfahren bereits konsequent umgesetzt wurde.

ANMERKUNG 5.4

Die Anwendung von höher-genauen DIRK-Verfahren, d.h. die Anzahl der Stufen ist $s > 1$, führt zu einem zusätzlichem Speicheraufwand. Um einen Vergleich zum Aufwand der Speicherung der tangentiellen Steifigkeitsmatrix und der Inneren Variablen sowie der Knotenverschiebungen zu erhalten, betrachten wir einen Würfel mit einer gleichmäßigen Vernetzung in alle drei Raumrichtungen, siehe WRIGGERS [174, S.169] zum Speicheraufwand von direkten Gleichungslösern. Sei n die Anzahl der Elemente einer Kante, dann liegt ein Speicheraufwand von

$$n_{\text{storage}} = (n_{\text{dof}} + n_i n_q)(s + 1) \times 8 \times 10^{-6} \text{ [MB]} \quad (5.53)$$

vor. Für $n_q = 6$ und bei 8 Gauß-Punkten pro Element ist der Speicherbedarf in Tab. 5.1 abgebildet. Dabei ist festzustellen, daß der Speicheraufwand durchaus größer als derjenige der tangentiellen Steifigkeitsmatrix sein kann.

¹⁴Hierbei liegt das Butcher-Schemata $\frac{1}{1} \mid \frac{1}{1}$ vor.

Tabelle 5.1: Speicherbedarf von DIRK-Verfahren mit Schrittweitensteuerung in [MB]

n	n_e	n_{dof}	n_i	Anzahl der Stufen			
				$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$
5	125	648	1000	0.1	0.2	0.2	0.3
10	1000	3993	8000	0.8	1.2	1.7	2.1
20	8000	27783	64000	6.6	9.9	13.2	16.5
40	64000	206763	512000	52.5	78.7	104.9	131.3

Verallgemeinerte Mittelpunktsregel

Abschließend soll ein von ORTIZ & POPOV [131] vorgeschlagenes Verfahren zur Lösung inelastischer Fragestellungen, nämlich die verallgemeinerte bzw. klassische Mittelpunktsregel betrachtet werden. Tab. 5.2 zeigt die zugehörigen Butcher-Tableaus. Der Startvektor (2.71) ist im

Tabelle 5.2: Butcher-Tableau zur Mittelpunktsregel

$$\begin{array}{c|c} 0.5 & 0.5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

(a) Mittelpunktsregel

$$\begin{array}{c|c} \theta & \theta \\ \hline & 1 \end{array}$$

(b) verallgemeinerte Mittelpunktsregel

ersten Schritt durch die bekannte Zustandsgröße \mathbf{y}_n gegeben, $\mathbf{S}_{n1} = \mathbf{y}_n$. Das nichtlineare Gleichungssystem (2.73) muß dann zum Zeitpunkt $T_{n1} = t_n + \theta\Delta t_n$ gelöst werden,

$$\mathbf{F}\left(T_{n1}, \mathbf{Y}_{n1}, \frac{\mathbf{Y}_{n1} - \mathbf{y}_n}{\theta\Delta t_n}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g}(T_{n1}, \mathbf{u}_{n1}, \mathbf{q}_{n1}) \\ \mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{q}_{n1} - \mathbf{q}_n}{\theta\Delta t_n}\right) - \mathbf{r}(T_{n1}, \mathbf{u}_{n1}, \mathbf{q}_{n1}) \end{array} \right\} = \mathbf{0}, \quad \theta > 0, \quad (5.54)$$

d.h. zum Zeitpunkt T_{n1} wird das Gleichgewicht der Struktur in Form der diskretisierten Variationsgleichung erfüllt. Die Zustandsgrößen zum Zeitpunkt t_{n+1} , siehe Gl.(2.69), lauten dann

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t_n \dot{\mathbf{y}}_{n1} = \mathbf{y}_n + \Delta t_n \frac{\mathbf{Y}_{n1} - \mathbf{y}_n}{\theta\Delta t_n} = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \mathbf{y}_n + \frac{1}{\theta} \mathbf{Y}_{n1}. \quad (5.55)$$

Wenn man diese Beziehung in der Form $\mathbf{Y}_{n1} = (1 - \theta)\mathbf{y}_n + \theta\mathbf{y}_{n+1}$ in Gl.(5.54) einsetzt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\left(T_{n1}, (1 - \theta)\mathbf{y}_n + \theta\mathbf{y}_{n+1}, \frac{\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n}{\Delta t_n}\right) &= \\ = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g}(T_{n1}, (1 - \theta)\mathbf{u}_n + \theta\mathbf{u}_{n+1}, (1 - \theta)\mathbf{q}_n + \theta\mathbf{q}_{n+1}) \\ \mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n}{\Delta t_n}\right) - \mathbf{r}(T_{n1}, (1 - \theta)\mathbf{u}_n + \theta\mathbf{u}_{n+1}, (1 - \theta)\mathbf{q}_n + \theta\mathbf{q}_{n+1}) \end{array} \right\} = \mathbf{0}. \quad (5.56) \end{aligned}$$

In ORTIZ & POPOV [131] ist auf Elementebene der zweite Teil dieses blockstrukturierten Gleichungssystems gelöst worden. Deren Vorgehensweise ist nur dann zur hier vorgestellten Anwendung von DIRK-Verfahren äquivalent, falls die diskretisierten Variationsgleichungen zum Zeitpunkt T_{n1} gelöst würden. Dann erfüllen jedoch die Verschiebungen \mathbf{u}_{n+1} nicht das Gleichgewicht zum Zeitpunkt t_{n+1} . Der Grund hierfür liegt daran, daß die θ -Methode kein steif-genaues

DIRK-Verfahren ist, $\theta = a_{11} \neq b_1 = 1$. Um trotzdem das Gleichgewicht zu befriedigen, müßte nochmals das nichtlineare Gleichungssystem

$$\mathbf{g}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (5.57)$$

bei festgehaltenen Inneren Variablen \mathbf{q}_{n+1} gelöst werden. Ein effizienter Einsatz der θ -Methode ist daher nicht möglich.

5.1.2 Eigenschaften der Verschiebungssteuerung

Am Prinzip der virtuellen Verschiebungen erkennen wir, daß keine Lagerkräfte (Bindungskräfte) berechnet werden können, da diese an den Lagern keine virtuelle Arbeit leisten, $\delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ auf Γ_{u_d} . Dieser Fakt wird in den meisten Lehrbüchern zur Methode der finiten Elemente, sowohl bei linear-elastischer als auch inelastischer Problemstellung, übergangen.¹⁵ Um die Lagerkräfte zu berechnen, muß ein anderes Variationsprinzip herangezogen werden, nämlich die *Methode der Lagrange Multiplikatoren*. Hierbei werden die Knotenverschiebungen als Nebenbedingungen (Zwangsbedingungen) definiert.

Gegeben sei der Vektor aller Knotenverschiebungen $\mathbf{u}_a(t) \in \mathbb{R}^{n_{\text{dof}}}$, die hierbei *alle* als unbekannt angenommen werden. Zur Berücksichtigung der geometrischen Randbedingungen formulieren wir die Nebenbedingung

$$\mathbf{C}_c(t, \mathbf{u}_a(t)) = \mathbf{M}^T \mathbf{u}_a(t) - \bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_u \times n_p} \\ \mathbf{I}_{n_p} \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

mit $\mathbf{C}_c \in \mathbb{R}^{n_p}$ und der Filtermatrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dof}} \times n_p}$. $\bar{\mathbf{u}}(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ ist der Vektor der vorgegebenen Verschiebungsfreiheitsgrade, wobei wir aus Gründen der Anschauung den Vektor $\mathbf{u}_a(t)$ in einen oberen und einen unteren Teil partitionieren. Der untere Anteil enthält diejenigen Freiheitsgrade, denen eine geometrische Zwangsbedingung zugeordnet wird. Im Sinne der Methode der Lagrange Multiplikatoren lautet die Variationsgleichung, siehe auch Gl.(5.22),

$$\pi(t, \mathbf{u}_a, \delta \mathbf{u}_a, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}) = \delta \mathbf{u}_a^T \mathbf{g}_a(t, \mathbf{u}_a(t), \mathbf{q}(t)) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{M} \delta \mathbf{u}_a = \quad (5.59)$$

$$= \delta \mathbf{u}_a^T \{ \mathbf{g}_a(t, \mathbf{u}_a(t), \mathbf{q}(t)) + \mathbf{M}^T \boldsymbol{\lambda}(t) \} = \mathbf{0} \quad (5.60)$$

zur Berechnung der unbekanntenen Knotenverschiebungen $\mathbf{u}_a \in \mathbb{R}^{n_{\text{dof}}}$ und der Lagrange Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$. Gl.(5.60) muß für beliebige virtuelle Verschiebungen $\delta \mathbf{u}_a \in \mathbb{R}^{n_{\text{dof}}}$ verschwinden. Zusammen mit der Nebenbedingung (5.58) und den Evolutionsgleichungen (5.33) für alle Inneren Variablen muß daher das DAE-System

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_a(t, \mathbf{u}_a(t), \mathbf{q}(t)) + \mathbf{M}^T \boldsymbol{\lambda}(t) \\ \mathbf{C}_c(t, \mathbf{u}_a(t)) \\ \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{r}(\mathbf{u}_a(t), \mathbf{q}(t)) \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.61)$$

mit

$$\mathbf{y}(t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{Bmatrix} \quad \text{und den Anfangsbedingungen} \quad \mathbf{y}(t_0) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a(t_0) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_0) \\ \mathbf{q}(t_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{a0} \\ \boldsymbol{\lambda}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{y}_0 \quad (5.62)$$

¹⁵Monographien zur nichtlinearen Methode der finiten Elemente sind zum Beispiel BATHE [10], BELYTSCHKO ET AL. [12], BONET & WOOD [18], CRISFIELD [33, 34, 35], DHATT & TOUZOT [37], HUGHES [85], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [176, 177], WRIGGERS [174]. Lediglich in [34, S.32] wird eine mögliche Implementation der Verschiebungssteuerung angesprochen. Die übrigen Bücher behandeln das Thema indirekt im Zusammenhang mit Stabilitätsproblemen.

gelöst werden. Hierbei stellt

$$\mathbf{g}_a(t, \mathbf{u}_a(t), \mathbf{q}(t)) \equiv \sum_{k=1}^{n_i} w_k \mathbf{B}_a^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{h}(\mathbf{B}_a(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}_a(t), \mathbf{q}_k(t)) - \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{p}}(t) \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (5.63)$$

dar, mit der äußeren Belastung $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^{n_u}$ und der diskretisierten Variationsgleichung $\mathbf{g}_a \in \mathbb{R}^{n_{\text{dof}}}$. Bei Anwendung der diagonal-impliziten Runge-Kutta Verfahren müssen wir in jeder Stufe das nichtlineare Gleichungssystem

$$\mathbf{R}_{ni}(\mathbf{Y}_{ni}) = \left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{G}}_{ni}(\mathbf{U}_{ani}, \boldsymbol{\lambda}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \\ \mathbf{L}_{ni}(\mathbf{U}_{ani}, \mathbf{Q}_{ni}) \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (5.64)$$

mit

$$\hat{\mathbf{G}}_{ni}(\mathbf{U}_{ani}, \boldsymbol{\lambda}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \equiv \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{G}_{ni}(\mathbf{U}_{ani}, \boldsymbol{\lambda}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \\ \mathbf{C}_{cni}(\mathbf{U}_{ani}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{g}_a(T_{ni}, \mathbf{U}_{ani}, \mathbf{Q}_{ni}) + \mathbf{M}^T \boldsymbol{\lambda}_{ni} \\ \mathbf{M} \mathbf{U}_{ani} - \bar{\mathbf{u}}(T_{ni}) \end{array} \right\} \quad (5.65)$$

$$\mathbf{L}_{ni}(\mathbf{U}_{ani}, \mathbf{Q}_{ni}) \equiv \mathbf{A} \left\{ \frac{\mathbf{Q}_{ni} - \mathbf{S}_{ni}^q}{\Delta t_n a_{ii}} \right\} - \mathbf{r}(\mathbf{U}_{ani}, \mathbf{Q}_{ni}) \quad (5.66)$$

zur Berechnung aller unbekanntenen Knotenverschiebungen $\mathbf{U}_{ani} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dof}}}$, der Lagrange Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_{ni} \in \mathbb{R}^{n_p}$ und der Inneren Variablen $\mathbf{Q}_{ni} \in \mathbb{R}^{n_q}$ lösen. Der Gebrauch des Mehrebenen-Newton Verfahrens aus Tab. 2.11 erfordert dann die Berechnung des linearen Gleichungssystems auf globaler Ebene

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}_T|_{\mathbf{z}} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{0}_{n_p \times n_p} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{U}_{ani} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_{ni} \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{G}_{ni}(\mathbf{z}) \\ \mathbf{C}_{cni}(\mathbf{z}) \end{array} \right\} \quad (5.67)$$

mit $\mathbf{z}^T = \{ \mathbf{U}_{ani}^{(m)T}, \boldsymbol{\lambda}_{ni}^{(m)T}, \mathbf{Q}_{ni}^{(m)T} \}$ und den Inkrementen $\Delta \mathbf{U}_{ani} = \mathbf{U}_{ani}^{(m+1)} - \mathbf{U}_{ani}^{(m)}$ und $\Delta \boldsymbol{\lambda}_{ni} = \boldsymbol{\lambda}_{ni}^{(m+1)} - \boldsymbol{\lambda}_{ni}^{(m)}$ sowie der singulären tangentiellen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_T|_{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{G}_{ni}}{\partial \mathbf{U}_{ani}} \Big|_{\mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{G}_{ni}}{\partial \mathbf{Q}_{ni}} \Big|_{\mathbf{z}} \frac{d\mathbf{Q}_{ni}}{d\mathbf{U}_{ani}} \Big|_{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{K}_T \in \mathbb{R}^{n_{\text{dof}} \times n_{\text{dof}}}. \quad (5.68)$$

Wenn wir die Unbekannten $\Delta \mathbf{U}_{ani}$ und auch die rechte Seite wieder in Freiheitsgrade, bei denen geometrische Zwänge vorliegen und bei denen äußere Kräfte bekannt sind, zerlegen, so erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \mathbf{K}_{up} & \mathbf{0}_{n_u \times n_p} \\ \mathbf{K}_{pu} & \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{I}_{n_p} \\ \mathbf{0}_{n_p \times n_u} & \mathbf{I}_{n_p} & \mathbf{0}_{n_p \times n_p} \end{array} \right] \Big|_{\mathbf{z}} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{U}_{ni} \\ \Delta \bar{\mathbf{U}}_{ni} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_{ni} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -\mathbf{f}(\mathbf{z}) \\ -\boldsymbol{\lambda}_{ni}^{(m)} - \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) \\ \bar{\mathbf{u}}(T_{ni}) - \bar{\mathbf{U}}_{ni}^{(m)} \end{array} \right\} \quad (5.69)$$

mit den Zerlegungen

$$\Delta \mathbf{U}_{ani} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{U}_{ni} \\ \Delta \bar{\mathbf{U}}_{ni} \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_a = [\mathbf{B} \bar{\mathbf{B}}] \quad (5.70)$$

sowie

$$\mathbf{g}_a(T_{ni}, \mathbf{U}_{ani}^{(m)}, \mathbf{Q}_{ni}^{(m)}) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f}(\mathbf{z}) \\ \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{k=1}^{n_i} w_k \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{h}(\mathbf{B}_a(\mathbf{x}_k) \mathbf{U}_{ani}^{(m)}, \mathbf{Q}_{kni}^{(m)}) - \bar{\mathbf{p}}(T_{ni}) \\ \sum_{k=1}^{n_i} w_k \bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{h}(\mathbf{B}_a(\mathbf{x}_k) \mathbf{U}_{ani}^{(m)}, \mathbf{Q}_{kni}^{(m)}) \end{array} \right\}. \quad (5.71)$$

Sinnvollerweise gibt man für den Iterationsprozeß die Startbedingung $\bar{\mathbf{U}}_{ni}^{(0)} = \bar{\mathbf{u}}(T_{ni})$ vor, so daß aus der letzten Gleichung des Gleichungssystems (5.69) $\Delta \bar{\mathbf{U}}_{ni} = \mathbf{0}$ resultiert und damit $\bar{\mathbf{U}}_{ni}^{(m)} = \bar{\mathbf{U}}_{ni}^{(0)} = \bar{\mathbf{u}}(T_{ni}) \forall m$ folgt. Setzt man die Eigenschaft $\Delta \bar{\mathbf{U}}_{ni} = \mathbf{0}$, was ja für jeden Iterationsschritt gilt, in das Gleichungssystem (5.69) ein und notiert die ersten beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{K}|_z \Delta \mathbf{U}_{ni} &= -\mathbf{f}(\mathbf{z}) \\ \mathbf{K}_{pu}|_z \Delta \mathbf{U}_{ni} + \underbrace{\left\{ \lambda_{ni}^{(m+1)} - \lambda_{ni}^{(m)} \right\}}_{\Delta \lambda_{ni}} &= -\lambda_{ni}^{(m)} - \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

so ist die erste Gleichung von den Lagrange Multiplikatoren unabhängig und damit für sich selbst lösbar. Da nach dem Iterationsprozeß näherungsweise $\Delta \mathbf{U}_{ni} \approx \mathbf{0}$ gilt, folgt aus der zweiten Gleichung für $\lambda_{ni} \equiv \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{ni}^{(m)}$

$$\lambda_{ni} = -\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{U}_{ani}, \mathbf{Q}_{ni}). \quad (5.72)$$

Hierbei interpretieren wir den Lagrange Multiplikator als Reaktionskraft, $\mathbf{p}(T_{ni}) = -\lambda_{ni}$.¹⁶ Dabei wird offensichtlich, daß im herkömmlichen Sinn zunächst die Knotenverschiebungen und Inneren Variablen berechnet werden können und nach Beendigung der Iteration in einer Stufe die Lagerkräfte durch Funktionsauswertungen bekannt sind. Mehr noch, diese Größen sind automatisch durch komplettes Aufstellen der Gleichungen (5.71) bekannt.

ANMERKUNG 5.5

Konsequenterweise müßte man zur Schrittweitensteuerung, siehe Abschnitt 2.3.2, den Vektor $\mathbf{y}(t)$ aus Gl.(5.62) heranziehen, was zu einer gleichmäßigen Einbeziehung von Kraft- und Verschiebungsgrößen im lokalen Integrationsfehler führt. \square

5.1.3 Total-Lagrange Formulierung

Die Übertragung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen auf finite Deformationen führt in der materiellen Darstellung und der Verwendung von Größen der Referenzkonfiguration auf¹⁷

$$\pi(t, \vec{u}, \delta \vec{u}, \mathbf{q}) \equiv \int_V \delta \mathbf{E}(\vec{X}, t) \cdot \underbrace{\tilde{\Phi}(\mathbf{C}(\vec{X}, t), \mathbf{q}(\vec{X}, t))}_{\tilde{\mathbf{T}}} dV - \pi_{\text{ext}}(\delta \vec{u}, t) = 0 \quad (5.73)$$

mit den virtuellen Greenschen Verzerrungen

$$\delta \mathbf{E} \equiv D_{\vec{u}} \mathbf{E}(\vec{u})[\delta \vec{u}] = D_{\mathbf{H}} \mathbf{E}(\mathbf{H})[D_{\vec{u}} \mathbf{H}(\vec{u})[\delta \vec{u}]] = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \delta \mathbf{H} + \delta \mathbf{H}^T \mathbf{F}) = \text{sym}(\mathbf{F}^T \delta \mathbf{H}). \quad (5.74)$$

Dabei haben wir für die Gateaux-Ableitung des Greenschen Verzerrungstensors (3.7) den Verschiebungs- und virtuellen Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{H} \equiv \text{Grad } \vec{u}(\vec{X}, t) \quad \text{bzw.} \quad \delta \mathbf{H} \equiv \text{Grad } \delta \vec{u}(\vec{X}) \quad (5.75)$$

eingeführt. Für eine konservative Belastung ist die virtuelle Arbeit der äußeren Lasten

$$\pi_{\text{ext}}(\delta \vec{u}, t) = \int_A \delta \vec{u}(\vec{X}) \cdot \vec{t}_R(\vec{X}, t) dA + \int_V \delta \vec{u}(\vec{X}) \cdot \rho_R(\vec{X}) \vec{k} dV \quad (5.76)$$

¹⁶Dies gilt natürlich nur näherungsweise, da $\Delta \mathbf{U}_{ni} \approx \mathbf{0}$ vom gewählten Konvergenzkriterium abhängt.

¹⁷In der folgenden Darstellung sei auch auf BATHE [10] und WRIGGERS [174] verwiesen.

mit dem Spannungsvektor $\vec{t}_R = \mathbf{T}_R \vec{n}_R$ und der Oberflächennormalen in der Referenzkonfiguration \vec{n}_R . \mathbf{T}_R ist der 1-te Piola-Kirchhoff Tensor, siehe Tab. 3.4.

Die Einführung von Ansatzfunktionen für das Verschiebungs- und virtuelle Verschiebungsfeld \vec{u} und $\delta\vec{u}$, siehe auch Gln.(5.13) und (5.14),

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{X}, t) = \mathbf{N}_a(\mathbf{X}) \mathbf{u}_a(t) = \mathbf{N}(\mathbf{X}) \mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \bar{\mathbf{u}}(t) \quad \text{bzw.} \quad \delta\mathbf{u}^h(\mathbf{X}) = \mathbf{N}(\mathbf{X}) \delta\mathbf{u} \quad (5.77)$$

liefert eine von den Verschiebungen abhängige Verzerrungs-Verschiebungsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}$, siehe hierzu Gln.(5.74) und (5.17),

$$\mathbf{E}^h(\mathbf{X}, t) = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{u}_a(t), \mathbf{X}) \mathbf{u}(t) + \bar{\tilde{\mathbf{B}}}(\mathbf{u}_a(t), \mathbf{X}) \bar{\mathbf{u}}(t) \quad (5.78)$$

bzw.

$$\delta\mathbf{E}^h(\mathbf{X}, t) = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{u}_a(t), \mathbf{X}) \delta\mathbf{u}(t). \quad (5.79)$$

O.B.d.A. stellt $\mathbf{X}^T = \{X_1, X_2, X_3\} = \{X, Y, Z\}$ den Vektor der kartesischen Koordinaten in der Referenzkonfiguration dar. Analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 5.1.1 sei der Verzerrungsverlauf im Element mit dem globalen Verlauf im Gebiet $\mathbf{X} \in \Omega^e$ identisch, $\mathbf{E}^e(\mathbf{X}, t) \equiv \mathbf{E}^h(\mathbf{X}, t) = \tilde{\mathbf{B}}^e(\mathbf{u}^e(t), \mathbf{X}) \mathbf{u}^e(t)$ für $\mathbf{X} \in \Omega^e$ mit den Elementknotenverschiebungen $\mathbf{u}^e(t) = \mathbf{z}_a^e \mathbf{u}_a(t) \in \mathbb{R}^{n_{eu}}$, so daß wir aus dem diskretisierten Prinzip der virtuellen Verschiebungen (5.73) analog zur Herleitung in Abschnitt 5.1.1 das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}(t, \mathbf{u}, \mathbf{q}) &= \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T(\mathbf{u}_a(t), \mathbf{X}) \tilde{\Phi}(\mathbf{C}^h(\vec{X}, t), \mathbf{q}^h(\vec{X}, t)) \, d\Omega - \bar{\mathbf{p}}(t) = \\ &= \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{z}^{eT} \int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{B}}^{eT}(\mathbf{u}^e(t), \mathbf{X}) \underbrace{\tilde{\Phi}(\mathbf{C}^e(\mathbf{X}, t), \mathbf{q}^e(\mathbf{X}, t))}_{\tilde{\mathbf{T}}^e} \, d\Omega^e - \bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.80)$$

erhalten. Hierbei resultiert aus den diskretisierten Verzerrungen Gl.(5.74) die Verzerrungs-Verschiebungsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}^e(\mathbf{u}^e(t), \mathbf{X}) = [\tilde{\mathbf{B}}_1^e(\mathbf{u}^e(t), \mathbf{X}) \dots \tilde{\mathbf{B}}_{n_{en}}^e(\mathbf{u}^e(t), \mathbf{X})] \in \mathbb{R}^{6 \times 3n_{en}}$ mit

$$\tilde{\mathbf{B}}_a^e = \begin{bmatrix} F_{11}^e n_{a,X}^e & F_{21}^e n_{a,X}^e & F_{31}^e n_{a,X}^e \\ F_{12}^e n_{a,Y}^e & F_{22}^e n_{a,Y}^e & F_{32}^e n_{a,Y}^e \\ F_{13}^e n_{a,Z}^e & F_{23}^e n_{a,Z}^e & F_{33}^e n_{a,Z}^e \\ F_{11}^e n_{a,Y}^e + F_{12}^e n_{a,X}^e & F_{21}^e n_{a,Y}^e + F_{22}^e n_{a,X}^e & F_{31}^e n_{a,Y}^e + F_{32}^e n_{a,X}^e \\ F_{12}^e n_{a,Z}^e + F_{13}^e n_{a,Y}^e & F_{22}^e n_{a,Z}^e + F_{23}^e n_{a,Y}^e & F_{32}^e n_{a,Z}^e + F_{33}^e n_{a,Y}^e \\ F_{13}^e n_{a,X}^e + F_{11}^e n_{a,Z}^e & F_{23}^e n_{a,X}^e + F_{21}^e n_{a,Z}^e & F_{33}^e n_{a,X}^e + F_{31}^e n_{a,Z}^e \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

$a = 1, \dots, n_{en}$, die offensichtlich von den Komponenten des Deformationsgradienten \mathbf{F} bzw. wegen $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}$, $F_{iJ} = H_{iJ} + \delta_{iJ}$, von den Komponenten des Verschiebungsgradienten, $\mathbf{H} = \text{Grad } \vec{u}(\vec{X}, t)$,

$$H_{iJ}^e = \frac{\partial u_i^e}{\partial X_J} = \sum_{a=1}^{n_{en}} n_{a,J}^e u_{a,i}^e \quad (5.82)$$

abhängt, $n_{a,J}^e = \partial n_a^e / \partial X_J$. $\mathbf{C}^h, \mathbf{C}^e \in \mathbb{R}^6$ stellen die Vektordarstellung des Rechten Cauchy-Green Tensors dar. Die Verwendung großindizierter Buchstaben soll auf die materiellen Koordinaten hindeuten. Die Doppelindizierung $u_{a,i}^e$ stellt die Verschiebungen am lokalen Elementknoten a in Richtung der Koordinate i , $i = 1, 2, 3$ bzw. X, Y, Z dar.

Im Zusammenhang mit dem Linearisierungsprozeß des zugrundeliegenden Newton- bzw. Multilevel-Newton Verfahrens müssen wir den Integranden in Gl.(5.73) betrachten, der sowohl linear in den Spannungen als auch linear im Verschiebungsgradienten \mathbf{H} bzw. den Verschiebungen \vec{u} (bei festgehaltenen Spannungen) ist. Die Linearisierung der Spannungen bezüglich der Verschiebungen geschieht analog zu den vorherigen Abschnitten. Wir betrachten daher den Fall konstanter Spannungen. Der Integrand läßt sich ebenfalls in der Form

$$\alpha = \delta \mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{H}^T \mathbf{F} = \delta \mathbf{H} \tilde{\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{H}) = \left[\mathbf{I} \otimes \tilde{\mathbf{T}} \right]^{T_{23}} \delta \mathbf{H} \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{H}) \quad (5.83)$$

schreiben. Differenziert man diesen Ausdruck bei konstanten Spannungen nach den Verschiebungen, so erhält man

$$\beta = D_{\vec{u}} \alpha(\vec{u}) [\Delta \vec{u}] |_{\tilde{\mathbf{T}}=\text{const.}} = \left[\mathbf{I} \otimes \tilde{\mathbf{T}} \right]^{T_{23}} \delta \mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{H} \quad (5.84)$$

mit $\Delta \mathbf{H} = \text{Grad } \Delta \vec{u}$. Die Anwendung der im Anhang A.2 eingeführten Matrizennotation und der Bezug auf das Element e führt auf den Ausdruck

$$\beta = \delta \mathbf{H}^{eT} \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{T}}}^{eT} \Delta \mathbf{H}^e = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{Z}^{eT} \tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^{eT} \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{T}}}^e \tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^e \mathbf{Z}^e \Delta \mathbf{u} \quad (5.85)$$

mit $(\delta \mathbf{H}^e, \Delta \mathbf{H}^e \in \mathbb{R}^9, \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{T}}}^e = \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{T}}}^{eT} \in \mathbb{R}^{9 \times 9})$

$$\Delta \mathbf{H}^e = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^e \Delta \mathbf{u}^e = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^e \mathbf{Z}^e \Delta \mathbf{u}, \quad \delta \mathbf{H}^e = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^e \delta \mathbf{u}^e = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^e \mathbf{Z}^e \delta \mathbf{u} \quad (5.86)$$

und

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^e = \begin{bmatrix} n_{1,X}^e & 0 & 0 & n_{2,X}^e & 0 & 0 & \dots & n_{n_{\text{en}},X}^e & 0 & 0 \\ 0 & n_{1,Y}^e & 0 & 0 & n_{2,Y}^e & 0 & \dots & 0 & n_{n_{\text{en}},Y}^e & 0 \\ 0 & 0 & n_{1,Z}^e & 0 & 0 & n_{2,Z}^e & \dots & 0 & 0 & n_{n_{\text{en}},Z}^e \\ n_{1,Y}^e & 0 & 0 & n_{2,Y}^e & 0 & 0 & \dots & n_{n_{\text{en}},Y}^e & 0 & 0 \\ 0 & n_{1,Z}^e & 0 & 0 & n_{2,Z}^e & 0 & \dots & 0 & n_{n_{\text{en}},Z}^e & 0 \\ 0 & 0 & n_{1,X}^e & 0 & 0 & n_{2,X}^e & \dots & 0 & 0 & n_{n_{\text{en}},X}^e \\ n_{1,Z}^e & 0 & 0 & n_{2,Z}^e & 0 & 0 & \dots & n_{n_{\text{en}},Z}^e & 0 & 0 \\ 0 & n_{1,X}^e & 0 & 0 & n_{2,X}^e & 0 & \dots & 0 & n_{n_{\text{en}},X}^e & 0 \\ 0 & 0 & n_{1,Y}^e & 0 & 0 & n_{2,Y}^e & \dots & 0 & 0 & n_{n_{\text{en}},Y}^e \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

sowie

$$\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{T}}}^e = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{12}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{31}^e & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{T}_{22}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{23}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{12}^e & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{T}_{33}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{31}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{23}^e \\ \tilde{T}_{12}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{22}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{23}^e & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{T}_{32}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{33}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{31}^e & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{T}_{31}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{11}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{12}^e \\ \tilde{T}_{31}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{23}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{33}^e & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{T}_{12}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{31}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{11}^e & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{T}_{23}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{12}^e & 0 & 0 & \tilde{T}_{22}^e \end{bmatrix} \cdot \quad (5.88)$$

ANMERKUNG 5.6

Der Ausdruck $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^{eT} \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{T}}}^e \tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^e$ stimmt mit der Darstellung in BATHE [10, S.654], $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^{eT} \hat{\tilde{\mathbf{T}}}^e \tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^e$, für

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^e = \begin{bmatrix} n_{1,X}^e & 0 & 0 & n_{2,X}^e & 0 & 0 & n_{3,X}^e & \cdots & n_{n_{\text{en}},X}^e & 0 & 0 \\ n_{1,Y}^e & 0 & 0 & n_{2,Y}^e & 0 & 0 & n_{3,Y}^e & \cdots & n_{n_{\text{en}},Y}^e & 0 & 0 \\ n_{1,Z}^e & 0 & 0 & n_{2,Z}^e & 0 & 0 & n_{3,Z}^e & \cdots & n_{n_{\text{en}},Z}^e & 0 & 0 \\ 0 & n_{1,X}^e & 0 & 0 & n_{2,X}^e & 0 & 0 & \cdots & 0 & n_{n_{\text{en}},X}^e & 0 \\ 0 & n_{1,Y}^e & 0 & 0 & n_{2,Y}^e & 0 & 0 & \cdots & 0 & n_{n_{\text{en}},Y}^e & 0 \\ 0 & n_{1,Z}^e & 0 & 0 & n_{2,Z}^e & 0 & 0 & \cdots & 0 & n_{n_{\text{en}},Z}^e & 0 \\ 0 & 0 & n_{1,X}^e & 0 & 0 & n_{2,X}^e & 0 & \cdots & 0 & 0 & n_{n_{\text{en}},X}^e \\ 0 & 0 & n_{1,Y}^e & 0 & 0 & n_{2,Y}^e & 0 & \cdots & 0 & 0 & n_{n_{\text{en}},Y}^e \\ 0 & 0 & n_{1,Z}^e & 0 & 0 & n_{2,Z}^e & 0 & \cdots & 0 & 0 & n_{n_{\text{en}},Z}^e \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

sowie

$$\hat{\tilde{\mathbf{T}}}^e = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^e & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{T}}^e & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{T}}^e \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{T}}^e = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11}^e & \tilde{T}_{12}^e & \tilde{T}_{31}^e \\ \tilde{T}_{12}^e & \tilde{T}_{22}^e & \tilde{T}_{23}^e \\ \tilde{T}_{31}^e & \tilde{T}_{23}^e & \tilde{T}_{33}^e \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

überein, was man durch Umsortierung der Zeilen und Spalten erkennt. In der vorliegenden Arbeit wird jedoch eine konsequente Anwendung der eingeführten Matrizenformulierung angewendet. \square

Die Anwendung des Newton-Raphson Verfahrens im Falle hyperelastischen Materialverhaltens bzw. die Anwendung des Multilevel-Newton Verfahrens bei inelastischen Konstitutivbeziehungen impliziert das Differential der Funktion (5.80) in Richtung des Zuwachses der unbekanntenen Knotenverschiebungen $\Delta \mathbf{u}$. Da die Materialgleichungen $\tilde{\Phi}$ von der Deformation abhängt und die Verzerrungs-Verschiebungsmatrix linear in den Verschiebungen ist, liefert die Produktregel

$$D_{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{g}}(t, \mathbf{u}, \mathbf{q}(\mathbf{u}))[\Delta \mathbf{u}] = \left[\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{z}^{eT} \left[\int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{B}}^{eT} \tilde{\mathbf{C}}_L^e \tilde{\mathbf{B}}^e d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^{eT} \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{T}}}^e \tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^e d\Omega^e \right] \mathbf{z}^e \right] \Delta \mathbf{u} = \quad (5.91)$$

$$= \left[\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{z}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{z}^e \right] \Delta \mathbf{u} \quad (5.92)$$

mit der Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{k}^e = \mathbf{k}_C^e + \mathbf{k}_G^e$ bestehend aus der durch physikalische Nichtlinearität herrührende Matrix

$$\mathbf{k}_C^e = \int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{B}}^{eT} \tilde{\mathbf{C}}_L^e \tilde{\mathbf{B}}^e d\Omega^e \quad (5.93)$$

und der aus der geometrischen Nichtlinearität herrührende Steifigkeit

$$\mathbf{k}_G^e = \int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^{eT} \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{T}}}^e \tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^e d\Omega^e. \quad (5.94)$$

Der Tangentenoperator $\tilde{\mathbf{C}}_L^e$ resultiert hier aus

$$\tilde{\mathbf{C}}_L^e = 2 \left[\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{C}^e} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{q}^e} \frac{d\mathbf{q}^e}{d\mathbf{C}^e} \right], \quad (5.95)$$

wobei wir die Kettenregel für die Abhängigkeit des Rechten Cauchy-Green Tensors in seiner Vektordarstellung $\mathbf{C} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I}$, d.h. wir haben eine Beziehung der Form $\mathbf{f}(\mathbf{C}(\mathbf{E})) = \mathbf{f}(2\tilde{\mathbf{B}}_a \mathbf{u}_a + \mathbf{I})$ ausgenutzt, so daß beim Differentiationsprozeß nach den unbekanntem Verschiebungen \mathbf{u} der Faktor 2 in Gl.(5.95) entsteht. Im Falle rein elastischen Materialverhaltens ist dieser in Abschnitt 4.3.4 hergeleitet worden, siehe Gl.(4.86).

5.1.4 Formulierung mit Größen der Momentankonfiguration

Die Formulierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen (5.73) mit Größen der Momentankonfiguration führt auf eine effizientere Elementformulierung. Mit dem gewichteten Cauchy-Tensor $\mathbf{S} = \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}^T$, siehe Gl.(4.77), gilt dann

$$\pi(t, \vec{u}, \delta \vec{u}, \mathbf{q}) \equiv \int_V \text{sym} \delta \mathbf{h} \cdot \underbrace{\Phi(\mathbf{B}, \mathbf{q})}_{\mathbf{S}} dV - \pi_{\text{ext}}(\delta \vec{u}, t) = \quad (5.96)$$

$$= \int_v \text{sym} \delta \mathbf{h} \cdot \mathbf{T} dv - \pi_{\text{ext}}(\delta \vec{u}, t) = 0 \quad (5.97)$$

mit dem räumlichen Gradienten der virtuellen Verschiebungen

$$\delta \mathbf{h} = \text{grad } \delta \vec{u}(\vec{x}), \quad \text{wobei} \quad \delta \mathbf{h} = \delta \mathbf{H} \mathbf{F}^{-1} \quad (5.98)$$

gilt. Der Ansatz für die Verschiebungen und virtuellen Verschiebungen lautet nunmehr

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \mathbf{u}_a(t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}(t) \quad \text{und} \quad \delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u} \quad (5.99)$$

und ist von den räumlichen Koordinaten \mathbf{x} abhängig, die selbst wiederum von der Deformation abhängen: $\mathbf{x} = \chi_R(\mathbf{X}, t)$. Im Gegensatz zur tensoriellen Notation der schwachen Formulierung, siehe WRIGGERS [173] bzw. WRIGGERS [174, S.130], verwenden wir die eingeführte Matrizen-darstellung.¹⁸ Da

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}_{23} \tilde{\mathbf{T}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S}^T = \{ S_{11} \ S_{22} \ S_{33} \ S_{12} \ S_{23} \ S_{31} \} \quad (5.100)$$

gilt, siehe Definition der Matrix $\mathbf{F}_{23} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ gemäß (A.29), erhalten wir aus dem Vergleich zu Gl.(5.80)

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{u}, \mathbf{q}) = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{z}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{S}^e d\Omega^e - \bar{\mathbf{p}}(t) = \quad (5.101)$$

$$= \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{z}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{F}_{23}^e \tilde{\mathbf{T}}^e d\Omega^e - \bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0} \quad (5.102)$$

mit $\mathbf{B}^e = [\mathbf{B}_1^e \ \dots \ \mathbf{B}_{n_{\text{en}}}^e]$ sowie

$$\mathbf{B}_a^e = \begin{bmatrix} n_{a,x}^e & 0 & 0 \\ 0 & n_{a,y}^e & 0 \\ 0 & 0 & n_{a,z}^e \\ n_{a,y}^e & n_{a,x}^e & 0 \\ 0 & n_{a,z}^e & n_{a,y}^e \\ n_{a,z}^e & n_{a,x}^e & 0 \end{bmatrix}, \quad a = 1, \dots, n_{\text{en}}. \quad (5.103)$$

¹⁸Siehe auch ZIENKIEWICZ & TAYLOR [177, S.320 und S.324].

Den Zusammenhang zur Verzerrungs-Verschiebungsmatrix (5.81) erkennt man durch die Abhängigkeit der Ansatzfunktionen von den räumlichen Koordinaten $n_a^e(x_k(X_J, t))$, was bei der Bildung der Ableitung berücksichtigt werden muß:

$$n_{a,J}^e = \frac{\partial n_a^e}{\partial X_J} = \frac{\partial n_a^e}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_J} = \frac{\partial n_a^e}{\partial x_k} F_{kJ}^e = n_{a,k}^e F_{kJ}^e \quad (5.104)$$

Es gilt dann der Zusammenhang der Beziehungen (5.103) und (5.81)

$$\tilde{\mathbf{B}}^{eT} = \mathbf{B}^{eT} \mathbf{F}_{23}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^{eT} \mathbf{F}_{23}^e \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{n_{\text{en}}}^{eT} \mathbf{F}_{23}^e \end{bmatrix}, \quad (5.105)$$

bzw.

$$\tilde{\mathbf{B}}_a^{eT} = \mathbf{B}_a^{eT} \mathbf{F}_{23}^e, \quad (5.106)$$

was durch Anwendung der Kettenregel (5.104) klar wird:

$$\left[\mathbf{B}_a^{eT} \mathbf{F}_{23}^e \right]^T = \begin{bmatrix} F_{11}^e F_{k1}^e n_{a,k}^e & F_{21}^e F_{k1}^e n_{a,k}^e & F_{31}^e F_{k1}^e n_{a,k}^e \\ F_{12}^e F_{k2}^e n_{a,k}^e & F_{22}^e F_{k2}^e n_{a,k}^e & F_{32}^e F_{k2}^e n_{a,k}^e \\ F_{13}^e F_{k3}^e n_{a,k}^e & F_{23}^e F_{k3}^e n_{a,k}^e & F_{33}^e F_{k3}^e n_{a,k}^e \\ F_{11}^e F_{k2}^e n_{a,k}^e + F_{12}^e F_{k1}^e n_{a,k}^e & F_{21}^e F_{k2}^e n_{a,k}^e + F_{22}^e F_{k1}^e n_{a,k}^e & F_{31}^e F_{k2}^e n_{a,k}^e + F_{32}^e F_{k1}^e n_{a,k}^e \\ F_{12}^e F_{k3}^e n_{a,k}^e + F_{13}^e F_{k2}^e n_{a,k}^e & F_{22}^e F_{k3}^e n_{a,k}^e + F_{23}^e F_{k2}^e n_{a,k}^e & F_{32}^e F_{k3}^e n_{a,k}^e + F_{33}^e F_{k2}^e n_{a,k}^e \\ F_{13}^e F_{k1}^e n_{a,k}^e + F_{11}^e F_{k3}^e n_{a,k}^e & F_{23}^e F_{k1}^e n_{a,k}^e + F_{21}^e F_{k3}^e n_{a,k}^e & F_{33}^e F_{k1}^e n_{a,k}^e + F_{31}^e F_{k3}^e n_{a,k}^e \end{bmatrix}$$

Die Vortransformation von Beziehung (5.85) führt unter Verwendung von Gl.(5.98)₂ auf

$$\begin{aligned} \beta &= \delta \mathbf{h} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}^T \cdot \Delta \mathbf{h} = \delta \mathbf{h} \mathbf{S} \cdot \Delta \mathbf{h} = [\mathbf{I} \otimes \mathbf{S}]^{T_{23}} \delta \mathbf{h} \cdot \Delta \mathbf{h} = \\ &= \left([\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}^T]^{T_{23}} \delta \mathbf{h} \right) \tilde{\mathbf{T}} \cdot [\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}^T]^{T_{23}} \Delta \mathbf{h} = [\mathbf{I} \otimes \tilde{\mathbf{T}}]^{T_{23}} [\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}^T]^{T_{23}} \delta \mathbf{h} \cdot [\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}^T]^{T_{23}} \Delta \mathbf{h} \end{aligned}$$

mit $\Delta \mathbf{h} = \text{grad } \Delta \vec{u}$, und damit in Matrixnotation auf $\left([\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}^T]^{T_{23}} \rightarrow \mathbf{F}_T \in \mathbb{R}^{9 \times 9} \right)$

$$\beta = \delta \mathbf{h}^{eT} \mathbf{M}_S^{eT} \Delta \mathbf{h}^e = \delta \mathbf{h}^{eT} \mathbf{F}_T^{eT} \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{T}}}^e \mathbf{F}_T^e \Delta \mathbf{h}^e \quad (5.107)$$

mit

$$\mathbf{M}_S^e = \mathbf{M}_S^{eT} = \mathbf{F}_T^{eT} \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{T}}}^e \mathbf{F}_T^e, \quad (5.108)$$

$$\Delta \mathbf{h}^e = \mathbf{B}_{\text{NL}}^e \Delta \mathbf{u}^e = \mathbf{B}_{\text{NL}}^e \mathbf{Z}^e \Delta \mathbf{u} \quad \text{bzw.} \quad \delta \mathbf{h}^e = \mathbf{B}_{\text{NL}}^e \mathbf{Z}^e \delta \mathbf{u} \quad (5.109)$$

und

$$\mathbf{B}_{\text{NL}}^e = \begin{bmatrix} n_{1,x}^e & 0 & 0 & n_{2,x}^e & 0 & 0 & \dots & n_{n_{\text{en}},x}^e & 0 & 0 \\ 0 & n_{1,y}^e & 0 & 0 & n_{2,y}^e & 0 & \dots & 0 & n_{n_{\text{en}},y}^e & 0 \\ 0 & 0 & n_{1,z}^e & 0 & 0 & n_{2,z}^e & \dots & 0 & 0 & n_{n_{\text{en}},z}^e \\ n_{1,y}^e & 0 & 0 & n_{2,y}^e & 0 & 0 & \dots & n_{n_{\text{en}},y}^e & 0 & 0 \\ 0 & n_{1,z}^e & 0 & 0 & n_{2,z}^e & 0 & \dots & 0 & n_{n_{\text{en}},z}^e & 0 \\ 0 & 0 & n_{1,x}^e & 0 & 0 & n_{2,x}^e & \dots & 0 & 0 & n_{n_{\text{en}},x}^e \\ n_{1,z}^e & 0 & 0 & n_{2,z}^e & 0 & 0 & \dots & n_{n_{\text{en}},z}^e & 0 & 0 \\ 0 & n_{1,x}^e & 0 & 0 & n_{2,x}^e & 0 & \dots & 0 & n_{n_{\text{en}},x}^e & 0 \\ 0 & 0 & n_{1,y}^e & 0 & 0 & n_{2,y}^e & \dots & 0 & 0 & n_{n_{\text{en}},y}^e \end{bmatrix}, \quad (5.110)$$

$$\mathbf{F}_T^e = \begin{bmatrix} F_{11}^e & 0 & 0 & F_{21}^e & 0 & 0 & F_{31}^e & 0 & 0 \\ 0 & F_{22}^e & 0 & 0 & F_{32}^e & 0 & 0 & F_{12}^e & 0 \\ 0 & 0 & F_{33}^e & 0 & 0 & F_{13}^e & 0 & 0 & F_{23}^e \\ F_{12}^e & 0 & 0 & F_{22}^e & 0 & 0 & F_{32}^e & 0 & 0 \\ 0 & F_{23}^e & 0 & 0 & F_{33}^e & 0 & 0 & F_{13}^e & 0 \\ 0 & 0 & F_{31}^e & 0 & 0 & F_{11}^e & 0 & 0 & F_{21}^e \\ F_{13}^e & 0 & 0 & F_{23}^e & 0 & 0 & F_{33}^e & 0 & 0 \\ 0 & F_{21}^e & 0 & 0 & F_{31}^e & 0 & 0 & F_{11}^e & 0 \\ 0 & 0 & F_{32}^e & 0 & 0 & F_{12}^e & 0 & 0 & F_{22}^e \end{bmatrix} \quad (5.111)$$

sowie

$$\mathbf{M}_S^e = \begin{bmatrix} S_{11}^e & 0 & 0 & S_{12}^e & 0 & 0 & S_{31}^e & 0 & 0 \\ 0 & S_{22}^e & 0 & 0 & S_{23}^e & 0 & 0 & S_{12}^e & 0 \\ 0 & 0 & S_{33}^e & 0 & 0 & S_{31}^e & 0 & 0 & S_{23}^e \\ S_{12}^e & 0 & 0 & S_{22}^e & 0 & 0 & S_{23}^e & 0 & 0 \\ 0 & S_{23}^e & 0 & 0 & S_{33}^e & 0 & 0 & S_{31}^e & 0 \\ 0 & 0 & S_{31}^e & 0 & 0 & S_{11}^e & 0 & 0 & S_{12}^e \\ S_{31}^e & 0 & 0 & S_{23}^e & 0 & 0 & S_{33}^e & 0 & 0 \\ 0 & S_{12}^e & 0 & 0 & S_{31}^e & 0 & 0 & S_{11}^e & 0 \\ 0 & 0 & S_{23}^e & 0 & 0 & S_{12}^e & 0 & 0 & S_{22}^e \end{bmatrix}. \quad (5.112)$$

Im Sinne des Newton und auch Multilevel-Newton Verfahrens lautet das Differential des diskretisierten Variationsprinzips (5.101)

$$D_{\mathbf{u}} \mathbf{g}(t, \mathbf{u}, \mathbf{q}(\mathbf{u}))[\Delta \mathbf{u}] = \left[\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{z}^{eT} \left[\int_{\Omega^e} J^e \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}_L^e \mathbf{B}^e d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{NL}^{eT} \mathbf{M}_S^e \mathbf{B}_{NL}^e d\Omega^e \right] \mathbf{z}^e \right] \Delta \mathbf{u} = \quad (5.113)$$

$$= \left[\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{z}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{z}^e \right] \Delta \mathbf{u}, \quad (5.114)$$

welches äquivalent zu Gl.(5.91) die additive Aufspaltung der Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{k}^e = \mathbf{k}_C^e + \mathbf{k}_G^e$ beinhaltet. Der (konstitutive) Anteil \mathbf{k}_C^e , siehe Gln.(5.105) sowie (4.108), kann mit

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_C^e &= \int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{B}}^{eT} \tilde{\mathbf{C}}_L^e \tilde{\mathbf{B}}^e d\Omega^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{F}_{23}^e \tilde{\mathbf{C}}_L^e \mathbf{F}_{23}^{eT} \mathbf{B}^e d\Omega^e = \\ &= \int_{\Omega^e} J^e \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}_L^e \mathbf{B}^e d\Omega^e = \int_{\omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}_L^e \mathbf{B}^e d\omega^e \end{aligned} \quad (5.115)$$

notiert werden, wobei wir die Materialmatrix des räumlichen Tangentenoperators

$$\mathbf{C}_L^e = \frac{1}{J^e} \mathbf{F}_{23}^e \tilde{\mathbf{C}}_L^e \mathbf{F}_{23}^{eT} \quad (5.116)$$

erhalten. ω^e ist das approximierte Volumen in der Momentankonfiguration, $\mathbf{x} \in \omega^e$. Der (geometrische) Anteil \mathbf{k}_G^e unterliegt unter Ausnutzung von (5.108) den Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_G^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{NL}^{eT} \mathbf{M}_S^e \mathbf{B}_{NL}^e d\Omega^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{NL}^{eT} \mathbf{F}_T^e \mathbf{M}_T^e \mathbf{F}_T^e \mathbf{B}_{NL}^e d\Omega^e = \\ &= \int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{B}}_{NL}^{eT} \mathbf{M}_T^e \tilde{\mathbf{B}}_{NL}^e d\Omega^e = \int_{\omega^e} \frac{1}{J^e} \mathbf{B}_{NL}^{eT} \mathbf{M}_S^e \mathbf{B}_{NL}^e d\omega^e \end{aligned} \quad (5.117)$$

womit

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^e = \mathbf{F}_T^e \mathbf{B}_{\text{NL}}^e \quad (5.118)$$

unter Verwendung der Kettenregel (5.104) sowie der Matrizen (5.87) und (5.110) ersichtlich wird.

Wir erkennen die Gleichheit der Ergebnisse der ‘‘räumlichen’’ Elementsteifigkeitsmatrizen (5.115) und (5.117) und den Elementsteifigkeitsmatrizen der Total-Lagrange Formulierung (5.93) und (5.94), d.h. es liegt kein Unterschied im Ergebnis der Berechnungen vor. Lediglich der Aufbau der Matrizen und der aufzuwendenden Rechenoperationen differiert. So benötigt man beim Aufbau der Verzerrungs-Verschiebungsmatrizen (5.103) in der räumlichen Formulierung weniger Einträge als bei der Total-Lagrange Formulierung, siehe Matrix (5.81) und bei der Durchführung des Dreifachproduktes in der Elementsteifigkeitsmatrix (5.115) weniger Rechenoperationen, jedoch müssen in der räumlichen Formulierung zusätzlich neben der Berechnung der Ableitungen $n_{a,k}^e$, $k = x, y, z$, für die Verzerrungs-Verschiebungsmatrizen \mathbf{B}_a^e , zur Bestimmung des Deformationsgradienten auch die Ableitungen $n_{a,K}^e$, $K = X, Y, Z$, ermittelt werden. Abb. 5.2 veranschaulicht nachträglich die Elemente der Referenz- und Momentankonfiguration

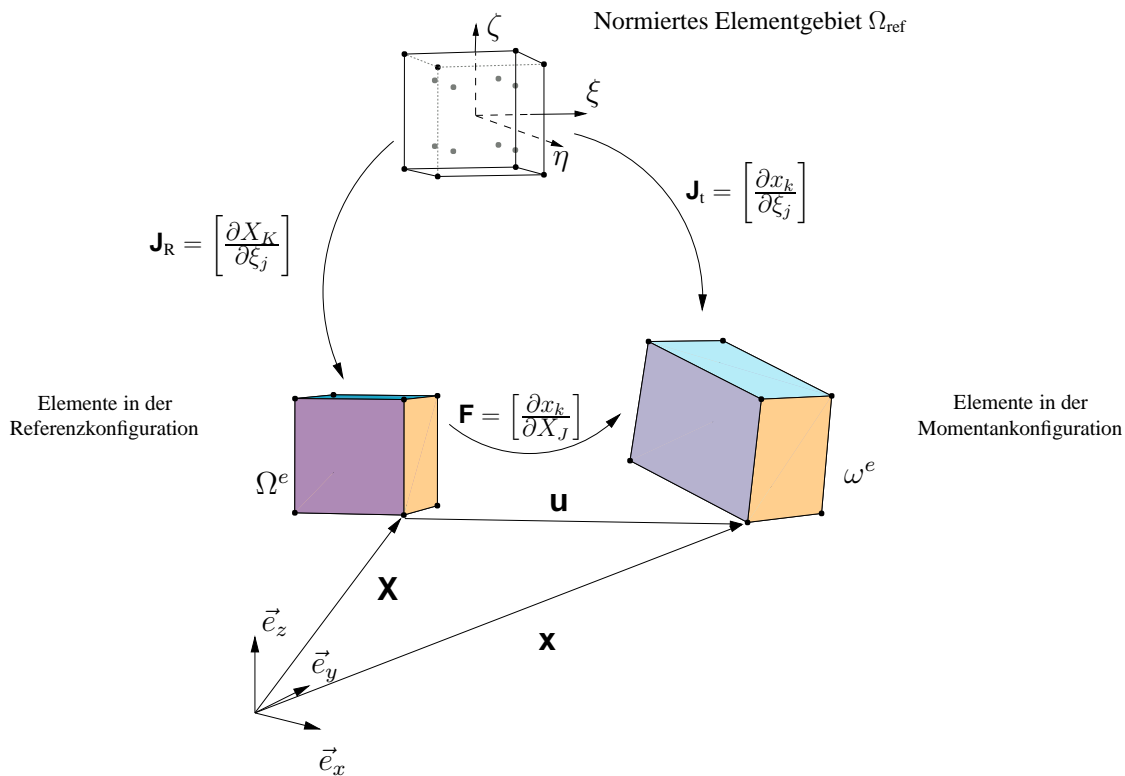


Abbildung 5.2: Darstellung der Elementgebiete bei finiten Deformationen

sowie das normierte Elementgebiet.

ANMERKUNG 5.7

Eigene Berechnungen ergaben, daß das Produkt $\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}$ für eine vollbesetzte Matrix \mathbf{B} und un-symmetrische Matrix \mathbf{C} fast zehnmals langsamer ist, als die Vermeidung der Nulloperationen für die schwachbesetzten Matrizen (5.103). \square

ANMERKUNG 5.8

Ein Defizit der räumlichen Formulierung und der Verwendung der Integration über das momenta-

ne Elementgebiet ω^e , siehe zum Beispiel Gl.(5.115)₄, kann die notwendige Koordinatentransformation zum Referenzgebiet Ω_{ref} sein, da bei einer Problemstellung mit Verschiebungssteuerung zu Beginn der globalen Newton-Iteration die aktuellen Koordinaten zu einem in sich durchdrungenen Element führen und somit die Determinante der Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation singular bzw. negativ werden kann. In diesem Fall müssen die Laststufen so klein sein, wie dies das kleinste betroffene Element erlaubt. \square

5.1.5 Gemischtes Variationsproblem

Die in den vorherigen beiden Abschnitten vorgestellten Verschiebungselemente zeigen im Falle nahezu inkompressiblen Materialverhaltens, $J \approx 1$, ein versteifendes Verhalten bei biegedominierten Strukturen.¹⁹ Gerade bei Elastomeren und auch bei Metallen unter der Annahme "plastischer Inkompressibilität" liegt eine schwach ausgeprägte Kompressibilität vor, Schaumstoffe seien hierbei ausgenommen, so daß andere Elementformulierungen herangezogen werden müssen. Zur Thematik der Volumenversteifung existieren eine Reihe von Abhandlungen zur Entwicklung effektiverer Elemente.²⁰ Wir beschränken uns hier in dieser Arbeit auf eine weithin bekannte und verbreitete Dreifeld-Formulierung von SIMO ET AL. [155] bzw. SIMO & TAYLOR [154], bei der neben dem Verschiebungsfeld zusätzlich zwei weitere skalare Unbekannte auftreten.²¹ Wie sich diese Variationsformulierung im Rahmen der Anwendung der Linienmethode und der daraus entstehenden DAE-Interpretation verhält, wird im folgenden erläutert.

SIMO & TAYLOR [154] motivierten die gemischte Elementformulierung für rein elastisches Material anhand des Lagrange-Funktional

$$\pi(\vec{u}, \Theta, p, t) \equiv \int_V (\rho_R \psi(\hat{\mathbf{C}}) + p(J - \Theta)) dV - \pi_{\text{ext}}(\vec{u}, t) \longrightarrow \text{stationär} \quad (5.119)$$

mit der Nebenbedingung

$$\Theta = J = \det \mathbf{F}. \quad (5.120)$$

Es sei besonders darauf hingewiesen, daß diese Formulierung nicht den Zwang $J = 1$ bei inkompressiblem Materialverhalten erfüllt, sondern lediglich in der numerischen Umsetzung die Volumendehnung durch eine eigene Variable vom Deformationsverhalten entkoppelt und damit einen weiteren Freiheitsgrad impliziert. $\vec{u}(\vec{X}, t)$ stellt das Verschiebungsfeld und $\psi(\hat{\mathbf{C}})$ die Formänderungsenergie in Abhängigkeit des modifizierten Rechten Cauchy-Green Tensors

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{F}} = \Theta^{2/3} \bar{\mathbf{C}}, \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{F}} = (\Theta/J)^{1/3} \mathbf{F} = \Theta^{1/3} \bar{\mathbf{F}} \quad (5.121)$$

für $\bar{\mathbf{F}}$ aus der Zerlegung (3.40), dar, siehe Definition (3.42). p repräsentiert den Lagrange-Multiplikator zur Einhaltung der Nebenbedingung (5.120). Verwendet man für die Formänderungsenergie die Aufteilung in einen volumenerhaltenden und einen volumenändernden Anteil nach Gl.(4.21) und fügt den modifizierten Rechten Cauchy-Green Tensor (5.121) ein, so folgt

$$\psi(\hat{\mathbf{C}}) = U((\det \hat{\mathbf{C}})^{1/2}) + \bar{v}(\bar{\mathbf{C}}).$$

¹⁹ Siehe zum Begriff des "volumetric locking" WRIGGERS [174, S.388ff.] und BATHE [10, S. 324ff.] und die dort zitierte Literatur.

²⁰ Siehe hierzu BONET & WOOD [18], BELYTSCHKO ET AL. [12], REESE [137], WRIGGERS [174] und die dort zitierte Literatur. Ein Vergleich verschiedener Elementformulierungen ist in BRINK & STEIN [22] umfassend dargestellt.

²¹ Siehe auch LIU ET AL. [107].

Wegen $\det \hat{\mathbf{C}} = \Theta^2$, Gl.(5.121)₁ sowie

$$\bar{v}(\bar{\mathbf{C}}) = \bar{v} \left((\det \hat{\mathbf{C}})^{-1/3} \hat{\mathbf{C}} \right) = \bar{v} \left(\Theta^{-2/3} (\Theta^{2/3} \bar{\mathbf{C}}) \right) = \bar{v}(\bar{\mathbf{C}})$$

gilt die Aufteilung²²

$$\psi(\hat{\mathbf{C}}) = U(\Theta) + \bar{v}(\bar{\mathbf{C}}). \quad (5.122)$$

Die totale Variation der Funktionalgleichung (5.119)

$$\underbrace{D_{\vec{u}} \pi(\vec{u}, \Theta, p, t)[\delta \vec{u}]}_{\pi_1} + \underbrace{D_{\Theta} \pi(\vec{u}, \Theta, p, t)[\delta \Theta]}_{\pi_2} + \underbrace{D_p \pi(\vec{u}, \Theta, p, t)[\delta p]}_{\pi_3} = 0 \quad (5.123)$$

unter Verwendung der Formänderungsenergie (5.122) führt dann auf die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \pi_1(\vec{u}, p, \delta \vec{u}, t) &\equiv \int_V (\mathbf{S}^D + p \mathbf{I}) \cdot \text{sym} \delta \mathbf{h} \, dV - \pi_{\text{ext}}(\delta \vec{u}, t) = 0, \\ \pi_2(\Theta, p, \delta \Theta) &\equiv \int_V (\rho_R U'(\Theta) - p) \delta \Theta \, dV = 0, \\ \pi_3(\vec{u}, \Theta, \delta p) &\equiv \int_V (J - \Theta) \delta p \, dV = 0, \end{aligned} \quad (5.124)$$

für beliebige Variationen $\delta \vec{u}(\vec{X})$, $\delta \Theta(\vec{X})$ und $\delta p(\vec{X})$ sowie \mathbf{S}^D aus Gl.(4.81). Hierbei haben wir das Differential über die Kettenregel

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} \bar{v}(\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{C}(\vec{u})))[\delta \vec{u}] &= D_{\bar{\mathbf{C}}} \bar{v}(\bar{\mathbf{C}})[D_{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{C})[D_{\vec{u}} \mathbf{C}(\vec{u})[\delta \vec{u}]]] = \\ &= J^{-2/3} \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}} \right] \frac{d\bar{v}}{d\bar{\mathbf{C}}} \cdot 2 \text{sym}(\mathbf{F}^T \delta \mathbf{H}) = \\ &= \frac{1}{\rho_R} \tilde{\mathbf{T}}_{\text{iso}} \cdot \text{sym}(\mathbf{F}^T \delta \mathbf{H}) = \frac{1}{\rho_R} \mathbf{S}^D \cdot \text{sym} \delta \mathbf{h} \end{aligned}$$

unter Ausnutzung von

$$\delta \mathbf{H} = \delta \mathbf{h} \mathbf{F} \quad \text{mit} \quad \delta \mathbf{H} \equiv \text{Grad} \delta \vec{u}(\vec{X}) \quad \text{und} \quad \delta \mathbf{h} \equiv \text{grad} \delta \vec{u}(\vec{x}) \quad (5.125)$$

sowie

$$D_{\vec{u}} \mathbf{C}(\vec{u})[\delta \vec{u}] = \mathbf{F}^T \delta \mathbf{H} + \delta \mathbf{H}^T \mathbf{F} = 2 \text{sym}(\mathbf{F}^T \delta \mathbf{H})$$

und den Gln.(4.70) bzw. (4.90) sowie (4.77) gebildet. Desweiteren nutzen wir das Differential

$$D_{\vec{u}} J(\vec{u})[\delta \vec{u}] = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \delta \mathbf{H} = J(\mathbf{I} \cdot \delta \mathbf{h}) \quad (5.126)$$

aus.

Die Gleichungen (5.124) sind äquivalent zu den Gleichgewichtsbedingungen (Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf Gl.(5.124)₁), den natürlichen Randbedingungen (Spannungsrandbedingung mit der gegebenen Oberflächenkraftdichte \vec{t}) und weiteren Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{T}^D + p \mathbf{I}) + \rho \vec{k} &= \vec{0} \\ (\mathbf{T}^D + p \mathbf{I}) \vec{n} &= \vec{t} \\ p &= \rho_R U'(\Theta) \\ \Theta &= J \end{aligned} \quad (5.127)$$

²²Siehe auch BONET & WOOD [18, S.158], HOLZAPFEL [81, S.410], LIU ET AL. [107] und WRIGGERS [174, S.85f.].

Um zu Fragestellungen zur Berücksichtigung inelastischer Materialgleichungen zu gelangen, bei der im allgemeinen kein Funktional (5.119) existiert, müßte man von diesen Gleichungen ausgehen und diese in die Variationsgleichung (5.124) überführen. Damit hätte man erreicht, daß die schwache Formulierung (5.124) auch für inelastische Fragestellungen gültig ist. Wir wenden dann, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, die (horizontale) Linienmethode in Form der aufeinanderfolgenden Schritte der Raumdiskretisierung und der anschließenden Zeitdiskretisierung an.

Die Raumdiskretisierung erfordert die Einführung der Ansatzfunktionen für die Felder \vec{u} , Θ und p sowie deren Variationen:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{X}, t) = \mathbf{N}_a(\mathbf{X}) \mathbf{u}_a(t) = \mathbf{N}(\mathbf{X}) \mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \bar{\mathbf{u}}(t) \quad \delta \mathbf{u}^h(\mathbf{X}) = \mathbf{N}_a(\mathbf{X}) \delta \mathbf{u}_a = \mathbf{N}(\mathbf{X}) \delta \mathbf{u} \quad (5.128)$$

$$\Theta^h(\mathbf{X}, t) = \mathbf{m}^T(\mathbf{X}) \Theta(t) \quad \delta \Theta^h(\mathbf{X}) = \mathbf{m}^T(\mathbf{X}) \delta \Theta \quad (5.129)$$

$$p^h(\mathbf{X}, t) = \mathbf{m}^T(\mathbf{X}) \mathbf{p}(t) \quad \delta p^h(\mathbf{X}) = \mathbf{m}^T(\mathbf{X}) \delta \mathbf{p} \quad (5.130)$$

Hierbei wählen wir gleiche Ansatzfunktionen für die Volumendehnung Θ^h und den Lagrange-Multiplikator p^h , den wir im folgenden als Druck bezeichnen, was durch den Integranden in Gl.(5.124)₁ motiviert wird. Da die Gleichungen (5.124)_{2,3} linear in p und Θ sind, können diese in der diskretisierten Form aufgelöst und in (5.124)₁ verarbeitet werden. Die Verschiebungen werden analog zum Ansatz (5.13) wieder zerlegt. $\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \bar{\mathbf{u}}(t)$ genügt wieder den geometrischen und $\mathbf{N}(\mathbf{X}) \mathbf{u}(t)$ den homogenisierten wesentlichen Randbedingungen. Die Ansatzfunktionen für den Druck und die Volumendehnung $\mathbf{m}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{n_\Theta}$ müssen keinen Randbedingungen genügen; n_Θ definiert dabei die Anzahl der Druck- bzw. Volumendehnungsfreiheitsgrade. $\Theta(t)$, $\mathbf{p}(t)$, $\delta \Theta(t)$, $\delta \mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^{n_\Theta}$ stellen die diskreten Größen der Volumendehnung und des Druckes sowie deren virtuellen Größen der gesamten Struktur dar. Ein Einsetzen der Ansätze (5.128)-(5.130) in (5.124)₂ liefert zunächst

$$\delta \Theta^T \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{m} (\rho_R U'(\mathbf{m}^T \Theta) - \mathbf{m}^T \mathbf{p}) \, d\Omega \right\} = 0,$$

d.h. für beliebige virtuelle Volumendehnungen $\delta \Theta$ muß

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{s}_p(\Theta(t)) \quad \text{bzw.} \quad p^h(\mathbf{X}, t) = \mathbf{m}^T(\mathbf{X}) \mathbf{H}^{-1} \mathbf{s}_p(\Theta(t)) \quad (5.131)$$

mit

$$\mathbf{H} \equiv \int_{\Omega} \mathbf{m} \mathbf{m}^T \, d\Omega \quad \text{und} \quad \mathbf{s}_p(\Theta(t)) = \int_{\Omega} \rho_R U'(\mathbf{m}^T \Theta) \mathbf{m} \, d\Omega \quad (5.132)$$

gelten. Dabei ist $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n_\Theta \times n_\Theta}$ und $\mathbf{s}_p \in \mathbb{R}^{n_\Theta}$. Entsprechend führt das Einsetzen der Ansatzfunktionen in Gl.(5.124)₃ zu

$$\delta \mathbf{p}^T \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{m} (J - \mathbf{m}^T \Theta) \, d\Omega \right\} = 0$$

bzw. bei beliebigem $\delta \mathbf{p}$ auf

$$\Theta(\mathbf{u}_a) = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{s}_\Theta(\mathbf{u}_a(t)) \quad \text{bzw.} \quad \Theta^h(\mathbf{X}, t) = \mathbf{m}^T(\mathbf{X}) \mathbf{H}^{-1} \mathbf{s}_\Theta \quad (5.133)$$

mit

$$\mathbf{s}_\Theta(\mathbf{u}_a(t)) = \int_{\Omega} J(\mathbf{u}_a(t)) \mathbf{m} \, d\Omega. \quad (5.134)$$

Damit wird offensichtlich, daß wir Gl.(5.124)₁ als Funktion der unbekanntten Verschiebungen \mathbf{u} darstellen können und diese die gleiche Struktur wie Gl.(5.101) über die Aufteilung $\mathbf{S} = \mathbf{S}^D + p\mathbf{J}\mathbf{e} \in \mathbb{R}^6$ besitzt. Dabei ist \mathbf{e} in Gl.(A.30) definiert. \mathbf{S}^D repräsentiert in dieser Arbeit denjenigen Anteil der Spannungen, der aus der isochoren Deformation gemäß Tab. 4.7 resultiert, $\mathbf{S}^D = \mathbf{S}_{\text{eq}}^D + \mathbf{S}_{\text{ov}}$, wobei die Überspannungen von den Inneren Variablen \mathbf{q} abhängen. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Ansatzfunktionen des Druckes und der Volumendehnung. Die Ansatzfunktionen $\mathbf{m}^T \Theta$ bzw. $\mathbf{m}^T \mathbf{p}$ werden als elementweise stetig angenommen und innerhalb des jeweiligen Elementgebietes definiert, so daß wir wieder für $\mathbf{X} \in \Omega^e$ die Gleichheit

$$\mathbf{m}^T(\mathbf{X})\Theta(t) = \mathbf{m}^{eT}(\varphi_{\mathbf{R}}^e(\mathbf{X}))\Theta^e = \mathbf{m}^{eT}\mathbf{Z}_{\Theta}^e\Theta$$

bzw.

$$\mathbf{m}^T(\mathbf{X})\mathbf{p}(t) = \mathbf{m}^{eT}(\varphi_{\mathbf{R}}^e(\mathbf{X}))\mathbf{p}^e = \mathbf{m}^{eT}\mathbf{Z}_{\mathbf{p}}^e\mathbf{p}$$

für $\xi = \varphi_{\mathbf{R}}^e(\mathbf{X})$ fordern. Die Ansatzfunktionen \mathbf{m}^e werden für ein achtknotiges Volumenelement — linearer Verschiebungsansatz — als konstant und für ein 20-knotiges Volumenelement linear angenommen, was auf die Bezeichnungen Q1P0 bzw. Q2P1 od auch 8/1 bzw. 8/4 führt:

$$\begin{aligned} \text{Q1P0 : } \mathbf{m}^e \in \mathbb{R} \quad \mathbf{m}^e &= \{m_1^e\} = \{1\} \\ \text{Q2P1 : } \mathbf{m}^e \in \mathbb{R}^4 \quad \mathbf{m}^e(\xi) &= \begin{Bmatrix} m_1^e(\xi, \eta, \zeta) \\ m_2^e(\xi, \eta, \zeta) \\ m_3^e(\xi, \eta, \zeta) \\ m_4^e(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Damit wären die Anzahl der Druck- bzw. Volumendehnungsfreiheitsgrade im Element $n_{\theta} = 1, 4$ und die Anzahl aller Freiheitsgrade des Druckes bzw. Volumendehnung der Struktur $n_{\Theta} = n_{\theta} \times n_e$. Diese sind nicht direkt über die Ansatzfunktionen \mathbf{m} mit den benachbarten Elementfreiheitsgraden gekoppelt und damit in einem Element auflösbar. Die Matrizen $\mathbf{Z}_{\Theta}^e \in \mathbb{R}^{n_{\theta} \times n_e}$, $e = 1, \dots, n_e$, dienen wieder zur formalen Zuordnung der lokalen und globalen Freiheitsgrade, $\Theta^e = \mathbf{Z}_{\Theta}^e\Theta$ bzw. $\mathbf{p}^e = \mathbf{Z}_{\mathbf{p}}^e\mathbf{p}$. Wir erhalten daher die auf Elementebene zugehörigen Zuordnungen, siehe Gl.(5.132)_{1,2}, (5.134) sowie (5.133)₁:

$$\mathbf{H} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_{\Theta}^{eT} \mathbf{H}^e \mathbf{Z}_{\Theta}^e \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{m}^e \mathbf{m}^{eT} d\Omega^e \quad (5.135)$$

$$\mathbf{s}_{\mathbf{p}} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_{\mathbf{p}}^e \mathbf{s}_{\mathbf{p}}^e \quad \text{mit} \quad \mathbf{s}_{\mathbf{p}}^e = \int_{\Omega^e} \rho_{\mathbf{R}} U'(\mathbf{m}^{eT} \Theta^e) \mathbf{m}^e d\Omega^e \quad (5.136)$$

$$\mathbf{s}_{\Theta} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_{\Theta}^e \mathbf{s}_{\Theta}^e \quad \text{mit} \quad \mathbf{s}_{\Theta}^e = \int_{\Omega^e} J^e \mathbf{m}^e d\Omega^e \quad (5.137)$$

Wegen der Diagonalstruktur der Matrix \mathbf{H} resultierend aus der elementweisen Entkoppelung gilt weiterhin

$$\mathbf{H}^{-1} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_{\Theta}^{eT} \mathbf{H}^{e-1} \mathbf{Z}_{\Theta}^e. \quad (5.138)$$

Die Ausnutzung der Beziehungen $\mathbf{Z}_{\Theta}^e \mathbf{Z}_{\Theta}^{eT} = \mathbf{I}_{n_{\theta}}$ und $\mathbf{Z}_{\Theta}^e \mathbf{Z}_{\Theta}^{\hat{e}T} = \mathbf{0}_{n_{\theta} \times n_{\theta}}$ für $e \neq \hat{e}$ führt für den Kugelanteil des Spannungszustandes innerhalb eines Elementes, $\mathbf{X} \in \Omega^e$, auf

$$\begin{aligned} Jp\mathbf{e} &= J\mathbf{m}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{s}_{\mathbf{p}} \mathbf{e} = \\ &= J^e \mathbf{m}^{eT} \mathbf{Z}_{\Theta}^e \left[\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_{\Theta}^{eT} \mathbf{H}^{e-1} \mathbf{Z}_{\Theta}^{eT} \right] \left[\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_{\Theta}^e \mathbf{s}_{\mathbf{p}}^e \right] \mathbf{e} = J^e \mathbf{m}^{eT} \mathbf{H}^{e-1} \mathbf{s}_{\mathbf{p}}^e \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (5.139)$$

so daß wir als diskretisiertes Variationsprinzip analog zu Gl.(5.101)

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{u}, \mathbf{q}) = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{z}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \left\{ \mathbf{S}^D + J^e \mathbf{m}^{eT} \mathbf{H}^{e-1} \mathbf{s}_p^e \mathbf{e} \right\} d\Omega^e - \bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0} \quad (5.140)$$

erhalten.

Die Anwendung des Newton-Verfahrens im Falle rein elastischen Materialverhaltens oder das Ausnutzen des Multilevel-Newton Verfahrens im Rahmen der DAE-Integration erfordert die Linearisierung der Gl.(5.140) bezüglich der unbekanntten Verschiebungen \mathbf{u} . Analog zur räumlichen Formulierung des Abschnitts 5.1.4 berechnet sich die geometrische Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}_G^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{NL}^{eT} \mathbf{M}_{\hat{\mathbf{S}}}^e \mathbf{B}_{NL}^e d\Omega^e = \int_{\omega^e} \frac{1}{J^e} \mathbf{B}_{NL}^{eT} \mathbf{M}_{\hat{\mathbf{S}}}^e \mathbf{B}_{NL}^e d\omega^e \quad (5.141)$$

mit \mathbf{B}_{NL}^e aus Gl.(5.110) und $\mathbf{M}_{\hat{\mathbf{S}}}^e$ analog zu Gl.(5.112) jedoch mit den Spannungskomponenten des Vektors

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^D + J^e p^e \mathbf{e} = \mathbf{S}^D + J^e \mathbf{m}^{eT} \mathbf{H}^{e-1} \mathbf{s}_p^e \mathbf{e}, \quad (5.142)$$

siehe Gl.(5.139) bzw. (5.140).

Wir kommen schließlich zum “konstitutiven” Anteil der tangentiellen Elementsteifigkeitsmatrix, die wegen (5.142) aus insgesamt vier Anteilen besteht (Rücktransformation auf die Referenzkonfiguration, Linearisierung und Vortransformation auf die Momentankonfiguration der Größen \mathbf{S}^D , J^e , p^e und \mathbf{e}). Aus dem deviatorischen Spannungszustand \mathbf{S}^D folgt analog zu Gl.(5.115) sowie der Eigenschaft, daß die deviatorischen Spannungen lediglich aus dem isochoren Anteil der Deformation resultieren,

$$\mathbf{k}_1^e = \int_{\Omega^e} J^e \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}_{L\text{iso}}^e \mathbf{B}^e d\Omega^e = \int_{\omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}_{L\text{iso}}^e \mathbf{B}^e d\omega^e. \quad (5.143)$$

Bei Verwendung eines Materialmodells der Hyperelastizität aus Abschnitt 4.3 ist in Abschnitt 4.3.4 der Tangentenoperator (4.119) gegeben. Die Berechnung des Tangentenoperators $\mathbf{C}_{L\text{iso}}^e$ im Falle inelastischen Materialverhaltens wird im Abschnitt 5.3 angesprochen.

Wir kommen nun noch zu den drei Anteilen der Elementsteifigkeitsmatrix des Kugelspannungszustandes (5.139). Analog zu Gl.(5.126) erhalten wir zunächst für die Linearisierung der Determinante des Deformationsgradienten unter Verwendung von $\Delta \mathbf{u}^e \equiv D_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^e(\mathbf{u})[\Delta \mathbf{u}] = \mathbf{Z}^e \Delta \mathbf{u}$

$$D_{\vec{u}} J(\vec{u})[\Delta \vec{u}] = J(\mathbf{I} \cdot \Delta \mathbf{h}) = J\mathbf{I} \cdot \text{sym} \Delta \mathbf{h} \hat{=} J^e \mathbf{e}^T \mathbf{B}^e \Delta \mathbf{u}^e \quad (5.144)$$

und damit für

$$pJ \underbrace{(\mathbf{I} \cdot \text{sym} \Delta \mathbf{h}) \mathbf{I} \cdot \text{sym} \delta \mathbf{h}}_{\{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^e \Delta \mathbf{u}^e\} \mathbf{e}} \hat{=} \delta \mathbf{u}^{eT} \{p^e J^e \mathbf{B}^{eT} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{B}^e\} \Delta \mathbf{u}^e \quad (5.145)$$

bzw.

$$\mathbf{k}_2^e = \int_{\Omega^e} p^e J^e \mathbf{B}^{eT} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{B}^e d\Omega^e = \int_{\omega^e} p^e \mathbf{B}^{eT} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{B}^e d\omega^e. \quad (5.146)$$

Die Rücktransformation $\mathbf{F}^{-1}(pJ\mathbf{I})\mathbf{F}^{-T}$ (bzw. $pJ\mathbf{e}$), der Linearisierung und der anschließenden Vortransformation liefert bei konstantgehaltenem pJ wiederum mit

$$D_{\vec{u}} \mathbf{C}^{-1}(\vec{u})[\Delta \vec{u}] = -\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{F}^T \Delta \mathbf{H} + \Delta \mathbf{H}^T \mathbf{F}) \mathbf{C}^{-1} \xrightarrow{\mathbf{F}(\dots)\mathbf{F}^T} -2\text{sym} \Delta \mathbf{h} \hat{=} -2\mathbf{B}^e \mathbf{Z}^e \Delta \mathbf{u} \quad (5.147)$$

den Anteil

$$\mathbf{k}_3^e = -2 \int_{\Omega^e} p^e J^e \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e d\Omega^e = -2 \int_{\omega^e} p^e \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e d\omega^e. \quad (5.148)$$

Als letzter Term fehlt noch die Linearisierung der Funktion $\mathbf{s}_p(\Theta(\mathbf{u}))$ in Gl.(5.140), die wir gleich elementbezogen notieren. Mit Gl.(5.24) gilt

$$\mathbf{k}_4^e \mathbf{Z}^e \Delta \mathbf{u} = D_{\mathbf{u}} \mathbf{s}_p^e(\Theta^e(\mathbf{u}))[\Delta \mathbf{u}] = D_{\Theta^e} \mathbf{s}_p^e(\Theta^e)[D_{\mathbf{u}^e} \Theta^e(\mathbf{u}^e)[\mathbf{Z}^e \Delta \mathbf{u}]]. \quad (5.149)$$

Unter Ausnutzung der Beziehungen (5.133) und (5.134) sowie (5.144) berechnen wir zunächst das "innere" Differential

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_I &\equiv D_{\mathbf{u}^e} \Theta^e(\mathbf{u}^e)[\mathbf{Z}^e \Delta \mathbf{u}] = \mathbf{H}^{e-1} \int_{\Omega^e} \mathbf{m}^e D_{\mathbf{u}^e} J^e(\mathbf{u}^e)[\mathbf{Z}^e \Delta \mathbf{u}] d\Omega^e = \\ &= \mathbf{H}^{e-1} \left[\int_{\Omega^e} J^e \mathbf{m}^e \mathbf{e}^T \mathbf{B}^e d\Omega^e \right] \mathbf{Z}^e \Delta \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (5.150)$$

Damit folgt für \mathbf{s}_p^e aus Gl.(5.132)₂ unter Ausnutzung der Kettenregel für die Ableitung der Formänderungsenergie des volumenänderenden Anteils

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} \mathbf{s}_p^e(\Theta^e)[\mathbf{H}_I] &= \int_{\Omega^e} \rho_R U''(\Theta) \mathbf{m}^e \mathbf{m}^{eT} \mathbf{H}_I d\Omega^e = \\ &= \left[\int_{\Omega^e} \rho_R U''(\Theta) \mathbf{m}^e \mathbf{m}^{eT} d\Omega^e \right] \mathbf{H}^{e-1} \left[\int_{\Omega^e} J^e \mathbf{m}^e \mathbf{e}^T \mathbf{B}^e d\Omega^e \right] \mathbf{Z}^e \Delta \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (5.151)$$

Wir erhalten demnach für den dritten Anteil aus Gl.(5.149) des Terms

$$\int_{\Omega^e} J^e \mathbf{B}^{eT} \mathbf{e} \mathbf{H}^{e-1} D_{\mathbf{u}} \mathbf{s}_p^e(\Theta^e)[\mathbf{H}_I] d\Omega^e$$

aus Gl.(5.140)

$$\mathbf{k}_4^e = \mathbf{k}_s^{eT} \mathbf{k}_p \mathbf{k}_s^e \quad (5.152)$$

mit

$$\mathbf{k}_s^e = \int_{\Omega^e} J^e \mathbf{m}^e \mathbf{e}^T \mathbf{B}^e d\Omega^e = \int_{\omega^e} \mathbf{m}^e \mathbf{e}^T \mathbf{B}^e d\omega^e \quad (5.153)$$

und

$$\mathbf{k}_p^e = \mathbf{H}^{e-1} \left[\int_{\Omega^e} \rho_R U''(\Theta) \mathbf{m}^e \mathbf{m}^{eT} d\Omega^e \right] \mathbf{H}^{e-1}. \quad (5.154)$$

Hierbei sei anzumerken, daß der Term $\mathbf{e}^T \mathbf{B}^e$ vorab ausgerechnet werden sollte und mit der Divergenz $\text{div } \Delta \vec{u}$ zusammenhängt:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{B}^e = \{ n_{1,x}^e \ n_{1,y}^e \ n_{1,z}^e \ \dots \ n_{n_{\text{en}},x}^e \ n_{n_{\text{en}},y}^e \ n_{n_{\text{en}},z}^e \} \quad (5.155)$$

Die resultierende Elementsteifigkeitsmatrix lautet demnach unter Summation der Terme (5.141), (5.143), (5.146), (5.148) und (5.152)

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^e &= \mathbf{k}_1^e + \mathbf{k}_2^e + \mathbf{k}_3^e + \mathbf{k}_4^e + \mathbf{k}_G^e = \\ &= \int_{\Omega^e} J^e \mathbf{B}^{eT} [\mathbf{C}_{\text{L iso}}^e + p^e [\mathbf{e} \mathbf{e}^T - 2\mathbf{I}_6]] \mathbf{B}^e d\Omega^e + \mathbf{k}_s^{eT} \mathbf{k}_p \mathbf{k}_s^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{\text{NL}}^{eT} \mathbf{M}_{\text{S}}^e \mathbf{B}_{\text{NL}}^e d\Omega^e. \end{aligned} \quad (5.156)$$

5.2 Spannungsberechnung bei finiter Viskoelastizität

Im Hinblick auf die Berechnung der Spannungen des Materialmodells aus Tab. 4.6 im Rahmen einer Finite-Elemente Berechnung basierend auf dem Multilevel-Newton Verfahren aus Abschnitt 2.4.2 müssen die Gleichungen (5.41) zur Berechnung der Inneren Variablen ausgewertet werden. Der gesamte Spannungszustand (4.191) erfordert die Berechnung der Überspannungen $\tilde{\mathbf{T}}_{ov}$, siehe Gln.(4.199)-(4.200), bzw. der viskosen Rechten Cauchy-Green Tensoren (4.201), d.h. wir müssen an jedem Gauß-Punkt den Integrations Schritt gemäß Gl.(2.110) bzw. Gl.(5.41) durchführen, siehe auch Tab. 2.8 und 2.11, und die Inneren Variablen bestimmen. Da dies indirekt zur Berechnung der Spannungen dient, wird diese Prozedur als Spannungsalgorithmus bezeichnet, auch wenn damit die Berechnung der Inneren Variablen gemeint ist. Die Inneren Variablen sind für das Materialmodell aus Tab. 4.6 für die viskosen Rechten Cauchy-Green Tensoren an einem Gauß-Punkt durch

$$\mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{C}_{v1}^{e(ijk)} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{vn_{ov}}^{e(ijk)} \end{array} \right\}, \quad \mathbf{C}_{vk}^{e(ijk)} \in \mathbb{R}^6 \quad (5.157)$$

gegeben. In unserem Fall gilt konkret $n_q = n_{ov} \times 6$. Aus Übersichtlichkeitsgründen lassen wir im folgenden alle Indizes zur Andeutung der Stufe und des Gauß-Punktes sowie des Elementes fort. Des weiteren stellen wir die Herleitung der analytischen Behandlung des nichtlinearen Gleichungssystems (5.41) bei gegebener Deformation dar. Hierzu verwenden wir aus Gründen der Konformität zu anderen Literaturstellen nicht die Matrixschreibweise, sondern die Tensornotation. Eine konkrete Implementation schließt sich natürlich Ersterem an.

Nach Tab. 4.6 haben wir die Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{C}}_{vk} = \frac{4\mu_k}{\eta_k} \frac{(\det \mathbf{C}_{vk})^{1/3}}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \left(\mathbf{C} - \frac{1}{3} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}_{vk}^{-1}) \mathbf{C}_{vk} \right), \quad k = 1, \dots, n_{ov}, \quad (5.158)$$

für gegebenen Rechten Cauchy-Green Tensor \mathbf{C} zu lösen. Analog zu Gl.(5.41) lautet der Integrations Schritt des differentiellen Anteils des DAE-Systems, der sich aufgrund der Entkoppelung der Inneren Variablen pro Maxwell-Element durchführen läßt,

$$\frac{\mathbf{C}_{vk} - \mathbf{C}_{vk}^S}{\Delta t_n a_{ii}} + \frac{4\mu_k}{\eta_k} \frac{(\det \mathbf{C}_{vk})^{1/3}}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \left(\mathbf{C} - \frac{1}{3} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}_{vk}^{-1}) \mathbf{C}_{vk} \right) = \mathbf{0}, \quad (5.159)$$

mit der nichtlinearen Viskositätsfunktion

$$\eta_k = \eta_{k0} \exp \left(-s_k \| \mathbf{C} \tilde{\mathbf{T}}_{ovk} \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{ovk} \mathbf{C} \| \right) \quad (5.160)$$

und dem gegebenen Startvektor \mathbf{C}_{vk}^S , siehe Gl.(2.71), der “global” berechnet wurde. Gl.(5.159) muß für n_{ov} Maxwell-Modelle berechnet werden. Um den numerischen Aufwand der jeweiligen sechs Gleichungen mit den sechs Unbekannten zu reduzieren, betrachten wir das Gleichungssystem (5.159) zuvor analytisch. Hierzu notieren wir auf der linken Seite die unbekanntens Tensoren \mathbf{C}_{vk} , so daß auf der rechten Seite lediglich skalare Funktionen des viskosen Rechten Cauchy-Green Tensors stehen. Aus Gl.(5.159) folgt dann

$$\mathbf{C}_{vk} = \frac{1}{g(\mathbf{C}_{vk})} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{C}_{vk}) \quad (5.161)$$

mit der skalaren Funktion

$$g(\mathbf{C}_{vk}) = 1 + \frac{1}{3} \frac{4\Delta t_n a_{ii} \mu_k (\det \mathbf{C}_{vk})^{1/3}}{(\det \mathbf{C})^{1/3} \eta_k} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}_{vk}^{-1}) \quad (5.162)$$

und der tensoriellen Funktion

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{C}_{vk}) = \mathbf{C}_{vk}^S + \frac{4\Delta t_n a_{ii} \mu_k (\det \mathbf{C}_{vk})^{1/3}}{(\det \mathbf{C})^{1/3} \eta_k} \mathbf{C}. \quad (5.163)$$

Im zweiten Schritt betrachten wir näher das Skalarprodukt $\mathbf{C} \tilde{\mathbf{T}}_{ovk} \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{ovk} \mathbf{C}$ in der Viskositätsfunktion (5.160)

$$\mathbf{C} \tilde{\mathbf{T}}_{ovk} \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{ovk} \mathbf{C} = \left(2\mu_k \frac{(\det \mathbf{C}_{vk})^{1/3}}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \right)^2 \left(\mathbf{C} \mathbf{C}_{vk}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{vk}^{-1} \mathbf{C} - \frac{1}{3} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}_{vk}^{-1})^2 \right) \quad (5.164)$$

unter Verwendung der Teilüberspannung $\tilde{\mathbf{T}}_{ovk}$ nach Tab. 4.6. Bei genauer Betrachtung von Beziehung (5.162)-(5.164) liegen drei skalare Größen

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv (\det \mathbf{C}_{vk})^{1/3}, \\ x_2 &\equiv \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}_{vk}^{-1}, \\ x_3 &\equiv \mathbf{C} \mathbf{C}_{vk}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{vk}^{-1} \mathbf{C}, \end{aligned} \quad (5.165)$$

vor, die, wenn wir sie kennen würden, den viskosen Rechten Cauchy-Green Tensor (5.161) bestimmen. Das Einsetzen von Gl.(5.161) in die Definitionen (5.165) liefert dann die drei nichtlinearen Gleichungen

$$\Phi_m(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad m = 1, 2, 3 \quad (5.166)$$

mit

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1, x_2, x_3) &:= x_1 - g^{-1}(\det \boldsymbol{\xi})^{1/3}, \\ \Phi_2(x_1, x_2, x_3) &:= x_2 - g \boldsymbol{\xi}^{-1} \cdot \mathbf{C}, \\ \Phi_3(x_1, x_2, x_3) &:= x_3 - g^2 \mathbf{C} \boldsymbol{\xi}^{-1} \cdot \boldsymbol{\xi}^{-1} \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (5.167)$$

Hierbei sind die Abkürzungen

$$g = g(x_1, x_2, x_3) \equiv 1 + \frac{\hat{k}}{3} \frac{x_1 x_2}{\eta_k}, \quad (5.168)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(x_1, x_2, x_3) \equiv \mathbf{C}_{vk}^S + \frac{\hat{k}}{\eta_k} x_1 \mathbf{C}, \quad (5.169)$$

$$\eta_k = \eta_k(x_1, x_2, x_3) \equiv \eta_{k0} \exp \left(-\frac{2\mu_k s_k}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} x_1 \sqrt{x_3 - \frac{1}{3} x_2^2} \right), \quad (5.170)$$

$$\hat{k} \equiv \frac{4\mu_k \Delta t_n a_{ii}}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \quad (5.171)$$

eingeführt worden. Die Anwendung des klassischen Newton-Raphson Verfahrens zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (5.166) führt dann in jedem Iterationsschritt (r) (lokale Iteration) auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \Phi_{1,1} & \Phi_{1,2} & \Phi_{1,3} \\ \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} & \Phi_{2,3} \\ \Phi_{3,1} & \Phi_{3,2} & \Phi_{3,3} \end{bmatrix}^{(r)} \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix}^{(r)}, \quad (5.172)$$

mit den Inkrementen $\Delta x_m = x_m^{(r+1)} - x_m^{(r)}$. Die Koeffizienten der Funktionalmatrix $\Phi_{i,j} = \partial\Phi_i/\partial x_j$, $i, j = 1, 2, 3$, sind im Anhang C.1 hergeleitet.

ANMERKUNG 5.9

Im Fall einer konstanten Viskosität η_k reduziert sich das Problem auf die Berechnung von zwei Unbekannten x_1 und x_2 . x_3 tritt dann nicht mehr auf. \square

ANMERKUNG 5.10

Wir erkennen auch einen Nachteil der impliziten Runge-Kutta Verfahren, die durch den Integrations-schritt die isochore Eigenschaften eines Tensors verletzen. Bildet man nämlich von Gl.(5.161) die Determinante, so wird offensichtlich, daß diese von eins verschieden ist. Die Anwendung eines Exponentialalgorithmusses, siehe hierzu die grundlegende Arbeit von WEBER & ANAND [170], erfüllt zwar diese Nebenbedingung zwangsläufig, ist jedoch nur ein Verfahren erster Ordnung und bindet sich nicht in die steif-genauen diagonal-impliziten Runge-Kutta Verfahren zur Berechnung von DAE-Systemen ein. Der Verlust der Zwangsbedingung wird daher in dieser Arbeit akzeptiert. Eine Alternative wäre die Formulierung einer algebraischen Nebenbedingung und der Einführung einer weiteren Unbekannten, was wir in dieser Arbeit nicht weiterverfolgen wollen. \square

Je nach verwendeter Elementformulierung benötigen wir abschließend die Überspannungen $\tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}}$ bzw. \mathbf{S}_{ov} . Die Überspannungen berechnen sich aus den Teilüberspannungen $\tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}} = \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}k}$ und somit aus den viskosen Rechten Cauchy-Green Tensoren (5.161):

$$\tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}k} = \frac{2\mu_k x_1}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \left(g(x_1, x_2, x_3) \boldsymbol{\xi}^{-1}(x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{3} x_2 \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (5.173)$$

Im Falle der Verwendung räumlicher Größen verwenden wir den push-forward Operator, $\mathbf{S}_{\text{ov}} = [\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}]^{T_{23}} \tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}}$, bzw. die korrespondierenden Matrizenoperationen.

5.3 Tangentenoperator bei finiter Viskoelastizität

Im Zusammenhang mit der gemischten Elementformulierung aus Abschnitt 5.1.5 sowie der Anwendung des Multilevel-Newton Verfahrens aus Abschnitt 2.4.2, siehe auch die konkrete Gl.(5.47), die auf finite Deformationen übertragen werden muß, benötigen wir den Tangentenoperator, der sich aus den Gleichgewichtsspannungen und den Überspannungen berechnet. Die Berechnung des Tangentenoperators der Gleichgewichtsspannungen entspricht der Berechnung in Abschnitt 4.3.4.

Der Tangentenoperator des Überspannungsanteils,

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\text{ov}} = \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \tilde{\mathbf{C}}_{\text{ov}k} = 2 \sum_{k=1}^{n_{\text{ov}}} \frac{d\tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}k}}{d\mathbf{C}} \quad (5.174)$$

zur Iteration (m) der Stufe T_{ni} am Gauß-Punkt $\boldsymbol{\xi}_{ijk}$ des Elementes e wird in diesem Abschnitt bestimmt. Die Indizes werden wie im vorherigen Abschnitt fortgelassen. Da die viskosen Rechten Cauchy-Green Tensoren durch ein analytisch optimiertes Berechnungsverfahren bestimmt sind, siehe vorherigen Abschnitt, tritt folgende Berechnung ein. Die Überspannungen (5.173) hängen von dem Rechten Cauchy-Green Tensor \mathbf{C} und den viskosen Rechten Cauchy-Green Tensoren \mathbf{C}_{v_k} bzw. indirekt von den eingeführten Unbekannten x_m , $m = 1, 2, 3$, aus Gl.(5.165) ab:

$$\tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}k} = \tilde{\mathbf{T}}_{\text{ov}k}(x_1(\mathbf{C}), x_2(\mathbf{C}), x_3(\mathbf{C}), \mathbf{C})$$

Die Differentiation nach dem Rechten Cauchy-Green Tensor lautet dann

$$\tilde{c}_{ovk} = 2 \frac{d\tilde{\mathbf{T}}_{ovk}(x_m(\mathbf{C}), \mathbf{C})}{d\mathbf{C}} = 2 \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{ovk}}{\partial x_m} \otimes \frac{dx_m}{d\mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{ovk}}{\partial \mathbf{C}}. \quad (5.175)$$

Der letzte Ausdruck der Summe wird im Anhang C.2, siehe Gl.(C.21), berechnet und lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{ovk}}{\partial \mathbf{C}} = & \left(-\frac{1}{3} \tilde{\mathbf{T}}_{ovk} + \frac{2\mu_k x_1}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} (\gamma_3 \boldsymbol{\xi}^{-1} + g\gamma_2 \boldsymbol{\xi}^{-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\xi}^{-1}) \right) \otimes \mathbf{C}^{-1} + \\ & - \frac{2\mu_k x_1}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \left[g \frac{\hat{k}x_1}{\eta_k} [\boldsymbol{\xi}^{-1} \otimes \boldsymbol{\xi}^{-1}]^{T_{23}} - \frac{x_2}{3} [\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}]^{T_{23}} \right]. \end{aligned} \quad (5.176)$$

Hierbei haben wir die Abkürzungen

$$\gamma_2 = \frac{\hat{k}x_1}{3\eta_k} \left(1 + \frac{2\mu_k s_k}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} x_1 \sqrt{x_3 - \frac{1}{3}x_2^2} \right) \quad \text{und} \quad \gamma_3 = -\frac{\gamma_2 x_2}{3} \quad (5.177)$$

eingeführt. Die partiellen Ableitungen der Teilüberspannungen $\tilde{\mathbf{T}}_{ovk}$ nach den Größen x_m in Gl.(5.175) berechnen sich mit Hilfe von Gl.(5.173) zu

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{ovk}}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1} \tilde{\mathbf{T}}_{ovk} + \frac{2\mu_k x_1}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \boldsymbol{\xi}^{-1} - g \boldsymbol{\xi}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x_1} \boldsymbol{\xi}^{-1} \right), \quad (5.178)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{ovk}}{\partial x_2} = \frac{2\mu_k x_1}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \boldsymbol{\xi}^{-1} - g \boldsymbol{\xi}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x_2} \boldsymbol{\xi}^{-1} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \right), \quad (5.179)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{ovk}}{\partial x_3} = \frac{2\mu_k x_1}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \left(\frac{\partial g}{\partial x_3} \boldsymbol{\xi}^{-1} - g \boldsymbol{\xi}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x_3} \boldsymbol{\xi}^{-1} \right). \quad (5.180)$$

In diesen Ausdrücken benötigen wir die Ableitungen $\partial g / \partial x_m$ und $\partial \boldsymbol{\xi} / \partial x_m$, die bereits bei dem lokalen Iterationsverfahren (5.172) zur Berechnung der Unbekannten x_m vorgekommen sind. Die Ableitungen sind im Anhang C.1 in den Gleichungen (C.5) und (C.7) berechnet worden.

Zuletzt berechnen wir noch die Ableitungen $dx_m / d\mathbf{C}$, welche in Gl.(5.175) notwendig sind. Die Anwendung des Satzes über implizite Funktionen, welcher die Basis für das Multilevel-Newton Verfahren darstellt, wird nunmehr auf das nichtlineare Gleichungssystem (5.166) angewendet. Diese notieren wir in der Form

$$\Phi_m(x_1(\mathbf{C}), x_2(\mathbf{C}), x_3(\mathbf{C}), \mathbf{C}) = 0, \quad m = 1, 2, 3 \quad (5.181)$$

und wenden die Kettenregel an,

$$\frac{d\Phi_m}{dx_r} = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_s} \frac{dx_s}{d\mathbf{C}} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{0}. \quad (5.182)$$

Die Überführung der tensoriellen Darstellung in Matrizennotation führt dann auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \Phi_{1,1} & \Phi_{1,2} & \Phi_{1,3} \\ \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} & \Phi_{2,3} \\ \Phi_{3,1} & \Phi_{3,2} & \Phi_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \frac{dx_1}{d\mathbf{C}} \right\}^T \\ \left\{ \frac{dx_2}{d\mathbf{C}} \right\}^T \\ \left\{ \frac{dx_3}{d\mathbf{C}} \right\}^T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{C}} \right\}^T \\ \left\{ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{C}} \right\}^T \\ \left\{ \frac{\partial \Phi_3}{\partial \mathbf{C}} \right\}^T \end{bmatrix} \quad (5.183)$$

mit sechs unbekannten rechten Seiten. Die Koeffizientenmatrix ist die gleiche, wie bei der Anwendung des Newton-Raphson Verfahrens in Gl.(5.172) und liefert die Unbekannten $dx_m/d\mathbf{C}$, $m = 1, 2, 3$, die in Gl.(5.175) notwendig sind. Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems könnte analytisch durchgeführt werden, was jedoch sehr aufwendig ist. Wir führen dies daher numerisch durch. Die Vektoren der rechten Seite sind im Anhang C.2, siehe Gl.(C.30), hergeleitet worden.

Da wir in der gewählten Finite-Elemente Formulierung in Abschnitt 5.1.5 den Tangentenoperator in der Momentankonfiguration benötigen, wird der Operator (5.175) gemäß (4.108) bzw. (5.116) vortransformiert.

Kapitel 6

Beispielrechnungen

In diesem Kapitel soll die vorgeschlagene Vorgehensweise der Berechnung von Strukturen mittels diagonal-impliziter Runge-Kutta Verfahren aus Abschnitt 2.3 an Beispielen basierend auf den Materialgleichungen aus Kapitel 4 ausgetestet werden. Zu diesem Zweck ist ein eigenes Finite-Elemente Programm entwickelt worden, welches über die Struktur der dargestellten Vorgehensweise verfügt. Die Rechnungen sind auf unterschiedlichen LINUX-Rechnern mit Hilfe des g77-Compilers bei doppeltgenauer Arithmetik angefertigt worden. Zunächst definieren wir

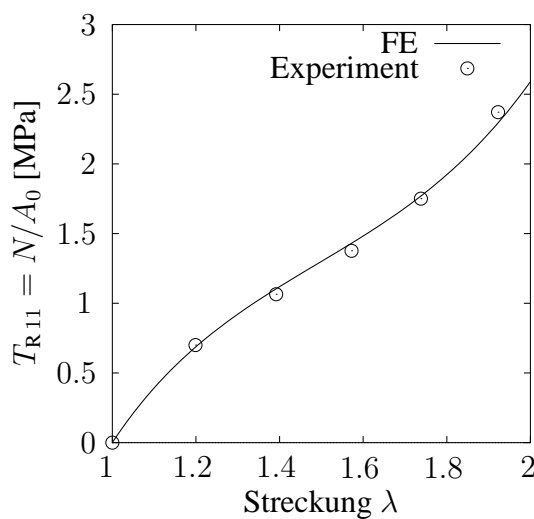


Abbildung 6.1: Einaxiales Spannungs-Dehnungsverhalten der Gleichgewichtslösung im Vergleich zu experimentellen Ergebnissen von HAUPT & SEDLAN [76]

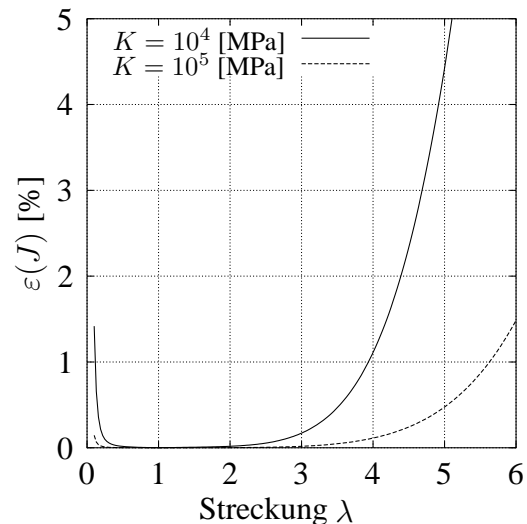


Abbildung 6.2: Verlauf der relativen Abweichung der Determinante des Deformationsgradienten zur Lösung bei InkompRESSIBILITÄT für unterschiedliche Kompressionsmoduln

einige Größen, die in den nachfolgenden Rechnungen nicht variiert werden. Hierzu beginnen wir mit dem Modell der Gleichgewichtsspannungen aus Tab. 4.7, die in HARTMANN [66] an den experimentellen Daten von HAUPT & SEDLAN [76] identifiziert wurden. In Abb. 6.1 ist für die Materialparameter

$$c_{10} = 0.264 \text{ [MPa]}, \quad c_{01} = 0.5 \text{ [MPa]}, \quad c_{30} = 0.019 \text{ [MPa]} \quad (6.1)$$

die 1-te Piola-Kirchhoff Spannung, $T_{R11} = N/A_0$, über der Axialstreckung $\lambda = L/L_0$ mit den die Gleichgewichtskennlinie definierenden Relaxationsabbruchpunkten (Kreise) dargestellt. N

ist die Axialkraft, A_0 und L_0 die Querschnittsfläche sowie die Länge der Ausgangskonfiguration und L die aktuelle Länge. Die Materialparameteridentifikation entstand dabei an Zug-, Torsions- sowie kombinierten Zug-Torsionsexperimenten. Die in Abb. 6.1 erkennbare numerische Lösung ist mit einem achtknotigen Volumenelement aus Abschnitt 5.1.5 sowie einem fiktiven Kompressionsmodul von $K = 1000$ [MPa] berechnet worden.¹ Wenn wir daran interessiert sind, daß das nahezu inkompressible Verhalten während der Deformation bestehen bleiben soll, muß man sich das Verhalten der Determinante des Deformationsgradienten anschauen. Stellvertretend führen wir dies am einaxialen Zug durch. Aus der Lösung der Gl.(4.131) erhalten wir im Falle hyperelastischen Materialverhaltens den Verlauf in Abb. 6.2 für zwei unterschiedliche Kompressionsmoduln. Aufgetragen ist die relative Abweichung, siehe Gl.(6.13), der Determinante des Deformationsgradienten. Für Streckung $0.4 < \lambda > 2$ ist mit einer starken Zunahme der Abweichung von $J = 1$ zu rechnen. Diese Eigenschaft sollte man bei größeren Deformationen oder kleinerem Kompressionsmodul im Auge behalten.

Wir wählen weiterhin eine Überspannung, $n_{ov} = 1$, und schätzen die Materialparameter des Überspannungsanteils mit $\eta_{01} = 180$ [MPa s], $s_1 = 0.001$ [MPa⁻¹] sowie $\mu_1 = 0.2$ [MPa] ab.

In den folgenden Untersuchungen beginnen wir mit dem einaxialen Zug, dem Zug einer realen Probe und der einfachen Scherung. Dabei stellen wir zum Teil die “analytischen” Vergleichslösungen mit den FE-Berechnungen gegenüber. Dem anschließenden Abschnitt liegt die Scherung einer rechteckigen Elastomerscheibe, einer stark inhomogenen Deformation, zugrunde. Bei dieser interessiert das Aufwands-Genauigkeitsverhalten der verwendeten Zeitintegratoren.

6.1 Einfacher Zug

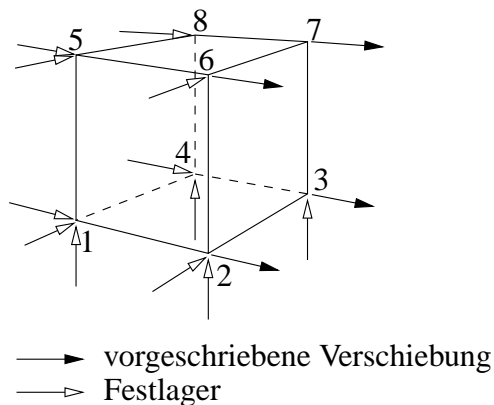


Abbildung 6.3: Geometrische Randbedingungen eines achtknotigen Volumenelementes beim einaxialen Zug

Das Problem des einaxialen Zuges resultiert aus der einfachsten Möglichkeit von Prüfmaschinen Probekörper einaxial zu belasten. Hierbei werden die Probekörper verschiebungskontrolliert über die Traversenbewegung der Prüfmaschine, dehnungskontrolliert in einem Meßbereich in der Mitte der Probe — DMS-Technik², Dehnungsaufnehmer, Lasermeßtechnik, CCD-Kamera — oder kraftgesteuert belastet. Bei dehnungsgesteuerten Prozessen haben wir den Vorteil, daß wir den Zusammenhang von Dehnungen und Spannungen und damit die Möglichkeit zur konstitutiven Modellierung direkt erhalten, sofern ein homogener Spannungs- und Deformationszustand in einem mittleren Bereich der Probe vorliegt. Ist so ein homogener Spannungs- und Deformationszustand gewährleistet, können auf der Ebene der Materialgleichungen die Spannungs-Dehnungszusammenhänge entweder analytisch bzw. numerisch gelöst oder jedoch mit einem finiten Element, hier ein Volumenelement mit den in

der Materialgleichungen die Spannungs-Dehnungszusammenhänge entweder analytisch bzw. numerisch gelöst oder jedoch mit einem finiten Element, hier ein Volumenelement mit den in

¹Mit Hilfe von Tab. B.2 sowie (4.124) und (4.125) entspricht dies in der Ausgangskonfiguration einer Querkontraktionszahl

$$\nu = \frac{3K - 4(c_{10} + c_{01})}{6K + 2(c_{10} + c_{01})}$$

und damit für die gewählten Materialparameter (6.1) einem $\nu = 0.499239$.

²Diese Technik ist bei großen Verzerrungen nicht anwendbar.

Abb. 6.3 dargestellten Randbedingungen, als Lösung eines Anfangsrandwertproblems berechnet werden. Für die Materialparameter aus Gl.(6.1) erhalten wir für die Finite-Elemente Lösung bei Verwendung der Streck- bzw. Verschiebungsgeschwindigkeiten $\dot{\lambda} = \dot{u}/L_0 = 3 \cdot 10^{-k} [\text{s}^{-1}]$, $k = 2, \dots, 5$, die Verläufe in Abb. 6.4. Diese Abbildung zeigt die zugehörige Spannungsantwort

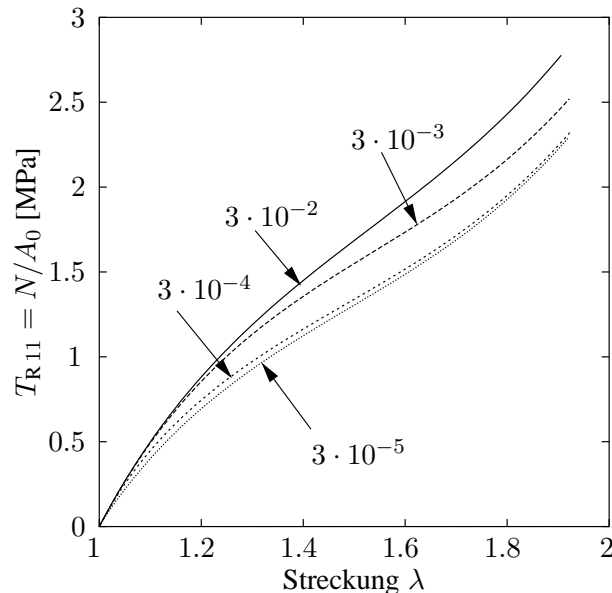


Abbildung 6.4: Einaxialer Zug bei unterschiedlichen Streckgeschwindigkeiten $\dot{\lambda} [\text{s}^{-1}]$

und macht die nichtlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit der gewählten prozeßabhängigen Viskosität (4.216) klar, die im Gegensatz zu einer konstanten Viskosität $\eta = \text{const.}$ tendenziell ähnliche Ergebnisse zu den in HAUPT & SEDLAN [76] vorliegenden experimentellen Ergebnissen liefert.

Die vorgestellte zeitadaptive Vorgehensweise erweist sich bei Prozessen mit unterschiedlichen Zeitskalen als notwendig. Zu der Darstellung des prinzipiellen Verhaltens der Schrittweitensteuerung ziehen wir den verschiebungsgesteuerten Lastpfad aus Abb. 6.5 heran, bei dem während der Belastung Haltezeiten von 1000 [s] eingeführt werden. Die Belastungsphasen dauern 10 [s]. In Abb. 6.6 ist die Spannungsantwort des Prozesses aufgeführt, der das Relaxieren auf die Gleichgewichtskennlinie wiedergibt. Für eine Anfangsschrittweite von $\Delta t_0 = 10$ [s], diese wird jeweils bei einer nicht stetig differenzierbaren Belastungsfunktion erneut nach dem Belastungswechsel³ ausgeführt, ist das Verhalten der Schrittweite in den Abbildungen 6.7 und 6.8 zu erkennen.⁴ Abb. 6.7 stellt lediglich den Ausschnitt der ersten 1010 [s] des Prozesses dar. Hierbei haben wir die Fehlertoleranzen für die Verschiebungen und Inneren Variablen, siehe Gl.(2.92), von $\epsilon_r(\mathbf{u}) = \epsilon_r(\mathbf{q}) = 10^{-4}$, $\epsilon_a(\mathbf{u}) = 10^{-4}$ [mm] sowie $\epsilon_a(\mathbf{q}) = 10^{-7}$ gewählt. Während der ersten 10 [s] sind die Schrittweiten näherungsweise konstant, da die Materialantwort nur schwach nichtlinear ist. Während der Haltezeiten wird die Notwendigkeit des zeitadaptiven Verfahrens erkennbar, da dort die Schrittweite stark steigt und demnach im Vergleich zu einer konstanten Schrittweite auch zu einer erheblichen Verminderung des Rechenaufwandes führt.

³Unter Belastungswechsel wird bei einer in der Zeit nicht stetig differenzierbaren Belastung der Ort eines “Knickes” verstanden.

⁴Damit ist auch der Abfall der Schrittweite kurz vor 10 [s] zu erklären, da nur die Differenz aus letztem Zeitpunkt und $t = 10$ [s] eingeht. Ähnliches ist jeweils kurz vor Beginn der anderen Haltezeiten zu erkennen.

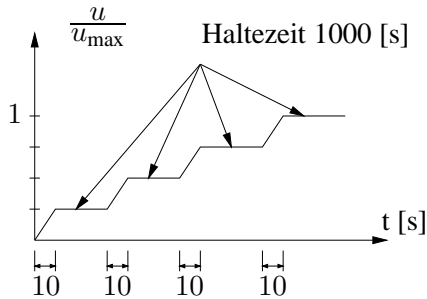


Abbildung 6.5: Lastpfad mit Haltezeiten

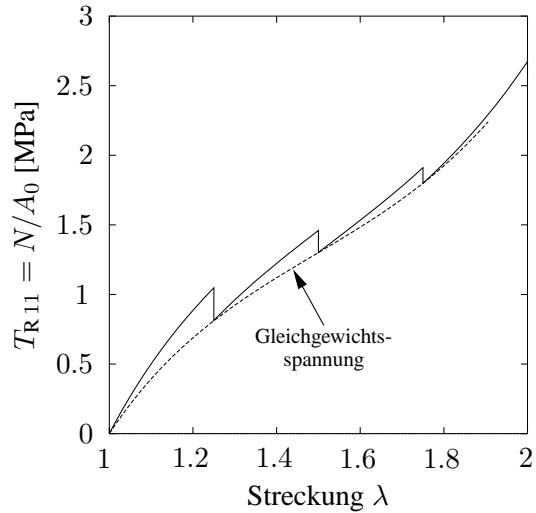


Abbildung 6.6: Spannungs-Streckungsdiagramm

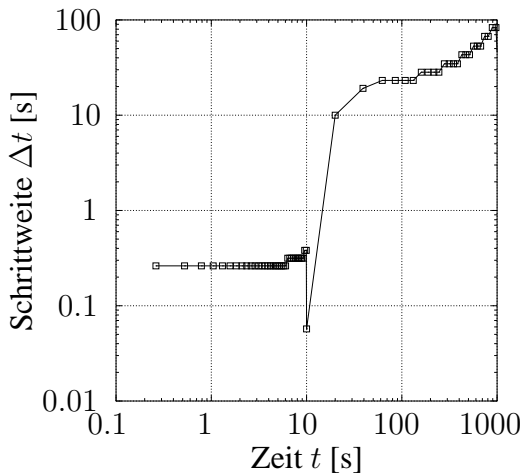


Abbildung 6.7: Schrittwertenverhalten des Belastungsprozesses mit Haltezeiten im Zeitintervall $0 \leq t \leq 10$ [s]

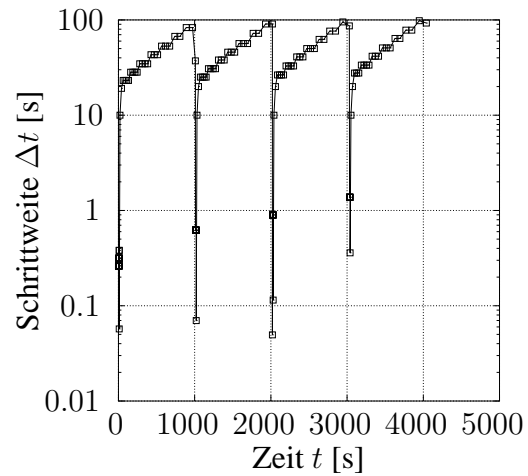


Abbildung 6.8: Schrittwertenverhalten des Belastungsprozesses mit Haltezeiten im Zeitintervall $0 \leq t \leq 4040$ [s]

6.2 Zug eines Probekörpers

Das Ziehen einer konkreten rotationssymmetrischen Materialprobe aus Abb. 6.9(a) bei Verwendung der dreidimensionalen Volumenelemente aus Abschnitt 5.1.5 soll einen Vergleich zu dem einaxialen Zug des vorherigen Abschnitts liefern. Hierzu verwenden wir das zweistufige Verfahren von Ellsiepen aus Tab. 2.9. Abb. 6.9(b) zeigt die Abmessungen der Materialprobe, deren Kopfenden jeweils in einem Metalltopf eingeklebt werden. Die zugehörige Vernetzung sowie die geometrischen Randbedingungen eines Achtels der Probe sind in Abb. 6.9(c) dargestellt. Hierbei werden die Knoten an der Oberfläche der “Klebung” alle gesperrt und wir verlängern den Stab monoton in 10 [s] um 19.5 [mm], d.h. die Gesamtprobe verlängert sich um 39 [mm]. Die Wahl der Materialparameter erläuterten wir bereits eingangs zu diesem Kapitel. Abb. 6.10 repräsentiert die Deformation der Probe zum Zeitpunkt $t = 10$ [s] und Abb. 6.11 die Konturgrafik

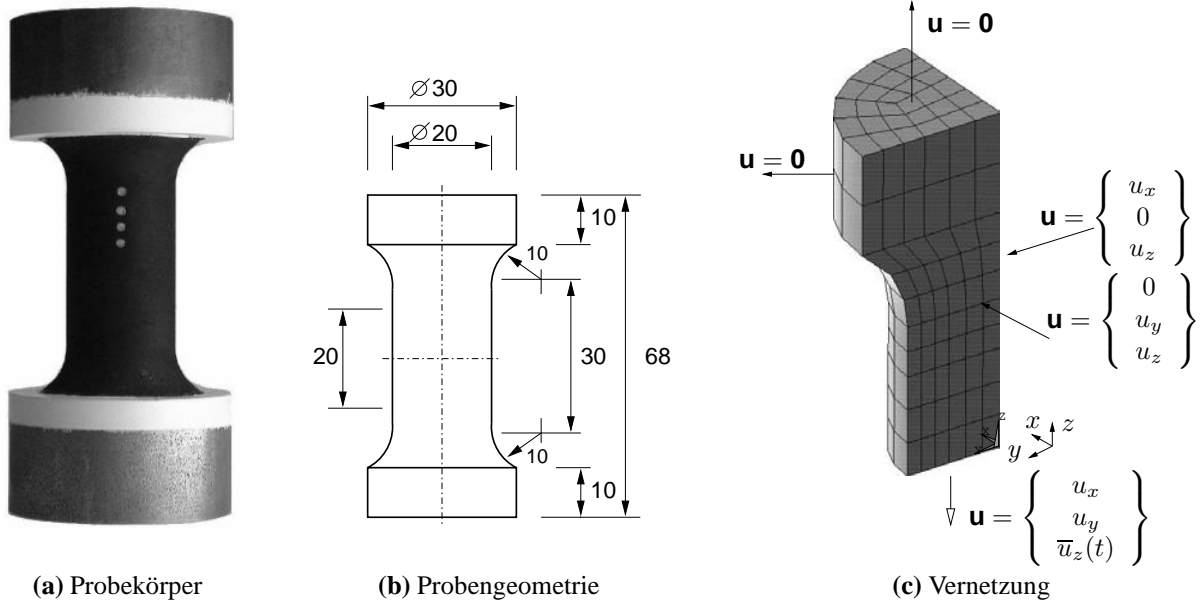


Abbildung 6.9: Rotationssymmetrischer Elastomerprobekörper

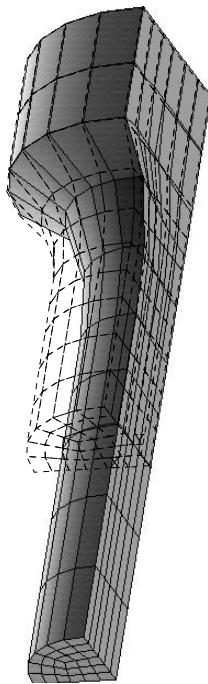


Abbildung 6.10: Deformiertes und undeformiertes Netz der Zugprobe

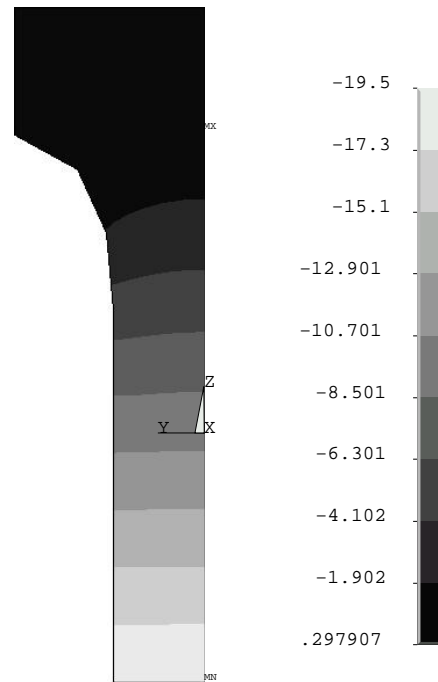


Abbildung 6.11: Axialverschiebungsverteilung (Konturplot)

der Axialverschiebungen eines Schnittes der Probe, die auf einen weitgehend homogenen Deformationszustand in dem mittleren Bereich des Körpers schließen läßt. Als Fehlertoleranzen der Schrittweitensteuerung wählen wir die Werte gemäß des vorherigen Abschnitts. Die Anfangsschrittweite sei hier $\Delta t_0 = 0.01$ [s]. Abb. 6.12 läßt erkennen, daß die Schrittweiten bei größeren “Änderungen” in der Lastumlagerung und damit bei unterschiedlichen viskosen Verhalten innerhalb der Struktur stärker zunimmt. Die Größe der Schrittweite ist im Vergleich zum Beispiel des vorherigen Abschnittes geringer, da im Gegensatz zur homogenen Deformation stark inhomoge-

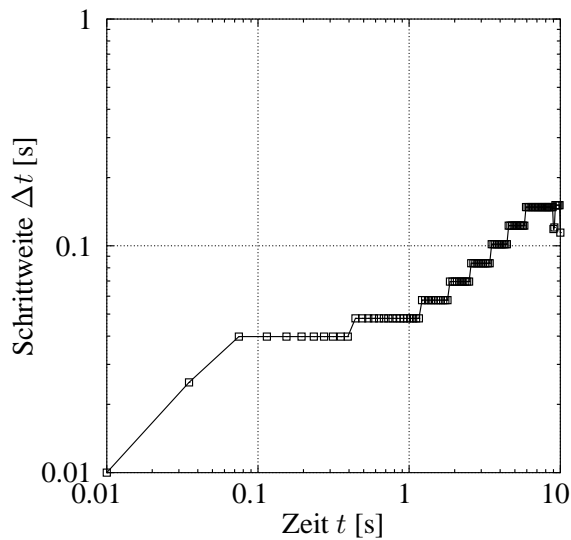


Abbildung 6.12: Schrittweitenverhalten des Verfahrens von Ellsiepen

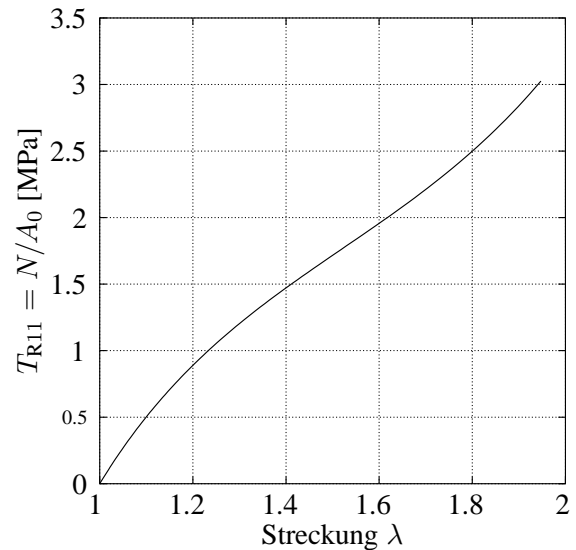


Abbildung 6.13: Spannungs-Streckungsverhalten

ne Bereiche in der Probe vorliegen.

Das Spannungs-Streckungsverhalten ist in Abb. 6.13 dargestellt. Dieses ist dem untersten Randelement entnommen. Die Streckungen entsprechen ungefähr der Größenordnung aus Abb. 6.4 und die 1-ten Piola-Kirchhoff Spannungen liegen in ähnlicher Größenordnung.

6.3 Einfache Scherung

Eine einfache homogene Deformation stellt die “einfache Scherung” dar, die experimentell nur schwer erzeugbar ist, wenn man von der Torsion dünnwandiger Kreisquerschnitte einmal absteht. Sie ist jedoch für theoretische Überlegungen und zum Vergleich zu numerisch erzeugten Lösungen sehr gut geeignet. Mit ihr kann man insbesondere in der Testphase neuer Spannungsalgorithmen oder Elementformulierungen einen Vergleich der theoretischen und numerischen Ergebnisse durchführen. Dabei ist jedoch auf besondere Randbedingungen zu achten, was in diesem Abschnitt angesprochen werden soll. Wir sprechen im folgenden lediglich die Eigenschaften hyperelastischer Materialgleichungen an, insbesondere die Näherung von Materialgleichungen der Nahezu-Inkompressibilität im Vergleich zur Vergleichslösung der Inkompressibilität. Hierzu dient das Materialmodell (4.206)-(4.212) aus Tab. 4.7.

Die einfache Scherung, definiert durch die Deformation

$$x = X + \kappa Y, \quad y = Y, \quad z = Z, \quad (6.2)$$

bzw. der daraus resultierenden Matrixdarstellung des Deformationsgradienten bzw. des Linken Cauchy-Green Tensors in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \kappa & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 + \kappa^2 & \kappa & \\ \kappa & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\kappa & \\ -\kappa & 1 + \kappa^2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 1 + 3\kappa^2 + \kappa^4 & \kappa(2 + \kappa^2) & \\ \kappa(2 + \kappa^2) & 1 + \kappa^2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

mit $\det \mathbf{F} = \det \mathbf{B} = 1 \longrightarrow \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$, führt bei inkompressiblem Materialverhalten für Gl.(4.45) sowie dem Ansatz (4.50) mit $\mathbf{I}_{\mathbf{B}} = \text{tr } \mathbf{B} = 3 + \kappa^2$ und $\mathbf{II}_{\mathbf{B}} = \text{tr } \mathbf{B}^{-1} = 3 + \kappa^2$ auf die Spannungskomponenten (Matrixkomponenten) des Cauchyschen Spannungstensors \mathbf{T}

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -p + 2w_1(1 + \kappa^2) - 2w_2, \\ \sigma_{22} &= -p + 2w_1 - 2w_2(1 + \kappa^2), \\ \sigma_{33} &= -p + 2(w_1 - w_2), \\ \sigma_{12} &= 2(w_1 + w_2)\kappa.\end{aligned}\quad (6.5)$$

Hierbei ist p der unbestimmte Druck,

$$w_1 = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{I}_{\mathbf{B}}} = c_{10} + 3c_{30}(\mathbf{I}_{\mathbf{B}} - 3)^2 = c_{10} + 3c_{30}\kappa^4 \quad \text{und} \quad w_2 = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{II}_{\mathbf{B}}} = c_{01}.\quad (6.6)$$

Abb. 6.14 zeigt die grafische Veranschaulichung der einfachen Scherung. Dabei berechnet sich

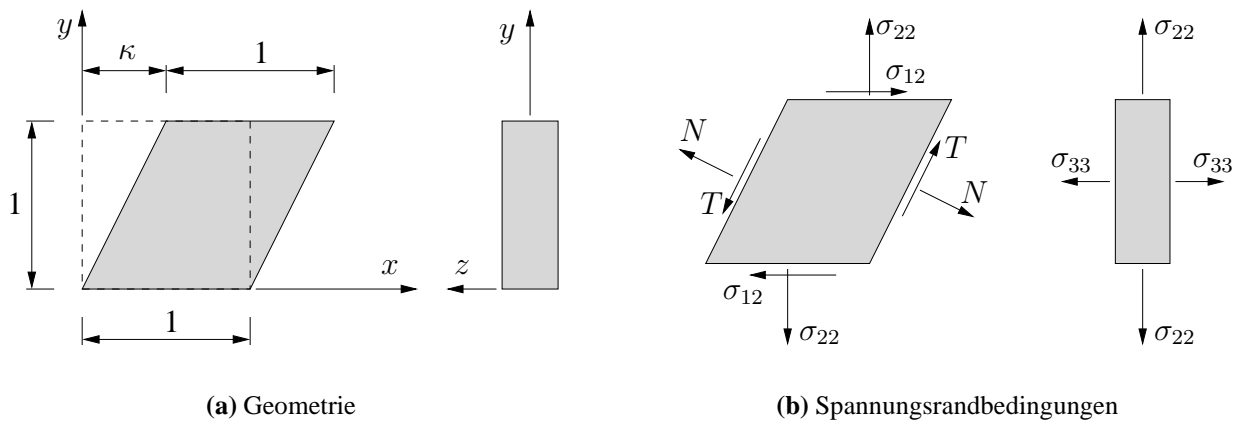


Abbildung 6.14: Einfache Scherung

unter Ausnutzung der aus (6.5) folgenden universalen Beziehung $\sigma_{11} - \sigma_{22} = \sigma_{12}\kappa$, siehe TRUESDELL & NOLL [164, S.178]⁵, die Tangential- und Normalkomponente zu

$$T = \frac{\kappa(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + (1 - \kappa^2)\sigma_{12}}{1 + \kappa^2} = \frac{\sigma_{12}}{1 + \kappa^2} \quad \text{und} \quad N = \frac{\sigma_{11} + \kappa^2\sigma_{22} - 2\kappa\sigma_{12}}{1 + \kappa^2} = \sigma_{22} - \kappa T.\quad (6.7)$$

Danach muß der unbestimmte Druck aus den Spannungsrandbedingungen bestimmt werden, wozu es beliebig viele Möglichkeiten gibt. Eine dieser Möglichkeiten, die üblicherweise in den Lehrbüchern zu finden ist, legt die Spannungsrandbedingung $\sigma_{33} = 0$ zugrunde. Hiermit können aus Gl.(6.5)₃ der Druck und die übrigen Normalspannungen bestimmt werden:

$$\sigma_{33} = 0 \implies p = 2(w_1 - w_2)\quad (6.8)$$

$$\sigma_{11} = 2w_1\kappa^2 = 2(c_{10} + 3c_{30}\kappa^4)\kappa^2\quad (6.9)$$

$$\sigma_{22} = -2w_2\kappa^2 = -2c_{02}\kappa^2\quad (6.10)$$

⁵Ausführlich wird die einfache Scherung in TRUESDELL & NOLL [164, S.174-179, S.182-183] diskutiert.

Eine andere Möglichkeit, die zunächst etwas willkürlich erscheint, jedoch im Hinblick auf die nachfolgenden Betrachtungen gewählt wird, ist $\text{tr } \mathbf{T} = 0$. Wir erhalten hierfür

$$\text{tr } \mathbf{T} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 0 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{2}{3}(w_1 - w_2)(3 + \kappa^2) \quad (6.11)$$

und damit die Normalspannungen

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{2\kappa^2}{3}(2w_1 + w_2) &= \frac{2\kappa^2}{3}(2c_{10} + 6c_{30}\kappa^4 + c_{01}), \\ \sigma_{22} &= -\frac{2\kappa^2}{3}(w_1 + 2w_2) &= -\frac{2\kappa^2}{3}(c_{10} + 3c_{30}\kappa^4 + 2c_{01}), \\ \sigma_{33} &= \frac{2\kappa^2}{3}(-w_1 + w_2) &= \frac{2\kappa^2}{3}(-c_{10} - 3c_{30}\kappa^4 + c_{01}). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Wir kommen nunmehr auf die Formulierung (4.67) zur Berücksichtigung nahezu inkompressiblen Materialverhaltens zu sprechen und betrachten deren Auswirkung auf die Materialantwort. Hierzu betrachten wir zunächst die einfache Scherung nach Gl.(6.3) sowie (6.4) und setzen diese in Gl.(4.82) bzw. (4.85) ein. Wegen $U'(1) = 0$ entfällt die Verzerrungsenergie der volumenändernden Deformation und es folgen mit (6.6) die Gleichungen (6.12). Die gewählte Deformation der einfachen Scherung führt daher bei kompressiblem Materialverhalten auf das Problem des verallgemeinerten ebenen Verzerrungszustandes, d.h. in Dickenrichtung treten keine Verzerrungen jedoch Spannungen $\sigma_{33} \neq 0$ auf. Daher müssen bei einem Vergleich der analytischen Lösung der einfachen Scherung mit der zugehörigen numerischen Lösung einer FE-Berechnung die richtigen Spannungsrandbedingungen zur Bestimmung des unbestimmten Druckes p herangezogen werden. Abb. 6.15(a) zeigt eine Vernetzungsmöglichkeit der einfachen Scherung mit

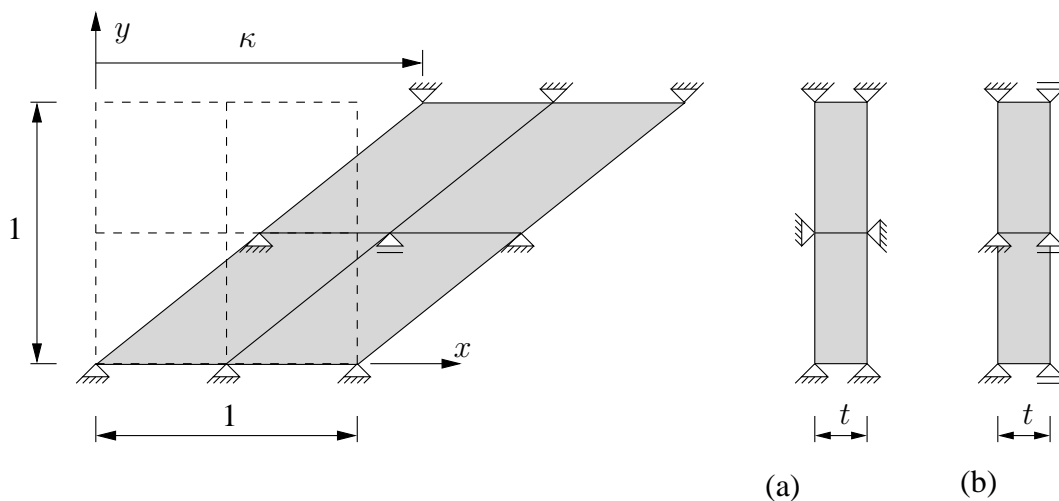


Abbildung 6.15: Vier achtknotige Volumenelemente und deren Randbedingungen bei einfacher Scherung

Volumenelementen. Eine Berechnung mit den Verschiebungselementen aus Abschnitt 5.1.4 liefert genau die Antwort (6.12). Analoge Ergebnisse erhält man bei Scheibenelementen für den ebenen Verzerrungszustand. Das heißt, bei der Wahl der Randbedingungen gemäß Abb. 6.15(a) muß für die analytische (inkompressible) Lösung die Spannungsrandbedingung $\text{tr } \mathbf{T} = 0$ angenommen werden, damit gleiche Ergebnisse gefunden werden. Hierbei geht die Wahl des Kompressionsmoduls K in die Lösung nicht ein.

Eine Alternative sind die Randbedingungen aus Abb. 6.15(b), welche einen ebenen Spannungszustand repräsentieren. In diesem Fall hat der Kompressionsmodul einen wesentlichen Einfluß. Die Lösung muß für $K \rightarrow \infty$ gegen die analytische Lösung (6.5) konvergieren. In Tab. 6.1 sind diese Ergebnisse für $\kappa = 5$, $t = 1$ [mm] sowie $c_{10} = 0.264$ [MPa], $c_{01} = 0.5$ [MPa]

Tabelle 6.1: Einfluß des Kompressionsmoduls K auf die einfache Scherung. Darstellung der relativen Fehler $\varepsilon(\cdot)$ [%] zur Lösung (6.5).

Analytische Lösung	$K = 10^4$ [MPa]	$K = 10^5$ [MPa]	$K = 10^6$ [MPa]
$\sigma_{12} = 363.89$ [MPa]	14.20	1.70	0.17
$\sigma_{11} = 1794.45$ [MPa]	14.76	1.77	0.18
$\sigma_{22} = -25.00$ [MPa]	25.60	3.16	0.32
$J = 1$	5.34	0.58	0.06

und $c_{30} = 0.019$ [MPa] eingetragen. Die dort vorkommenden Werte sind die relativen Fehler

$$\varepsilon(x) = \frac{|x - x_{\text{exakt}}|}{|x_{\text{exakt}}|} \times 100. \quad (6.13)$$

Dabei wird offensichtlich, daß sehr große Kompressionsmoduli gewählt werden müssen, um die analytische Lösung zu erreichen. Weitere Rechnungen zeigen, daß dies von der Deformationsgröße abhängt. Bei kleineren Scherwerten κ sind die Ergebnisse genauer.

6.4 Scherung einer Scheibe

Im Gegensatz zur einfachen Scherung des vorherigen Abschnittes sind in einem (mehr) realen Schertest die Oberflächen in Scherrichtung und normal dazu spannungsfrei. Wir wählen als Materialparameter die eingangs zu Kapitel 6 gewählten Größen. Am oberen Ende der Probe, siehe Abb. 6.17, bringen wir die Verschiebungen u auf und erreichen nach 5 [s] die maximale Kopfverschiebung⁶ von $u_{\text{max}} = 20$ [mm]. Dies halten wir anschließend für 10000 [s] konstant, siehe Abb. 6.16. Die zugehörigen Randbedingungen sowie die Elementierung kann Abb. 6.17 entnommen werden, wobei wir zwei Elemente in Dickenrichtung verwenden.⁷ Die Probe ist 20 [mm] \times 20 [mm] mit einer Dicke von 4 [mm], wobei wir dabei die Symmetrie ausnutzen. In der ersten Berechnung wählen wir die Fehlertoleranzen $\epsilon_a(\mathbf{u}) = 10^{-5}$ [mm], $\epsilon_r(\mathbf{u}) = \epsilon_r(\mathbf{q}) = 10^{-5}$ und $\epsilon_a(\mathbf{q}) = 10^{-8}$, siehe Gl.(2.92) und verwenden das Verfahren von Cash 3(2) nach Tab. 2.9. Obwohl lokal hochgradig nichtlineare Vorgänge stattfinden, ist der Verlauf der Scherkraft im Scherkraft-Verschiebungsdiagramm 6.18 während der Belastung näherungsweise linear und sie “relaxiert” während der Haltzeit von 10000 [s]

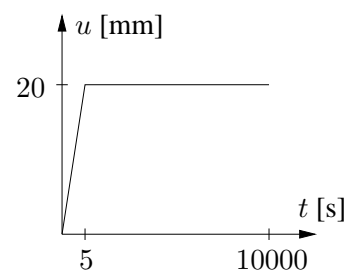


Abbildung 6.16: Randverschiebungsverlauf bei der Scherung einer Scheibe

⁶Dies entspricht einem Scherparameter von $\kappa = 1$, siehe Abschnitt 6.3.

⁷Natürlich müßten für eine genauere Berechnung erheblich mehr Elemente gewählt werden, zumal in den Ecken eine Singularität vorliegt. Das Interesse liegt hier jedoch in der Zeitdiskretisierung.

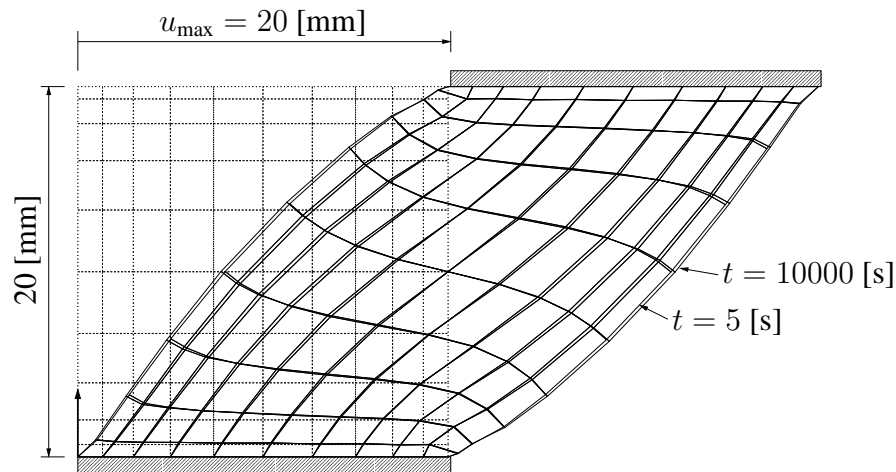


Abbildung 6.17: Randbedingungen, Elementierung und Konfigurationen der Scherung einer Scheibe

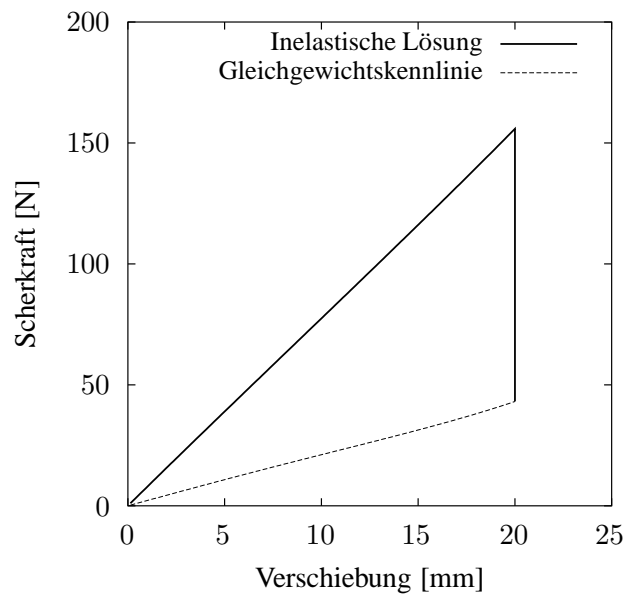


Abbildung 6.18: Scherkraft-Verschiebungsverhalten

auf die Gleichgewichtskennlinie, die durch eine rein elastische Berechnung erzeugt wurde. Innerhalb der Probe findet keine *reine* Relaxation statt, wie die unterschiedlichen Deformationen der Netze aus Abb. 6.17 verdeutlichen. Dieser Effekt ist ein Resultat aller lokalen Eigenschaften des Materialmodells. Die Scherkraft nimmt zwar zunächst stark zu, siehe Abb. 6.19, zeigt dann ein relaxationsähnliches Verhalten während der Haltezeit. Abb. 6.20 zeigt das Schrittweitenverhalten des zeitadaptiven Verfahrens, wobei wir als Anfangsschrittweite $\Delta t_0 = 0.04$ [s] wählen. Während die Schrittweite nahezu konstant während der Belastungsphase bleibt, ändert sie sich stark während der Haltezeit. Dort steigt die Schrittweite extrem an, was darauf zurückzuführen ist, daß immer weniger Zustandsänderungen im betrachteten Körper auftreten. Ein nicht-schrittweitengesteuertes Verfahren kann solche Prozesse mit stark unterschiedlichen Zeitskalen kaum befriedigen.

An dieser Stelle muß erwähnt werden, daß eine rein zeitadaptive Berechnung natürlich nicht gegen die “exakte” Lösung konvergiert. Hierzu müßte eine gekoppelte raum- und zeitadaptive Berechnung erfolgen. Insbesondere liefert eine hohe Fehlerordnung des Zeitintegrators keine ho-

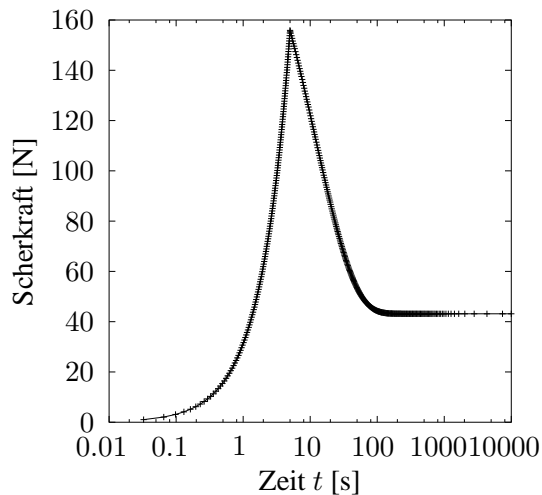


Abbildung 6.19: Scherkraft-Zeitverlauf

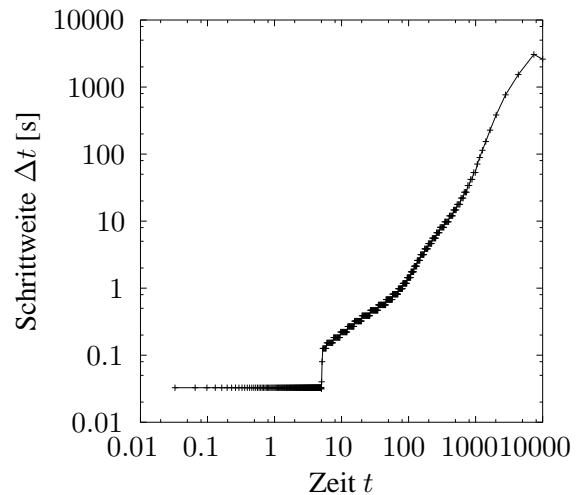


Abbildung 6.20: Schrittweitenverhalten

he Fehlerordnung des Gesamtproblems, vor allem bei Verwendung einer groben Elementierung mit niedriger Ansatzordnung. Stellvertretend für Vorgehensweisen der Raum-Zeitadaptivität sei auf ELLSIEPEN [45] verwiesen.

Wir betrachten im folgenden nur den Belastungspfad, $t \leq 5$ [s]. In dieser Untersuchung halten wir die Schrittweite konstant und variieren die Schrittweite für das implizite Euler-Verfahren ($\Delta t = 0.01, 0.001$ [s]), für das Verfahren von Ellsiepen ($\Delta t = 0.018, 0.002$ [s]) sowie das Verfahren von Alexander⁸ ($\Delta t = 0.03, 0.003$ [s]). Die Verfahren sind ein-, zwei- und dreistufig, $s = 1, 2, 3$, und haben die Ordnung $p = 1, 2, 3$. Um ein Aufwands-Genauigkeitsdiagramm zu erhalten, siehe Abb. 6.21, tragen wir den relativen Fehler der Scherkraft, $\varepsilon(\|\mathbf{F}_s\|)$ [%], siehe

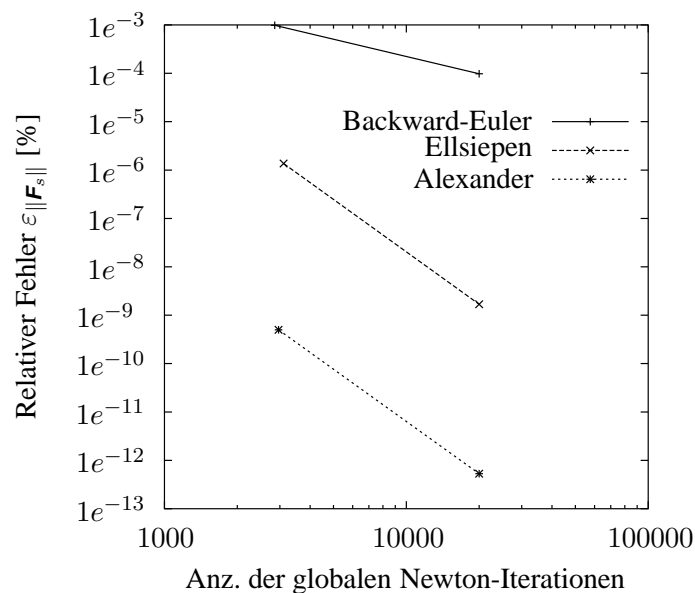


Abbildung 6.21: Aufwands-Genauigkeitsdiagramm beim Schertest

Gl.(6.13), auf die Ordinate und die Anzahl der globalen Multilevel-Newton Iterationsschritte

⁸Das Verfahren von Cash 3(2) ist die Erweiterung der eingebetteten Schrittweitenvorgehensweise des Verfahrens von Alexander 3-ter Ordnung, siehe Abschnitt 2.3.1.

(m), siehe Tab. 2.11, auf die Abszisse. Dies entspricht der Anzahl der global zu lösenden linearen Gleichungssysteme. Die Referenzlösung entsteht durch das 5-stufige Verfahren von Hairer & Wanner, siehe Tab. 2.9, mit der Ordnung $p = 4$ bei einer konstanten Schrittweite von $\Delta t_0 = 0.0025$ [s]. In Abb. 6.21 wird erkennbar, daß bei gleichem Rechenaufwand, die höhergenauen Verfahren erheblich geringere Integrationsfehler aufweisen, d.h. bei glatten Problemen sind Verfahren höherer Ordnung Verfahren erster Ordnung vorzuziehen.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Eine spezielle Vorgehensweise zur Behandlung von Anfangsrandwertaufgaben im Zusammenhang mit inelastischen Materialmodellen im Rahmen der Methode der finiten Elemente hat sich mittlerweile sehr stark verbreitet. In dieser werden auf Elementebene bzw. Gauß-Punkt Ebene die Materialgleichungen, die in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1-ter Ordnung vorliegen, zeitlich integriert. Aus der Raumdiskretisierung entsteht ein nichtlineares Gleichungssystem, welches meist mit einem Newton-Verfahren gelöst wird. Zwischen diesen *lokalen* und *globalen* Ebenen liegen natürlich Koppelungen vor. Die Frage die dabei auftritt, bezieht sich auf den Zusammenhang zur Lösung von Anfangsrandwertproblemen mit Verfahren der Numerischen Mathematik. Zu diesem Thema gibt es wenige Arbeiten in der Angewandten Mathematik. Die vorliegende Arbeit hat daher eines dieser Verfahren aufgegriffen und auf ein Modell der finiten Viskoelastizität angewendet. Dabei werden eine Reihe von angrenzenden Fragestellungen angesprochen und diskutiert.

So sind konkret steif-genaue diagonal-implizite Runge-Kutta Verfahren in Verbindung mit einem Mehrebenen-Newton Verfahren auf die raumdiskretisierten Gleichungen, die im Zusammenhang mit der Methode der finiten Elemente bei Problemstellungen inelastischer Materialgleichungen auftreten, angewendet worden. Als Materialgleichungen verwendeten wir ein Überspannungsmodell der finiten Viskoelastizität, welches die Spannungen additiv in Gleichgewichtsspannungen, dargestellt durch eine Beziehung der Hyperelastizität, und Überspannungen, die sich in Abhängigkeit von Evolutionsgleichungen — gewöhnliche Differentialgleichungen 1-ter Ordnung — für die inelastischen Dehnungen entwickeln, aufspalten. Insbesondere die dabei auftretenden Beziehungen der Hyperelastizität, die auf einem Split in volumenerhaltenden und volumenändernden Größen basieren, unterliegen den hier durchgeführten Untersuchungen. Hierzu gehört das Studium der numerischen Lösung des Eigenwertproblems von Tensoren 2-ter Stufe (Sensitivitätsuntersuchung) sowie die Stabilitätsbetrachtung des verallgemeinerten Ogden-Modells, der verallgemeinerten Polynomelastizität (Rivlin-Elastizität) und des modifizierten Arruda & Boyce Modells. In diesem Zusammenhang erfolgte eine Zusammenstellung der in der Literatur auftretenden Modelle der verallgemeinerten Polynomelastizität sowie von Formänderungsenergien des volumenändernden Anteils. Das thermodynamische konsistente Modell der finiten Viskoelastizität beeinflusst dabei lediglich den volumenändernden Anteil der Deformation und beinhaltet einen Ansatz für die Berücksichtigung nichtlinearer Geschwindigkeitsabhängigkeit.

Einleitend sind die steif-genauen diagonal-impliziten Runge-Kutta Verfahren mit der Anwendung auf Algebra-Differentialgleichungssysteme motiviert worden. Das dabei auftretende blockstrukturierte nichtlineare Gleichungssystem wurde entgegen den Angaben der Literatur

mit einem Mehrebenen-Newton Verfahren (Multilevel-Newton Verfahren) gelöst und der Unterschied zum klassischen Newton-Raphson Verfahren klargestellt. Wir beschäftigten uns schließlich mit der Raumdiskretisierung der Methode der finiten Elemente im Zusammenhang quasi-statischer Prozesse, die auf Algebra-Differentialgleichungssysteme führt. Dabei sind die Knotenverschiebungen der Struktur die algebraischen Variablen und alle Inneren Variablen an den Gauß-Punkten die differentiellen Variablen. Diese Darstellung erfolgte für kleine und finite Deformationen basierend auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen sowie den Variationsgleichungen eines Dreifeld-Funktional für finite Deformationen. Hierbei ist besonderer Wert in einer klaren Trennung in bekannte und unbekannte Knotenverschiebungen sowie der Formulierung der Verschiebungssteuerung gelegt worden.

Die dargelegte Vorgehensweise wird an Beispielen für große Deformationen — homogener Zug, Zug einer Elastomerprobe sowie der Scherung einer Scheibe — ausgetestet und der Unterschied verschiedener Zeitintegratoren untersucht. Dabei wurde offensichtlich, daß Verfahren höherer Ordnung bei "glatten" Problemen im Vergleich zu Verfahren niedriger Ordnung von Vorteil sein können. Bei gleichem Aufwand im Vergleich zu Verfahren erster Ordnung liefern sie erheblich genauere Ergebnisse. Desweiteren sind diese zeitadaptiven Verfahren bei Prozessen mit unterschiedlichen Zeitskalen (Relaxation- oder Kriechprozesse) von enormen Vorteil, da sie, unter der Kontrolle des lokalen Integrationsfehlers, die Entscheidung über die richtige Schrittweite dem Nutzer abnehmen. Es wurde dabei auch klar, daß diese Vorgehensweise in herkömmliche (implizite) FE-Codes ohne starke Änderungen implementierbar ist.

Ausblickend kann gesagt werden, daß die in dieser Arbeit dargelegte Vorgehensweise einer konsequenten Umsetzung in Raum- und Zeitdiskretisierung, insbesondere der Anwendung weiterer Verfahren der Numerischen Mathematik zur Durchführung der Zeitdiskretisierung und der Lösung der dabei auftretenden blockstrukturierten Gleichungssysteme, auf dynamische und thermomechanisch gekoppelte Prozesse erweitert werden kann. Gleichfalls sind weitere Untersuchungen für "nicht-glatte" Fragestellungen — Visko- und Elastoplastizität mit Fallunterscheidungen — sowie gekoppelte zeit- und ortsadaptive Verfahren notwendig.

Anhang A

Mathematische Hilfsmittel

A.1 Eigenwertproblem von Tensoren 2-ter Stufe

A.1.1 Berechnung der Eigenvektoren

Eine konkrete Darstellung eines Verfahrens zur Berechnung von Eigenvektoren von 3×3 -Matrizen, welches nicht auf einer iterativen Methode basiert, konnte der Autor in der Literatur nicht finden. Daher wird ein solcher Algorithmus im folgenden hergeleitet. Die Theorie hierzu gilt als bekannt, jedoch interessiert die algorithmische Umsetzung, die durch die Fallunterscheidungen in einfache, doppelte und dreifache Eigenwerte sowie möglicher Rangabfälle geprägt ist.

Bei drei verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$ hat die Matrix $\mathbf{B} - \lambda_k \mathbf{I}$ höchstens den Rang 2 und führt auf drei verschiedene Eigenvektoren aus den zugehörigen drei unterbestimmten Gleichungssystemen mit jeweils drei Gleichungen. Hierbei wird folgende Vorgehensweise zur Bestimmung der Eigenvektoren vorgeschlagen: Man setzt den ersten Koeffizienten aus dem Eigenvektor gleich Eins und löst zwei Gleichungen zur Berechnung der verbleibenden unbekanntenen Komponenten des Eigenvektors. Je nachdem welche der Gleichungen linear abhängig ist, muß das verwendete Verfahren herausfinden. Hierbei legen wir zunächst $v_1 = 1$ fest,

$$\begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{23} & b_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

und lösen das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{23} & b_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -b_{12} \\ -b_{31} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

mit der Lösung

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{b_{31}b_{23} - (b_{33} - \lambda)b_{12}}{(b_{22} - \lambda)(b_{33} - \lambda) - b_{23}^2} \\ \frac{b_{12}b_{23} - (b_{22} - \lambda)b_{31}}{(b_{22} - \lambda)(b_{33} - \lambda) - b_{23}^2} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Verschwindet hingegen der Nenner, $(b_{22} - \lambda)(b_{33} - \lambda) - b_{23}^2 = 0$, so waren gerade diese beiden

Gleichungen linear abhängig. Man kann dann $v_2 = 1$ wählen und erhält aus

$$\begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{23} & b_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ 1 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

zum Beispiel die verbleibenden Gleichungen

$$\begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & b_{31} \\ b_{23} & b_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -b_{12} \\ -b_{23} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Hieraus resultiert die Lösung

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{b_{23}b_{31} - (b_{33} - \lambda)b_{12}}{(b_{11} - \lambda)(b_{33} - \lambda) - b_{31}^2} \\ \frac{b_{12}b_{31} - (b_{11} - \lambda)b_{23}}{(b_{11} - \lambda)(b_{33} - \lambda) - b_{31}^2} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Ist auch in Gl.(A.3) die Koeffizientendeterminante gleich null, $(b_{11} - \lambda)(b_{33} - \lambda) - b_{31}^2 = 0$, so setzen wir $v_3 = 1$ und lösen aus

$$\begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{23} & b_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

die Gleichungen

$$\begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -b_{31} \\ -b_{23} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

womit wir die Lösung

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{b_{23}b_{12} - (b_{22} - \lambda)b_{31}}{(b_{11} - \lambda)(b_{22} - \lambda) - b_{12}^2} \\ \frac{b_{31}b_{12} - (b_{11} - \lambda)b_{23}}{(b_{11} - \lambda)(b_{22} - \lambda) - b_{12}^2} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

erhalten. Dieses Vorgehen muß für jeden Eigenwert durchgeführt werden, so daß drei verschiedene Eigenvektoren berechenbar sind. Dabei ist es sinnvoll nur die beiden ersten Eigenvektoren nach obigem Schema zu berechnen und den dritten, aufgrund der Orthogonalitätsbedingung, aus dem Vektorprodukt der ersten beiden Vektoren zu bestimmen.

Bei zwei gleichen Eigenwerten entsteht vorerst ein Eigenvektor zugehörig zum einfachen Eigenwert. Durch die doppelten Eigenwerte entsteht ein zusätzlicher Rangabfall der Matrix $\mathbf{B} - \lambda_k \mathbf{I}$, so daß ein weiterer Koeffizient des Eigenvektors gewählt werden muß. Daraus entstehen aus den obigen drei inhomogenen Gleichungssystemen (A.1), (A.3) und (A.5) wiederum je zwei Gleichungen für den übrigen Koeffizienten des Eigenvektors, die je nach weiteren Rangabfällen durch die folgenden Gleichungen bestimmt werden können:

$$v_1 = v_2 = 1:$$

$$\begin{bmatrix} b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{23} & b_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -b_{12} \\ -b_{31} \end{Bmatrix} \implies v_3 = \frac{-b_{23} - b_{31}}{b_{33} - \lambda} \quad (\text{A.7})$$

$$v_2 = v_3 = 1:$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & b_{31} \\ b_{31} & b_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -b_{12} \\ -b_{23} \end{Bmatrix} \implies v_1 = \frac{-b_{31} - b_{12}}{b_{11} - \lambda} \quad (\text{A.8})$$

$$v_3 = v_1 = 1:$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -b_{31} \\ -b_{23} \end{Bmatrix} \implies v_2 = \frac{-b_{12} - b_{23}}{b_{22} - \lambda} \quad (\text{A.9})$$

Der dritte Eigenvektor kann wieder über die Forderung, daß die Eigenvektoren ein Orthogonalsystem bilden sollen, über das Kreuzprodukt gebildet werden.

Für drei gleiche Eigenwerte, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ liegt ein dreifacher Rangabfall der Matrix $\mathbf{B} - \lambda_k \mathbf{I}$ vor. Hierbei erhält man drei beliebige Eigenvektoren. Es ist üblich die ursprüngliche kartesische Basis ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) zu verwenden, so daß $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ist.

Im Hinblick auf die Einführung der orthogonalen Matrizen $\mathbf{Q} = [\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3]$, siehe Abschnitt 2.1, benötigt man noch die normierten Eigenvektoren, die bei allen obigen Berechnungen nachträglich eingeführt werden müssen,

$$\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|} \text{ mit } \|\mathbf{v}_i\| = \sqrt{v_{(i)1}^2 + v_{(i)2}^2 + v_{(i)3}^2}. \quad (\text{A.10})$$

In den Tab. A.1 und A.2 ist das Verfahren nochmals schematisch dargestellt.

A.1.2 Sensitivität des Eigenwertproblems

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Sensitivität des symmetrischen Eigenwertproblems (2.1) bzw. der Lösung (2.6), d.h. wie ändern sich die Eigenwerte bei einer Störung der Matrix \mathbf{B} . Hierzu bilden wir das Gateaux-Differential¹

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{B}} \lambda_k(\mathbf{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}), \mathbf{II}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}), \mathbf{III}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}))[\mathbf{H}] &= D_{\mathbf{I}_{\mathbf{B}}} \lambda_k(\mathbf{I}_{\mathbf{B}}, \mathbf{II}_{\mathbf{B}}, \mathbf{III}_{\mathbf{B}})[D_{\mathbf{B}} \mathbf{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B})[\mathbf{H}]] + \\ &+ D_{\mathbf{II}_{\mathbf{B}}} \lambda_k(\mathbf{I}_{\mathbf{B}}, \mathbf{II}_{\mathbf{B}}, \mathbf{III}_{\mathbf{B}})[D_{\mathbf{B}} \mathbf{II}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B})[\mathbf{H}]] + \\ &+ D_{\mathbf{III}_{\mathbf{B}}} \lambda_k(\mathbf{I}_{\mathbf{B}}, \mathbf{II}_{\mathbf{B}}, \mathbf{III}_{\mathbf{B}})[D_{\mathbf{B}} \mathbf{III}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B})[\mathbf{H}]] = \\ &= \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{I}_{\mathbf{B}}} h_1 + \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{II}_{\mathbf{B}}} h_2 + \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{III}_{\mathbf{B}}} h_3 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

mit

$$\begin{aligned} h_1 &\equiv D_{\mathbf{B}} \mathbf{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B})[\mathbf{H}] = \mathbf{I} \cdot \mathbf{H}, \\ h_2 &\equiv D_{\mathbf{B}} \mathbf{II}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B})[\mathbf{H}] = (\mathbf{I}_{\mathbf{B}} \mathbf{I} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{H}, \\ h_3 &\equiv D_{\mathbf{B}} \mathbf{III}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B})[\mathbf{H}] = \mathbf{III}_{\mathbf{B}} \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen in Gl.(A.11) lauten

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{I}_{\mathbf{B}}} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2\mathbf{I}_{\mathbf{B}}}{p} \cos \alpha_k - \frac{2}{3} p \sin \alpha_k \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{I}_{\mathbf{B}}} \right), \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{II}_{\mathbf{B}}} = \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{p} \cos \alpha_k - \frac{2}{3} p \sin \alpha_k \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{II}_{\mathbf{B}}} \right), \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{III}_{\mathbf{B}}} = -\frac{2}{3} p \sin \alpha_k \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{III}_{\mathbf{B}}}, \quad (\text{A.14})$$

¹Im Falle, daß eine der Invarianten $\mathbf{I}_{\mathbf{B}}$, $\mathbf{II}_{\mathbf{B}}$ bzw. $\mathbf{III}_{\mathbf{B}}$ verschwindet, müssen die Untersuchungen analog durchgeführt werden.

Tabelle A.1: Berechnung der Matrix der Eigenvektoren $\mathbf{Q} = [\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3]$

Gegeben $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
Überprüfe die Anzahl der mehrfachen Eigenwerte
BERECHNE
$d_1 = \lambda_1 - \lambda_2 $
$d_2 = \lambda_2 - \lambda_3 $
$d_3 = \lambda_3 - \lambda_1 $
Dreifache Eigenwerte
IF $((d_1 < \text{tol}) \text{ und } (d_2 < \text{tol}) \text{ und } (d_3 < \text{tol}))$ THEN $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ RETURN
Doppelte Eigenwerte
IF $(d_1 < \text{tol})$ THEN
BERECHNE $\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_1$ gemäß Tab. A.2 sowie $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_1$
ELSE IF $(d_2 < \text{tol})$ THEN
BERECHNE $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ gemäß Tab. A.2 sowie $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$
ELSE IF $(d_3 < \text{tol})$ THEN
BERECHNE $\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1$ gemäß Tab. A.2 sowie $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$
Einfache Eigenwerte
ELSE
BERECHNE $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ gemäß Tab. A.2 sowie $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$
END IF
RETURN

wobei die Abkürzungen $p = \sqrt{\mathbf{I}_B^2 - 3\mathbf{II}_B}$ und $\alpha_k = \frac{1}{3}(\beta + (k-1)2\pi)$ eingeführt werden. Als letztes müssen wir noch die Ableitungen $\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{I}_B}$, $\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{II}_B}$ bzw. $\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{III}_B}$ für β aus Gl.(2.7) bilden. Wegen der Form $\beta = \arccos\left(\frac{g(\mathbf{I}_B, \mathbf{II}_B, \mathbf{III}_B)}{h(\mathbf{I}_B, \mathbf{II}_B)}\right)$, mit

$$g(\mathbf{I}_B, \mathbf{II}_B, \mathbf{III}_B) \equiv 2\mathbf{I}_B^3 - 9\mathbf{I}_B\mathbf{II}_B + 27\mathbf{III}_B, \quad h(\mathbf{I}_B, \mathbf{II}_B) \equiv 2\sqrt{(\mathbf{I}_B^2 - 3\mathbf{II}_B)^3}$$

gilt

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{g}{h}\right)^2}} \frac{\frac{\partial g}{\partial x} h - g \frac{\partial h}{\partial x}}{h^2}, \quad x = \mathbf{I}_B, \mathbf{II}_B \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{III}_B} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{g}{h}\right)^2}} \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{III}_B}. \quad (\text{A.16})$$

Tabelle A.2: Eigenvektorberechnung bei gegebenem Eigenwert λ . Die Reihenfolge der Berechnung hängt von der Nummer des Eigenwertes ab.

Gegeben: $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sowie λ	
BERECHNE	$D = (b_{22} - \lambda)(b_{33} - \lambda) - b_{23}^2$
IF ($ D > \text{tol}$) THEN	$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} D \\ b_{31}b_{23} - (b_{33} - \lambda)b_{12} \\ b_{12}b_{23} - (b_{22} - \lambda)b_{31} \end{Bmatrix}$ } GOTO 1
BERECHNE	$D = (b_{11} - \lambda)(b_{33} - \lambda) - b_{31}^2$
IF ($ D > \text{tol}$) THEN	$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} b_{23}b_{31} - (b_{33} - \lambda)b_{12} \\ D \\ b_{12}b_{31} - (b_{11} - \lambda)b_{23} \end{Bmatrix}$ } GOTO 1
BERECHNE	$D = (b_{11} - \lambda)(b_{22} - \lambda) - b_{12}^2$
IF ($ D > \text{tol}$) THEN	$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} b_{23}b_{12} - (b_{22} - \lambda)b_{31} \\ b_{31}b_{12} - (b_{11} - \lambda)b_{23} \\ D \end{Bmatrix}$ } GOTO 1
BERECHNE	$D = b_{33} - \lambda$
IF ($ D > \text{tol}$) THEN	$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} D \\ D \\ -b_{23} - b_{31} \end{Bmatrix}$ } GOTO 1
BERECHNE	$D = b_{11} - \lambda$
IF ($ D > \text{tol}$) THEN	$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} -b_{31} - b_{12} \\ D \\ D \end{Bmatrix}$ } GOTO 1
BERECHNE	$D = b_{22} - \lambda$
IF ($ D > \text{tol}$) THEN	$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} D \\ -b_{12} - b_{23} \\ D \end{Bmatrix}$ } GOTO 1
1	$n = \ \mathbf{v}\ = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
	$\mathbf{n} = \frac{1}{n} \mathbf{v}$

An den Gln.(A.12) und (A.13) ist nun erkennbar, daß für

$$\mathbf{I}_B^2 - 2\mathbf{II}_B \longrightarrow 0 \quad (\text{A.17})$$

die Ableitungen $\frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{I}_B}$ und $\frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{II}_B}$ unbegrenzt wachsen können. In den Gln.(A.15) und (A.16) führt auch der Fall $h \approx g$,

$$2\mathbf{I}_B^3 - 9\mathbf{I}_B\mathbf{II}_B + 27\mathbf{III}_B \approx 2(\mathbf{I}_B^2 - 3\mathbf{II}_B)^{3/2} \quad (\text{A.18})$$

zu numerischen Schwierigkeiten. Weitere Fälle können höchstens für sehr große Invarianten \mathbf{I}_B , \mathbf{II}_B , bzw. \mathbf{III}_B auftreten, was hier nicht gesondert untersucht wird.

Die Verwendung der arctan-Funktion anstatt der arccos-Funktion vermeidet zunächst die Schwierigkeit, daß man bei $\arccos \frac{g}{h}$ für $g/h > 1$ außerhalb des Definitionsbereiches gerät. Dieser Fall kann aufgrund von Rechenungenauigkeiten durchaus auftreten. Trotzdem ändert sich damit die Sensitivität des Eigenwertproblems nicht.

A.2 Matrizarstellung

In diesem Abschnitt überführen wir die tensorielle Notation in die Matrizenschreibweise, da wir zum einen kartesische Koordinaten vorliegen haben und zum anderen die Symmetrien der Tensoren ausnutzen wollen. Dies dient im wesentlichen der Rechenzeiterparnis und ist notwendig im Rahmen der besonderen Tensornotation der Tensoren 4-ter Stufe aus Abschnitt 2.2. Zwei Punkte sind hierbei zu berücksichtigen, nämlich die Ausnutzung der Symmetrie der Tensoren 2-ter Stufe sowie deren Einfluß auf das Skalarprodukt, welche im Variationsprinzip der Finite-Elemente Formulierung auftritt.

- Bei der Ausnutzung der Symmetrie von Tensoren 2-ter Stufe, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, tragen wir die Koeffizienten des Tensors

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ & a_{22} & a_{23} \\ \text{sym.} & & a_{33} \end{bmatrix} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

folgendermaßen in Spaltenmatrizen ein:

$$\mathbf{A}^T = \{a_{11} \ a_{22} \ a_{33} \ a_{12} \ a_{23} \ a_{31}\}$$

- Des weiteren tritt im Variationsprinzip das Skalarprodukt zweier symmetrischer Tensoren auf, so daß zusätzlich die korrekte Ausführung des Produktes erfolgen muß. Aus den symmetrischen Tensoren \mathbf{T} sowie \mathbf{E} mit $\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{E}$ erfordert das Skalarprodukt

$$\alpha = \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}\mathbf{E}$$

die richtige Berechnung durch

$$\alpha = \mathbf{E}^T \mathbf{C} \mathbf{E}$$

mit $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^6$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$.

Zur Beschreibung der Beeinflussung der Matrizarstellung bei einer Symmetrienausnutzung, gehen wir in zwei Schritten vor. Zunächst überführen wir die Tensoren in (9×1) - bzw. (9×9) -Matrizen und behandeln hierbei das Produkt $\mathbf{C} \mathbf{E}$. Hieraufhin reduzieren wir diese Matrizen aufgrund der vorliegenden Symmetrien auf (6×1) - bzw. (6×6) -Matrizen. Hierbei interessieren uns vor allem die Produkte $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$ sowie $[\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}]^{T_{23}}$. Anschließend wird das Skalarprodukt betrachtet.

A.2.1 Überführung in (6×6) -Matrizen

Wir ordnen die Tensoren zweiter Stufe in Spaltenmatrizen der Dimension \mathbb{R}^9 und die Koeffizienten eines vierstufigen Tensors in einer (9×9) -Matrix an:

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{13} \\ T_{21} \\ T_{32} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1113} & C_{1121} & C_{1132} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2213} & C_{2221} & C_{2232} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3313} & C_{3321} & C_{3332} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1213} & C_{1221} & C_{1232} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2313} & C_{2321} & C_{2332} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3113} & C_{3121} & C_{3132} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1313} & C_{1321} & C_{1332} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2112} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2113} & C_{2121} & C_{2132} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3212} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3213} & C_{3221} & C_{3232} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{23} \\ E_{31} \\ E_{13} \\ E_{21} \\ E_{32} \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Falls eine Symmetrie in dem Tensor \mathbf{T} vorliegt ($T_{12} = T_{21}$, $T_{23} = T_{32}$, $T_{31} = T_{13}$), so liefern die letzten drei Gleichungen keine neue Information und sie können entfallen:

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{23} \\ T_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1113} & C_{1121} & C_{1132} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2213} & C_{2221} & C_{2232} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3313} & C_{3321} & C_{3332} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1213} & C_{1221} & C_{1232} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2313} & C_{2321} & C_{2332} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3113} & C_{3121} & C_{3132} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{23} \\ E_{31} \\ E_{13} \\ E_{21} \\ E_{32} \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Liegt weiterhin eine Symmetrie in dem Tensor \mathbf{E} vor ($E_{12} = E_{21}$, $E_{23} = E_{32}$, $E_{31} = E_{13}$), so tritt eine weitere Reduzierung auf

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{23} \\ T_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} + C_{1121} & C_{1123} + C_{1132} & C_{1131} + C_{1113} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} + C_{2221} & C_{2223} + C_{2232} & C_{2231} + C_{2213} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} + C_{3321} & C_{3323} + C_{3332} & C_{3331} + C_{3313} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} + C_{1221} & C_{1223} + C_{1232} & C_{1231} + C_{1213} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} + C_{2321} & C_{2323} + C_{2332} & C_{2331} + C_{2313} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} + C_{3121} & C_{3123} + C_{3132} & C_{3131} + C_{3113} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{23} \\ E_{31} \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

ein. Wir betrachten diese Darstellung für einen Tensor 4-ter Stufe der Form $\mathcal{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ sowie $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$. Die Koeffizienten von \mathcal{C} ergeben sich hierbei aus $c_{ijkl} = a_{ij}b_{kl}$. Die Koeffizientenmatrix in Gl.(A.21) hat dann die Darstellung

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{33} & 2a_{11}b_{12} & 2a_{11}b_{23} & 2a_{11}b_{31} \\ a_{22}b_{11} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{33} & 2a_{22}b_{12} & 2a_{22}b_{23} & 2a_{22}b_{31} \\ a_{33}b_{11} & a_{33}b_{22} & a_{33}b_{33} & 2a_{33}b_{12} & 2a_{33}b_{23} & 2a_{33}b_{31} \\ a_{12}b_{11} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{33} & 2a_{12}b_{12} & 2a_{12}b_{23} & 2a_{12}b_{31} \\ a_{23}b_{11} & a_{23}b_{22} & a_{23}b_{33} & 2a_{23}b_{12} & 2a_{23}b_{23} & 2a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11} & a_{31}b_{22} & a_{31}b_{33} & 2a_{31}b_{12} & 2a_{31}b_{23} & 2a_{31}b_{31} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

Diese Matrix erhält man auch durch ein spezielles dyadisches Produkt. Durch die Anordnung der Koeffizienten der "Tensoren 2-ter Stufe" in der Form

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \\ a_{12} \\ a_{23} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ b_{33} \\ b_{12} \\ b_{23} \\ b_{31} \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

sowie der Einführung der Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

berechnet sich die Koeffizientenmatrix (A.22) durch das Produkt

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \quad \begin{array}{l} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T \mathbf{M}. \quad (\text{A.25})$$

Ein Tensor vierter Stufe mit der Transposition T_{23} hingegen bedarf einer genaueren Untersuchung. Wir betrachten das Produkt $T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$ und betrachten wieder zunächst die (9×9) -Darstellung:

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{13} \\ T_{21} \\ T_{32} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1212} & C_{1313} & C_{1112} & C_{1213} & C_{1311} & C_{1113} & C_{1211} & C_{1312} \\ C_{2121} & C_{2222} & C_{2323} & C_{2122} & C_{2223} & C_{2321} & C_{2123} & C_{2221} & C_{2322} \\ C_{3131} & C_{3232} & C_{3333} & C_{3132} & C_{3233} & C_{3331} & C_{3133} & C_{3231} & C_{3332} \\ C_{1121} & C_{1222} & C_{1323} & C_{1122} & C_{1223} & C_{1321} & C_{1123} & C_{1221} & C_{1322} \\ C_{2131} & C_{2232} & C_{2333} & C_{2132} & C_{2233} & C_{2331} & C_{2133} & C_{2231} & C_{2332} \\ C_{3111} & C_{3212} & C_{3313} & C_{3112} & C_{3213} & C_{3311} & C_{3113} & C_{3211} & C_{3312} \\ C_{1131} & C_{1232} & C_{1333} & C_{1132} & C_{1233} & C_{1331} & C_{1133} & C_{1231} & C_{1332} \\ C_{2111} & C_{2212} & C_{2313} & C_{2112} & C_{2213} & C_{2311} & C_{2113} & C_{2211} & C_{2312} \\ C_{3121} & C_{3222} & C_{3323} & C_{3122} & C_{3223} & C_{3321} & C_{3123} & C_{3221} & C_{3322} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{23} \\ E_{31} \\ E_{13} \\ E_{21} \\ E_{32} \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Wir erkennen, daß in jeder Spalte der Koeffizientenmatrix die Indizes 2 und 3 der Koeffizienten im Vergleich zu Gl.(A.19) vertauscht werden. Falls hier ebenfalls die Symmetrien $T_{12} = T_{21}$, $T_{23} = T_{32}$, $T_{31} = T_{13}$ vorliegen, so entfallen wiederum die letzten drei Zeilen des Gleichungssystems als überflüssige Informationen. Die Symmetrien $E_{12} = E_{21}$, $E_{23} = E_{32}$, $E_{31} = E_{13}$ führen dann zu der Anordnung

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1212} & C_{1313} & C_{1112} + C_{1211} & C_{1213} + C_{1312} & C_{1311} + C_{1113} \\ C_{2121} & C_{2222} & C_{2323} & C_{2122} + C_{2221} & C_{2223} + C_{2322} & C_{2321} + C_{2123} \\ C_{3131} & C_{3232} & C_{3333} & C_{3132} + C_{3231} & C_{3233} + C_{3332} & C_{3331} + C_{3133} \\ C_{1121} & C_{1222} & C_{1323} & C_{1122} + C_{1221} & C_{1223} + C_{1322} & C_{1321} + C_{1123} \\ C_{2131} & C_{2232} & C_{2333} & C_{2132} + C_{2231} & C_{2233} + C_{2332} & C_{2331} + C_{2133} \\ C_{3111} & C_{3212} & C_{3313} & C_{3112} + C_{3211} & C_{3213} + C_{3312} & C_{3311} + C_{3113} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

Für die Darstellung $[\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}}$ folgt für symmetrische Tensoren $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$ mit der Matrizennotation aus Gl.(A.23)

$$[\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}]^{T_{23}} \xrightarrow{\mathbf{B} = \mathbf{B}^T} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_4 b_4 & b_6 b_6 & 2b_1 b_4 & 2b_4 b_6 & 2b_1 b_6 \\ b_4 b_4 & b_2 b_2 & b_5 b_5 & 2b_2 b_4 & 2b_2 b_5 & 2b_4 b_5 \\ b_6 b_6 & b_5 b_5 & b_6 b_6 & 2b_5 b_6 & 2b_6 b_3 & 2b_3 b_6 \\ b_1 b_4 & b_4 b_2 & b_5 b_6 & b_1 b_2 + b_4^2 & b_4 b_5 + b_6 b_2 & b_6 b_4 + b_1 b_5 \\ b_4 b_6 & b_2 b_5 & b_5 b_3 & b_4 b_5 + b_2 b_6 & b_2 b_3 + b_5^2 & b_5 b_6 + b_4 b_3 \\ b_6 b_1 & b_4 b_5 & b_3 b_6 & b_6 b_4 + b_5 b_1 & b_5 b_6 + b_3 b_4 & b_1 b_3 + b_6^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.28})$$

Ein nichtsymmetrischer Tensor \mathbf{F} kann in der Transposition $[\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}]^{T_{23}}$ ebenfalls auftreten, nämlich der Deformationsgradient. Dies tritt zum Beispiel auf bei der Vortransformation des konsistenten Tangentenoperators oder des 2-ten Piola-Kirchhoff Tensors in Gl.(4.77), der in Spaltenform die Dimension $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^6$ hat, siehe Gl.(5.100). Aus der Koeffizientenmatrix (A.27) resultiert dann

$$\mathbf{F}_{23} = \begin{bmatrix} F_{11}^2 & F_{12}^2 & F_{13}^2 & 2F_{11}F_{12} & 2F_{12}F_{13} & 2F_{13}F_{11} \\ F_{21}^2 & F_{22}^2 & F_{23}^2 & 2F_{21}F_{22} & 2F_{22}F_{23} & 2F_{23}F_{21} \\ F_{31}^2 & F_{32}^2 & F_{33}^2 & 2F_{31}F_{32} & 2F_{32}F_{33} & 2F_{33}F_{31} \\ F_{11}F_{21} & F_{12}F_{22} & F_{13}F_{23} & F_{11}F_{22} + F_{12}F_{21} & F_{12}F_{23} + F_{13}F_{22} & F_{13}F_{21} + F_{11}F_{23} \\ F_{21}F_{31} & F_{22}F_{32} & F_{23}F_{33} & F_{21}F_{32} + F_{22}F_{31} & F_{22}F_{33} + F_{23}F_{32} & F_{23}F_{31} + F_{21}F_{33} \\ F_{31}F_{11} & F_{32}F_{12} & F_{33}F_{13} & F_{31}F_{12} + F_{32}F_{11} & F_{32}F_{13} + F_{33}F_{12} & F_{33}F_{11} + F_{31}F_{13} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

Betrachtet man noch den Identitätstensor vierter Stufe $\mathcal{I} = [\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}]^{T_{23}}$, so entsteht aus diesem mit

$$\mathbf{I} \implies \mathbf{e}^T = \{ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \} \quad (\text{A.30})$$

für die Koeffizientenmatrix (A.28) die Einheitsmatrix

$$\mathcal{I} = [\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}]^{T_{23}} \implies \mathbf{l}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

Der Deviatoroperator $\mathcal{D} = \mathcal{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ erhält dann mit der Überführung des Spuroperators $\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ nach Gl.(A.25)

$$\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \implies \mathbf{e}\mathbf{e}^T\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

die Gestalt

$$\mathcal{D} = \mathcal{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \implies \mathbf{D} = \mathbf{l}_6 - \frac{1}{3}\mathbf{e}\mathbf{e}^T\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.33})$$

Bei der Berechnung des konsistenten Tangentenoperators der Gleichgewichtsspannungen nach Gl.(4.119) ist das Produkt aus dem Deviatoroperator, einem Tensor vierter Stufe sowie wiederum mit dem Deviatoroperator zu bilden. Dieses Produkt kann durch genauere Betrachtungen wiederum durch spezielle Rechenoperationen im Aufwand reduziert werden, da die Matrizendarstellung des Deviatoroperators nach Gl.(A.33) viele Nullen aufweist und der zwischen dem

Deviatoroperator liegende Tensor Symmetrien aufweist:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

Die Untermatrizen \mathbf{A}_{ij} sind Elemente der (3×3) -Matrizen. Mit den Symmetrien $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_{11}^T$, $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}_{22}^T$ sowie $\mathbf{A}_{21} = \alpha \mathbf{A}_{12}^T$ folgt mit dem Deviatoroperator (A.33) in der Darstellung

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

für das Tensorprodukt \mathcal{DAD} die Matrixdarstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{DAD} \implies \mathbf{DAD} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{A}_{11}\tilde{\mathbf{D}} & \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21}\tilde{\mathbf{D}} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{A}_{11}\tilde{\mathbf{D}} & \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{A}_{12} \\ \alpha\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

A.2.2 Ausnutzung des Skalarproduktes

Nachdem wir die Überführung der Tensoroperationen für Tensoren vierter Stufe betrachtet haben, kommen wir noch auf das Skalarprodukt von symmetrischen Tensoren zweiter Stufe zu sprechen. Dieses Produkt tritt einerseits im Prinzip der virtuellen Verschiebungen (bzw. auch in anderen gemischten Variationsformulierungen) und andererseits im konsistenten Tangentenoperator in Gl.(4.119) auf. Aus der Komponentendarstellung bei kartesischen Koordinaten berechnen wir mit $\mathbf{T}^T = \{T_{11} \ T_{22} \ T_{33} \ T_{12} \ T_{23} \ T_{31}\}$ und $\tilde{\mathbf{E}}^T = \{E_{11} \ E_{22} \ E_{33} \ E_{12} \ E_{23} \ E_{31}\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} &= \{T_{11} \ T_{22} \ T_{33} \ T_{12} \ T_{23} \ T_{31}\} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{23} \\ E_{31} \end{Bmatrix} + \{T_{12} \ T_{23} \ T_{31}\} \begin{Bmatrix} E_{12} \\ E_{23} \\ E_{31} \end{Bmatrix} = \\ &= \mathbf{T}^T \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{T}^T \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Zur Darstellung haben wir wieder die Diagonalmatrix \mathbf{M} aus Gl.(A.24) und die Einführung eines neuen Vektors $\mathbf{E}^T = \{E_{11} \ E_{22} \ E_{33} \ 2E_{12} \ 2E_{23} \ 2E_{31}\}$ bzw.

$$\mathbf{E} = \mathbf{M} \tilde{\mathbf{E}} \implies \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E} \quad (\text{A.38})$$

verwendet. Bestimmt sich zum Beispiel der Tensor \mathbf{T} aus dem Produkt eines Tensors vierter Stufe und eines Tensors zweiter Stufe, $\mathbf{T} = \mathcal{C}\mathbf{E}$ bzw. $\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{C}\mathbf{E}$, so folgt für das Skalarprodukt (A.37):

$$\mathcal{C}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \{\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{E}}\}^T \mathbf{E} = \{\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}\}^T \mathbf{E} = \{\mathbf{C}\mathbf{E}\}^T \mathbf{E} = \mathbf{E}^T \mathbf{C}\mathbf{E}. \quad (\text{A.39})$$

Die Koeffizientenmatrix $\tilde{\mathbf{C}}$ muß demnach in den letzten drei Spalten mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ multipliziert werden,

$$\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}^{-1}, \quad (\text{A.40})$$

was zu dem gewünschten Nebeneffekt führt, daß Matrizen der Form (A.22), $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{a}\mathbf{a}^T \mathbf{M}$, in

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{11} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{33} & a_{11}a_{12} & a_{11}a_{23} & a_{11}a_{31} \\ a_{22}a_{11} & a_{22}a_{22} & a_{22}a_{33} & a_{22}a_{12} & a_{22}a_{23} & a_{22}a_{31} \\ a_{33}a_{11} & a_{33}a_{22} & a_{33}a_{33} & a_{33}a_{12} & a_{33}a_{23} & a_{33}a_{31} \\ a_{12}a_{11} & a_{12}a_{22} & a_{12}a_{33} & a_{12}a_{12} & a_{12}a_{23} & a_{12}a_{31} \\ a_{23}a_{11} & a_{23}a_{22} & a_{23}a_{33} & a_{23}a_{12} & a_{23}a_{23} & a_{23}a_{31} \\ a_{31}a_{11} & a_{31}a_{22} & a_{31}a_{33} & a_{31}a_{12} & a_{31}a_{23} & a_{31}a_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{C}^T \quad (\text{A.41})$$

sowie auch (A.28) in

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_1b_1 & b_4b_4 & b_6b_6 & b_1b_4 & b_4b_6 & b_1b_6 \\ b_4b_4 & b_2b_2 & b_5b_5 & b_2b_4 & b_2b_5 & b_4b_5 \\ b_6b_6 & b_5b_5 & b_6b_6 & b_5b_6 & b_6b_3 & b_3b_6 \\ b_1b_4 & b_4b_2 & b_5b_6 & \frac{b_1b_2+b_4^2}{2} & \frac{b_4b_5+b_6b_2}{2} & \frac{b_6b_4+b_1b_5}{2} \\ b_4b_6 & b_2b_5 & b_5b_3 & \frac{b_4b_5+b_2b_6}{2} & \frac{b_2b_3+b_5^2}{2} & \frac{b_5b_6+b_4b_3}{2} \\ b_6b_1 & b_4b_5 & b_3b_6 & \frac{b_6b_4+b_5b_1}{2} & \frac{b_5b_6+b_3b_4}{2} & \frac{b_1b_3+b_6^2}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{C}^T \quad (\text{A.42})$$

überführt und damit symmetrisch werden.

Der konsistente Tangentenoperator (4.119) ist durch obige Formen von Matrizen aufgebaut und führt daher zu einer symmetrischen Matrix. Beim Aufbau der Matrizen sollte zusätzlich lediglich die obere Dreiecksmatrix aufgebaut werden, was zu weiteren Geschwindigkeitsgewinnen im Aufbau der globalen Steifigkeitsmatrix führt.

Anhang B

Lineare Elastizitätstheorie

Im Rahmen der linearen, isotropen Elastizitätstheorie liegt das Hookesche Gesetz, $\mathbf{T} = \mathcal{C}\mathbf{E}$, in verschiedenen Darstellungen vor, die auf verschiedene Formen des Elastizitätstensors 4-ter Stufe \mathcal{C} sowie unterschiedliche Materialparameter hinführen. In den Tabellen B.1 und B.2 sind diese

Tabelle B.1: Das Hookesche Gesetz in verschiedenen Darstellungen

Materialgleichungen	Elastizitätstensor
$\mathbf{T} = \frac{E}{1+\nu} \left(\mathbf{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \mathbf{E}) \mathbf{I} \right)$ (B.1)	$\mathcal{C} = \frac{E}{1+\nu} \mathcal{I} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ (B.2)
$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I}$ (B.3)	$\mathcal{C} = 2\mu\mathcal{I} + \lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ (B.4)
$\mathbf{T} = K(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I} + 2G\mathbf{E}^D$ (B.5)	$\mathcal{C} = K\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2G \left[\mathcal{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right]$ (B.6)

Darstellungen aufgestellt bzw. einige Beziehungen abgebildet.¹ \mathbf{E} stellt den linearisierten Green'schen Verzerrungstensor, \mathbf{T} den Spannungstensor, E den Elastizitätsmodul, ν die Querkontraktionszahl, K den Kompressionsmodul, G den Schubmodul und λ und μ die Lamé Konstanten dar.

Eine positive Formänderungsenergie

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} = \frac{E}{1+\nu} \left(\mathbf{E}^D \cdot \mathbf{E}^D + \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} (\text{tr } \mathbf{E})^2 \right) \quad (\text{B.7})$$

erhalten wir für beliebige Deformationsprozesse, falls $E > 0$ und die Bedingungen $-1 < \nu < 0.5$ erfüllt sind. Hierbei haben wir Gl.(B.1) ausgewertet und eine Trennung in Deviator und Kugeltensor durchgeführt. Die physikalische Beobachtung der meisten Materialien besagt als weitere einschränkende Bedingung, daß die Querkontraktionszahl positiv sein muß, $\nu > 0$, um bei positiven Zugspannungen im einaxialen Zugversuch negative Querdehnungen zu erhalten. $\nu > 0$ impliziert, siehe Tab. B.2 – erste Zeile und zweite Spalte, mit $\nu(K, G)$ die Ungleichung

$$K > \frac{2G}{3}, \quad (\text{B.8})$$

¹Siehe auch LEIPHOLZ [101, S.101].

Tabelle B.2: Materialparameter der linearen, isotropen Elastizitätsbeziehung

	E, ν	K, G	μ, λ
E, ν		$E = \frac{9KG}{3K + G}$ $\nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G}$	$E = \frac{2\mu^2 + 3\mu\lambda}{\mu + \lambda}$ $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$
K, G	$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$ $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$		$K = \lambda + \frac{2\mu}{3}$ $G = \mu$
μ, λ	$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$ $\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$	$\lambda = K - \frac{2G}{3}$ $\mu = G$	

welche wir im Zusammenhang mit Modellen der finiten Elastizität verwendet haben.

Anhang C

Matrizen der FE-Formulierung

C.1 Funktionalmatrix des Spannungsalgorithmus

In diesem Abschnitt leiten wir die Koeffizienten der Funktionalmatrix (5.172) des Newton-Raphson Verfahrens zur Berechnung der viskosen Rechten Cauchy-Green Tensoren her, die wir auch beim Tangentenoperator der Überspannungen benötigen, siehe Gl.(5.183).

Im ersten Schritt berechnen wir die partiellen Ableitungen der Viskosität nach den Variablen x_1 , x_2 und x_3 . Zu diesem Zweck nutzen wir die Eigenschaft der Differentiation einer Funktion der Gestalt $r(x) = \alpha e^{s(x)}$ aus, welche $r'(x) = \alpha s'(x) e^{s(x)} = r(x) s'(x)$ genügt. Hiermit gelangen wir auf

$$\frac{\partial \eta_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} = -\eta_k \frac{2\mu_k s_k}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \sqrt{x_3 - \frac{1}{3}x_2^2}, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial \eta_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = \eta_k \frac{2\mu_k s_k}{3(\det \mathbf{C})^{1/3}} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_3 - \frac{1}{3}x_2^2}}, \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial \eta_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = -\eta_k \frac{\mu_k s_k}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \frac{x_1}{\sqrt{x_3 - \frac{1}{3}x_2^2}}. \quad (\text{C.3})$$

Mit Hilfe der Abkürzung $h(x_1, x_2, x_3) = \frac{\hat{k}}{\eta_k(x_1, x_2, x_3)}$, siehe Definitionen (5.171) und (5.170), erhalten wir die Ableitung

$$\frac{\partial h(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_m} = -\hat{k} \frac{1}{\eta_k^2} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_m}. \quad (\text{C.4})$$

Dieses Resultat verwenden wir zur Ableitung der Funktion $g(x_1, x_2, x_3)$ aus Gl.(5.168) in Richtung von x_m :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{x_2}{3} \left(h + x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} \right), \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{x_1}{3} \left(h + x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial g}{\partial x_3} = \frac{x_1 x_2}{3} \frac{\partial h}{\partial x_3} \quad (\text{C.5})$$

Weiterhin, benötigen wir die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_m} g^{-1}(x_1, x_2, x_3) = -g^{-2} \frac{\partial g}{\partial x_m} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_m} g^2(x_1, x_2, x_3) = 2g \frac{\partial g}{\partial x_m} \quad (\text{C.6})$$

sowie

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} x_1 + h \right) \mathbf{C}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x_2} = \frac{\partial h}{\partial x_2} x_1 \mathbf{C}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x_3} = \frac{\partial h}{\partial x_3} x_1 \mathbf{C} \quad (\text{C.7})$$

der Definition (5.169). Dabei machen wir Gebrauch von Gl.(C.4). Weiterhin beinhaltet die Inverse des Tensors ξ^{-1} die Ableitung

$$\frac{\partial \xi^{-1}}{\partial x_m} = -\xi^{-1} \frac{\partial \xi}{\partial x_m} \xi^{-1} = -[\xi^{-1} \otimes \xi^{-1}]^{T_{23}} \frac{\partial \xi}{\partial x_m} \equiv -\Gamma_m. \quad (\text{C.8})$$

Nunmehr sind alle relevanten Terme bekannt, so daß wir die Koeffizienten der Funktionalmatrix aus Gl.(5.172) aufbauen können ($\delta \equiv [\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}]^{T_{23}} \xi^{-1}$):

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = 1 - (\det \xi)^{1/3} \left(\frac{\partial g^{-1}}{\partial x_1} - \frac{1}{3g} \left(\xi^{-1} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \right) \right) \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} = -(\det \xi)^{1/3} \left(\frac{\partial g^{-1}}{\partial x_2} - \frac{1}{3g} \left(\xi^{-1} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right) \right) \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} = -(\det \xi)^{1/3} \left(\frac{\partial g^{-1}}{\partial x_3} - \frac{1}{3g} \left(\xi^{-1} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \right) \right) \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial g}{\partial x_1} (\xi^{-1} \cdot \mathbf{C}) + g (\Gamma_1 \cdot \mathbf{C}) \quad (\text{C.12})$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} = 1 - \frac{\partial g}{\partial x_2} (\xi^{-1} \cdot \mathbf{C}) + g (\Gamma_2 \cdot \mathbf{C}) \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial g}{\partial x_3} (\xi^{-1} \cdot \mathbf{C}) + g (\Gamma_3 \cdot \mathbf{C}) \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} &= -\frac{\partial g^2}{\partial x_1} (\delta \cdot \xi^{-1}) + 2g^2 (\delta \cdot \Gamma_1) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} &= -\frac{\partial g^2}{\partial x_2} (\delta \cdot \xi^{-1}) + 2g^2 (\delta \cdot \Gamma_2) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} &= 1 - \frac{\partial g^2}{\partial x_3} (\delta \cdot \xi^{-1}) + 2g^2 (\delta \cdot \Gamma_3) \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

C.2 Tangentenoperator des Überspannungsanteils

Die Berechnung des konsistenten Tangentenoperators des Überspannungsanteils (5.175) erfordert sowohl die partielle Differentiation nach dem Rechten Cauchy-Green Tensor $\partial \tilde{\mathbf{T}}_{ovk} / \partial \mathbf{C}$ als auch die Ableitung $dx_m/d\mathbf{C}$ der Variablen x_m , $m = 1, 2, 3$, die in dem linearen Gleichungssystem (5.183) auftreten.

Zunächst betrachten wir die Teilüberspannungen (5.173) mit den zugehörigen Abkürzungen in (5.168)-(5.171), $\tilde{\mathbf{T}}_{ovk}(\mathbf{C})$, $g(\mathbf{C})$, $\xi(\mathbf{C})$, $\eta_k(\mathbf{C})$ und $\hat{k}(\mathbf{C})$, welche nunmehr als Funktionen des Rechten Cauchy-Green Tensors betrachtet werden. Die Ableitung $\partial g(\mathbf{C}) / \partial \mathbf{C}$ erhält nach einiger Rechnung die Darstellung

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{\hat{k} x_1 x_2}{9\eta_k} \left(1 + \frac{2\mu_k s_k}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} x_1 \sqrt{x_3 - \frac{1}{3} x_2^2} \right) \mathbf{C}^{-1} = \gamma_3 \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{C.16})$$

mit den Abkürzungen

$$\gamma_3 = -\frac{\gamma_2 x_2}{3} \quad \text{und} \quad \gamma_2 = \frac{\hat{k} x_1}{3\eta_k} \left(1 + \frac{2\mu_k s_k}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} x_1 \sqrt{x_3 - \frac{1}{3} x_2^2} \right). \quad (\text{C.17})$$

Hierbei machten wir von

$$\frac{\partial \hat{k}}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{\hat{k}}{3} \mathbf{C}^{-1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \eta_k}{\partial \mathbf{C}} = \eta_k \frac{2\mu_k s_k x_1 \sqrt{x_3 - \frac{1}{3}x_2^2}}{3(\det \mathbf{C})^{1/3}} \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{C.18})$$

Gebrauch. Daher gilt

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\hat{k}x_1}{\eta_k} \mathcal{I} + \mathbf{C} \otimes \left(\frac{x_1}{\eta_k} \frac{\partial \hat{k}}{\partial \mathbf{C}} - \frac{\hat{k}x_1}{\eta_k^2} \frac{\partial \eta_k}{\partial \mathbf{C}} \right) = \frac{\hat{k}x_1}{\eta_k} \mathcal{I} - \gamma_2 \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1}. \quad (\text{C.19})$$

Mit Hilfe von

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} = -[\boldsymbol{\xi}^{-1} \otimes \boldsymbol{\xi}^{-1}]^{T_{23}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{\hat{k}x_1}{\eta_k} \mathcal{I} + \gamma_2 [\boldsymbol{\xi}^{-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\xi}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}] \quad (\text{C.20})$$

berechnet sich die partielle Ableitung der Teilüberspannungen nach dem Rechten Cauchy-Green Tensor

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{ovk}}{\partial \mathbf{C}} &= \left(-\frac{1}{3} \tilde{\mathbf{T}}_{ovk} + \frac{2\mu_k x_1}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} (\gamma_3 \boldsymbol{\xi}^{-1} + g\gamma_2 \boldsymbol{\xi}^{-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\xi}^{-1}) \right) \otimes \mathbf{C}^{-1} + \\ &\quad - \frac{2\mu_k x_1}{(\det \mathbf{C})^{1/3}} \left[g \frac{\hat{k}x_1}{\eta_k} [\boldsymbol{\xi}^{-1} \otimes \boldsymbol{\xi}^{-1}]^{T_{23}} - \frac{x_2}{3} [\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}]^{T_{23}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Im folgenden untersuchen wir noch die Berechnung der Ableitungen $dx_m/d\mathbf{C}$, $m = 1, 2, 3$, welche in dem linearen Gleichungssystem (5.183) auftreten. Die Koeffizientenmatrix in Gl.(5.183) ist bereits im Abschnitt C.1 des Anhangs ermittelt worden. Nachfolgend leiten wir die rechte Seite des Gleichungssystems her. Die Funktionen (5.167) hängen explizit von dem Rechten Cauchy-Green Tensor ab

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{C}) &= x_1 - \frac{1}{g(\mathbf{C})} (\det \boldsymbol{\xi}(\mathbf{C}))^{1/3}, \\ \Phi_2(\mathbf{C}) &= x_2 - g(\mathbf{C}) (\boldsymbol{\xi}^{-1}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{C}), \\ \Phi_3(\mathbf{C}) &= x_3 - g^2(\mathbf{C}) (\mathbf{C} \boldsymbol{\xi}^{-1}(\mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\xi}^{-1}(\mathbf{C}) \mathbf{C}). \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Um die Ableitungen $\partial \Phi_m(\mathbf{C})/\partial \mathbf{C}$ zu berechnen, wenden wir die Kettenregel auf die Darstellung $\hat{\Phi}_m(g(\mathbf{C}), \boldsymbol{\xi}(\mathbf{C}), \mathbf{C})$ an:

$$\frac{\partial \Phi_m(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{d\hat{\Phi}_m(g(\mathbf{C}), \boldsymbol{\xi}(\mathbf{C}), \mathbf{C})}{d\mathbf{C}} = \frac{\partial \hat{\Phi}_m}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{C}} + \left[\frac{\partial \hat{\Phi}_m}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right]^T \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \hat{\Phi}_m}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{C.23})$$

Mit Hilfe der Ableitungen

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_1}{\partial g} = \frac{(\det \boldsymbol{\xi})^{1/3}}{g^2} = \frac{x_1}{g}, \quad (\text{C.24})$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_2}{\partial g} = -\boldsymbol{\xi}^{-1} \cdot \mathbf{C} = -\frac{x_2}{g}, \quad (\text{C.25})$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_3}{\partial g} = -2g (\mathbf{C} \boldsymbol{\xi}^{-1} \cdot \boldsymbol{\xi}^{-1} \mathbf{C}) = -\frac{2x_3}{g}, \quad (\text{C.26})$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_1}{\partial \boldsymbol{\xi}} = -\frac{(\det \boldsymbol{\xi})^{1/3}}{3g} \boldsymbol{\xi}^{-1}, \quad (\text{C.27})$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_2}{\partial \boldsymbol{\xi}} = g [\boldsymbol{\xi}^{-1} \otimes \boldsymbol{\xi}^{-1}]^{T_{23}} \mathbf{C}, \quad (\text{C.28})$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_3}{\partial \boldsymbol{\xi}} = 2g^2 \boldsymbol{\xi}^{-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\xi}^{-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\xi}^{-1} \quad (\text{C.29})$$

und dem Resultat aus (C.16) und (C.19) gelangen wir zu

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{C}} = -g \boldsymbol{\xi}^{-1}, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial \mathbf{C}} = -2g^2 \boldsymbol{\xi}^{-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\xi}^{-1}. \quad (\text{C.30})$$

Damit ist es nun möglich die Ableitungen $dx_m/d\mathbf{C}$ in Gl.(5.183) zu berechnen.

Anhang D

Symbole

Anmerkung aus der Einleitung: In der Arbeit wird probiert eine konsequente (optische) Trennung in Skalare, geometrische Vektoren, Tensoren 2-ter und 4-ter Stufe sowie von Matrizen mit einer Unterscheidung in “lokale” und “globale” Größen einzuführen. Skalare werden kursiv/roman (A), geometrische Vektoren durch einen übergeordneten Pfeil (\vec{A}), Tensoren 2-ter Stufe in fett/roman (\mathbf{A}), Tensoren 4-ter Stufe in kalligraphischen Lettern (\mathcal{A}), Matrizen (und Spaltenmatrizen) in kursiv/fett/serifenlos bzw. fett/serifenlos für globale bzw. lokale Darstellungen (\mathbf{A} bzw. \mathbf{A}) dargestellt. “Lokal” impliziert die in der Methode der finiten Elemente bezeichneten Größen auf Elementebene bzw. hier auch an einem Punkt auftretende Größe. “Globale” Matrizen sind zum Beispiel diejenigen matriziellen Größen, die auf die gesamte Struktur (bzw. Gebiet) bezogen sind, siehe Kap. 5.

Wir haben daher in diesem Kapitel einige der auftretenden Symbole zusammengefaßt. Variablen untergeordneter Bedeutung und einmaligem Auftreten sind nicht aufgenommen worden. Die erste Spalte beschreibt das Symbol, die Zweite dessen Erläuterung und die letzte Spalte diejenige Seite, auf welcher sie das erste Mal auftritt. Zum Teil sind die auftretenden Größen auch nach deren physikalischer Bedeutung sortiert.

D.1 Skalare

α_k	Koeffizientenfunktionen einer isotropen Tensorfunktion	18
β	Winkelfunktion im casus irreducibilis	16
γ	Entropieproduktion	58
Δt_n	Schrittweite der Zeitintegration zwischen den Zeitpunkten t_n und t_{n+1}	31
ϵ_a	absolute Fehlertoleranz	38
ϵ_r	relative Fehlertoleranz	38
$\epsilon_k^{(m)}$	Eigenwerte eines verallgemeinerten Verzerrungstensors	48
Γ	diskretisierte Oberfläche einer Struktur	107
λ	Eigenwert eines Tensors oder 3×3 -Matrix	15
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Eigenwerte eines symmetrischen Tensors	16
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Eigenwerte des Rechten bzw. Linken Strecktensors	48
$\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$	Eigenwerte der unimodularen Strecktensoren	51
μ_1, μ_2, μ_3	Eigenwerte des Rechten bzw. Linken Cauchy-Green Tensors	48
$\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3$	Eigenwerte der unimodularen Cauchy-Green Tensoren	51
ω^e	Volumen des Elementes e (Momentankonfiguration)	125
Ω	diskretisiertes Volumen der Struktur (Referenzkonfiguration)	107

Ω^e	Volumen des Elementes e (Referenzkonfiguration)	109
Ω_{ref}	Volumen im normierten Elementgebiet	109
Ω_{ij}^L	Koeffizienten des schiefsymmetrischen Tensors Ω^L	49
φ_1	das Zweifache der Ableitung der Formänderungsenergie nach der ersten Invariante	69
φ_2	das Zweifache Ableitung der Formänderungsenergie nach der zweiten Invariante	69
ρ	Dichte in der Momentankonfiguration	57
ρ_R	Dichte in der Referenzkonfiguration	59
τ	$0 \leq \tau \leq 1$, Integrationsvariable im Einheitsgebiet	31
θ	absolute Temperatur	58
Θ	Volumendehnung	127
$\delta\Theta$	virtuelle Volumendehnung	128
Θ^h	Ansatz für die Volumendehnung	129
$\delta\Theta^h$	Ansatz für die virtuelle Volumendehnung	129
A	Oberfläche eines materiellen Körpers	106
a_{ij}	Wichtungskoeffizienten eines Runge-Kutta Verfahrens	32
b_i	Wichtungskoeffizienten eines Runge-Kutta Verfahrens	32
\hat{b}_i	Wichtungskoeffizienten eines eingebetteten Runge-Kutta Verfahrens	39
c_i	diskrete Zeitpunkte eines Runge-Kutta Verfahrens	32
d_i	Reihenoeffizienten beim Arruda & Boyce Modell	65
e	≈ 2.7182818 , entspricht $\exp 1$	26
e	spezifische innere Energie	57
f	Funktionen einer isotropen Tensorfunktion im Eigenraum	18
$I_{\mathbf{B}}$	erste Invariante des Tensors \mathbf{B}	16
$II_{\mathbf{B}}$	zweite Invariante des Tensors \mathbf{B}	16
$III_{\mathbf{B}}$	dritte Invariante des Tensors \mathbf{B}	16
$I_{\mathbf{B}}$	erste Invariante der Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	22
$II_{\mathbf{B}}$	zweite Invariante des Tensors $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	22
$III_{\mathbf{B}}$	dritte Invariante des Tensors $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	22
J	Determinante des Deformationsgradienten	46
J_2	zweite Invariante des Deviators eines Tensors 2-ter Stufe	22
J_3	dritte Invariante des Deviators eines Tensors 2-ter Stufe	23
m	Iterationszähler des globalen Newton- bzw. Mehrebenen-Newton Verfahrens	40
m	Index eines verallgemeinerten Verzerrungstensors	47
n_θ	Anzahl der Druckfreiheitsgrade im Elemente	130
n_Θ	Anzahl der Druckfreiheitsgrade in der Struktur	129
n_ξ	Anzahl der Gauß-Punkte in ξ -Richtung	110
n_η	Anzahl der Gauß-Punkte in η -Richtung	110
n_ζ	Anzahl der Gauß-Punkte in ζ -Richtung	110
n_{dof}	Anzahl aller Verschiebungsfreiheitsgrade in einer Struktur	107
n_e	Anzahl der Elemente einer Struktur	110
n_{eu}	Anzahl der Elementfreiheitsgrade	109
n_i	Anzahl aller Integrationspunkte einer Struktur	110
n_{nodes}	Anzahl aller Knoten in einer Struktur	107
n_{ov}	Anzahl der Teilüberspannungen	53
n_p	Anzahl der bekannten (prescribed) Verschiebungsfreiheitsgrade	107

n_q	Anzahl der Inneren Variablen an einem materiellen Punkt	92
n_Q	Anzahl der unbekannt Inneren Variablen der gesamten Struktur	31
n_u	Anzahl der unbekannt Knotenverschiebungen einer Struktur	31
$n_{a,x}^e$	partielle Ableitung der a -ten Ansatzfunktion n_a^e nach x für das Elemente e	110
\tilde{p}	unbestimmter Druck des Spannungszustandes bei Inkompressibilität	68
p	unbestimmter Druck des Spannungszustandes bei Inkompressibilität	69
p	Lagrange Multiplikator beim Dreifeldfunktional	127
δp	virtueller Lagrange Multiplikator beim Dreifeldfunktional	128
p^h	Ansatz für den Lagrange Multiplikator beim Dreifeldfunktional	129
δp^h	Ansatz für den virtuellen Lagrange Multiplikator beim Dreifeldfunktional	129
p, \hat{p}	Ordnung des Runge-Kutta Verfahrens	37
p_i	Spannungsleistung	59
$p_{\text{incr}}^{(m)}$	inkrementelle Spannungsleistung	67
r	Wärmequelle	57
s	Entropiedichte	57
s	Anzahl der Stufen des Runge-Kutta Verfahrens	32
s_1, s_2, s_3	Eigenwerte des Kirchhoffschen Spannungstensors	65
t	Zeitvariable	31
t_1, t_2, t_3	Eigenwerte des Cauchyschen Spannungstensors	65
$\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3$	Eigenwerte des 2-ten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors	64
T	Ende eines Zeitintervalls	31
T_{ni}	i -te Stufe (Stützstelle) eines Runge-Kutta Verfahrens im Zeitschritt t_n bis t_{n+1}	32
x^k	Koordinaten in der Momentankonfiguration	46
X^L	Koordinaten in der Referenzkonfiguration	46
v	Volumen des materiellen Körpers in der Momentankonfiguration	123
V	Volumen des materiellen Körpers in der Referenzkonfiguration	119
dv	materielles Volumenelement in der Momentankonfiguration	46
dV	materielles Volumenelement in der Referenzkonfiguration	46
w_1	Ableitung der Formänderungsenergie w nach der 1-ten Invariante $I_{\overline{C}}$	80
w_2	Ableitung der Formänderungsenergie w nach der 2-ten Invariante $II_{\overline{C}}$	80
w_{k1}	Ableitung der Funktion w_k nach der 1-ten Invariante $I_{\overline{C}}$	84
w_{k2}	Ableitung der Funktion w_k nach der 2-ten Invariante $II_{\overline{C}}$	84
w_k	Wichtungsfaktor der räumlichen Quadratur	110
w_i^G	Wichtungsfaktor der Gauß-Integration	110

Formänderungsenergien

$\psi(\mathbf{C})$	Abhängigkeit vom Rechten Cauchy-Green Tensor	62
$\tilde{\psi}(\mathbf{E})$	Abhängigkeit vom Greenschen Verzerrungstensor	62
$\overline{\psi}(J, \overline{\mathbf{C}})$	Isochorer-volumenändernder Split	65
$\Psi(I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}})$	$= \Psi(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}}, III_{\mathbf{B}})$, Kompressibilität und Abhängigkeit von Invarianten	64
$v(\mathbf{C})$	auftreten bei Inkompressibilität, $J = 1$	68
$\hat{v}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) _{J=1}$	Abhängigkeit von Eigenwerten bei Inkompressibilität	69
$\overline{v}(\overline{\mathbf{C}})$	Abhängigkeit von isochorer Deformation	65
$\tilde{v}(\mathbf{E})$	auftreten bei Inkompressibilität, $J = 1$	68

$\Upsilon(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$	Abhängigkeit von Eigenwerten des Rechten Cauchy-Green Tensors	64
$\hat{\Upsilon}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	Abhängigkeit von Eigenwerten des Rechten Strecktensors	64
$U(J)$	Abhängigkeit von volumenändernder Deformation	
$w(\mathbf{I}_C, \mathbf{II}_C)$	spezielle Abhängigkeit von den Invarianten	69
w_{eq}	isochore FÄE des Modells der finiten Viskoelastizität (Gleichgewichtsanteil)	94
w_{ov}	isochore FÄE des Modells der finiten Viskoelastizität (Überspannungsanteil)	94
w_{ovk}	$= w_{\text{ov}}(\bar{\mathbf{C}}_{ek})$	94

Materialparameter

α_i	Materialparameter beim Ogden-Modell	65
η_{0k}	Viskositätsparameter des k -ten Maxwell-Elements	99
γ_i	Materialparameter beim Ogden-Modell	65
μ_k	Materialparameter des Überspannungsmodells	99
ν	Querkontraktionszahl	165
c	Materialparameter des Arruda & Boyce Modells	65
c_{ij}	Materialparameter der verallgemeinerten Polynomelastizität	65
E	Elastizitätsmodul	165
G	Schubmodul	86
K	Kompressionsmodul	76
N	Materialparameter des Arruda & Boyce Modells	65
s_k	Abklingfaktor der Viskositätsfunktion	99

D.2 Matrizen und Spaltenmatrizen

χ^e	$\in \mathbb{R}^3$, Koordinatentransformation der lokalen Koordinaten des Einheitselementes auf globale Koordinaten	109
χ_R	$\in \mathbb{R}^3$, Bewegung eines materiellen Punktes (kartesische Koord.)	123
δ	$\in \mathbb{R}^n$, lokaler Integrationsfehler	37
λ	$\in \mathbb{R}^{n_p}$, Lagrange Multiplikatoren	117
λ_{ni}	$\in \mathbb{R}^{n_p}$, Lagrange Multiplikatoren zur Stufe T_{ni}	118
φ^e	$\in \mathbb{R}^3$, Koordinatentransformation der globalen Koordinaten auf die Koordinaten der Einheitselementes	109
$\tilde{\Phi}$	$\in \mathbb{R}^6$, Elastizitätsbeziehung für den 2-ten PK	120
Θ	$\in \mathbb{R}^{n_\Theta}$, Vektor der Volumendehnungsfreiheitsgrade	129
$\delta\Theta$	$\in \mathbb{R}^{n_\Theta}$, Vektor der virtuellen Volumendehnungsfreiheitsgrade	129
ξ	$\in \mathbb{R}^3$, lokale Elementkoordinaten	109
ξ_{ijk}	$\in \mathbb{R}^3$, Gauß-Koordinaten in einem Element	110
$\mathbf{O}_{m \times n}$	$\in \mathbb{R}^{m \times n}$, Nullmatrix mit m Zeilen und n Spalten	
\mathbf{A}	$\in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$, (singulärer) Operator bei Evolutionsgleichungen	105
\mathbf{A}	$\in \mathbb{R}^{n_Q \times n_Q}$, (singulärer) Operator in einem DAE-System	35
\mathbf{B}	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, allgemeine 3×3 -Matrix	15
\mathbf{B}^e	$\in \mathbb{R}^{6 \times 3n_{\text{en}}}$, Verzerrungs-Verschiebungsmatrix auf Elementebene	109
$\tilde{\mathbf{B}}^e$	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3n_{\text{en}}}$, Verzerrungs-Verschiebungsmatrix auf Elementebene	

	(TL-Formulierung)	120
\mathbf{B}_a^e	$\in \mathbb{R}^{6 \times 3}$, Verzerrungs-Verschiebungsmatrix auf Elementebene für Elementknoten a	110
\mathbf{B}_{NL}^e	$\in \mathbb{R}^{9 \times 3n_{en}}$, Verschiebungsgradient-Verschiebungsmatrix (räuml. Formul.)	124
$\tilde{\mathbf{B}}_{NL}^e$	$\in \mathbb{R}^{9 \times 3n_{en}}$, Verschiebungsgradient-Verschiebungsmatrix (TL-Formulierung)	121
\mathbf{B}_a	$\in \mathbb{R}^6 n_{dof}$, Verzerrungs-Verschiebungsmatrix der gesamten Struktur	108
\mathbf{B}	$\in \mathbb{R}^6 n_u$, Verzerrungs-Verschiebungsmatrix zugehörnd zu unbekanntem Knotenverschiebungen	108
$\bar{\mathbf{B}}$	$\in \mathbb{R}^6 n_p$, Verzerrungs-Verschiebungsmatrix zugehörnd zu vorgegebenen Knotenverschiebungen	108
$\tilde{\mathbf{B}}$	$\in \mathbb{R}^6 n_u$, Verzerrungs-Verschiebungsmatrix zugehörnd zu unbekanntem Knotenverschiebungen (Total-Lagrange Formulierung)	120
$\tilde{\bar{\mathbf{B}}}$	$\in \mathbb{R}^6 n_p$, Verzerrungs-Verschiebungsmatrix zugehörnd zu vorgegebenen Knotenverschiebungen (Total-Lagrange Formulierung)	120
\mathbf{C}^e	$\in \mathbb{R}^6$, Spaltenmatrixdarst. des Rechten Cauchy-Green Tensors im Element e	120
\mathbf{C}_L^e	$\in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, Tangentenoperator bei der räumlichen Formulierung	125
$\tilde{\mathbf{C}}_L^e$	$\in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, Tangentenoperator bei der Total-Lagrange Formulierung	122
\mathbf{C}^h	$\in \mathbb{R}^6$, Spaltenmatrixdarst. des Rechten Cauchy-Green Tensors, Feld über die ganze Struktur	120
\mathbf{C}_c	$\in \mathbb{R}^{n_p}$, Nebenbedingung der Lagrange-Multiplikatoren Methode	117
\mathbf{C}_{cni}	$\in \mathbb{R}^{n_p}$, Nebenbedingung der Lagrange-Multiplikatoren Methode zur Stufe T_{ni}	118
\mathbf{e}	$\in \mathbb{R}^6$, Spaltenform des Einheitstensors 2-ter Stufe	161
$\delta \mathbf{E}^h$	$\in \mathbb{R}^6$, Verzerrungsvektorfeld über die gesamte Struktur	108
\mathbf{E}^e	$\in \mathbb{R}^6$, Verzerrungsvektor im Element e	109
\mathbf{E}_{ijk}^e	$\in \mathbb{R}^6$, Verzerrungsvektor im Element e am Gauß-Punkt ξ_{ijk}	111
$\mathbf{E}_{ni}^{e(ijk)}$	$\in \mathbb{R}^6$, Verzerrungsvektor im Element e am Gauß-Punkt ξ_{ijk} zur Stufe T_{ni}	112
\mathbf{E}^h	$\in \mathbb{R}^6$, Verzerrungsvektorfeld über die gesamte Struktur	108
\mathbf{f}	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, isotrope Tensorfunktion in Matrixdarstellung	26
\mathbf{F}_{23}	$\in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, push-forward Operator in Matrixform	161
\mathbf{F}_T^e	$\in \mathbb{R}^{9 \times 9}$, Transformationsmatrix	125
\mathbf{f}	$\in \mathbb{R}^n$, Funktion einer gewöhnlichen Differentialgleichung	31
\mathbf{F}	$\in \mathbb{R}^n$, Funktion einer impliziten gewöhnlichen Dgl.	31
$\bar{\mathbf{F}}$	$\in \mathbb{R}^{n_p}$, Vektor aller gegebener Knoteneinzellasten	110
\mathbf{g}	$\in \mathbb{R}^{n_u}$, algebraische Gleichungen eines DAE-Systems	31
\mathbf{g}_a	$\in \mathbb{R}^{n_{dof}}$, diskretisiertes Variationsprinzip, alle Gleichungen	117
\mathbf{G}	$\in \mathbb{R}^{n_u}$, siehe \mathbf{G}_{ni}	39
\mathbf{G}_{ni}	$\in \mathbb{R}^{n_u}$, nichtlineare Gleichungen des algebr. Anteils eines DAE-Systems zur Stufe T_{ni}	34
$\hat{\mathbf{G}}_{ni}$	$\in \mathbb{R}^{n_{dof} + n_u}$, nichtlineare Gln. bei der Methode der Lagrange Multiplikatoren	118
\mathbf{h}	$\in \mathbb{R}^6$, Elastizitätsbeziehung, die den Spannungsvektor \mathbf{T}^h definieren	108
\mathbf{H}^e	$\in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$, Abkürzung für Integralmatrix im Element e	130
\mathbf{H}	$\in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$, Abkürzung für Integralmatrix	129
$\Delta \mathbf{H}^e$	$\in \mathbb{R}^9$, Spaltenmatrixform des Verschiebungsgradientenzuwachses (Elem. e)	121
$\delta \mathbf{H}^e$	$\in \mathbb{R}^9$, Spaltenmatrixform des virtuellen Verschiebungsgradienten (Elem. e)	121
\mathbf{I}	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, Einheitsmatrix	18
\mathbf{I}_n	$\in \mathbb{R}^{n \times n}$, Einheitsmatrix der Dimension	

\mathbf{J}^e	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, Jakobi-Matrix der Koordinatentransformation des Elementes e	110
\mathbf{k}	$\in \mathbb{R}^3$, Erdbeschleunigungsvektor	108
\mathbf{k}^e	$\in \mathbb{R}^{n_{eu} \times n_{eu}}$, Elementsteifigkeitsmatrix	114
\mathbf{k}_C^e	$\in \mathbb{R}^{n_{eu} \times n_{eu}}$, Elementsteifigkeitsmatrix (konstitutiver Anteil) bei geometrischer Nichtlinearität	122
\mathbf{k}_G^e	$\in \mathbb{R}^{n_{eu} \times n_{eu}}$, Elementsteifigkeitsmatrix, Anteil d. geometr. Nichtlinearität	122
\mathbf{K}_T	$\in \mathbb{R}^{n_{dof} \times n_{dof}}$, tangentielle Steifigkeitsmatrix aller Freiheitsgrade	118
$\mathbf{L}_{ni}^{e(ijk)}$	$\in \mathbb{R}^{n_q}$, nichtlineare Gleichungen zur Stufe T_{ni} im Element e am Gauß-Punkt ξ_{ijk}	112
\mathbf{L}	$\in \mathbb{R}^{n_Q}$, siehe \mathbf{L}_{ni}	39
\mathbf{L}_{ni}	$\in \mathbb{R}^{n_Q}$, nichtlineare Gleichungen des differentiellen Anteils eines diskretisierten DAE-Systems zur Stufe T_{ni}	34
\mathbf{m}^e	$\in \mathbb{R}^{n_\theta}$, Druckansatz im Element e	130
\mathbf{m}	$\in \mathbb{R}^{n_\theta}$, Vektor d. Ansatzfunktionen für die Volumendehnung (oder Druck)	129
\mathbf{M}	$\in \mathbb{R}^{n_{dof} \times n_p}$, Filtermatrix, ordnet aus allen FHGen die vorgegebenen FHGe zu	117
\mathbf{M}_S^e	$\in \mathbb{R}^{9 \times 9}$, Spannungsmatrix des Elementes e mit den Komponenten von \mathbf{S}	125
\mathbf{M}_T^e	$\in \mathbb{R}^{9 \times 9}$, Spannungsmatrix des Elementes e mit den Komponenten von $\tilde{\mathbf{T}}$	121
\mathbf{n}, \mathbf{n}_k	$\in \mathbb{R}^3$, Eigenvektor einer 3×3 -Matrix	15
\mathbf{N}_k	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, Eigendyade einer Matrix	26
\mathbf{N}	$\in \mathbb{R}^{3 \times n_u}$, Matrix der Ansatzfunktionen zugehörig zu den unbekanntem Verschiebungsfreiheitsgraden	108
$\bar{\mathbf{N}}$	$\in \mathbb{R}^{3 \times n_p}$, Matrix der Ansatzfunktionen zugehörig zu den vorgegebenen Verschiebungsfreiheitsgraden	108
\mathbf{N}_a	$\in \mathbb{R}^{3 \times n_{dof}}$, Matrix aller Ansatzfunktion, die über die gesamte Struktur gebildet werden	107
\mathbf{p}	$\in \mathbb{R}^{n_\theta}$, Vektor der Druckfreiheitsgrade	129
$\delta \mathbf{p}$	$\in \mathbb{R}^{n_\theta}$, Vektor der virtuellen Druckfreiheitsgrade	129
$\bar{\mathbf{p}}$	$\in \mathbb{R}^{n_u}$, vorgegebenen Knotenlasten	107
\mathbf{q}	$\in \mathbb{R}^{n_q}$, Innere Variablen an einem materiellen Punkt	92
\mathbf{q}_0	$\in \mathbb{R}^{n_q}$, Anfangsbedingung der Innere Variablen an einem materiellen Punkt	105
\mathbf{q}^e	$\in \mathbb{R}^{n_q}$, Vektor aller Inneren Variablen im Element e	111
\mathbf{q}_k	$\in \mathbb{R}^{n_q}$, Innere Variablen am Quadratur-Punkt \mathbf{x}_k	110
\mathbf{q}_{ijk}^e	$\in \mathbb{R}^{n_q}$, Innere Variablen am Gauß-Punkt ξ_{ijk}	111
\mathbf{q}	$\in \mathbb{R}^{n_Q}$, differentielle Variable eines DAE-Systems	31
\mathbf{q}	$\in \mathbb{R}^{n_Q}$, Vektor aller Inneren Variablen einer Struktur	111
\mathbf{q}^h	$\in \mathbb{R}^{n_q}$, Feld der Inneren Variablen über die gesamte Struktur	108
\mathbf{q}_n	$\in \mathbb{R}^{n_Q}$, differentielle Variable eines DAE-Systems zum Zeitpunkt t_n	34
$\dot{\mathbf{q}}$	$\in \mathbb{R}^{n_Q}$, Zeitableitung d. differentielle Variable (DAE-Systems)	31
\mathbf{Q}	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, orthogonale Matrix	17
$\mathbf{Q}_{ni}^{e(ijk)}$	$\in \mathbb{R}^{n_q}$, Innere Variablen im Element e am Gauß-Punkt ξ_{ijk} zur Stufe T_{ni}	112
\mathbf{Q}	$\in \mathbb{R}^{n_Q}$, siehe \mathbf{Q}_{ni}	39
\mathbf{Q}_{ni}	$\in \mathbb{R}^{n_Q}$, Stufenwert der differentielle Variable eines DAE-Systems	34
$\mathbf{Q}_{ni}^{(m)}$	$\in \mathbb{R}^{n_Q}$, Stufenwert der differentielle Variable eines DAE-Systems im Iterationsschritt m eines Newton-Verfahrens	41
$\Delta \mathbf{Q}$	$\in \mathbb{R}^{n_Q}$, Zuwachs der Inneren Variablen in einem Newton-Verfahren	40
\mathbf{r}	$\in \mathbb{R}^{n_q}$, Funktion der Evolutionsgleichungen	105

\mathbf{r}	$\in \mathbb{R}^{n_Q}$, Funktion d. gew. Dgl.-Systems in einem DAE-System	31
\mathbf{R}_{ni}	$\in \mathbb{R}^n$, nichtlineares Gl.-System aus der Zeitdiskretisierung eines DAE-Systems	34
\mathbf{s}_p	$\in \mathbb{R}^{n_\Theta}$, Vektor bei der Druckberechnung	129
\mathbf{s}_Θ	$\in \mathbb{R}^{n_\Theta}$, Vektor bei der Volumendehnungsberechnung	129
\mathbf{s}_p^e	$\in \mathbb{R}^{n_\theta}$, Vektor bei der Druckberechnung im Element e	130
\mathbf{s}_Θ^e	$\in \mathbb{R}^{n_\theta}$, Vektor bei der Volumendehnungsberechnung im Element e	130
\mathbf{S}	$\in \mathbb{R}^6$, Kirchhoff Spannungen in Spaltenform	123
$\mathbf{S}_{ni}^{qe(ijk)}$	$\in \mathbb{R}^{n_q}$, Startvektor der Inneren Variablen im Element e am Gauß-Punkt ξ_{ijk} zur Stufe T_{ni}	112
\mathbf{S}_{ni}	$\in \mathbb{R}^n$, Startwert eines DIRK-Verfahrens	33
\mathbf{S}_{ni}^u	$\in \mathbb{R}^{n_u}$, Startwert eines DIRK-Verfahrens der “algebraischen” Variable eines zeitdisretisierten DAE-Systems	34
\mathbf{S}_{ni}^q	$\in \mathbb{R}^{n_u}$, Startwert eines DIRK-Verfahrens der “differentiellen” Variable eines zeitdisretisierten DAE-Systems	34
\mathbf{t}	$\in \mathbb{R}^3$, Oberflächenspannungsvektor	108
\mathbf{T}^h	$\in \mathbb{R}^6$, Spannungsvektor resultierend aus dem Verzerrungsfeld \mathbf{E}^h	108
$\tilde{\mathbf{T}}^e$	$\in \mathbb{R}^6$, 2-ter Piola-Kirchoffscher Spannungs“vektor”	120
$\delta \mathbf{u}_j$	$\in \mathbb{R}^3$, virtuelle Verschiebungsfreiheitsgrade am Knoten j	107
$\delta \mathbf{u}$	$\in \mathbb{R}^{n_u}$, virtuelle Knotenverschiebungen an den natürlichen Randbed.	108
$\delta \bar{\mathbf{u}}$	$\in \mathbb{R}^{n_p}$, virtuelle Knotenverschiebungen an den geometrischen Randbed.	108
$\delta \mathbf{u}_a$	$\in \mathbb{R}^{n_{\text{dof}}}$, alle virtuellen Knotenverschiebungen der Struktur	107
$\delta \mathbf{u}^h$	$\in \mathbb{R}^3$, virtuelle Verschiebungsansatz über das gesamte Gebiet	107
\mathbf{u}	$\in \mathbb{R}^{n_u}$, “algebraische Variable” eines DAE-Systems	31
\mathbf{u}	$\in \mathbb{R}^{n_u}$, unbekannte Knotenverschiebungen	108
$\bar{\mathbf{u}}$	$\in \mathbb{R}^{n_p}$, vorgegebene Knotenverschiebungen	108
\mathbf{u}_j	$\in \mathbb{R}^3$, Verschiebungsfreiheitsgrade am Knoten j	107
\mathbf{u}^e	$\in \mathbb{R}^{n_{eu}}$, Elementknotenverschiebungen des Elementes e	109
\mathbf{u}^h	$\in \mathbb{R}^3$, Verschiebungsansatz über das gesamte Gebiet	107
\mathbf{u}_a	$\in \mathbb{R}^{n_{\text{dof}}}$, alle Knotenverschiebungen	107
\mathbf{u}_n	$\in \mathbb{R}^{n_u}$, “algebraische Variable” eines DAE-Systems zum Zeitpunkt t_n	34
\mathbf{U}_{ni}^e	$\in \mathbb{R}^{n_{eu}}$, Elementknotenverschiebungen des Elementes e zur Stufe T_{ni}	112
\mathbf{U}	$\in \mathbb{R}^{n_u}$, siehe \mathbf{U}_{ni}	39
\mathbf{U}_{ni}	$\in \mathbb{R}^{n_u}$, “algebraische” Stufenvariable eines DAE-Systems	34
\mathbf{U}_{ani}	$\in \mathbb{R}^{n_{\text{dof}}}$, Knotenverschiebungen aller FHG zur Stufe T_{ni}	118
$\mathbf{U}_{ni}^{(m)}$	$\in \mathbb{R}^{n_u}$, Stufenwert der “algebraischen” Variable eines DAE-Systems im Iterationsschritt m eines Newton-Verfahrens	41
$\Delta \mathbf{U}$	$\in \mathbb{R}^{n_u}$, Zuwachs der Knotenverschiebungen in einem Newton-Verfahren	40
\mathbf{x}	$\in \mathbb{R}^3$, Koordinaten in der aktuellen Konfiguration	107
\mathbf{X}	$\in \mathbb{R}^3$, Koordinaten in der Referenzkonfiguration	120
\mathbf{y}	$\in \mathbb{R}^n$, allgemeine Zustandsgröße	31
\mathbf{y}_0	$\in \mathbb{R}^n$, Anfangsbedingung einer allgemeinen Zustandsgröße	31
$\dot{\mathbf{y}}$	$\in \mathbb{R}^n$, Zeitableitung einer allgemeinen Zustandsgröße	31
\mathbf{y}_{n+1}	$\in \mathbb{R}^n$, Integrationswert einer allg. Zustandsgröße zum Zeitpunkt t_{n+1}	32
\mathbf{Y}_{ni}	$\in \mathbb{R}^n$, Stufenwerte des Runge-Kutta Verfahrens	32
$\dot{\mathbf{Y}}_{ni}$	$\in \mathbb{R}^n$, Stufenableitung des Runge-Kutta Verfahrens	33
\mathbf{z}	$\in \mathbb{R}^{n_u+n_Q}$, Stufengrößen zum Zeitpunkt T_{ni} und Iterationsschritt (m)	40

\mathbf{Z}_a^e	$\in \mathbb{R}^{n_{eu} \times n_{dof}}$, Zuordnungsmatrix von globalen zu Elementfreiheitsgraden	109
$\bar{\mathbf{Z}}^e$	$\in \mathbb{R}^{n_{eu} \times n_p}$, Zuordnungsmatrix von globalen vorgegebenen FHGen zu Elementfreiheitsgraden	109
\mathbf{Z}^e	$\in \mathbb{R}^{n_{eu} \times n_u}$, Zuordnungsmatrix von globalen unbekanntem FHGen zu Elementfreiheitsgraden	109
$\mathbf{Z}_q^{e(ijk)}$	$\in \mathbb{R}^{n_q \times n_Q}$, Zuordnungsmatrix von dem Vektor aller Inneren Variablen auf den Vektor der Inneren V. am Gauß-Punkt	111
\mathbf{Z}_Θ^e	$\in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\Theta}$, Zuordnungsmatrix von dem Vektor aller Druckfreiheitsgrade auf den Vektor der Elementdruckfreiheitsgrade	130

D.3 Vektoren

$\vec{\chi}_R$	Bewegung eines materiellen Punktes	45
$d\vec{a}$	materielles Flächenelement in der Momentankonfiguration	46
$d\vec{A}$	materielles Flächenelement in der Referenzkonfiguration	46
\vec{g}	Temperaturgradient	59
\vec{g}_R	Temperaturgradient bezogen auf Referenzkonfiguration	59
\vec{g}_k	Tangentenvektoren an Koordinatenlinien der Momentankonfiguration	46
\vec{G}^L	Gradientenvektoren an Koordinatenflächen in der Referenzkonfiguration	46
\vec{k}	Erdbeschleunigung	57
\vec{n}	Eigenvektor eines beliebigen Tensors 2-ter Stufe	15
$\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$	Eigenvektoren eines Tensors 2-ter Stufe	17
\vec{n}_R	Normalvektor in der Referenzkonfiguration	120
\vec{q}	Wärme flußvektor	57
\vec{t}	Spannungsvektor	106
\vec{t}_R	Spannungsvektor in der Referenzkonfiguration	119
\vec{u}	Verschiebungsvektor	45
\vec{u}_k	k -ter Eigenvektor des Rechten Strecktensors	48
$\delta\vec{u}$	virtueller Verschiebungsvektor	106
\vec{v}	Geschwindigkeitsvektor	47
\vec{v}_k	k -ter Eigenvektor des Linken Strecktensors	48
\vec{x}	Ort des materiellen Punktes $\vec{\xi}$ bzw. \vec{X} zum Zeitpunkt t	45
$d\vec{x}$	materielles Linienelement in der Momentankonfiguration	46
\vec{X}	Ort eines materiellen Punktes in der Bezugskonfiguration	45
$d\vec{X}$	materielles Linienelement in der Referenzkonfiguration	46

D.4 Tensoren 2-ter Ordnung

Γ_k	Verzerrungstensor operierend auf k -ter Zwischenkonfiguration	55
Γ_{ek}	elastischer Verzerrungstensor operierend auf k -ter Zwischenkonfiguration	55
Γ_{vk}	viskoser Verzerrungstensor operierend auf k -ter Zwischenkonfiguration	55
Ω^L	schiefsymmetrischen Tensor bezogen auf Referenzkonfiguration	49
Φ	isotr. Elastizitätsbez. für den Cauchy Tensor (hängt auch v. Inneren Var. ab)	98
$\tilde{\Phi}$	isotr. Elastizitätsbez. für den 2-ten PK (hängt auch v. Inneren Var. ab)	98
τ_{ovk}	Teilüberspannungen operierend auf k -ter Zwischenkonfiguration	95

$\bar{\mathbf{a}}$	Verzerrungstensor vom Almansi-Typ, mißt volumenerhaltende Verzerrung	52
\mathbf{A}	Almansischer Verzerrungstensor	46
$\mathbf{A}^{(m)}$	verallgemeinerter Verzerrungstensor vom Almansi-Typ	47
$\overline{\mathbf{A}}^{(m)}$	verallg. Verzerrungstensor v. Almansi-Typ basierend auf isochorer Deform.	51
\mathbf{A}_{ek}	k -ter elastischer Anteil des Almansi-Tensors \mathbf{A}	55
\mathbf{A}_{vk}	k -ter inelastischer Anteil des Almansi-Tensors \mathbf{A}	55
\mathbf{B}	Linker Cauchy-Green Tensor	46
$\overline{\mathbf{B}}$	volumenerhaltender Anteil des Linken Cauchy-Green Tensors	51
\mathbf{B}_{ek}	elast. Linker Cauchy-Green Tensor der k -ten Zwischenkonfiguration	56
\mathbf{B}_{vk}	inelast. Linker Cauchy-Green Tensor der k -ten Zwischenkonfiguration	56
$\overline{\mathbf{B}}_{ek}$	unimodularer elastischer Linker Cauchy-Green Tensor der k -ten Zwischenkonfiguration	54
\mathbf{C}	Rechter Cauchy-Green Tensor	46
$\overline{\mathbf{C}}$	volumenerhaltender Anteil des Rechten Cauchy-Green Tensors	51
$\hat{\mathbf{C}}$	modifizierter Rechter Cauchy-Green Tensor	127
$\overline{\hat{\mathbf{C}}}$	unimodularer Anteil des modifizierten Rechten Cauchy-Green Tensors	128
\mathbf{C}_{ek}	elast. Rechter Cauchy-Green Tensor der k -ten Zwischenkonfiguration	56
\mathbf{C}_{vk}	inelast. Rechter Cauchy-Green Tensor der k -ten Zwischenkonfiguration	56
$\overline{\mathbf{C}}_{ek}$	unimodularer elastischer Rechter Cauchy-Green Tensor der k -ten Zwischenkonfiguration	54
\mathbf{D}	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor	47
\mathbf{E}	Greenscher Verzerrungstensor	46
\mathbf{E}	linearisierter Greenscher Verzerrungstensor	105
$\mathbf{E}^{(m)}$	verallgemeinerter Verzerrungstensor vom Green-Typ	47
$\mathbf{E}^{(0)}$	Hencky Verzerrungstensor	47
$\overline{\mathbf{E}}^{(m)}$	verallg. Verzerrungstensor v. Green-Typ basierend auf isochorer Deformation	51
\mathbf{E}_{ek}	k -ter elastischer Anteil des Greenschen Verzerrungstensors \mathbf{E}	55
\mathbf{E}_{vk}	k -ter inelastischer Anteil des Greenschen Verzerrungstensors \mathbf{E}	55
$\delta\mathbf{E}$	virtueller linearisierter Verzerrungstensor	106
$\delta\mathbf{E}$	virtueller Greenscher Verzerrungstensor	119
\mathbf{f}	isotrope Tensorfunktion	18
\mathbf{F}	Deformationsgradient	46
$\hat{\mathbf{F}}$	volumenändernder Anteil des Deformationsgradienten	51
$\overline{\hat{\mathbf{F}}}$	modifizierter Deformationsgradienten	127
$\overline{\mathbf{F}}$	volumenerhaltender Anteil des Deformationsgradienten	51
\mathbf{F}_{ek}	elast. Anteil des Deformationsgradienten der k -ten Zwischenkonfiguration	53
$\overline{\mathbf{F}}_{ek}$	unimodularer elastischer Anteil des Deformationsgradienten der k -ten Zwischenkonfiguration	54
\mathbf{F}_{vk}	inelastischer Anteil des Deformationsgradienten der k -ten Zwischenkonfiguration	53
$\overline{\mathbf{F}}_{vk}$	unimodularer inelastischer Anteil des Deformationsgradienten der k -ten Zwischenkonfiguration	54
$\delta\mathbf{h}$	räumlicher virtueller Verschiebungsgradient	123
\mathbf{h}	Elastizitätsbeziehung bei kleinen Deformationen	105
$\delta\mathbf{H}$	virtueller Verschiebungsgradient	119
\mathbf{H}	Verschiebungsgradient	119

I	Einheitstensor 2-ter Stufe	16
L	Räumlicher Geschwindigkeitsgradient	47
$\bar{\mathbf{L}}_{vk}$	inelastischer "Geschwindigkeitsgradient" der k -ten Zwischenkonfiguration resultierend aus unimodularem Anteil $\bar{\mathbf{F}}_{vk}$	55
\mathbf{N}_k	Eigendyade zum k -ten Eigenwerte	18
Q	orthogonaler Tensor	17
R	Rotationstensor	46
S	gewichteter Cauchyscher Spannungstensor, Kirchhoffscher Spannungstensor	59
\mathbf{S}_{iso}	gew. Cauchy Tensor, resultierend aus isochorer Deformation	86
\mathbf{S}_{ovk}	Teilüberspannung vom Kirchhoff-Typ	99
T	Cauchyscher Spannungstensor	57
$\mathbf{T}^{(0)}$	Spannungstensor konjugiert zu $\ln \mathbf{U}$	60
$\mathbf{T}^{(1)}$	Biotscher Spannungstensor	60
$\mathbf{T}^{(m)}$	Spannungstensor konjugiert zum Verzerrungstensor $\mathbf{E}^{(m)}$	59
\mathbf{T}_{ov}	Überspannungen vom Cauchy-Typ	94
\mathbf{T}_{ovk}	Teilüberspannungen vom Cauchy-Typ	94
\mathbf{T}_R	1-ter Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor	59
$\tilde{\mathbf{T}}$	2-ter Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor	59
$\bar{\tilde{\mathbf{T}}}$	Abkürzung einer Spannung vom 2-ten Piola-Kirchhoff Typ	83
$\tilde{\mathbf{T}}_{eq}$	Gleichgewichtsspannungen vom 2-ten Piola-Kirchhoff Typ	92
$\tilde{\mathbf{T}}_{ov}$	Überspannungen vom 2-ten Piola-Kirchhoff Typ	93
$\tilde{\mathbf{T}}_{iso}$	Spannung vom 2-ten PK Typ, result. aus volumenerhaltender Deformation	82
$\tilde{\mathbf{T}}_{vol}$	Spannung vom 2-ten PK Typ, result. aus volumenändernder Deformation	82
U	Rechter Strecktensor	46
$\bar{\mathbf{U}}$	volumenerhaltender Anteil des Rechten Strecktensors	51
V	Linker Strecktensor	46
$\bar{\mathbf{V}}$	volumenerhaltender Anteil des Linken Strecktensors	51
W	Wirbeltensor	47

D.5 Tensoren 4-ter Ordnung

\mathcal{C}	Tangentenoperator bezogen auf Momentankonfiguration	85
\mathcal{C}_{iso}	Tangentenoperator des isochoren Anteils der Deformation bezogen auf Momentankonfiguration	85
\mathcal{C}_{vol}	Tangentenoperator des volumenänderenden Anteils der Deformation bezogen auf Momentankonfiguration	85
$\tilde{\mathcal{C}}$	Tangentenoperator bezogen auf Referenzkonfiguration	82
$\tilde{\mathcal{C}}_{iso}$	Tangentenoperator des isochoren Anteils der Deformation bezogen auf Referenzkonfiguration	82
$\tilde{\mathcal{C}}_{vol}$	Tangentenoperator des volumenänderenden Anteils der Deformation bezogen auf Referenzkonfiguration	82
\mathcal{D}	Deviatoroperator	81
\mathcal{F}	push-forward Operator	80
$\bar{\mathcal{F}}$	push-forward Operator des unimodularem Anteils	85
\mathcal{I}	Einheitstensor	30
$\mathcal{L}^{T_{23}}$	Transposition des 2-ten und 3-ten Indexes	28

\mathcal{Q}	Drehtensor	30
---------------	------------	----

D.6 Operatoren

adj	Adjungierte eines Tensors 2-ter Stufe	21
det	Determinante eines Tensors 2-ter Stufe	21
div	Divergenzoperator bezogen auf Koordinaten der Momentankonfiguration	58
Div	Divergenzoperator bezogen auf Koordinaten der Referenzkonfiguration	58
exp	Exponentialoperator	26
grad	$= \frac{\partial(\cdot)^k}{\partial x^l} \vec{g}_k \otimes \vec{g}^l$, Gradient eines Vektorfeldes bezogen auf Koordinaten der Momentankonfiguration	47
Grad	$= \frac{\partial(\cdot)^k}{\partial X^L} \vec{g}_k \otimes \vec{G}^L$, Gradient eines Vektorfeldes bezogen auf Koordinaten der Referenzkonfiguration	46
ln	natürlicher Logarithmus	26
sym(\cdot)	$= \frac{1}{2} ((\cdot) + (\cdot)^T)$ symmetrischer Anteil eines Tensors 2-ter Stufe	82
tr	Spur eines Tensors 2-ter Stufe	16
$\dot{(\cdot)}$	materielle Zeitableitung	47
$\overset{\Delta}{(\cdot)}$	$= \dot{(\cdot)} + \mathbf{L}^T(\cdot) + (\cdot)\mathbf{L}$, “lower convected” Oldroyd-Ableitung	
$\overset{\Delta}{(\cdot)}_{vk}$	$= \dot{(\cdot)} + \mathbf{L}_{vk}^T(\cdot) + (\cdot)\mathbf{L}_{vk}$, Oldroyd-Ableitung bez. auf Zwischenkonf.	56
\mathbf{B}^{-1}	inverser Tensor	21
\mathbf{B}^D	Deviator eines Tensors	22
\mathbf{B}^T	transponierter Tensor, $\mathbf{B}^T = b_{ij} \vec{g}^j \otimes \vec{g}^i$	16
$D_{x_i} f(\dots, x_i, \dots)[dx_i] =$	$= \frac{d}{d\lambda} f(\dots, x_i + \lambda dx_i, \dots) _{\lambda=0}$ Gateaux-(Richtungs-)Ableitung	82

D.7 Abkürzungen

ARWP	Anfangsrandwertproblem
DAE	Algebro-Differentialgleichungen
Dgl.	gewöhnliche Differentialgleichungen
DIRK	diagonal-implizite Runge-Kutta Verfahren
FÄE	Formänderungsenergie
FE	Finite Elemente
FHG	Freiheitsgrad
Gl.	Gleichung
IRK	implizite Runge-Kutta Verfahren
ODE	gewöhnliche Differentialgleichungen
PK	Piola-Kirchhoff
SDIRK	“single” diagonal-implizite Runge-Kutta Verfahren
TL	Total-Lagrange

Literaturverzeichnis

- [1] *ABAQUS Theory Manual*, v.5.8 edition, 1998.
- [2] R. Alexander. Diagonally implicit Runge-Kutta methods for stiff O.D.E.'s. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 14:1006–1021, 1977.
- [3] J. Altenbach and H. Altenbach. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1st edition, 1994.
- [4] E. Anderson et al. *LAPACK User's Guide*. SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
- [5] Ansys Inc., Canonsburg. *ANSYS Theory Manual, Release 5.6*, 2000.
- [6] E.M. Arruda and M.C. Boyce. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41:389–412, 1993.
- [7] R.J. Atkin and N. Fox. *An Introduction to the Theory of Elasticity*. Longman, London, 1980.
- [8] M. Baker and J.L. Ericksen. Inequalities restricting the form of the stress-deformation relations for isotropic elastic solids and Reiner-Rivlin fluids. *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 44:33–35, 1954.
- [9] J.M. Ball. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 63:337–403, 1977.
- [10] K.J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer Verlag, Berlin, 2nd edition, 2002.
- [11] W. Becker and W. Bürger. *Kontinuumsmechanik*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1975.
- [12] T. Belytschko, W.K. Liu, and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley and Sons, Chichester, 2000.
- [13] A. Benjeddou, E. Jankovich, and T. Hadhri. Determination of the parameters of Ogden's law using biaxial data and Levenberg-Marquardt-Fletcher algorithm. *Journal of Elastomers and Plastics*, 25:224–248, 1993.
- [14] J.S. Bergström and M.C. Boyce. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46:931–954, 1998.

- [15] A. Bertram. *Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1989.
- [16] N. Bicanic and K.H. Johnson. Who was 'Raphson'? *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14:148–152, 1979.
- [17] V.L. Biderman. Rasceti na procnost. *in Russian (cited in TRELOAR [161, p.231])*, pages 40–87, 1958.
- [18] J. Bonet and R.D. Wood. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [19] R.M. Bowen. *Introduction to Continuum Mechanics for Engineers*. Plenum Press, New York, 1989.
- [20] R.M. Bowen and C.C. Wang. *Introduction to Vectors and Tensors*, volume 1. Plenum Press, New York, 1976.
- [21] K.E. Brenan, S.L. Campbell, and L.R. Petzhold. *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. Classics in Applied Mathematics 14. SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996.
- [22] U. Brink and E. Stein. On some mixed finite element methods for incompressible and nearly incompressible finite elasticity. *Computational Mechanics*, 19:105–119, 1996.
- [23] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, Thun, 22. edition, 1987.
- [24] J. Büttner and B. Simeon. Runge-Kutta methods in elastoplasticity. *Applied Numerical Mathematics*, 41:443–458, 2002.
- [25] J.R. Cash. Diagonally implicit Runge-Kutta formulae with error estimates. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, 24:293–301, 1979.
- [26] P. Chadwick. *Continuum Mechanics. Concise Theory and Problems*. Dover Publications, Mineola (New York), 1999.
- [27] P. Charrier, B. Dacorogna, B. Hanouzet, and P. Laborde. An existence theorem for slightly compressible materials in nonlinear elasticity. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 19:70–85, 1988.
- [28] W.F. Chen and D.J. Han. *Plasticity for Structural Engineers*. Springer Verlag, New York, 1988.
- [29] P.W. Christensen. *Computational Nonsmooth Mechanics. Contact, Friction and Plasticity*. Doctoral thesis, Department of Mechanical Engineering, Linköping University, 2000. Linköping Studies in Science and Technology, No.657.
- [30] P.W. Christensen. A nonsmooth Newton method for elastoplastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:1189–1219, 2002.
- [31] P.G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity, Vol.I: Three-Dimensional Elasticity*. North-Holland, Amsterdam, 1988.

- [32] B.D. Coleman and M.E. Gurtin. Thermodynamics with internal state variables. *The Journal of Chemical Physics*, 47:597–613, 1967.
- [33] M.A. Crisfield. *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis*, volume 1. Pineridge Press, Swansea, 1986.
- [34] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 1. John Wiley and Sons, Chichester, 1991.
- [35] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 2. John Wiley and Sons, Chichester, 1997.
- [36] R. De Boer. *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer Verlag, Berlin, 1982.
- [37] G. Dhatt and G. Touzot. *The finite element method displayed*. Wiley and Sons, Chichester, 1985.
- [38] S. Diebels, P. Ellsiepen, and W. Ehlers. Error-controlled Runge-Kutta time integration of a viscoplastic hybrid two-phases model. *Technische Mechanik*, 19:19–27, 1999.
- [39] A.D. Drozdov. *Finite Elasticity and Viscoelasticity*. World Scientific Publ., Singapore, 1996.
- [40] D.C. Drucker. On the postulate of stability of material in the mechanics of continua. *Journal de Mécanique*, 3:235–249, 1964.
- [41] W. Ehlers. Constitutive equations for granular materials in geomechanical context. In C. Hutter, editor, *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics*, CISM Courses and Lectures No.337, pages 331–402, Wien, 1993. CISM, Springer Verlag.
- [42] W. Ehlers and G. Eipper. The simple tension problem at large volumetric strains computed from finite hyperelastic material laws. *Acta Mechanica*, 130:17–27, 1998.
- [43] W. Ehlers and P. Ellsiepen. Adaptive Zeitintegration-Verfahren für ein elastisch-viskoplastisches Zweiphasenmodell. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 78:S361–S362, 1998.
- [44] G. Eipper. *Theorie und Numerik finiter elastischer Deformationen in fluidgesättigten porösen Festkörpern*. Doctoral thesis, Institute of Mechanics II, University of Stuttgart, 1998. Report No. II-1.
- [45] P. Ellsiepen. *Zeit- und ortsadaptive Verfahren angewandt auf Mehrphasenprobleme poröser Medien*. Doctoral thesis, Institute of Mechanics II, University of Stuttgart, 1999. Report No. II-3.
- [46] P. Ellsiepen and S. Hartmann. Remarks on the interpretation of current non-linear finite-element-analyses as differential-algebraic equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:679–707, 2001.
- [47] A.C. Eringen. *Mechanics of Continua*. Krieger, Huntington, 1980.
- [48] P.J. Flory. Thermodynamic relations for high elastic materials. *Transaction of the Faraday Society*, 57:829–838, 1961.

- [49] L.P. Franca. An algorithm to compute the square root of a 3×3 positive definite matrix. *Computers and Mathematics with Applications*, 18:459–466, 1989.
- [50] P. Fritzen. *Numerische Behandlung nichtlinearer Probleme der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie*. Doctoral thesis, Department of Mathematics, University of Darmstadt, 1997.
- [51] A.S. Gendy and A.F. Saleeb. Nonlinear material parameter estimation for characterizing hyperelastic large strain models. *Computational Mechanics*, 25:66–77, 2000.
- [52] G.H. Golub and van Loan, C.F. *Matrix Computations*. North Oxford Academic Publ., London, 1986.
- [53] S. Govindjee and S. Reese. A presentation and comparison of two large deformation viscoelasticity models. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 199:251–255, 1997.
- [54] A.E. Green and J.E. Adkins. *Large Elastic Deformations*. Clarendon Press, Oxford, 1970.
- [55] M.S. Green and A.V. Tobolsky. A new approach to the theory of relaxing polymeric media. *The Journal of Chemical Physics*, 14:80–92, 1946.
- [56] Ch. Großmann and H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1994.
- [57] M.E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, New York, 1981.
- [58] E. Hairer, S.P. Norsett, and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I*. Springer, Berlin, 2nd revised edition, 1993.
- [59] E. Hairer and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II*. Springer, Berlin, 2nd revised edition, 1996.
- [60] S. Hartmann. *Lösung von Randwertaufgaben der Elastoplastizität. Ein Finite-Elemente-Konzept für nichtlineare kinematische Verfestigung bei kleinen und finiten Verzerrungen*. Doctoral thesis, Institute of Mechanics, University of Kassel, 1993. Report No. 1/1993.
- [61] S. Hartmann. Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnung angewendet auf ein Visko-plastizitätsmodell mit Überspannungen. In S. Hartmann and Ch. Tsakmakis, editors, *Aspekte der Kontinuumsmechanik und Materialtheorie*, pages 55–80, Kassel, 1998. Gesamthochschul-Bibliothek Verlag.
- [62] S. Hartmann. Zur Berechnung inelastischer Festkörper mit der Methode der finiten Elemente. In S. Hartmann, P. Haupt, and V. Ulbricht, editors, *Modellierung und Simulation*, pages 119–130, Kassel, 1998. Gesamthochschul-Bibliothek.
- [63] S. Hartmann. A time-adaptive FE-analysis of inelastic structures. In W. Wunderlich, editor, *ECCM '99 European Conference on Computational Mechanics*, pages on CD-ROM, Munich, Aug. 31 - Sep. 3 1999. ECCM.
- [64] S. Hartmann. A time adaptive finite-element procedure applied to creep and relaxation processes. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 80(Suppl.2):S515–S516, 2000.

- [65] S. Hartmann. Numerical studies on the identification of the material parameters of Rivlin's hyperelasticity using tension-torsion tests. *Acta Mechanica*, 148:129–155, 2001.
- [66] S. Hartmann. Parameter estimation of hyperelasticity relations of generalized polynomial-type with constraint conditions. *International Journal of Solids and Structures*, 38(44-45):7999–8018, 2001.
- [67] S. Hartmann. Computation in finite strain viscoelasticity: finite elements based on the interpretation as differential-algebraic equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(13-14):1439–1470, 2002.
- [68] S. Hartmann. Finite-element computation of large strain viscoelastic structures using diagonally implicit Runge-Kutta methods. In *European Conference on Computational Mechanics 2001*, pages on CD-ROM, Cracow, 26.-29. June.
- [69] S. Hartmann, P. Haupt, and T. Tschöpe. Parameter identification with a direct search method using finite elements. In D. Besdo, R.H. Schuster, and J. Ihlemann, editors, *Constitutive Models of Rubber II*, pages 249–256, Lisse, 2001. Balkema.
- [70] S. Hartmann, M. Kamlah, and A. Koch. Numerical aspects of a non-proportional cyclic plasticity model under plane stress conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42:1477–1498, 1998.
- [71] S. Hartmann, G. Lührs, and P. Haupt. An efficient stress algorithm with applications in viscoplasticity and plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:991–1013, 1997.
- [72] S. Hartmann and P. Neff. Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility. *International Journal of Solids and Structures*, accepted for publication: 2003.
- [73] P. Haupt. Foundation of continuum mechanics. In K. Hutter, editor, *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics*, CISM Courses and Lectures No.337, pages 1–77, Wien, 1993. CISM, Springer Verlag.
- [74] P. Haupt. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer Verlag, Berlin, 2000.
- [75] P. Haupt and A. Lion. Experimental identification and mathematical modelling of viscoplastic material behavior. *Journal of Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 7:73–96, 1995.
- [76] P. Haupt and K. Sedlan. Viscoplasticity of elastomeric materials. experimental facts and constitutive modelling. *Archive of Applied Mechanics*, 71:89–109, 2001.
- [77] P. Haupt and C. Tsakmakis. On the application of dual variables in continuum mechanics. *Journal of Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 1:165–196, 1989.
- [78] P. Haupt and C. Tsakmakis. Stress tensors associated with deformation tensors via duality. *Archive of Mechanics*, 48:347–384, 1996.
- [79] R. Hill. Constitutive inequalities for isotropic elastic solids under finite strain. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A* 314:457–472, 1970.

- [80] G.A. Holzapfel. On large strain viscoelasticity: Continuum formulation and finite element applications to elastomeric structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3903–3926, 1996.
- [81] G.A. Holzapfel. *Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley & Sons, Chichester, 2000.
- [82] G.A. Holzapfel and J.C. Simo. A new viscoelastic constitutive model for continuous media at finite thermomechanical changes. *International Journal of Solids and Structures*, 33:3019–3034, 1996.
- [83] W. Hoyer and J.W. Schmidt. Newton-type decomposition methods for equations arising in network analysis. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 64:397–405, 1984.
- [84] N. Huber and C. Tsakmakis. Finite deformation viscoelasticity laws. *Mechanics of Materials*, 32:1–18, 2000.
- [85] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [86] A. Isihara, N. Hashitsume, and M. Tatibana. Statistical theory of rubber-like elasticity. *The Journal of Chemical Physics*, 19:1508–1512, 1951.
- [87] A.G. James, A. Green, and G.M. Simpson. Strain energy functions of rubber. I. Characterization of gum vulcanizates. *Journal of Applied Polymer Science*, 19:2033–2058, 1975.
- [88] W. Jaunzemis. *Continuum Mechanics*. The Macmillan Comp., New York, 1967.
- [89] A.R. Johnson, C.J. Quigley, and J.L. Mead. Large strain viscoelastic constitutive models for rubber, part I: formulations. *Rubber Chemistry and Technology*, 67:904–917, 1994.
- [90] M. Kaliske. *Zur Theorie und Numerik von Polymerstrukturen unter statischen und dynamischen Einwirkungen*. Doctoral thesis, Institute of Statics, University of Hannover, 1995. Report No. 41-95.
- [91] M. Kaliske and G. Heinrich. An extended tube-model for rubber elasticity: statistical-mechanical theory and finite-element implementation. *Rubber Chemistry and Technology*, 72:602–632, 1999.
- [92] M. Kaliske and H. Rothert. Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. *Computational Mechanics*, 19:228–239, 1997.
- [93] B.G. Kao and L. Razgunas. On the determination of strain energy functions of rubber. In *Vehicle Structural Mechanics*, pages 145–154. Proceedings of the Sixth International Conference, 22.-24. April 1986.
- [94] P. Keck. *Zur Beschreibung finiter Deformationen von Polymeren: Experimente, Modellbildung, Parameteridentifikation und Finite-Elemente-Formulierung*. Doctoral thesis, Institute of Mechanics II, University of Stuttgart, 1998. Report No. I-5.
- [95] A. Kielbasinski and H. Schwetlick. *Numerische lineare Algebra*. Harri Deutsch, Thun, 1988.

- [96] E. Kirchner and B. Simeon. A higher-order time integration method for viscoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175:1–18, 1999.
- [97] P. Le Tallec, C. Rahier, and A. Kaiss. Three-dimensional incompressible viscoelasticity in large strains: Formulation and numerical approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 109:233–258, 1993.
- [98] E.H. Lee. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, 36:1–6, 1969.
- [99] E.H. Lee and D.T. Liu. Finite-strain elastic-plastic theory of application to plane wave analysis. *Journal of Applied Physics*, 38:19–27, 1967.
- [100] D.C. Leigh. *Nonlinear Continuum Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 1968.
- [101] H. Leipholz. *Einführung in die Elastizitätstheorie*. G. Braun, Karlsruhe, 1968.
- [102] A. Lion. A constitutive model for black filled rubber. experimental investigations and mathematical representations. *Journal of Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 8:153–169, 1996.
- [103] A. Lion. On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45:1805–1834, 1997.
- [104] A. Lion. A physically based method to represent the thermomechanical behaviour of elastomers. *Acta Mechanica*, 123:1–26, 1997.
- [105] A. Lion. Thixotropic behaviour of rubber under dynamic loading histories: Experiments and theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46:895–930, 1998.
- [106] A. Lion. *Thermomechanik von Elastomeren. Experimente und Materialtheorie*. Habilitation, Institute of Mechanics, University of Kassel, 2000. Report No. 1/2000.
- [107] C.H. Liu, G. Hofstetter, and H.A. Mang. 3d finite element analysis of rubber-like materials at finite strains. *Engineering Computations*, 11:111–128, 1994.
- [108] J. Lubliner. A model of rubber viscoelasticity. *Mechanics Research Communications*, 12:93–99, 1985.
- [109] G. Lührs. *Randwertaufgaben der Viskoplastizität. Modellierung, Simulation und Vergleich mit experimentellen Daten aus zyklischen Prozessen und Umformvorgängen*. Doctoral thesis, Institute of Mechanics, University of Kassel, 1997. Report No. 1/1997.
- [110] G. Lührs, S. Hartmann, and P. Haupt. On the numerical treatment of finite deformations in elastoviscoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 144:1–21, 1997.
- [111] L.E. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- [112] J.E. Marsden and T.J.R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.

- [113] G.E. Mase. *Theory and Problems of Continuum Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 1970.
- [114] P. Middendorf. *Viskoelastisches Verhalten von Polymersystemen*. Number 661 in Fortschritt-Bericht VDI Reihe 5. VDI-Verlag, 2002.
- [115] C. Miehe. Computation of isotropic tensor functions. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9:889–896, 1993.
- [116] C. Miehe. *Kanonische Modelle multiplikativer Elasto-Plastizität. Thermodynamische Formulierungen und numerische Implementation*. Habilitation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover, 1993. Report No. F93/1.
- [117] C. Miehe. Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:1981–2004, 1994.
- [118] C. Miehe. Comparison of two algorithms for the computation of fourth-order isotropic tensor functions. *Computers & Structures*, 66:37–43, 1998.
- [119] C. Miehe and J. Keck. Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubber polymers. experiments, modeling and algorithmic implementation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48:323–365, 2000.
- [120] M. Mooney. Theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 11:582–592, 1940.
- [121] K.N. Morman. The generalized strain measure with application to nonhomogeneous deformations in rubber-like solids. *Journal of Applied Mechanics*, 53:726–728, 1986.
- [122] F.D. Murnaghan. *Finite Deformation of an Elastic Solid*. Chapman and Hall, New York, 1951.
- [123] J.C. Nagtegaal. On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33:469–484, 1982.
- [124] L. Nasdala. *Ein viskoelastisches Schädigungsgesetz für den stationär rollenden Reifen*. Doctoral thesis, Institute of Statics, University of Hannover, 2000. Report No. 50-00.
- [125] P. Neff. *Mathematische Analyse multiplikativer Viskoplastizität*. Shaker Verlag, Aachen, 2000.
- [126] R.W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A* 328:567–583, 1972.
- [127] R.W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A* 326:565–584, 1972.
- [128] R.W. Ogden. Volume changes associated with the deformation of rubberlike solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 24:323–338, 1976.

- [129] R.W. Ogden. *Non-Linear Elastic Deformations*. Ellis Horwood, Chichester, 1984.
- [130] R.W. Ogden. Recent advances in the phenomenological theory of rubber elasticity. *Rubber Chemistry and Technology*, 59:361–383, 1986.
- [131] M. Ortiz and E.P. Popov. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:1561–1576, 1985.
- [132] R.W. Penn. Volume changes accompanying the extension of rubber. *Transactions of the Society of Rheology*, 14:509–517, 1970.
- [133] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in FORTRAN*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1992.
- [134] P.A. Przybylo and E.M. Arruda. Experimental investigations and numerical modeling of incompressible elastomers during non-homogeneous deformations. *Rubber Chemistry and Technology*, 71:730–749, 1998.
- [135] N.B.G. Rabbat, A.L. Sangiovanni-Vincentelli, and H.Y. Hsieh. A multilevel Newton algorithm with macromodeling and latency for the analysis of large-scale nonlinear circuits in the time domain. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 26:733–740, 1979.
- [136] S. Reese. *Theorie und Numerik des Stabilitätsverhaltens hyperelastischer Festkörper*. Doctoral thesis, Department of Mechanics, Technical University of Darmstadt, 1994.
- [137] S. Reese. *Thermomechanische Modellierung gummiartiger Polymer-Strukturen*. Habilitation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 2001. Report No. F01/4.
- [138] S. Reese and S. Govindjee. A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 35:3455–3482, 1998.
- [139] A. Rieger. Parameteridentifikation Finiter Elastizität rußgefüllter Polymere bei homogenen und inhomogenen Deformationen. Master's thesis, Institute of Mechanics I, University of Stuttgart, 2000. Report/Preprint No. 00-I-03.
- [140] R.S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials I. Fundamental concepts. *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, Series A 240:459–490, 1948.
- [141] R.S. Rivlin and D.W. Saunders. Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber. *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, Series A 243:251–288, 1951.
- [142] H. Schade. *Tensoranalysis*. Walter de Gruyter, Berlin, 1997.
- [143] G. Scheday and C. Miehe. Parameteridentifikation finiter Elastizität bei inhomogenen Deformationen. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 81(Suppl.2):S425–S426, 2001.
- [144] O. Scherf. *Numerische Simulation inelastischer Körper*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 20 (Rechnerunterstützte Verfahren) Nr.321. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2000.

- [145] H.R. Schwarz, E. Stiefel, and H. Rutishauser. *Matrizen-Numerik. Numerik symmetrischer Matrizen*. Teubner Verlag, Stuttgart, 2. edition edition, 1972.
- [146] K. Sedlan. *Inelastisches Materialverhalten von Elastomerwerkstoffen: Experimentelle Untersuchung und Modellbildung*. Doctoral thesis, Institute of Mechanics, University of Kassel, 2000. Report No. 2/2001.
- [147] K. Sedlan and P. Haupt. Inelastisches Materialverhalten von gefüllten Elastomeren bei Finiten Deformationen. *Technische Mechanik*, 19:269–278, 1999.
- [148] D.J. Seibert and N. Schöche. Direct comparison of some recent rubber elasticity models. *Rubber Chemistry and Technology*, 73:366–384, 2000.
- [149] J. Serrin. The derivation of stress-deformation relations for a stokesian fluid. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 8:459–469, 1959.
- [150] J.C. Simo. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60:153–173, 1987.
- [151] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer Verlag, New York, 1998.
- [152] J.C. Simo and R.L. Taylor. Penalty function formulations for incompressible nonlinear elastostatics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 35:107–118, 1982.
- [153] J.C. Simo and R.L. Taylor. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48:101–118, 1985.
- [154] J.C. Simo and R.L. Taylor. Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. continuum basis and numerical algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 85:273–310, 1991.
- [155] J.C. Simo, R.L. Taylor, and K.S. Pister. Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51:177–208, 1985.
- [156] S.B. Smeulders and S. Govindjee. A constrained downhill-simplex method for stress-strain data fitting. Technical Report Report No. UCB/SEMM-98/07, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1998.
- [157] W.I. Smirnow. *Lehrgang der höheren Mathematik, Teil I*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986.
- [158] A.J.M. Spencer. *Continuum Mechanics*. Longman, New York, 1980.
- [159] K. Strehmel and R. Weiner. *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1995.
- [160] T.C.T. Ting. Determination of $\mathbf{C}^{1/2}$, $\mathbf{C}^{-1/2}$ and more general isotropic tensor functions of \mathbf{C} . *Journal of Elasticity*, 15:319–323, 1985.

- [161] L.R.G. Treloar. *The Physics of Rubber Elasticity*. Clarendon Press, Oxford, 3rd edition, 1975.
- [162] C. Truesdell. *The Elements of Continuum Mechanics*. Springer Verlag, New York, 1966.
- [163] C. Truesdell. *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. Academic Press, New York, 1977.
- [164] C. Truesdell and W. Noll. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, volume III/3 of *Encyclopedia of Physics*. Springer Verlag, Berlin, 1965.
- [165] N.W. Tschoegl. Constitutive equations for elastomers. *Journal of Polymer Science Part A-1*, 9:1959–1970, 1971.
- [166] E.H. Twizell and R.W. Ogden. Non-linear optimization of the material constants in Ogden's stress-deformation function for incompressible isotropic elastic materials. *The Journal of the Australian Mathematical Society, Series B* 24:424–434, 1983.
- [167] K.C. Valanis and R.F. Landel. The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios. *Journal of Applied Physics*, 38:2997–3002, 1967.
- [168] P.A.J. van den Bogert. *Computational Modelling of Rubberlike Materials*. Doctoral thesis, TU Delft, 1991.
- [169] C.-C. Wang and C. Truesdell. *Introduction of Rational Elasticity*. Noordhoff Publ., Leyden, 1973.
- [170] G. Weber and L. Anand. Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic-viscoplastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79:173–202, 1990.
- [171] J.H. Wilkinson. *The algebraic eigenvalue problem*. Clarendon Press, Oxford, 1988.
- [172] J. Wittekindt. *Die numerische Lösung von Anfangs-Randwertproblemen zur Beschreibung inelastischen Werkstoffverhaltens*. Doctoral thesis, Department of Mathematics, University of Darmstadt, 1991.
- [173] P. Wriggers. *Konsistente Linearisierung in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Element-Methode*. Habilitation, Institute of Mechanics and Computational Mechanics, University of Hannover, 1988. Report No. F88/4.
- [174] P. Wriggers. *Nichtlineare Finite-Elemente Methoden*. Springer Verlag, Berlin, 2001.
- [175] O.H. Yeoh. Some forms of strain energy function for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 66:754–771, 1993.
- [176] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 1. Butterworth and Heinemann, Oxford, 5th edition, 2000.
- [177] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 2. Butterworth and Heinemann, Oxford, 5th edition, 2000.