

Berichte des Instituts für Mechanik

Bericht 2/2008

Mark Fiolka

Theorie und Numerik volumetrischer Schalenelemente
zur Delaminationsanalyse von Faserverbundlaminaten

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Maschinenbau der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) angenommen.

Erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. A. Matzenmiller
Zweiter Gutachter: Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof

Tag der mündlichen Prüfung

2. März 2007

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2007
ISBN 978-3-89958-397-7

© 2008, kassel university press GmbH, Kassel
www.upress.uni-kassel.de

Druck und Verarbeitung: Unidruckerei der Universität Kassel
Printed in Germany

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2001 bis 2006 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Numerische Methoden der Mechanik am Institut für Mechanik an der Universität Kassel.

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Matzenmiller für die Anregung zu dieser Arbeit und die fachliche Betreuung bedanken. Sein in mich gesetztes Vertrauen war stets Motivation für meine Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof danke ich für die freundliche Übernahme des Korreferats. Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Link und Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Schlimmer bedanke ich mich für ihre Mitwirkung in der Prüfungskommission.

Allen jetzigen und ehemaligen Mitgliedern des Instituts danke ich herzlich für das angenehme Arbeitsklima. Besonders meinem Zimmernachbarn Herrn Dr.-Ing. Sebastian Gerlach verdanke ich viele hilfreiche Hinweise. Für die tatkräftige Unterstützung meiner Arbeit möchte ich mich bei Frau Lore Klünder bedanken.

Kassel, im Juli 2007

Mark Fiolka

meinen Eltern

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Zielsetzung	1
1.3	Gliederung	2
2	Faserverbundwerkstoffe	5
2.1	Werkstoffe der Faserverbunde	5
2.2	Versagen von Faserverbundstrukturen	6
2.2.1	Intralaminare Versagen	6
2.2.2	Interlaminares Versagen	7
2.3	Aspekte der Modellierung	8
3	Grundlagen der Kontinuumsmechanik	11
3.1	Mathematische Grundlagen	11
3.1.1	Rechenregeln für Vektoren und Tensoren	11
3.1.2	Vektor- und Tensoranalysis	13
3.1.3	Divergenztheorem	14
3.1.4	Variationsrechnung	14
3.2	Kinematik	14
3.3	Kinetik	18
3.4	Bilanzgleichungen	19
3.4.1	Massenbilanz	19
3.4.2	Impulsbilanz	20
3.4.3	Drehimpulsbilanz	21
3.5	Konstitutive Modelle der Hyperelastizität	21
3.5.1	Isotropes Materialverhalten	24
3.5.2	Transversal isotropes Materialverhalten	25
3.6	Prinzip von D’ALEMBERT	27
3.7	Prinzip vom stationären Wert der potentiellen Energie	29
3.8	Mehrfeldfunktional vom HU-WASHIZU-Typ	29
4	Schalentragwerke	33
4.1	Schalenmechanik	33
4.2	Kinematik der volumetrischen Schale	35
4.3	Mehrschicht-Schalenkinematik	37

5	Methode der finiten Elemente	39
5.1	Materielle Diskretisierung der volumetrischen Schale	40
5.2	Abbildung in die Konfigurationen	42
5.3	Linearisierung der Gleichgewichtsangabe	43
5.4	Querdehndefekt der 6-Parametertheorie	45
5.5	Reduktion des HU-WASHIZU Funktionals	47
5.6	Erweiterung der Dickendehnungen	48
5.7	Querschubversteifung	52
5.8	Verbesserung der Querschubdehnungen	53
5.9	Dickenversteifung gekrümmter Strukturen	55
5.10	Verbesserung der Dickendehnung	55
6	Numerische Beispiele zu volumetrischen Schalenelementen	57
6.1	Biegepatchtest	59
6.2	Kragarm unter Einzellast	61
6.3	Kragarm unter Einzelmoment	64
6.4	Zylinderschale	66
6.5	Halbkugelschale	68
6.6	Geschichteter Kragbalken	71
6.7	Gekrümmter Balken	74
6.8	Zugversuch an einer Faserprobe	76
6.9	Zweischicht Zugprobe	77
7	Grundlagen der Bruch- und Schädigungsmechanik	81
7.1	Energiefreisetzungsrage	82
7.2	Rissmodell nach DUGDALE	83
7.3	Rissmodell nach BARENBLATT	84
8	Grenzflächenschädigungsmechanik	85
8.1	Kinematik der Grenzfläche	86
8.2	Entfestigungsmodelle für Grenzflächen	89
8.2.1	Bilineares Modell von HILLERBORG	90
8.2.2	Trilineares Modell von TVERGAARD & HUTCHINSON	94
8.2.3	Kubisches Modell von NEEDLEMAN	95
8.2.4	Mixed-Mode Modell von DÁVILA & CAMANHO	96
8.2.5	Materieller Operator	99
8.3	Dreidimensionales Grenzflächenelement	101
9	Numerische Beispiele zur Delaminationsberechnung	107
9.1	DCB-Probe	108
9.2	ENF-Probe	118
9.3	FRMM-Probe	122
9.4	Delamination eines gekrümmten Balkens	127
10	Zusammenfassung und Ausblick	129

A Analytische Lösung der Delaminationsproben	133
A.1 Analytische Lösung der DCB-Probe	133
A.2 Analytische Lösung der ENF-Probe	134
A.3 Analytische Lösung der ELS-Probe	136
A.4 Analytische Lösung der FRMM-Probe	137
B Zeichenerklärung	141
Literaturverzeichnis	145

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Bauteile aus Faserverbundwerkstoffen sind heutzutage nicht mehr nur auf den Anwendungsbereich in der Luft- und Raumfahrt beschränkt, sondern sie sind ebenfalls in der Sport- und Freizeitindustrie als günstiges Massenprodukt zu finden. Allerdings sind Faserverbunde auch in der Lage, einen Lösungsbeitrag zu den akuten Problemen der heutigen Zeit, wie z.B. dem zunehmenden Verbrauch der Energiereserven, zu liefern. Ihr geringes Gewicht sowie die guten mechanischen Eigenschaften können zur Konstruktion von optimierten und damit leichteren Strukturen dienen und so einen Beitrag zum Energiesparen leisten. Erste Ansätze dazu sind in der Automobilindustrie zu finden, indem Teilkomponenten der Großserienfahrzeuge aus Faserverbundwerkstoffen gefertigt werden. Faserverbundstrukturen werden auch direkt als Komponenten zur Erzeugung von regenerativer Energie eingesetzt, z.B. als Werkstoff für Rotoren von Windkraftanlagen.

Optimierte Strukturen sind aber immer „gefährliche“ Strukturen, da sie bis zu ihrer Traggrenze hin belastet werden. Die Gefahr des globalen Kollapses ist daher bei optimierten Strukturen höher als es bei robust konstruierten der Fall ist. Ein Ausweg aus diesem Dilemma besteht darin, das Verhalten des Materials und der Struktur immer besser verstehen zu lernen, um genauere Vorhersagemodelle entwickeln zu können. Die numerische Simulation der Faserverbundstruktur mit der Methode der finiten Elemente ist daher unumgänglich. Durch die immer weiter verbesserten Berechnungsmethoden und die rasante Entwicklung im Bereich der Computerhardware ist die genauere Simulation der Faserverbundlaminate möglich. Zur weiter verbesserten Berechnungsmethode soll in dieser Arbeit ein Beitrag geliefert werden, indem ein Berechnungskonzept für Faserverbundstrukturen auf der Mesoebene entwickelt und vorgestellt wird.

1.2 Zielsetzung

Faserverbundstrukturen treten meist in schalenartiger Form auf. Um eine hohe Berechnungsgenauigkeit zu erzielen, muss zur numerischen Simulation ein finites Schalenelement verwendet werden, das den dreidimensionalen Spannungszustand vollständig beschreibt. Unidirektional verstärkte Faserverbunde werden in der Re-

gel geschichtet als Laminat verwendet. Daher muss es problemlos möglich sein, mehrere Schalenelemente über die Querschnittshöhe der Schale zu schichten. So kann entweder jede unidirektionale Faserschicht mit einem Schalenelement beschrieben werden oder aber es können komplexe, transversale Spannungsverläufe durch Netzverdichtung in Dickenrichtung erfasst werden.

Die oben beschriebenen Voraussetzungen werden von den in dieser Arbeit beschriebenen volumetrischen Schalenelementen erfüllt: Die niedrig interpolierten Elemente verhalten sich auch bei der Simulation von dünnwandigen Strukturen nahezu versteifungsfrei.

Eine der gefährlichsten Versagensarten von Faserverbundstrukturen ist die Delamination, denn es lösen sich unidirektionale Faserschichten voneinander ab. Die Delamination ist so gefährlich, da sie weit vor der erwarteten Traggrenze zum vollständigen Versagen der Struktur führen kann. Die Entstehung und besonders das Fortschreiten der Delamination soll in dieser Arbeit untersucht werden. Die Beschreibung der Delamination erfolgt im Rahmen einer schädigungsmechanischen Betrachtungsweise mit verschmierter Rissabbildung. Der Rissfortschritt wird durch speziell entwickelte Grenzflächenelemente abgebildet. Als konstitutive Beziehung dient ein Spannungs-Separations-Modell. Aufgrund der dreidimensionalen Modellierung der Faserverbundstruktur ist die Einbeziehung und Interaktion aller drei Bruchmoden möglich.

Die Entwicklung, die Verifikation und die Validierung der beiden oben beschriebenen finiten Elemente und ihrer Materialmodelle sind das Ziel dieser Arbeit.

1.3 Gliederung

Die Arbeit gliedert sich in zehn Kapitel, deren Inhalt im Folgenden kurz erläutert wird:

Grundlegende Eigenschaften von Faserverbundwerkstoffen werden in **Kapitel 2** besprochen. Außerdem wird die Modellierung von Faserverbundstrukturen auf der Makro-, Meso- und Mikroebene behandelt. Abschließend werden die wichtigsten intralaminaren und interlaminaren Versagensvorgänge von unidirektional verstärkten Faserverbundlaminaten erläutert.

Das **Kapitel 3** beinhaltet die notwendigen Grundlagen der Kontinuumsmechanik. Zuerst erfolgt eine kurze Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung. Dann wird die Kinematik und Kinetik des dreidimensionalen Körpers besprochen und schließlich die Bilanzgleichung eingeführt. Die konstitutiven Gleichungen für die Hyperelastizität kleiner Verzerrungen werden betrachtet. Außerdem behandelt das Kapitel die Variationsformulierung und die schwache Form der Differentialgleichung. Das Kapitel schließt mit der Einführung des Mehrfeldfunktionals nach HU-WASHIZU.

Kapitel 4 behandelt die Schalenträgerwerke. Zunächst wird die numerische Schalenmechanik mit ihren Hauptentwicklungsströmungen besprochen. Dann folgt die Einführung der Schalenkinematik der volumetrischen Schale mit Mittelfläche. Abschließend wird die für die Berechnung von laminierten Schalen notwendige Mehrschichtkinematik behandelt.

Das **Kapitel 5** umfasst die Methode der finiten Elemente. Zuerst wird die ma-

terielle Diskretisierung der volumetrischen Schale beschrieben und dann erfolgt die Linearisierung der Grundgleichungen. Anschließend werden die unterschiedlichen Versteifungseffekte bei niedrig interpolierten Elementen besprochen. Durch die Kombination der „Assumed Strain“ und der „Enhanced Assumed Strain“-Methode entsteht ein Schalenelement, das besonders zur Simulation von Faserverbundstrukturen geeignet ist.

Im **Kapitel 6** wird die Leistungsfähigkeit des behandelten Schalenelements an numerischen Beispielen demonstriert. Der Biegepatchtest für Platten wird behandelt und am Beispiel eines Kragarms werden die Auswirkungen der einzelnen Versteifungseffekte studiert. Danach werden einfach und doppelt gekrümmte Schalenträgerwerke untersucht. Anhand eines Laminatbalkens und eines gekrümmten Balkens werden die genauen Verläufe der transversalen Spannungen unter Verwendung der Mehrschichtkinematik betrachtet. Abschließend werden ungeschichtete und geschichtete unidirektional verstärkte Faserverbunde untersucht.

Das **Kapitel 7** gibt eine Einführung in die Bruch- und in die Schädigungsmechanik, wobei auf zwei Bruchmodelle für Materialien die sich plastisch bzw. spröde verhalten eingegangen wird.

Kapitel 8 geht auf die Grenzflächenschädigungsmechanik ein. Die Kinematik von Körpern mit einer Grenzfläche wird besprochen. Anschließend folgt die Einführung von unterschiedlichen Entfestigungsmodellen, die mit einem bilinearen, einem trilinearen und einem kubischen Verlauf der Grenzflächenspannungen beschrieben werden. Abschließend wird ein dreidimensionales Grenzflächenelement hergeleitet. Numerische Beispiele zur Delamination werden in **Kapitel 9** dargestellt. Interlaminare Bruchtests im Modus I, Modus II und im „Mixed Mode“ werden numerisch simuliert und mit experimentellen und analytischen Lösungen verglichen.

Eine Zusammenfassung der Arbeit und ein Ausblick gibt das **Kapitel 10**. Im Anhang folgt die Beschreibung der analytischen Lösungen der Delaminationsproben auf der Basis einfacher Balkenmodelle.

Kapitel 2

Faserverbundwerkstoffe

Faserverbundmaterialien bestehen aus einer Matrix, die durch Fasern verstärkt wird. Bei der Entwicklung von Faserverbunden dient die Natur der Technik als Vorbild. So besteht Holz aus Zellulosefasern, die in Lignin eingebettet sind. Die Menschheit hat schon frühzeitig dieses Prinzip kopiert, z.B. bei der Herstellung von Lehmziegeln, die durch die Beigabe von Stroh verstärkt werden [116]. Die Matrix schützt die Fasern vor Schädigung und hindert sie am Ausknicken. Außerdem beteiligt sich die Matrix am Lastabtrag zwischen den Fasern. Die Fasern werden so ausgerichtet, dass sie optimal am Lastabtrag beteiligt sind.

2.1 Werkstoffe der Faserverbunde

Die wichtigsten Matrixmaterialien sind Kunststoffe, Metalle, hydraulische Bindemittel und Keramiken. Im Bereich des Maschinenbaus sind die Kunststoffe das meist verwendete Matrixmaterial. Polyesterharze sind sehr widerstandsfähig gegen äußere Angriffe, wogegen sich Epoxide durch höhere Bruchdehnungen auszeichnen [123].

Für die Fasermaterialien werden Kunststoffe, Metalle, Gläser, Kohlenstoffverbindungen und Naturstoffe verwendet. Im Bereich der hochfesten Fasern werden Glasfasern wegen ihrer hohen Bruchdehnung und geringen Kosten verwendet. Allerdings weisen sie einen geringen Elastizitätsmodul auf. Kohlefasern zeichnen sich durch einen hohen Elastizitätsmodul aus, besitzen aber nur eine geringe Bruchdehnung. Die synthetischen Kevlar-Armidfasern weisen bei ähnlicher Bruchdehnung einen höhern Elastizitätsmodul als Glasfasern auf. Borfasern zeigen ähnlich hohe Bruchdehnungen und einen Elastizitätsmodul wie Kevlar-Armidfasern, sind aber unempfindlich gegenüber hohen Temperaturen.

Für die Anordnung der Faser innerhalb der Matrix gibt es unterschiedliche Möglichkeiten - siehe Abb. 2.1. Neben der unidirektionalen Anordnung der Langfaser kann die Matrix bidirektional mittels eines Gewebes oder Geleges verstärkt sein. Eine dreidimensionale Verstärkung durch multidirektional ausgerichtete Fasern ist ebenfalls möglich. Durch die Verstärkung der Matrix mit ungerichteten Kurzfasern entsteht ein quasi-isotroper Verbundwerkstoff. Daneben existieren eine Reihe von Sonderformen wie z.B. Gewirke oder Maschenware.

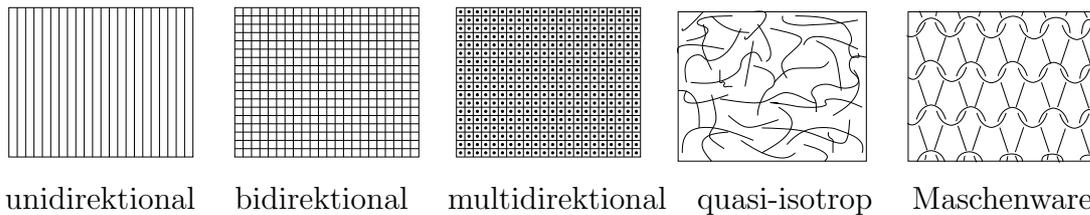


Abbildung 2.1: Mögliche Anordnung der Fasern in der Matrix

2.2 Versagen von Faserverbundstrukturen

Das Versagen von Faserverbundstrukturen ist sehr komplex und nach wie vor Gegenstand intensiver Forschungsarbeit. In der Abb. 2.2 nach OCHOA & REDDY [103] sind die Versagensvorgänge innerhalb der Struktur aus unidirektional verstärktem Faserverbundmaterial dargestellt. Die Versagensvorgänge werden auf der Faser-Matrix-Ebene, der Einzelschichtebene und auf der Laminatenebene betrachtet. Querrisse innerhalb einer Schicht werden ausgelöst durch Matrixrisse, Faserspliss und dem Ablösen des Faser-Matrix-Verbundes, was schließlich zum Versagen der Matrix an der Schichtgrenze führt. Das Versagen der Schichtgrenze kann dann die Delamination des Laminats auslösen. Die Delamination zwischen den einzelnen Schichten führt zum frühzeitigen Versagen der Faserverbundstruktur im subkritischen Lastbereich durch Beulen oder Druck-Zugversagen des Laminats.

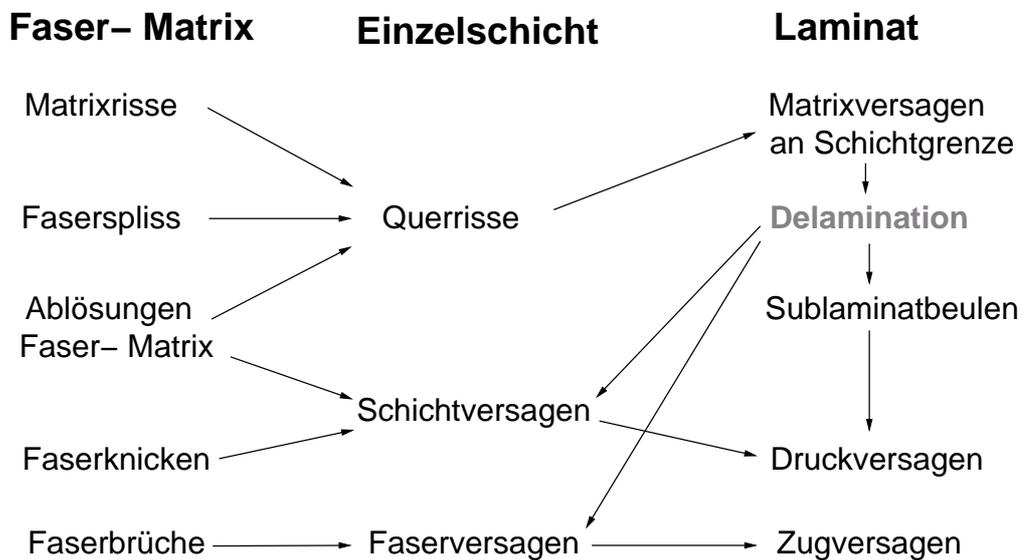


Abbildung 2.2: Versagensvorgänge innerhalb einer Faserverbundstruktur

2.2.1 Intralaminare Versagen

Innerhalb einer unidirektional faserverstärkten Schicht wird unterschieden zwischen dem Faserversagen und dem Zwischenfaserversagen. Die Abb. 2.3 nach

PUCK [107] und CUNTZE [40] zeigt typische Versagensformen, die innerhalb eines unidirektionalen Verbundes auftreten. Das Versagen der Fasern durch Bruch und Ausknicken zeigen Abbildungen 2.3 (a) und (b). Die unteren drei Abbildungen stellen den Zwischenfaserbruch dar, wobei Matrixrisse, Faserspliss und das Versagen der Faser-Matrix Verbindung gemeinsam auftreten. Der Schubbruch in Abb. 2.3 (e) ist besonders gefährlich, da er zum Auseinanderreißen einer Schicht führen kann.

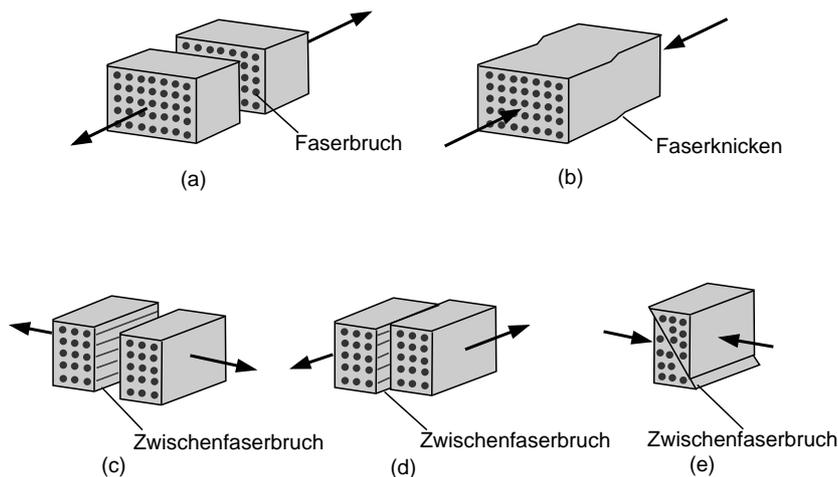


Abbildung 2.3: Versagensformen einer unidirektional verstärkten Schicht

Die Forderung, dass keine der oben beschriebenen Versagensformen innerhalb einer unidirektional verstärkten Schicht auftreten soll, gewährleistet eine lange Lebensdauer. Versagenskriterien für Faserverbundwerkstoffe werden in unabhängige Versagenskriterien und polynomiale Versagenskriterien unterschieden - siehe dazu OCHOA & REDDY [103] ab Seite 122. Zu den unabhängigen Versagenskriterien gehören das Maximalspannungskriterium und das Maximalverzerrungskriterium. Die bekanntesten Vertreter der polynomialen Versagenskriterien sind das TSAI-WU, das HOFFMANN und das TSAI-HILL Kriterium.

2.2.2 Interlaminares Versagen

Während des Herstellungsprozesses eines Laminats bildet sich zwischen den Einzelschichten ein Bereich aus, der vorwiegend aus Matrixmaterial besteht. Bedingt durch den Herstellungsprozess sind in ihm auch Luftbläschen eingeschlossen. Daher unterscheidet sich das Materialverhalten in der Zwischenschicht vom reinen Matrixmaterial. Da beim Ablösen des Laminats entlang dieser Zwischenschicht keine Fasern durchtrennt werden müssen, ist sie als Schwachstelle der Struktur anzusehen. PUCK [107] nennt diese Versagensart Zwischenschichtbruch, üblicher Begriff in der Literatur ist Delamination. Das Zertrennen der Schichten wird entweder durch die Zugspannung senkrecht zur Zwischenschicht oder durch Schubspannungen in der Zwischenschicht ausgelöst. Diese Spannungen werden interlaminaire Spannungen genannt. Aus Gleichgewichtsgründen treten sie natürlich auch innerhalb des Laminats auf.

Sofern keine Schädigungen wie Anrisse und Fehlstellen in der Zwischenschicht existieren, sind die interlaminaren Spannungen in dünnen und wenig gekrümmten Faserverbundstrukturen zu gering um eine Delamination auszulösen. Eine Schädigung der Zwischenschicht kann im Betriebszustand der Struktur weitgehend un bemerkt entstehen. Bei einem aus CFK gefertigtem Flugzeug kommt es zu Schlag einwirkungen z.B. durch herumliegende Teile auf der Startbahn, die vom Flugzeug aufgewirbelt werden. Herunterfallende Werkzeuge bei Inspektionen oder Vogelschlag können ebenfalls Schäden anrichten. Die Schlagbeanspruchung erzeugt hohe interlaminare Spannungen, die zu einer lokalen Schädigung der Zwischenschicht führt. Neben der Schlagbelastung besteht die Gefahr der Delamination an freien Rändern, die sogenannte Randdelamination. Sie entsteht durch das transversal isotrope Verhalten der Einzelschicht, näheres dazu kann bei PAGANO [105] und KIM [79] nachgelesen werden.

Zur Beurteilung der Delaminationsgefahr werden Kriterien angesetzt, die nur die interlaminaren Spannungen berücksichtigen und die Faserrichtungen außer Acht lassen. Zumeist werden quadratische Interaktionen der interlaminaren Spannungen verwendet - siehe dazu Veröffentlichungen von BREWER & LAGACE [24] und HASHIN [66].

2.3 Aspekte der Modellierung

Im Abschnitt 2.2 sind die Versagensvorgänge von Faserverbundstrukturen innerhalb dreier Ebenen (Faser-Matrix, Einzelschicht und Laminat) erläutert worden. Diese unterschiedlichen Größenmaßstäbe werden auch als Mikro-, Meso- und Makroebene der Faserverbundstrukturen bezeichnet. Die unterschiedlichen Größenmaßstäbe (Multiskalen) erschweren die mathematische Beschreibung der Versagensprozesse. Die gleichzeitige Berücksichtigung aller drei Ebenen bei der Simulation des Versagens von schalenartigen Strukturen ist trotz der Fortschritte, die im Bereich der numerischen Berechnungsmethoden erzielt wurden, bis heute nur bedingt möglich.

Die Modellierung auf der Mikroebene ist sehr aufwändig, da hierbei die Faser und die Matrix einzeln modelliert werden müssen - siehe Abb. 2.4. Mit dem mikromechanischen Zellenmodell nach ABOUDI [1] kann der Berechnungsaufwand reduziert werden - siehe dazu Arbeiten von MATZENMILLER, GERLACH & KÖSTER [95]. Ziel dieser Arbeit ist die Simulation der fortschreitenden Delamination. Die Delamination wird meist durch Querrisse in der Einzelschicht ausgelöst. Dennoch ist die Modellierung der Fasern und der Matrix zur Simulation der fortschreitenden Delamination nicht zwingend notwendig. Ein Modell auf der Mesoebene wird genutzt, wobei die Eigenschaften der Fasern und der Matrix in der Einzelschicht verschmiert dargestellt werden. Das heißt sie werden durch effektive mechanische Kennwerte abgebildet. Zwischen den transversal isotropen Einzelschichten wird in der Zwischenschicht das interlaminare Versagen in Form der fortschreitenden Delamination beschrieben. Die Interaktion zwischen dem intralaminaren Versagen und dem interlaminaren Versagen kann bei einem solchen Modell allerdings nicht berücksichtigt werden. Gleiches gilt für die Beschreibung des Sprungs der Delamination zwischen den Einzelschichten.

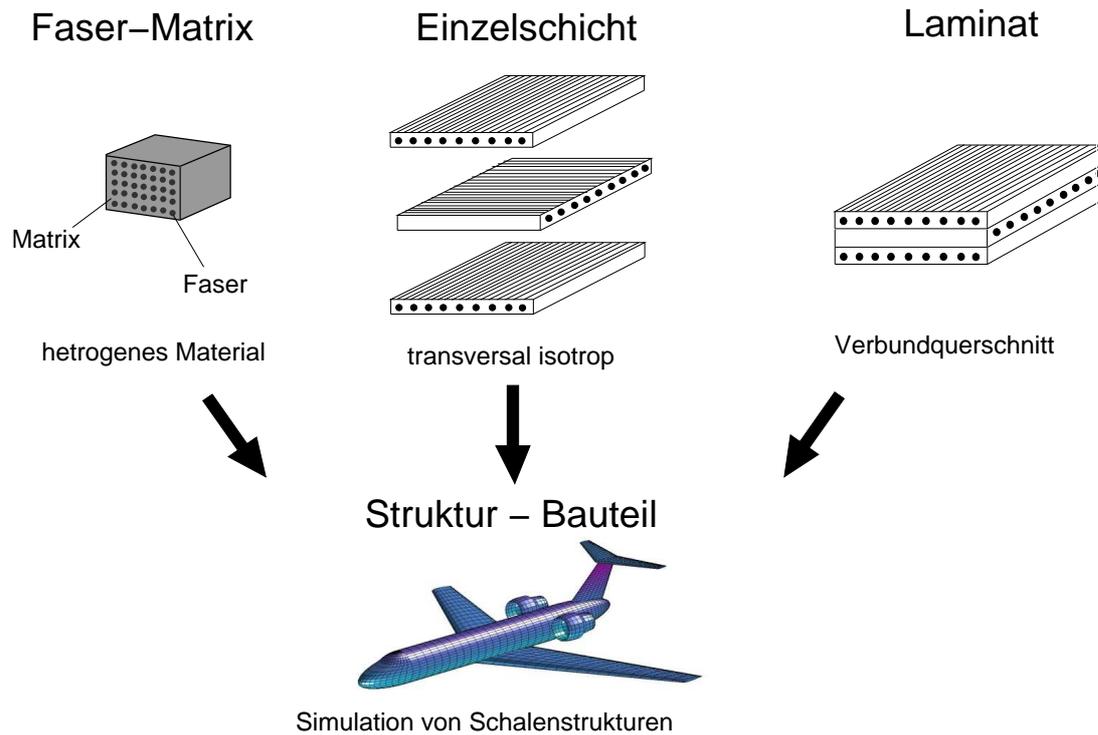


Abbildung 2.4: Modellierungsebenen der Faserverbundstrukturen

Die Modellierung auf der Makroebene stellt den Stand der Technik dar - siehe Abb. 2.4. Grundlage bildet die klassische Laminattheorie, mit ihr ist es möglich ein beliebig geschichtetes Laminat zu beschreiben. Da der ebene Spannungszustand zugrunde liegt, werden Schubverformungen durch Querkräfte und Spannungen senkrecht zur Laminebene vernachlässigt. Berechnungsmodelle mit diesen Annahmen sind effizient und vielfach in kommerzielle Codes implementiert. Allerdings ist die Laminattheorie aufgrund der oben getroffenen Annahmen ungeeignet für die Berechnung der fortschreitenden Delamination.

Kapitel 3

Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Die Kontinuumsmechanik befasst sich mit der Beschreibung von materiellen Körpern unter äußerer Beanspruchung. Dazu stehen Lehrbücher mit [7, 11, 68, 73, 91] zur Verfügung. In der Kontinuumsmechanik wird unterschieden zwischen materialabhängigen und materialunabhängigen Aussagen. Zur ersten Kategorie der materialunabhängigen Gleichungen gehören die Aussagen zur Kinematik, zur Kinetik und zu den Bilanzgleichungen. Die Kinematik befasst sich mit der geometrischen Beschreibung der Bewegung und Deformation von Körpern. Die Kinetik stellt den Zusammenhang zwischen äußeren Kräften und der Spannungsantwort von materiellen Körpern dar. Die Bilanzgleichungen sind Naturgesetze. Sie werden für die Masse, den Impuls und den Drehimpuls aufgestellt.

Zur zweiten Kategorie gehören die Material- oder Konstitutivgleichungen, die die spezifischen, materialabhängigen Eigenschaften von Körpern beschreiben.

3.1 Mathematische Grundlagen

Zum besseren Verständnis des 3. Kapitels werden die wesentlichen mathematischen Grundlagen und verwendeten Notationen kurz erläutert. Eine ausführliche Beschreibung ist in der Fachliteratur [44, 70, 82, 118] zu finden.

3.1.1 Rechenregeln für Vektoren und Tensoren

Die mathematische Grundlage der folgenden Betrachtung bildet der dreidimensionale euklidische Vektorraum. Für zwei Vektoren in kartesischen Koordinaten \mathbf{a} und \mathbf{b}

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

lautet das Skalarprodukt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \alpha \quad (3.2)$$

mit dem Skalar α als Ergebnis. Nach der EINSTEINSchen Summenkonvention wird über doppelt auftretende Indizes summiert. Der Betrag eines Vektors oder die euklidische Norm ergibt sich aus dem Skalarprodukt zu:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3} \quad (3.3)$$

Das Vektorprodukt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} erzeugt einen Vektor, der senkrecht auf der Fläche steht, die durch die beiden Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannt wird.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \mathbf{c} \quad (3.4)$$

Das dyadische Produkt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} bildet die Matrix \mathbf{A} :

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} [b_1, b_2, b_3] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \quad (3.5)$$

Eine wichtige Eigenschaft des dyadischen Produkts lautet:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \quad (3.6)$$

Tensoren zweiter Stufe sind lineare Abbildungen eines Vektorraums in einen anderen Vektorraum $\mathbf{c} = \mathbf{T} \mathbf{u}$, wobei die Abbildung die Transformationseigenschaft für Vektoren erfüllt. Im Sonderfall wird ein Tensor zweiter Stufe \mathbf{T} über das dyadische Produkt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} gebildet:

$$\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad (3.7)$$

Die drei linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ und \mathbf{g}_3 bilden ein Basissystem für die Darstellung der Vektoren oder Tensoren erster Stufe $\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i$ und $\mathbf{b} = b^j \mathbf{g}_j$.

$$\mathbf{T} = a^i \mathbf{g}_i \otimes b^j \mathbf{g}_j = a^i b^j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \quad (3.8)$$

Zu jedem Basissystem \mathbf{g}_i existiert eine duale Basis \mathbf{g}^i mit der Eigenschaft:

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j \quad (3.9)$$

Stimmen Basis und duale Basis überein, dann handelt es sich um ein orthogonales Basissystem \mathbf{i}_i .

Die Spur (trace) eines Tensors ist wie folgt definiert:

$$\text{tr } \mathbf{T} = \text{tr} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (3.10)$$

Das Tensorprodukt zweier Tensoren $\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ und $\mathbf{U} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ lautet:

$$\mathbf{T} \mathbf{U} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{w}) \quad (3.11)$$

Das Kommutativgesetz gilt im Allgemeinen nicht für das Tensorprodukt, d.h. $\mathbf{T} \mathbf{U} \neq \mathbf{U} \mathbf{T}$.

Das Skalarprodukt zwischen zwei Tensoren ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{U} = \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{U}^T) = \alpha \quad (3.12)$$

Das dyadische Produkt zwischen Tensoren zweiter Stufe führt zu Tensoren vierter Stufe. Die lineare Abbildung des Tensors zweiter Stufe \mathbf{T} in den Tensor zweiter Stufe \mathbf{U} durch den Tensor vierter Stufe $\overset{4}{\mathbf{C}}$ lautet:

$$\overset{4}{\mathbf{C}} [\mathbf{T}] = \mathbf{U} \quad (3.13)$$

Ein Tensor vierter Stufe besitzt im dreidimensionalen Fall 81 Koeffizienten, seine Komponentendarstellung lautet:

$$\overset{4}{\mathbf{C}} = C^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (3.14)$$

3.1.2 Vektor- und Tensoranalysis

Eine Funktion \mathbf{f} heißt FRECHET-differenzierbar, wenn eine lineare Funktion \mathbf{L} existiert, so dass für \mathbf{h} die Funktion \mathbf{f} in einen linearen Anteil \mathbf{L} und einen Rest \mathbf{r} zerlegt werden kann.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}\mathbf{h} + \mathbf{r} \quad (3.15)$$

Schreibweise für das FRECHET Differential:

$$\mathbf{L}\mathbf{h} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}$$

Das FRECHET Differential kann über die Richtungsableitung, oder dem GATEAUX Differential berechnet werden:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x})[\mathbf{h}] = \left. \frac{d}{ds} \mathbf{f}(\mathbf{x} + s\mathbf{h}) \right|_{s=0}, \quad (3.16)$$

da in der Funktionalanalysis nachgewiesen wird, dass eine FRECHET-differenzierbare Funktion auch GATEAUX-differenzierbar ist.

Für die Richtungsableitung gilt die Kettenregel, d.h. die Komposition $\mathbf{F} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ ist FRECHET-differenzierbar:

$$D\mathbf{F}(\mathbf{x})[\mathbf{h}] = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) [D\mathbf{f}(\mathbf{x})[\mathbf{h}]] \quad (3.17)$$

Der Gradient eines Skalarfeldes $\phi(\mathbf{x})$ in kartesischen Koordinaten lautet:

$$\text{grad } \phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \mathbf{i}_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \mathbf{i}_3 \quad (3.18)$$

Der Gradient eines Vektorfeldes ergibt sich zu:

$$\text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} (\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j) \quad (3.19)$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist die Spur des Gradienten:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \operatorname{tr}(\operatorname{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x})) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i} = v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} \quad (3.20)$$

Die Divergenz eines Tensorfeldes lautet:

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_i} \mathbf{i}_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{i}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \mathbf{i}_i \quad (3.21)$$

3.1.3 Divergenztheorem

Mit dem GAUSSschen Integralsatz wird ein Volumenintegral in ein Flächenintegral überführt:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{T} \, dV = \int_A \mathbf{T} \mathbf{n} \, dA \quad (3.22)$$

mit A als Oberfläche des Volumens und dem Oberflächennormalenvektor \mathbf{n} .

3.1.4 Variationsrechnung

Unter einem Funktional F wird die Abbildung einer Menge von Funktionen in die Menge der Zahlen verstanden.

$$F(y) = F(x, y(x), y'(x)) \quad (3.23)$$

Es wird davon ausgegangen, dass das Funktional FRECHET-differenzierbar ist. Wenn das Funktional einen Extremwert hat, so muss das GATEAUX Differential, die sogenannte Variation, verschwinden.

$$\delta F(y) = Df(y)[\delta y] = \frac{d}{ds} F(y + s \delta y)|_{s=0} = 0 \quad (3.24)$$

3.2 Kinematik

Unter einem materiellen Körper \mathcal{B} wird eine Menge von materiellen Punkten $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ verstanden. Die materiellen Punkte füllen den Körper stetig aus. Der materielle Körper wird zu unterschiedlichen Zeitpunkten auf verschiedene Bereiche des euklidischen Raumes abgebildet. Diese Abbildung wird Konfiguration genannt. Dabei wird jedem Körperpunkt eineindeutig einem Zahlentripel zugeordnet. Im Folgenden werden einige Konfigurationen eingeführt: Die Referenzkonfiguration \mathcal{B}_R ist eine zeitunabhängige Abbildung des Körpers. Diese Konfiguration muss vom Körper zu keinem Zeitpunkt eingenommen werden und stellt ein rein mathematisches Gebiet dar. Eine weitere beliebige Konfiguration ist die Bezugskonfiguration. Als Bezugskonfiguration soll im Weiteren die Momentankonfiguration zum Zeitpunkt t_0 dienen, die als Ausgangskonfiguration \mathcal{B}_0 bezeichnet wird. Der Vektor \mathbf{X} beschreibt den Ort des materiellen Punktes zum Zeitpunkt t_0 . Die Konfiguration zum Zeitpunkt t lautet Momentankonfiguration \mathcal{B}_t und der Vektor \mathbf{x}

beschreibt den materiellen Punkt zu diesem Zeitpunkt.

Im o.g. Sonderfall wird nur ein kartesisches Bezugssystem verwendet und die Bewegung kann durch den Verschiebungsvektor \mathbf{u} beschrieben werden, der sich aus der Differenz der Ortsvektoren der Momentankonfiguration und der Ausgangskonfiguration ergibt - siehe Abb. 3.1.

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \tag{3.25}$$

Das Zahlentripel $\mathbf{X} = X^i \mathbf{i}_i$ der Ausgangskonfiguration wird materielle Koordinaten oder LAGRANGESche Koordinaten genannt. Die Ortskoordinaten der Momentankonfiguration $\mathbf{x} = x^i \mathbf{i}_i$ werden als räumliche oder EULERSche Koordinaten bezeichnet. Entsprechend dieser Bezeichnungen existiert in der Kontinuumsmechanik die LAGRANGESche und die EULERSche Beschreibungsweise für die physikalischen Größen. Wobei bei der LAGRANGESchen Beschreibung die physikalischen Größen eines materiellen Punktes verfolgt werden und bei der EULERSchen Beschreibung die physikalischen Größen an einem festen Ort verfolgt werden.

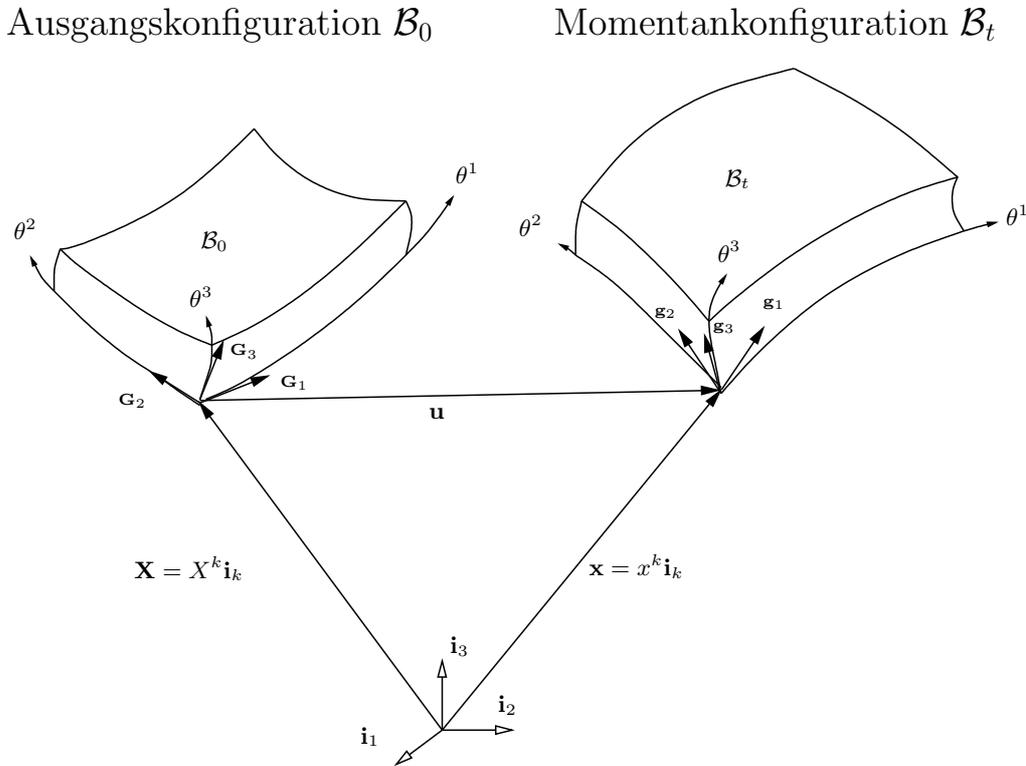


Abbildung 3.1: Ausgangs- und Momentankonfiguration

Zusätzlich wird ein krummliniges Koordinatensystem zur Beschreibung der Ausgangskonfiguration und der Momentankonfiguration gewählt.

$$\mathbf{X} = \theta^i \mathbf{G}_i \quad \mathbf{x} = \theta^i \mathbf{g}_i \tag{3.26}$$

Die zugehörigen konvektiven Koordinaten θ^i kann man sich in den Körper eingritzigt vorgestellt, bei einer Deformation verformen sie sich mit. Die Parameterlinien der krummlinigen Koordinaten sind wiederum durch kartesische Koordinaten gegeben:

$$\theta^i = \hat{\theta}^i(X^1, X^2, X^3) \tag{3.27}$$

Die verformten Basisvektoren \mathbf{g}_i verlaufen tangential an die so entstandenen verformten Koordinatenlinien θ^i . Die Ableitung der Ortsvektoren \mathbf{X} und \mathbf{x} nach den konvektiven Koordinaten ergeben die tangentialen kovarianten Basisvektoren der Ausgangs- und Momentankonfiguration.

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \quad (3.28)$$

Die Ableitung der konvektiven Koordinaten θ^i nach den Ortsvektoren der Ausgangs- und Momentankonfiguration sind die kontravarianten Gradientenvektoren.

$$\mathbf{G}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.29)$$

Die Tangenten- und Gradientenvektoren bilden duale Basissysteme mit der Eigenschaft, dass

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j \quad (3.30)$$

ist und dem KRONECKER-Symbol δ_i^j . Damit sind die kontravarianten Basisvektoren zu je zwei kovarianten Basisvektoren orthogonal, z.B. gilt $\mathbf{g}_1 \perp \mathbf{g}^2$ und $\mathbf{g}_1 \perp \mathbf{g}^3$. Die kovarianten und kontravarianten Metrikoeffizienten werden mit dem Skalarprodukt der krummlinigen Basisvektoren ermittelt.

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j & G^{ij} &= \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j \\ g_{ij} &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j & g^{ij} &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j \end{aligned} \quad (3.31)$$

Die Metriktensoren in der Ausgangs- und Momentankonfiguration ergeben sich aus:

$$\mathbf{G} = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (3.32)$$

$$\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (3.33)$$

Die Tangentenvektoren $d\mathbf{X}$ und $d\mathbf{x}$ in einem fest gewählten materiellen Punkt werden materielle Linienelemente in der Ausgangs- und Momentankonfiguration genannt.

$$d\mathbf{X} = \mathbf{G}_i d\theta^i \quad (3.34)$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{g}_i d\theta^i \quad (3.35)$$

Der Vergleich der Linienelemente in der Ausgangs- und Momentankonfiguration gibt Aufschluss über die Deformation des Körpers. Mit dem Deformationsgradienten \mathbf{F} erfolgt die Abbildung des materiellen Linienelements $d\mathbf{X}$ in die Momentankonfiguration.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (3.36)$$

Der Deformationsgradient \mathbf{F} ist ein Zweifeldtensor. Sein erster Basisvektor \mathbf{g}_i ist in der Momentankonfiguration und der zweite Basisvektor \mathbf{G}^j in der Ausgangskonfiguration definiert.

$$\mathbf{F} = F_j^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^j} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^j \quad (3.37)$$

Aus der Identität

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{F} \mathbf{G}_k = \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^j} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^j) \cdot \mathbf{G}_k = \delta_k^j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^j} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^k} = \mathbf{g}_k \quad (3.38)$$

ergibt sich der Deformationsgradient in konvektiven Koordinaten zu:

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{G}^k \quad (3.39)$$

Der Deformationsgradient kann bezüglich der kovarianten und kontravarianten Basisvektoren wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i \quad (3.40)$$

Mit dem Deformationsgradienten ist es möglich, gesuchte Größen der Ausgangskonfiguration in die der Momentankonfiguration zu transformieren und umgekehrt. Dies wird als Vor- und Zurückziehen in die Konfigurationen bezeichnet - siehe MARSDEN & HUGHES [92].

Das Flächenelement $d\mathbf{A}$ in der Ausgangskonfiguration kann wie folgt in die Momentankonfiguration transformiert werden.

$$d\mathbf{a} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} \quad (3.41)$$

Für die Transformation des Volumenelements $d\mathbf{V}$ in die Momentankonfiguration gilt:

$$dv = \det \mathbf{F} dV \quad (3.42)$$

Mit dem räumlichen Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L}

$$\mathbf{L} = \text{grad } \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (3.43)$$

werden die Änderungsgeschwindigkeiten von materiellen Linien-, Flächen- und Volumenelementen sowie der Jacobi-Determinanten angegeben.

$$(\mathbf{dx})' = \mathbf{L} \mathbf{dx} \quad (3.44)$$

$$(\mathbf{da})' = ((\text{div } \mathbf{v}) \mathbf{1} - \mathbf{L}^T) d\mathbf{a} \quad (3.45)$$

$$(dv)' = (\text{div } \mathbf{v}) dv \quad (3.46)$$

$$(\det \mathbf{F})' = \text{div } \dot{\mathbf{x}} (\det \mathbf{F}) \quad (3.47)$$

Die Deformation eines Körpers setzt sich zusammen aus der Starrkörpertranslation, der Starrkörperrotation und der eigentlichen Deformation. Der Deformationsgradient kann polar zerlegt werden, da er ein invertierbarer Tensor zweiter Stufe ist.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (3.48)$$

\mathbf{R} ist ein Drehtensor. \mathbf{U} wird als rechter Strecktensor und \mathbf{V} als linker Strecktensor bezeichnet. Ein weiterer wichtiger Tensor ist der rechte CAUCHY-GREEN Tensor \mathbf{C} , aus dem der Deformationsgradient gebildet wird.

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (3.49)$$

Als Verzerrungsmaß wird der GREENSche Verzerrungstensor \mathbf{E} genutzt. Als Ausgangspunkt für das Verzerrungsmaß wird die Differenz der Quadrate der materiellen Linienelemente der Momentan- und Ausgangskonfiguration verwendet.

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{g}_i d\theta^i) \cdot (\mathbf{g}_j d\theta^j) = g_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (3.50)$$

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{G}_i d\theta^i) \cdot (\mathbf{G}_j d\theta^j) = G_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (3.51)$$

Die Differenz der Quadrate der Linienelemente lautet:

$$ds^2 - dS^2 = (g_{ij} - G_{ij}) d\theta^i d\theta^j \quad (3.52)$$

$$= 2E_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (3.53)$$

Die Koeffizienten des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensor wird in Gl.(3.53) definiert:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \quad (3.54)$$

Der GREENSche Verzerrungstensor \mathbf{E} ergibt sich bezüglich des konvektiven Koordinatensystems zu:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij})\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (3.55)$$

Der rechte CAUCHY-GREEN Tensor in konvektiven Koordinaten wird mit Gl.(3.40) wie folgt geschrieben:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i)(\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{G}^j) = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j)(\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) = g_{ij}\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (3.56)$$

Zusammen mit dem Metriktensor \mathbf{G} der Ausgangskonfiguration in Gl.(3.32) kann der GREENSche Verzerrungstensor \mathbf{E} wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) \quad (3.57)$$

Der GREENSche Verzerrungstensor ist symmetrisch $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$ und invariant gegenüber Starrkörperbewegungen.

3.3 Kinetik

Durch äußere Krafteinwirkung entstehen im Inneren des Körpers Beanspruchungen. Durch eine gedachte Schnittfläche werden sie als Schnittkräfte zugänglich gemacht.

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \lim_{\Delta \mathbf{a} \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta \mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{a}} \quad (3.58)$$

Der Spannungsvektor \mathbf{t} ergibt sich nach Gl.(3.58) durch eine Grenzwertbetrachtung des auf das Flächenelement $\Delta \mathbf{a}$ bezogenen Kraftvektors $\Delta \mathbf{f}$. Der Spannungsvektor \mathbf{t} hängt von der Lage im Körper \mathbf{x} und von der Orientierung des Flächenelements $d\mathbf{a}$ ab, die durch den Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} gegeben ist (CAUCHYSches

Spannungsprinzip). Mit dem CAUCHY-Theorem ist die lineare Abhängigkeit zwischen dem Spannungsvektor \mathbf{t} und dem Normalenvektor \mathbf{n} gegeben:

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n} \quad (3.59)$$

Der CAUCHY-Spannungstensor in der Momentankonfiguration lautet:

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (3.60)$$

Die Komponenten des Tensors heißen Normalspannungen ($i = j$) oder Schubspannungen ($i \neq j$). Der CAUCHSche Spannungsvektor \mathbf{t} bezieht sich auf das Flächenelement $d\mathbf{a}$ in der Momentankonfiguration. Wird er auf das Flächenelement in der Ausgangskonfiguration $d\mathbf{A}$ bezogen, so wird vom 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungsvektor \mathbf{t}_0 gesprochen. Unter Berücksichtigung der Gl.(3.41) lautet der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor.

$$\mathbf{T}_0 = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} = \det \mathbf{F} T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad (3.61)$$

Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor wird aus Gl.(3.61) durch eine Rücktransformation gewonnen und bezieht sich vollständig auf die Basisvektoren der Ausgangskonfiguration:

$$\tilde{\mathbf{T}} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} = \det \mathbf{F} T^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad (3.62)$$

3.4 Bilanzgleichungen

Die Bilanzgleichungen haben universelle Gültigkeit und sind damit unabhängig von speziellen Materialeigenschaften. Die Bilanzgleichungen werden in integraler Form aufgestellt und sind damit für den Gesamtkörper gültig. Liegen hinreichend glatte Felder vor, so lassen sich lokale Bilanzgleichungen herleiten, die für jeden materiellen Punkt gelten.

3.4.1 Massenbilanz

Die Masse m eines materiellen Körpers wird über das Volumenintegral der Massendichte ρ_0 in der Ausgangskonfiguration und in der Momentankonfiguration ρ gewonnen:

$$m(t) = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\mathbf{x}, t) dv \quad (3.63)$$

Mit der Gl.(3.41) für die Transformation des Volumenelements gilt:

$$m = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 dV = \int_{\mathcal{B}_0} \rho \det \mathbf{F} dV \rightarrow \int_{\mathcal{B}_0} (\rho_0 - \rho \det \mathbf{F}) dV = 0 \quad (3.64)$$

Aus der Gl.(3.64) folgt die lokale Form der Massenerhaltung in materieller Darstellung.

$$\rho_0(\mathbf{X}, t) - \rho(\mathbf{X}, t) \det \mathbf{F} = 0 \quad (3.65)$$

Da die Masse m in einem geschlossenem System sich zeitlich nicht ändern darf, gilt $\dot{m} = 0$.

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{B}_0} \rho(\mathbf{X}, t) \det \mathbf{F} dV = \int_{\mathcal{B}_0} (\dot{\rho} \det \mathbf{F} + \rho (\det \mathbf{F})') dV \quad (3.66)$$

mit der Gl.(3.47) folgt:

$$\dot{m} = \int_{\mathcal{B}_0} \det \mathbf{F} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}) dV = \int_{\mathcal{B}_t} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}) dv = 0 \quad (3.67)$$

So gelangt man zur lokalen Form der Massenerhaltung in räumlicher Darstellung,

$$\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (3.68)$$

die auch als Kontinuitätsgleichung bezeichnet wird.

3.4.2 Impulsbilanz

Der kinetische Zustand eines materiellen Körpers wird durch den Impulsvektor \mathbf{I}

$$\mathbf{I} = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{v} dv \quad (3.69)$$

beschrieben, der aus dem Volumenintegral über die Massendichte und dem Geschwindigkeitsvektor besteht. Die Impulsbilanz besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses der Summe der äußeren Kräfte gleicht,

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da + \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{k}(\mathbf{x}, t) dv \quad (3.70)$$

mit dem Spannungsvektor \mathbf{t} der Gl.(3.59) und dem Volumenkraftvektor \mathbf{k} . Unter Verwendung des GAUSSschen Integralsatzes für die Oberflächenkraft folgt die lokale Impulsbilanz in räumlicher Darstellung.

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{k} \quad (3.71)$$

Die Impulsbilanz in materieller Darstellung erhält man durch die Transformation der Flächen- und Volumenintegrale in die Ausgangskonfiguration.

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \dot{\mathbf{v}} dV = \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{T}_0 \mathbf{n}_0(\mathbf{X}, t) dA + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{k}(\mathbf{X}, t) dV \quad (3.72)$$

Die lokale Form lautet in materiellen Koordinaten:

$$\rho_0 \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{DIV} \mathbf{T}_0 + \rho_0 \mathbf{k}. \quad (3.73)$$

3.4.3 Drehimpulsbilanz

Der Drehimpulsvektor \mathbf{D}_c bezogen auf einen raumfesten Punkt C mit dem Ortsvektor \mathbf{c} lautet:

$$\mathbf{D}_c = \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \rho \mathbf{v} \, dv \quad (3.74)$$

Die Drehimpulsbilanz sagt aus, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses dem resultierenden äußeren Moment \mathbf{M}_c gleicht.

$$\int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \rho \dot{\mathbf{v}} \, dv = \int_{\partial \mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{T} \mathbf{n} \, da + \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \rho \mathbf{k} \, dv \quad (3.75)$$

Zunächst wird mit dem GAUSSSchen Integralsatz das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral transformiert. Die Anwendung des Divergenzoperators auf das Tensorfeld $(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{T}$ führt zu folgender Darstellung der Drehimpulsbilanz:

$$\int_{\mathcal{B}_t} ((\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times (\rho \dot{\mathbf{v}} - \operatorname{div} \mathbf{T} - \rho \mathbf{k}) + T^{ij} \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j) \, dv = \mathbf{0} \quad (3.76)$$

Unter Verwendung der lokalen räumlichen Impulsbilanz Gl.(3.71) lässt sich die Drehimpulsbilanz auf die Gleichung

$$\int_{\mathcal{B}_t} T^{ij} \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j = \mathbf{0} \quad (3.77)$$

reduzieren. Woraus sich bei hinreichender Stetigkeit die Symmetrie des CAUCHY-schen Spannungstensors herleiten lässt:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (3.78)$$

Mit den Gln.(3.61) und (3.62) folgt daraus, dass der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor \mathbf{T}_0 unsymmetrisch und der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor $\tilde{\mathbf{T}}$ symmetrisch ist.

3.5 Konstitutive Modelle der Hyperelastizität

Die Lösung eines Anfangsrandwertproblems der Kontinuumsmechanik ist allein durch die im Abschnitt 3.4 erläuterten Bilanzgleichungen nicht möglich. Die Massenbilanz beschreibt eine Gleichung mit drei unbekanntem Geschwindigkeiten und der unbekanntem Dichte. Die Impulsbilanz beinhaltet drei Gleichungen, die die unbekanntem Ableitungen der Geschwindigkeiten mit den neun unbekanntem Spannungen verknüpft. Die Drehimpulsbilanz beschreibt die Symmetrie des Spannungstensors durch drei Gleichungen. Insgesamt stehen also sieben Gleichungen den dreizehn Unbekanntem gegenüber. Somit werden sechs zusätzliche Gleichungen zur Lösung des Feldproblems benötigt. Diese Gleichungen sind konstitutive Gleichungen, die individuelle Materialeigenschaften enthalten. Im Allgemeinen

beschreiben Materialgleichungen den Zusammenhang zwischen dem Verzerrungstensor und dem Spannungstensor.

$$\mathbf{T} = \overset{4}{\mathbf{C}} [\mathbf{E}] \quad (3.79)$$

Die in dieser Arbeit betrachteten Materialmodelle sind geschwindigkeitsunabhängig und zeigen keinerlei Hystereseigenschaften. Dieses Materialverhalten kann mit der Elastizitätstheorie beschrieben werden. Ein materieller Punkt eines Körpers wird elastisch genannt, wenn der CAUCHYSche Spannungstensor zu einem beliebigen Zeitpunkt eine Funktion des Deformationsgradienten ist - siehe TRUESDELL & NOLL [139]. Für elastische Körper gilt damit:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{F}) \quad (3.80)$$

Eine bestimmte Gruppe elastischer Materialien besitzt zusätzlich die Eigenschaft, dass die von der Spannung geleistete Arbeit wegunabhängig ist. Diese Materialien werden hyperelastisch oder GREENelastisch genannt. Man fordert die Existenz einer Formänderungsenergiefunktion W , somit wird durch einen Belastungszyklus keine Energie dissipiert. Die Formänderungsenergiefunktion folgt aus der (volumen)spezifischen Formänderungsenergie W_s oder aus der massenspezifischen freien HELMHOLTZ-Energie Ψ :

$$W = \int_{\mathcal{B}_0} W_s \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \Psi \, dm = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \Psi \, dV \quad (3.81)$$

Die spezifische Formänderungsenergie ist eine skalarwertige Funktion mit der Potentialeigenschaft:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{E}} \quad (3.82)$$

Die Linearisierung des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors an der Stelle der unverformten, spannungsfreien Ausgangskonfiguration liefert den vierstufigen Elastizitätstensor:

$$\overset{4}{\mathbf{C}} = \frac{\partial^2 W_s}{\partial \mathbf{E}^2} \quad (3.83)$$

Damit bleibt das Materialmodell auf kleine Verzerrungen beschränkt. Da aber eine nichtlineare Beziehung zwischen dem GREENschen Verzerrungstensor und den Verschiebungen besteht, werden weiterhin große Verschiebungen berücksichtigt. Der kontravariante Elastizitätstensor vierter Stufe - beschrieben in konvektiven Koordinaten - lautet:

$$\overset{4}{\mathbf{C}} = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Spannungs- und Verzerrungstensors kann eine Anordnung in Spaltenform, unter Beachtung des Basissystems, mit jeweils sechs Koeffizienten vorgenommen werden:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \tilde{T}^{11} \\ \tilde{T}^{22} \\ \tilde{T}^{33} \\ \tilde{T}^{12} \\ \tilde{T}^{13} \\ \tilde{T}^{23} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Aus dem Zusammenhang zwischen den Koeffizienten des Spannungs- und Verzerrungstensors,

$$\tilde{T}^{ij} = C^{ijkl} E_{kl} \quad (3.85)$$

folgt bei Berücksichtigung der Symmetrie des Spannungs- und Verzerrungstensors für die Koeffizienten des Elastizitätstensors:

$$C^{ijkl} = C^{ijlk} \quad (3.86)$$

Dadurch verringert sich die Anzahl der unabhängigen Materialkennwerte von 81 auf 36, mit der VOIGTschen Notation lautet die Elastizitätsmatrix:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & C^{1112} & C^{1113} & C^{1123} \\ C^{2211} & C^{2222} & C^{2233} & C^{2212} & C^{2213} & C^{2223} \\ C^{3311} & C^{3322} & C^{3333} & C^{3312} & C^{3313} & C^{3323} \\ C^{1211} & C^{1222} & C^{1233} & C^{1212} & C^{1213} & C^{1223} \\ C^{1311} & C^{1322} & C^{1333} & C^{1312} & C^{1313} & C^{1323} \\ C^{2311} & C^{2322} & C^{2333} & C^{2312} & C^{2313} & C^{2323} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Bei hyperelastischen Materialien existiert eine weitere Symmetrieeigenschaft. Aus der Potentialeigenschaft

$$\frac{\partial^2 W_s}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial^2 W_s}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} \quad (3.88)$$

folgt die Symmetrie des Materialtensors:

$$C^{ijkl} = C^{klij} \quad (3.89)$$

Die Elastizitätsmatrix \mathbf{C} besitzt daher nur 21 unabhängige Komponenten.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & C^{1112} & C^{1113} & C^{1123} \\ C^{1122} & C^{2222} & C^{2233} & C^{2212} & C^{2213} & C^{2223} \\ C^{1133} & C^{2233} & C^{3333} & C^{3312} & C^{3313} & C^{3323} \\ C^{1112} & C^{2212} & C^{3312} & C^{1212} & C^{1213} & C^{1223} \\ C^{1113} & C^{2213} & C^{3313} & C^{1213} & C^{1313} & C^{1323} \\ C^{1123} & C^{2223} & C^{3323} & C^{1223} & C^{1323} & C^{2323} \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Mit den oben getroffenen Vereinbarungen ist die Überführung der tensoriellen Gleichung Gl.(3.79) in die Vektor-Matrix-Form möglich.

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{C} \mathbf{E} \quad (3.91)$$

Eine weitere Reduzierung der unabhängigen Materialkennwerte wird durch die Berücksichtigung der inneren Ausrichtung des Materials möglich. Bei der sogenannten Materialsymmetrie werden grundsätzlich zwei Klassen unterschieden: isotrope und anisotrope Materialien. Isotrope Materialien sind richtungsunabhängige Materialien und anisotrope Materialien zeigen richtungsabhängiges Materialverhalten. Anisotrope Materialien werden nach der Anzahl der Symmetrieebenen in monotropes, orthotropes und transversal isotropes Materialverhalten eingeteilt - siehe ALTENBACH U.A. [6].

3.5.1 Isotropes Materialverhalten

Für Werkstoffe ohne ausgezeichnete Richtung, wie z.B. unverstärkte Polymere oder eine Reihe von Metallen werden isotrope Materialmodelle verwendet. Das homogene, isotrope ST.VENANT-KIRCHHOFF Materialmodell besitzt die drei Hauptinvarianten, die ohne weitere Herleitung angegeben werden:

$$\text{tr } \mathbf{E}, \text{tr } \mathbf{E}^2, \text{tr } \mathbf{E}^3 \quad (3.92)$$

Die spezifische Formänderungsenergie W_s lautet nach MALVERN [91]:

$$W_s(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr } \mathbf{E})^2 + \mu \text{tr } \mathbf{E}^2 \quad (3.93)$$

Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor $\tilde{\mathbf{T}}$ folgt aus der Ableitung der spezifischen Formänderungsenergie W_s - siehe Gl.(3.82):

$$\tilde{\mathbf{T}} = \lambda(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{G} + 2\mu \mathbf{E} \quad (3.94)$$

Die Koeffizienten der Elastizitätsmatrix \mathbf{C} in materieller Darstellung für das isotrope ST. VENANT-KIRCHHOFF Material, beschrieben im konvektiven Basissystem, lautet unter Verwendung von Gl.(3.83) - siehe dazu z.B. MATZENMILLER [93]:

$$C^{ijkl} = \lambda G^{ij} G^{kl} + \mu(G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{jk}) \quad (3.95)$$

Die beiden unabhängigen Materialkennwerte λ und μ heißen LAMÉsche Konstante. Sie können wie folgt aus den Ingenieurkonstanten, dem Elastizitätsmodul E und der Querdehnzahl ν berechnet werden:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.96)$$

Weitere gebräuchliche Konstanten sind der Schubmodul G und der Kompressionsmodul K :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (3.97)$$

Die Darstellung des ST.VENANT-KIRCHHOFF Materialmodells in kartesischen Koordinaten lautet:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

3.5.2 Transversal isotropes Materialverhalten

Materialien mit einer ausgezeichneten Richtung werden transversal isotrop genannt. Unidirektional verstärkte Faserverbunde können mit diesem Materialmodell beschrieben werden. Das Verhalten ist gekennzeichnet durch die Invarianz der konstitutiven Beziehung bezüglich der Rotation um die ausgezeichnete Richtung \mathbf{a} . Die Faserrichtung \mathbf{a} wird durch zwei Winkel ψ und ϵ beschrieben. Dabei beschreibt ψ den Winkel zwischen der Richtung \mathbf{i}_3 und der Faser. Der Ausdruck $\sin \psi$ ist die Projektion der Faser in die $\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2$ Ebene - vergleiche Abb. 3.2.

$$\mathbf{a} = \sin \psi \cos \epsilon \mathbf{i}_1 + \sin \psi \sin \epsilon \mathbf{i}_2 + \cos \psi \mathbf{i}_3 \quad (3.99)$$

Für $\psi = 0^\circ$ ist der Winkel ϵ nicht definiert, daher ist es nicht möglich Faserrichtungen zu beschreiben die senkrecht zur $\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2$ Ebene verlaufen, für unidirektional verstärkte Faserverbund ist ein Winkel von $\psi = 90^\circ$ üblich. Nach BÖHLER [19]

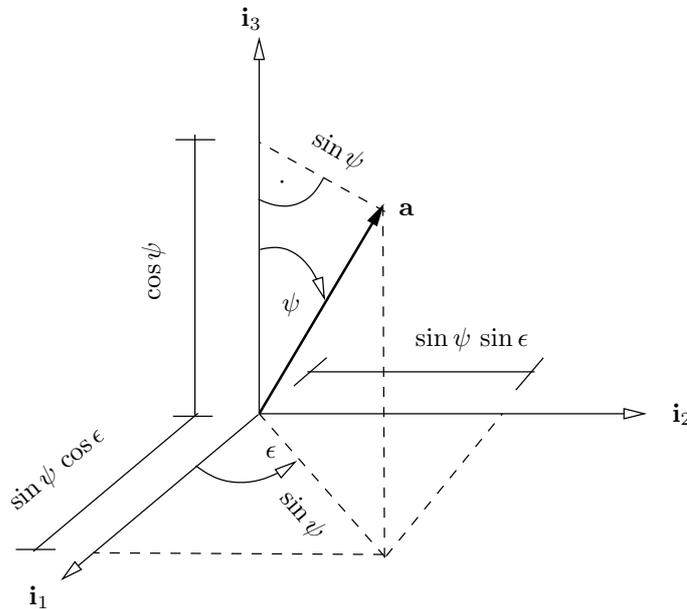


Abbildung 3.2: Beschreibung der Faserrichtung

und SPENCER [132] besitzt das transversal isotrope Materialmodell die fünf Invarianten:

$$\text{tr } \mathbf{E}, \text{tr } \mathbf{E}^2, \text{tr } \mathbf{E}^3, \mathbf{a} \mathbf{E} \mathbf{a}, \mathbf{a} \mathbf{E}^2 \mathbf{a} \quad (3.100)$$

Die ersten drei sind die isotropen Invarianten - vergleiche Gl.(3.92), die anderen beiden bestimmen den Einfluss des anisotropen Materialverhaltens. Aus den Invarianten kann die spezifische Formänderungsenergie W_s für linear elastisches Materialverhalten gewonnen werden.

$$\begin{aligned} W_s(\mathbf{E}, \mathbf{a}) = & \frac{1}{2} \lambda (\text{tr } \mathbf{E})^2 + \mu_T \text{tr } \mathbf{E}^2 + \alpha (\mathbf{a} \mathbf{E} \mathbf{a}) \text{tr } \mathbf{E} \\ & + 2(\mu_L - \mu_T) (\mathbf{a} \mathbf{E}^2 \mathbf{a}) + \frac{1}{2} \beta (\mathbf{a} \mathbf{E} \mathbf{a})^2 \end{aligned} \quad (3.101)$$

Die fünf Parameter λ , μ_T , μ_L , α , β sind unabhängige Materialparameter für allgemeines, linear elastisches Werkstoffverhalten.

Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor ergibt sich aus der Ableitung der spezifischen Formänderungsenergie:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{T}} &= \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{E}} \\ &= \lambda \operatorname{tr} \mathbf{E} \mathbf{G} + 2\mu_T \mathbf{E} + \alpha [\operatorname{tr} \mathbf{E} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + (\mathbf{a} \mathbf{E} \mathbf{a}) \mathbf{G}] \\ &\quad + 2(\mu_L - \mu_T) [\mathbf{a} \otimes \mathbf{E} \mathbf{a} + \mathbf{E} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}] + \beta (\mathbf{a} \mathbf{E} \mathbf{a}) \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}\end{aligned}\quad (3.102)$$

Aus der zweiten Ableitung der spezifischen Formänderungsenergie folgt der Elastizitätstensor $\overset{4}{\mathbf{C}}$, als Funktion des kontravarianten Metriktensors zu:

$$\begin{aligned}\overset{4}{\mathbf{C}} &= \frac{\partial^2 W_s}{\partial \mathbf{E}^2} \\ &= [\lambda G^{ij} G^{kl} + 2\mu_T G^{ki} G^{lj} + \alpha (a^i a^j G^{kl} + G^{ij} a^k a^l) + \beta a^i a^j a^k a^l \\ &\quad + 2(\mu_L - \mu_T) (a^i G^{jl} a^k + G^{ik} a^j a^l)] \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l\end{aligned}\quad (3.103)$$

Meist wird für die Charakterisierung von Faserverbundwerkstoffen die Darstellung in Ingenieurkonstanten gewählt. Dabei wird die Faserrichtung \mathbf{a} parallel zur \mathbf{i}_1 -Achse angenommen.

Die Ingenieurkonstanten haben folgende Bedeutung:

E_{11}	Elastizitätsmodul in Faserrichtung
E_{22}	Elastizitätsmodul senkrecht zur Faserrichtung
E_{33}	Elastizitätsmodul senkrecht zur Faserrichtung
ν_{ij}	Querkontraktionszahlen
G_{12}	Schubmodul parallel zur Faserebene
G_{13}	Schubmodul senkrecht zur Faserebene
G_{23}	Schubmodul senkrecht zur Faserebene

Die Umrechnung der Materialparameter der Invariantendarstellung in die Ingenieurkonstanten lautet:

$$\begin{aligned}E_{11} &= -(\lambda \mu_T - 4\mu_L \lambda - \beta \lambda + 2\mu_T^2 - \beta \mu_T - 2\alpha \mu_T - 4\mu_L \mu_T + \alpha^2) / (\lambda + \mu_T) \\ E_{22} &= [-4\mu_T (\lambda \mu_T - 4\mu_L \lambda - \beta \lambda + 2\mu_T^2 - \beta \mu_T - 2\alpha \mu_T - 4\mu_L \mu_T + \alpha^2)] / D_t \\ \nu_{12} &= [2\mu_T (\lambda + \alpha)] / D_t \\ \nu_{21} &= (\lambda + \alpha) / (2\lambda + 2\mu_T) \\ \nu_{23} &= -[\alpha^2 + 2\lambda \mu_T - \beta \lambda - 4\mu_L \lambda] / D_t = (E_{22} / (2G_{23})) - 1 \\ G_{12} &= \mu_L \\ G_{23} &= \mu_T \\ D_t &= 4\mu_L \lambda + \beta \lambda - 4\mu_T^2 + 4\alpha \mu_T + 2\beta \mu_T + 8\mu_L \mu_T - \alpha^2 \\ &\quad \nu_{23} = \nu_{32}, \nu_{21} = \nu_{31}, \nu_{12} = \nu_{13} \text{ mit } E_{33} = E_{22}\end{aligned}$$

Die Umrechnung der Ingenieurkonstanten in die fünf Parameter des Ansatzes für die Invariantendarstellung lautet:

$$\begin{aligned}\lambda &= E_{22} (\nu_{23} + \nu_{31} \nu_{13}) / D \\ \alpha &= E_{22} (\nu_{31} (1 + \nu_{32} - \nu_{13}) - \nu_{32}) / D \\ \beta &= (E_{11} (1 - \nu_{32} \nu_{23}) - E_{22} [(\nu_{23} + \nu_{31} \nu_{13}) + 2(\nu_{31} (1 + \nu_{32} - \nu_{13}) - \nu_{32})]) / D - 4G_{12} + 2G_{23} \\ \mu_L &= G_{12} \\ \mu_T &= G_{23} \\ D &= 1 - \nu_{32}^2 - 2\nu_{31} \nu_{13} - 2\nu_{31} \nu_{32} \nu_{13}\end{aligned}$$

Liegt die Faserrichtung \mathbf{a} parallel zur \mathbf{i}_1 Achse, ergibt sich folgende Darstellung für die Elastizitätsmatrix eines transversal isotropen Materials im kartesischen Koordinatensystem:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\alpha + 4\mu_L - 2\mu_T + \beta & \lambda + \alpha & \lambda + \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \alpha & \lambda + 2\mu_T & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \alpha & \lambda & \lambda + 2\mu_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_T \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

3.6 Prinzip von D'ALEMBERT

Mit dem Prinzip von D'ALEMBERT ist es möglich, die in Abschnitt (3.4) eingeführte Impulsbilanz und Drehimpulsbilanz in Differentialgleichungsform durch eine skalare Integralgleichung zu beschreiben. Die Wichtungsfunktion oder Testfunktion $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{X})$ wird mit der Eigenschaft eingeführt, dass sie den vorgeschriebenen geometrischen Randbedingungen genügt.

$$\mathbf{w}(\mathbf{X}) = 0 \text{ auf } \partial\mathcal{B}_0^u \quad (3.105)$$

Die geometrischen Randbedingungen

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}, \quad (3.106)$$

sind auf dem Verschiebungsrand $\partial\mathcal{B}_0^u$ bekannt. Auf dem übrigen Rand $\partial\mathcal{B}_0^\sigma$ sind die Oberflächenspannungen

$$\mathbf{t}_0 = \hat{\mathbf{t}}_0 \quad (3.107)$$

bekannt. Dies sind die Spannungsrandbedingungen. Die lokale Impulsbilanz Gl. (3.73) wird mit der Wichtungsfunktion \mathbf{w} multipliziert

$$\mathbf{w} \cdot \text{DIV } \mathbf{T}_0 + \mathbf{w} \cdot \rho_0(\mathbf{k} - \dot{\mathbf{v}}) = 0 \quad (3.108)$$

und über den Bereich \mathcal{B}_0 integriert.

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{w} \cdot \text{DIV } \mathbf{T}_0 + \mathbf{w} \cdot \rho_0(\mathbf{k} - \dot{\mathbf{v}})) dV = 0 \quad (3.109)$$

Mit der Umformung,

$$\text{DIV}(\mathbf{T}_0^T \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \text{DIV } \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_0 \cdot \text{GRAD } \mathbf{w} \quad (3.110)$$

folgt:

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\text{DIV}(\mathbf{T}_0^T \mathbf{w}) - \mathbf{T}_0 \cdot \text{GRAD } \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \rho_0(\mathbf{k} - \dot{\mathbf{v}})) dV = 0 \quad (3.111)$$

Der erste Term wird mit Gl.(3.22) in ein Oberflächenintegral überführt.

$$\int_{\partial\mathcal{B}_0^\sigma} (\mathbf{T}_0^T \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_0 dA - \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{T}_0 \cdot \text{GRAD } \mathbf{w} dV + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{w} \cdot \rho_0(\mathbf{k} - \dot{\mathbf{v}}) dV = 0 \quad (3.112)$$

Mit Hilfe der Definition für einen transponierten Tensor $\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}\mathbf{b} = (\mathbf{A}^T \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ und dem CAUCHY-Theorem lautet das Prinzip von D'ALEMBERT wie folgt:

$$\int_{\partial \mathcal{B}_0^\sigma} \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}_0 \, dA - \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{T}_0 \cdot \text{GRAD } \mathbf{w} \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{w} \cdot \rho_0 (\mathbf{k} - \dot{\mathbf{v}}) \, dV = 0 \quad (3.113)$$

mit $\mathbf{T}_0 \cdot \text{GRAD } \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{F}^T \text{GRAD } \mathbf{w})$ folgt

$$\int_{\mathcal{B}_0} \tilde{\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{F}^T \text{GRAD } \mathbf{w}) \, dV = \int_{\partial \mathcal{B}_0^\sigma} \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}_0 \, dA + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{w} \cdot \rho_0 (\mathbf{k} - \dot{\mathbf{v}}) \, dV \quad (3.114)$$

und

$$\mathbf{F}^T \text{GRAD } \mathbf{w} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \text{GRAD } \mathbf{w} + (\text{GRAD } \mathbf{w})^T \mathbf{F}) = \delta \mathbf{E} \quad (3.115)$$

geht die Gl.(3.113) in das Prinzip von D'ALEMBERT in materieller Darstellung über:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{E} \, dV = \int_{\partial \mathcal{B}_0^\sigma} \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}_0 \, dA + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{w} \cdot \rho_0 (\mathbf{k} - \dot{\mathbf{v}}) \, dV \quad (3.116)$$

Das Prinzip von D'ALEMBERT stellt die schwache Form der Feldgleichungen dar, weil die Anforderung an die Differenzierbarkeit der Lösungsfunktionen weniger streng ist. Diese Formulierung ist besonders für die Entwicklung von numerischen Näherungsansätzen geeignet. Die Randbedingungen, die Kinematik und das Materialmodell werden exakt erfüllt, während die Bilanzgleichungen nur im integralen Mittel befriedigt werden.

Die Wichtungsfunktion \mathbf{w} kann als virtuelle Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ gedeutet werden, die die geometrischen Randbedingungen erfüllt. Die virtuellen Verschiebungen müssen als stetig differenzierbar angenommen werden, da die virtuellen Verzerrungen $\delta \mathbf{E}$ Differentiale von $\delta \mathbf{u}$ sind.

Auf der linken Seite der Gl.(3.116) steht die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte δA_i . Der Term

$$\delta A_T = - \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{w} \cdot \rho_0 \dot{\mathbf{v}} \, dV \quad (3.117)$$

heißt virtuelle Arbeit der Impulsänderung und der Ausdruck

$$\delta A_a = \int_{\partial \mathcal{B}_0^\sigma} \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}_0 \, dA + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{w} \cdot \rho_0 \mathbf{k} \, dV \quad (3.118)$$

wird als virtuelle äußere Arbeit bezeichnet - siehe HAUPT [68]. Mit den oberen Bezeichnungen lautet die Gl.(3.116) $\delta A_i = \delta A_a + \delta A_T$. Für den Fall der Statik $\dot{\mathbf{v}} = 0$ entfällt die virtuelle Arbeit der Impulsänderung δA_T und das Prinzip von D'ALEMBERT geht in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen über.

$$\delta A_i = \delta A_a \quad (3.119)$$

3.7 Prinzip vom stationären Wert der potentiellen Energie

Im Abschnitt 3.5.1 sind Materialmodelle der Hyperelastizität eingeführt worden, die sich durch ihren Potentialcharakter auszeichnen. Mit der spezifischen Formänderungsenergie W_s wird das innere Potential Π_i oder die innere potentielle Energie aufgestellt,

$$\Pi_i = \int_{\mathcal{B}_0} W_s \, dV. \quad (3.120)$$

Zusätzlich wird die Existenz eines Potentials Π_a für die äußeren volumenhaft und flächenhaft verteilten Kräfte gefordert.

$$\Pi_a = - \int_{\mathcal{B}_0} \rho \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_0^\sigma} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} \, dA \quad (3.121)$$

In diesem Fall handelt es sich um ein konservatives System mit richtungstreuen äußeren Kräften - auch Totlasten genannt. Das Gesamtpotential ergibt sich aus dem inneren und äußeren Potential:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a = \int_{\mathcal{B}_0} W_s \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_0^\sigma} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} \, dA \quad (3.122)$$

Das Prinzip vom stationären Wert der potentiellen Energie

$$\delta \Pi = \delta \Pi_i + \delta \Pi_a = 0 \quad (3.123)$$

erfordert die erste Variation des Gesamtpotentials,

$$\delta \Pi(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{E}} \cdot \delta \mathbf{E} \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_0^\sigma} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \quad (3.124)$$

und ist mit den oben getroffenen Vereinbarungen, dass ein inneres und äußeres Potential existiert, identisch mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebung. Die kinematischen Randbedingungen werden in Gl.(3.124) exakt erfüllt, während die Impulsbilanz bzw. das Gleichgewicht nur im integralen Mittel erfüllt werden.

3.8 Mehrfeldfunktional vom HU-WASHIZU-Typ

Neben dem im Abschnitt 3.7 beschriebenen Einfeldfunktional existieren Mehrfeldfunktionale, die als Grundlage zur Entwicklung von gemischten finiten Elementen dienen. Neben dem Zweifeldfunktional von HELLINGER-REISSNER besitzt das Dreifeldfunktional nach HU-WASHIZU weitreichende Bedeutung. Die kinematischen Nebenbedingungen werden bei Dreifeldfunktionalen über LAGRANGESche Multiplikatoren ($\mathbf{t}^s, \tilde{\mathbf{T}}$) in das Funktional eingebracht - siehe BUFFLER [29]. In diesem Dreifeldfunktional sind alle drei Funktionen, nämlich die Verschiebungen

\mathbf{u} , die Spannungen $\tilde{\mathbf{T}}$ und die Verzerrungen $\hat{\mathbf{E}}$ unabhängig voneinander und dürfen frei variiert werden.

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{T}}) &= \int_{\mathcal{B}_0} W_s(\hat{\mathbf{E}}) dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\partial \mathcal{B}_0^g} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dA \\ &+ \int_{\mathcal{B}_0} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \left[\frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) - \hat{\mathbf{E}} \right] dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0^u} \mathbf{t}^s \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA \end{aligned} \quad (3.125)$$

Als Sonderfall enthält das HU-WASHIZU Funktional die EAS-Methode - siehe Kapitel 5. SIMO & RIFAI [130] haben zu Herleitung der EAS-Methode eine Reparametrisierung des Verschiebungsgradienten vorgeschlagen. Alternativ ist auch die Reparametrisierung des Verzerrungsfeldes \mathbf{E} möglich. Neben den Verzerrungen \mathbf{E} , die von den Verschiebungen abhängen, werden zusätzliche Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ eingeführt. Im Kapitel 5 werden die Bezeichnungen kompatible und inkompatible Verzerrungen erläutert. Von denen an dieser Stelle schon Gebrauch gemacht wird. Die Erweiterung der kompatiblen Verzerrungen \mathbf{E} durch die inkompatiblen Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ erfolgt additiv. Somit lautet das Feld der Gesamtverzerrungen $\hat{\mathbf{E}}$.

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{E}} \quad (3.126)$$

Das Gesamtverzerrungsfeld $\hat{\mathbf{E}}$ wird in die Gl.(3.125) eingesetzt, wobei sich folgendes Mehrfeldfunktional in verkürzter Schreibweise ergibt,

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{T}}) &= \int_{\mathcal{B}_0} (W_s(\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{E}}) - \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) dV \\ &- \int_{\mathcal{B}_0} \rho \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\partial \mathcal{B}_0^g} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} dA \end{aligned} \quad (3.127)$$

mit den drei unabhängigen Feldern, der Verschiebung \mathbf{u} , der erweiterten Verzerrung $\tilde{\mathbf{E}}$ und dem Spannungsfeld $\tilde{\mathbf{T}}$. Die Variation des Mehrfeldfunktionals wird mit der Richtungsableitung gebildet.

$$\delta \Pi = \left(\frac{d\Pi_{\mathbf{u}}((\mathbf{u} + s\delta\mathbf{u}), \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{T}})}{ds} + \frac{d\Pi_{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{u}, (\tilde{\mathbf{E}} + s\delta\tilde{\mathbf{E}}), \tilde{\mathbf{T}})}{ds} + \frac{d\Pi_{\tilde{\mathbf{T}}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, (\tilde{\mathbf{T}} + s\delta\tilde{\mathbf{T}}))}{ds} \right) \Big|_{s=0}$$

Die erste Variation des HU-WASHIZU Funktionals lautet:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \delta \hat{\Pi}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{T}}, \delta\mathbf{u}, \delta\tilde{\mathbf{E}}, \delta\tilde{\mathbf{T}}) = - \int_{\mathcal{B}_0} \delta\tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} dV + \int_{\mathcal{B}_0} \left(\frac{\partial W_s}{\partial \hat{\mathbf{E}}} - \tilde{\mathbf{T}} \right) \cdot \delta\tilde{\mathbf{E}} dV \\ &+ \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial W_s}{\partial \hat{\mathbf{E}}} \cdot \delta\mathbf{E} dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho \mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{u} dV - \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{u} dA = 0 \end{aligned} \quad (3.128)$$

Die Variationen $\delta\mathbf{u}$, $\delta\tilde{\mathbf{E}}$, $\delta\tilde{\mathbf{T}}$ dürfen frei gewählt werden, so dass sich folgende drei Gleichungen ergeben.

$$- \int_{\mathcal{B}_0} \delta\tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} dV = 0 \quad (3.129)$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \left(\frac{\partial W_s}{\partial \hat{\mathbf{E}}} - \tilde{\mathbf{T}} \right) \cdot \delta \tilde{\mathbf{E}} \, dV = 0 \quad (3.130)$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial W_s}{\partial \hat{\mathbf{E}}} \cdot \delta \mathbf{E} \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \quad (3.131)$$

Die Gln.(3.129)-(3.131) werden auch als schwache EULERgleichungen bezeichnet, da beim HU-WASHIZU Funktional das Gleichgewicht, die Kinematik und das Materialmodell in integraler Form erfüllt werden.

Kapitel 4

Schalentragwerke

Schalen sind dreidimensionale Körper, bei denen eine Seitenabmessung des Körpers gegenüber den anderen beiden klein ist. Die Belastungen können in allen Raumrichtungen einwirken - siehe Abb. 4.1 oben. Traditionell haben Schalen eine große Bedeutung im Bauwesen, wo schon vor Jahrhunderten große Kuppelbauwerke speziell im Sakralbau ausgeführt wurden. Heute finden Schalentragwerke hauptsächlich Anwendung im Bereich des Automobilbaus und der Luft- und Raumfahrt. Neben den Schalenstrukturen aus Metallen, z.B. Autokarosserien, stellen geschichtete Schalen aus Faserverbundmaterialien eine besondere Herausforderung für den konstruktiven Ingenieur dar.

4.1 Schalenmechanik

Die genaue mathematische Analyse von Schalentragwerken liegt seit langer Zeit im Interesse der Forschung. Erste Arbeiten dazu sind bei KIRCHHOFF [80] und LOVE [88] zu finden. Üblicherweise werden Schalen durch ihre Mittelfläche und einem darauf definierten Direktorfeld beschrieben. Der Schalendirektor beschreibt die Verdrehung und Verwölbung des Schalenquerschnitts. Schalentheorien unterscheiden sich meist in der kinematischen Annahme über die Querschnittsverformung. Bei der schubstarrten Schale steht der geradlinige Direktor senkrecht auf der Mittelfläche und bleibt es auch nach der Deformation. Dies wird Normalenhypothese nach KIRCHHOFF-LOVE genannt. Bei der schubweichen Schale nach REISSNER-MINDLIN [115] bleibt der geradlinige Direktor nach der Deformation nicht zwingend senkrecht auf der Mittelfläche.

Die Methode der finiten Elemente, die im Kapitel 5 behandelt wird, gilt als Standardwerkzeug zur Behandlung von mechanischen Problemen und ist besonders zur Analyse von Schalentragwerken geeignet. Deshalb werden Schalentheorien heutzutage so formuliert, dass sie effizient in einen FE-Code implementiert werden können.

Zur Entwicklung von Schalenelementen werden verschiedene Vorgehensweisen unterschieden. BISCHOFF [17] bietet zu diesem Thema eine gute Übersicht. Bei Herleitung eines Schalenelements aus der dreidimensionalen Kontinuumstheorie wird durch spezielle kinematische Annahmen die Reduktion auf ein zweidimensionales Schalenmodell erreicht - siehe in Abb. 4.1 rechter Ast. Von AHMAD [2] ist das Degenerationskonzept eingeführt worden, wobei in einem dreidimensionalen

Körper die Geradlinigkeitshypothese aufgestellt wird. Der Körper wird so zu einem Schalenmodell degeneriert - siehe in Abb. 4.1 den Ast in der Mitte. Das Materialmodell wird ebenfalls kondensiert, in dem die Spannungskomponente in Dickenrichtung zu null gesetzt wird. Auf Basis dieser Formulierung sind eine Reihe von Arbeiten entstanden z.B. von RAMM & MATZENMILLER [111]. Für viele Werkstoffmodelle ist die Kondensierung auf analytischem Weg nicht möglich. Von BÜCHTER & RAMM [27, 28] sind gemischte Elementformulierung genutzt worden, um unverändert dreidimensionale Stoffmodelle in Schalenelementen zu nutzen. Unter denselben kinematischen Voraussetzungen sind die degenerierten Schalenelemente und die Elemente, die auf einer Schalentheorie basieren, gleichwertig - siehe BÜCHTER [30].

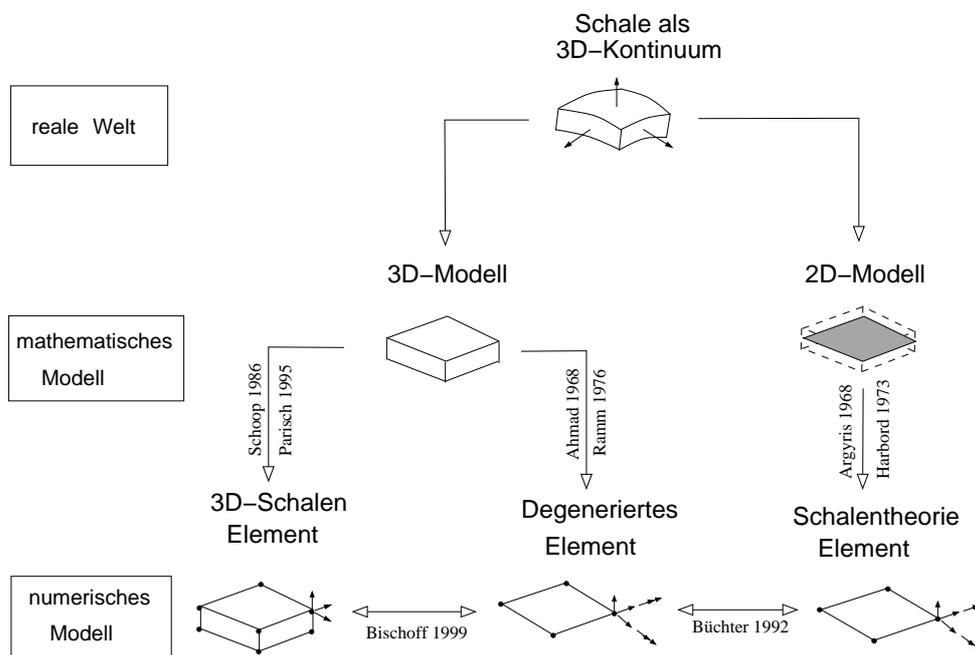


Abbildung 4.1: Möglichkeiten zur Herleitung von Schalenelementen

Eine dritte Möglichkeit zur Beschreibung von Schalen besteht darin, dass die Differenz der Schalenlaibungen zur Beschreibung der Kinematik genutzt wird. Erste Arbeiten dazu finden sich bei SCHOOP [121] und Parisch [106]. Bei diesem Modell der „Dicken Schale“ ist die Dickenänderung der Schale möglich, wobei ein vollständiges dreidimensionales Materialmodell verwendet werden kann. Diese Modelle werden als oberflächenorientierte Schalen [121], Doppelknotenmodelle SEIFERT [126] oder Volumen-Schalen KLINKEL [83] bezeichnet. In dieser Arbeit wird in Anlehnung an den Begriff „solid-shell“ die Bezeichnung volumetrische Schale genutzt. Zur Diskretisierung im Rahmen der Finiten-Elemente-Methode bieten sich Volumenelemente an. Erste Versuche, Volumenelemente zur Berechnung von Schalenstrukturen zu nutzen, wurden bereits in der Frühzeit der Methode der finiten Elemente unternommen. So findet sich im Buch von ZIENKIEWICZ [147] ein Kapitel zum Thema „Die dicke Schale als Sonderfall des dreidimensionalen Problems“. Den sinnvollen Einsatz niedrig interpolierter Volumenelemente für die Analyse von Schalenstrukturen ermöglichten aber erst Weiterentwicklungen im

Bereich versteifungsfreier Elemente und neue Herangehensweisen an die Methode der finite Elemente, wie z.B. gemischte Element-Formulierungen.

Eine weitere in Abb. 4.1 nicht dargestellte Variante zur Entwicklung von Schalenelementen ist das „direkte Vorgehen“, das auf der Einführung einer COSSERAT-Fläche beruht und als „geometrisch exakte“ Schalentheorie bezeichnet wird.

Einen genaueren Aufschluss über den Verlauf der Verschiebung in Dickenrichtung liefern die Schalentheorien höherer Ordnung. Diese teilen sich auf in hierarchische Schalentheorien und Schalen die auf der Mehrschichttheorie beruhen.

Bei den hierarchischen Schalentheorien wird der Verlauf der Verschiebungen in Dickenrichtung durch eine Summe von Polynomen beschrieben - siehe auch NAGHDI [99]. Im Rahmen der Finiten-Elemente-Methode wird dieses Vorgehen als p-Methode bezeichnet - siehe DÜSTER [50].

Bei den Mehrschichttheorien wird ein C^0 -stetiges Verschiebungsfeld über die Schalenhöhe verwendet. Da mehrere Direktoren übereinander zur Beschreibung der Kinematik verwendet werden, wird dies von BRAUN in [23], [22] und [110] als Multidirektorthorie bezeichnet. Von KRÄTZIG [85] wird die Bezeichnung externe Multi-layer Multi-direktor Schalentheorie verwendet. Im Rahmen der Methode der finiten Elemente wird dieses Vorgehen h-Methode genannt, weil sie einer Netzverdichtung in Dickenrichtung der Schale entspricht. Schalenmodelle, die auf Grundlage der Mehrschichttheorie entwickelt wurden, können erfolgreich zur Berechnung von Strukturen aus Faserverbundwerkstoffen eingesetzt werden. Durch die Schichtung ist die Berücksichtigung von interlaminaren Effekten möglich. Prinzipiell ist auch die Kombination von Hierarchischen- und Mehrschichtschalentheorien möglich.

4.2 Kinematik der volumetrischen Schale

Wird zur Beschreibung der Geometrie die obere und untere Schalenlaibung genutzt, so gelangt man zu einer oberflächenorientierten Schalentheorie mit sechs kinematischen Freiheitsgraden. Die Oberflächen der Schale werden durch die Positionsvektoren $\mathbf{X}^o(\theta_1, \theta_2)$ und $\mathbf{X}^u(\theta_1, \theta_2)$ beschrieben. Wobei in der Ausgangskonfiguration die Schalenoberlaibung durch $\mathbf{X}^o(\theta_1, \theta_2)$ mit $\theta_3 = H/2$ bestimmt wird und die Schalenunterlaibung durch $\mathbf{X}^u(\theta_1, \theta_2)$ mit $\theta_3 = -H/2$ beschrieben wird - siehe Abb. 4.2. Damit ergibt sich für den Differenzvektor zweier zugeordneter Punkte

$$H \mathbf{D} = \mathbf{X}^o - \mathbf{X}^u \quad \text{der Querschnittsvektor.} \quad (4.1)$$

Es gilt:

$$\mathbf{D}(\theta_1, \theta_2) = \frac{\mathbf{X}^o(\theta_1, \theta_2) - \mathbf{X}^u(\theta_1, \theta_2)}{\|\mathbf{X}^o(\theta_1, \theta_2) - \mathbf{X}^u(\theta_1, \theta_2)\|}, \quad (4.2)$$

wobei H die Querschnittshöhe oder Schalenhöhe beschreibt und \mathbf{D} ein Einheitsvektor ist, der eine materielle Deutung der in NAGHDI [99] verwendeten Direktoren darstellt - siehe auch SCHOOP [121]. Der Direktor bleibt auch nach der Deformation geradlinig, steht aber nicht zwingend senkrecht auf der Schalenmittelfläche. Die Einführung einer Mittelfläche ist nicht zwingend notwendig zur Beschreibung der

Kinematik einer volumetrischen Schale. Sie dient aber zum besseren Verständnis der in Kapitel 5 behandelten Versteifungseffekte der niedrig interpolierten finiten Elemente.

Der Ortsvektor \mathbf{X} eines beliebigen materiellen Punktes \mathcal{P} in der Ausgangskonfiguration wird beschrieben durch die Schalenoberseite \mathbf{X}^o und die Schalenunterseite \mathbf{X}^u . Damit wird vorausgesetzt, dass der Querschnitt eben bleibt.

$$\mathbf{X}(\theta_i) = \frac{1}{H} \left[\left(\frac{H}{2} + \theta_3 \right) \mathbf{X}^o(\theta_1, \theta_2) + \left(\frac{H}{2} - \theta_3 \right) \mathbf{X}^u(\theta_1, \theta_2) \right] \quad (4.3)$$

Der Ortsvektor \mathbf{X} eines beliebigen Punktes \mathcal{P} in der Ausgangskonfiguration kann

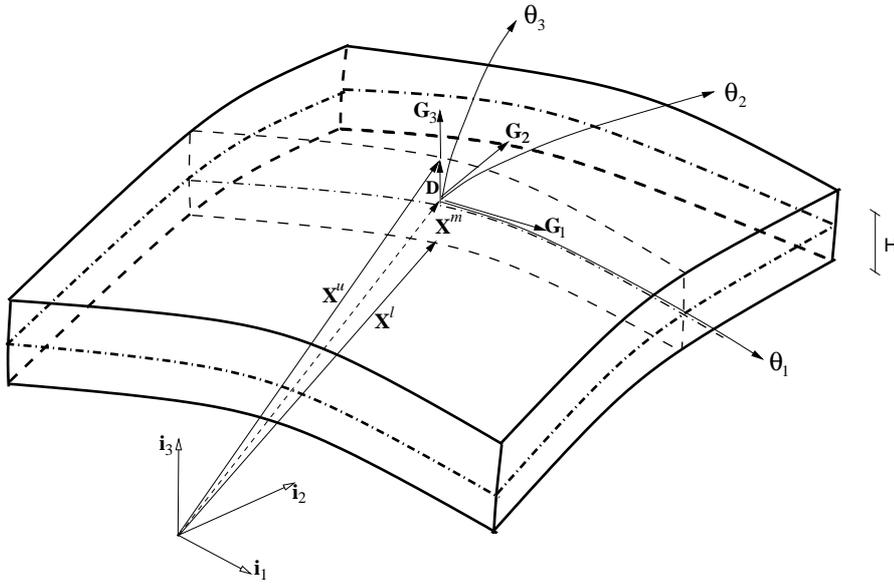


Abbildung 4.2: Schale in der Ausgangskonfiguration

dann durch die Schalenreferenzfläche \mathbf{X}^m und den Schalendirektor \mathbf{D} beschrieben werden.

$$\mathbf{X}(\theta_i) = \frac{1}{2} [\mathbf{X}^o(\theta_1, \theta_2) + \mathbf{X}^u(\theta_1, \theta_2)] + \frac{1}{H} \theta_3 [\mathbf{X}^o(\theta_1, \theta_2) - \mathbf{X}^u(\theta_1, \theta_2)] \quad (4.4)$$

$$= \mathbf{X}^m(\theta_1, \theta_2) + \theta_3 \mathbf{D}(\theta_1, \theta_2) \quad (4.5)$$

Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes \mathcal{P} in der Momentankonfiguration wird durch die Schalenreferenzfläche \mathbf{x}^m und den Schalendirektor \mathbf{d} dargestellt.

$$\mathbf{x}(\theta_i) = \frac{1}{2} [\mathbf{x}^o(\theta_1, \theta_2) + \mathbf{x}^u(\theta_1, \theta_2)] + \frac{1}{H} \theta_3 [\mathbf{x}^o(\theta_1, \theta_2) - \mathbf{x}^u(\theta_1, \theta_2)] \quad (4.6)$$

$$= \mathbf{x}^m(\theta_1, \theta_2) + \theta_3 \mathbf{d}(\theta_1, \theta_2) \quad (4.7)$$

Durch die vorgestellte Kinematik wird eine Schalentheorie mit sechs kinematischen Freiheitsgraden beschrieben. Der Ortsvektor der Mittelfläche beschreibt drei translatorische Freiheitsgrade. Durch die Schalenhöhe H wird die Dickenänderung während der Deformation dargestellt. Der Direktor erfasst die Querschnittsverdrehung durch zwei weitere Freiheitsgrade.

4.3 Mehrschicht-Schalenkinematik

In der zuvor behandelten Einzelschicht- oder „Singledirektortheorie“ wird ein extensibler und gerader Direktor angenommen. In der nun vorgestellten Mehrschichttheorie wird ein stückweise linearer Direktor benutzt. Dazu wird ein C^0 -stetiger Verschiebungsansatz in Dickenrichtung verwendet. Die Schalenhöhe wird dazu in einzelne Schichten L unterteilt - siehe Abb. 4.3. Jede Schicht besitzt einen Schichtdirektor auf der Schichtreferenzfläche. Dieses Vorgehen hat zur Folge, dass der Querschnitt bei der Verformung nicht zwingend eben bleibt.

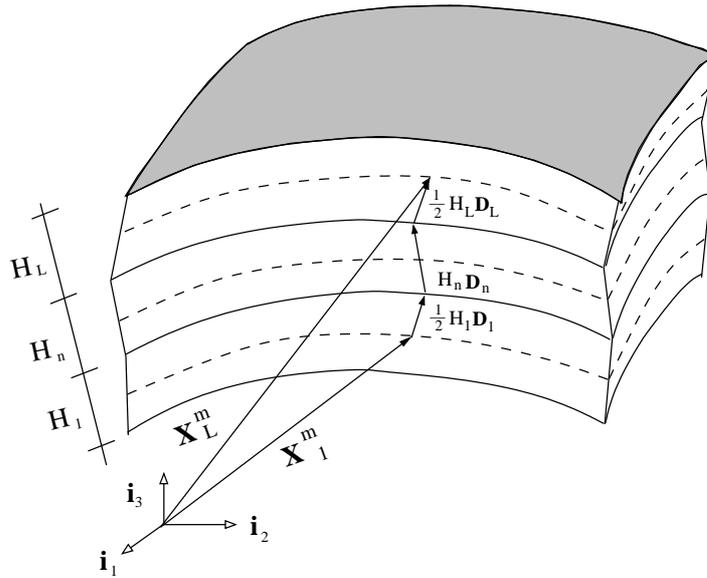


Abbildung 4.3: Schale mit Mehrschichtkinematik

Der Ortsvektor eines materiellen Punktes \mathcal{P} einer beliebigen Schicht L in der Ausgangskonfiguration kann durch die Schichtoberseite \mathbf{X}_L^o und Schichtunterseite \mathbf{X}_L^u der Schicht L beschrieben werden.

$$\mathbf{X}_L(\theta_i) = \frac{1}{H_L} \left[\left(\frac{H_L}{2} + \theta_{3L} \right) \mathbf{X}_L^o(\theta_1, \theta_2) + \left(\frac{H_L}{2} - \theta_{3L} \right) \mathbf{X}_L^u(\theta_1, \theta_2) \right] \quad (4.8)$$

Der Ortsvektor eines Punkte \mathcal{P} wird durch die Schichtreferenzfläche \mathbf{X}_L^m und den Schichtdirektor \mathbf{D}_L mit der Schichthöhe H_L bestimmt,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_L(\theta_i) &= \frac{1}{2} [\mathbf{X}_L^o(\theta_1, \theta_2) + \mathbf{X}_L^u(\theta_1, \theta_2)] + \frac{1}{H_L} \theta_{3L} [\mathbf{X}_L^o(\theta_1, \theta_2) - \mathbf{X}_L^u(\theta_1, \theta_2)] \\ &= \mathbf{X}_L^m(\theta_1, \theta_2) + \theta_{3L} \mathbf{D}_L(\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Der Ortsvektor eines Punkts auf der Grenzfläche zweier Schichten kann jeweils von zwei Schichten aus ermittelt werden, nämlich von der unteren Schicht aus mit $\theta_{3L} = \frac{H_L}{2}$,

$$\mathbf{X}_L^o(\theta_1, \theta_2) = \mathbf{X}_L^m(\theta_1, \theta_2) + \frac{1}{2} H_L \mathbf{D}_L(\theta_1, \theta_2) \quad (4.10)$$

und von der oberen Schicht aus mit $\theta_{3L+1} = -\frac{H_{L+1}}{2}$:

$$\mathbf{X}_{L+1}^u(\theta_1, \theta_2) = \mathbf{X}_{L+1}^m(\theta_1, \theta_2) - \frac{1}{2}H_{L+1}\mathbf{D}_{L+1}(\theta_1, \theta_2) \quad (4.11)$$

Die Punkte der Schichtreferenzfläche der oberen Schicht können durch Umformung mit dem Ortsvektor der unteren Schicht und zweier Schichtdirektoren beschrieben werden.

$$\mathbf{X}_{L+1}^m(\theta_1, \theta_2) = \mathbf{X}_L^m(\theta_1, \theta_2) + \frac{1}{2}H_L\mathbf{D}_L(\theta_1, \theta_2) + \frac{1}{2}H_{L+1}\mathbf{D}_{L+1}(\theta_1, \theta_2) \quad (4.12)$$

Die Punkte in der Schichtreferenzfläche einer beliebigen Schicht werden durch den Ortsvektor der Schichtreferenzfläche der untersten Schicht und einer Summe von Schichtdirektoren bestimmt.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_L^m(\theta_1, \theta_2) &= \mathbf{X}_1^m(\theta_1, \theta_2) + \frac{1}{2}H_1\mathbf{D}_1(\theta_1, \theta_2) \\ &+ \sum_{n=2}^{L-1} H_n(\theta_1, \theta_2)\mathbf{D}_n + \frac{1}{2}H_L\mathbf{D}_L(\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Der Ortsvektor der untersten Schicht als Bezugsmittelfläche ist willkürlich gewählt. Es könnte auch eine andere Schichtmittelfläche gewählt werden, z.B. die Schicht in der Mitte. Die Gl.(4.13) kann in Gl.(4.9) eingesetzt werden, womit sich eine einfache Beschreibung der Kinematik in Dickenrichtung ergibt.

$$\mathbf{X}_L(\theta_i) = \mathbf{X}_L^m(\theta_1, \theta_2) + \theta_{3L}\mathbf{D}_L(\theta_1, \theta_2) \quad (4.14)$$

Die Beschreibung der Mehrschichttheorie entspricht bis auf den Term $\mathbf{X}_L^m(\theta_1, \theta_2)$ dann der Formulierung der Einzelschichttheorie.

Kapitel 5

Methode der finiten Elemente

Im Kapitel 3 ist mit Hilfe der Kontinuumsmechanik ein Satz von partiellen Differentialgleichungen angegeben worden, mit denen ein physikalisches Problem als Randwertaufgabe beschrieben werden kann. Leider gelingt es nur in wenigen Fällen, eine geschlossene Lösung für Randwertaufgaben zu finden. Mit Hilfe von numerischen Verfahren können allerdings Näherungslösungen konstruiert werden. Die Methode von GALERKIN erlaubt die Lösung von Problemen, bei denen ein Variationsfunktional nicht zwingend existieren muss. Das gesuchte Verschiebungsfeld \mathbf{u} wird durch eine Summe von linear unabhängigen Basisfunktionen ϕ beschrieben - siehe SCHWARZ [124].

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^N \phi_i \mathbf{u}_i \quad (5.1)$$

Die Wichtungsfunktion \mathbf{w} oder virtuelle Verschiebung $\delta\mathbf{u}$ wird mit demselben Näherungsansatz beschrieben.

$$\delta\mathbf{u} \approx \delta\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^N \phi_i \delta\mathbf{u}_i \quad (5.2)$$

Nach der Idee von GALERKIN soll das Produkt des Residuums R mit der virtuellen Verschiebung im „integralen Mittel“ verschwinden.

$$\int_{\mathcal{B}_0} \delta\mathbf{u} R \, dV = 0 \quad (5.3)$$

Aus der Methode von GALERKIN lässt sich die Methode der finiten Elemente ableiten. Es handelt sich dabei um das am weitesten verbreitete numerische Näherungsverfahren, da es zur Umsetzung in numerische Algorithmen gut geeignet ist und für viele Probleme im Ingenieurwesen angewendet werden kann. Lehrbücher für die Einführung in die Finite-Elemente-Methode sind mit [12],[87],[146] gegeben. Im Unterschied zur GALERKIN Methode wird die Struktur in Teilbereiche, den sogenannten finiten Elementen, unterteilt - siehe CLOUGH [36],[37].

$$\mathcal{B}_0 \approx \mathcal{B}_0^h = \bigcup_{e=1}^{nel} \mathcal{B}_0^e \quad (5.4)$$

Der Körper wird in die Anzahl nel finiter Elemente unterteilt. Dieser Vorgang wird Diskretisierung genannt. Die Überlappung von Elementen ist nicht erlaubt, ebensowenig wie Lücken zwischen den Elementen gestattet sind. Die Ränder der Struktur werden durch die Kanten bzw. Flächen der Elemente am Rand stetig approximiert.

5.1 Materielle Diskretisierung der volumetrischen Schale

Für die einzelnen Elemente werden Ansatzfunktionen als Näherungsfunktion für die gesuchten Feldgrößen verwendet. In Abhängigkeit der notwendigen Dimension der Sturkturanalyse werden ein-, zwei- oder dreidimensionale Ansatzfunktionen gewählt. Der Grad der Ansatzfunktion für die gesuchten Feldgrößen kann linear, quadratisch oder auch von höherer Ordnung sein.

In jedem Element werden diskrete Punkte, die sogenannten Knoten benannt. Die Funktionswerte an den Knotenpunkten sind die Freiwerte der Näherungsfunktion. Elemente, bei denen lediglich die Näherungsfunktion entlang einer gemeinsamen Kante oder Fläche stetig ist, besitzen eine C_0 -Stetigkeit. Ist auch die erste Ableitung der Näherungsfunktion stetig, so liegt eine C_1 -Stetigkeit vor. Die Näherungsfunktion ergibt sich aus der Linearkombination der Formfunktionen mit der Eigenschaft:

$$N_I(\xi_J) = \begin{cases} 1 & \text{für } I = J \\ 0 & \text{für } I \neq J \end{cases} \quad (5.5)$$

Aufgrund des endlichen Grads der Ansatzfunktion liefert die Finite-Elemente-Methode eine Näherungslösung. Zur Verbesserung der Ergebnisse bieten sich prinzipiell zwei Möglichkeiten an: Einmal die Verkleinerung des Ansatzgebietes, dann spricht man von der h-Methode. Wenn der Grad der Ansatzfunktion erhöht wird, dann bezeichnet man dieses Vorgehen als p-Methode. In dieser Arbeit soll die h-Methode verwendet werden.

Wie in Abschnitt 4.2 dargestellt wurde, wird die Schalenkinematik durch die Schalenlaibungen beschrieben, wobei der Direktor jederzeit geradlinig bleiben soll. Zur Beschreibung des volumetrischen Schalenelements werden trilineare Ansatzfunktionen verwendet.

$$N_I(\xi, \eta, \theta) = \frac{1}{8} (1 + \xi_I \xi) (1 + \eta_I \eta) (1 + \theta_I \theta) \quad (5.6)$$

Die Gl.(5.6) gibt die Formfunktion eines achtknotigen Volumenelements wieder. Der trilineare Ansatzgrad ist der niedrigste, der zur Beschreibung einer dreidimensionalen Struktur möglich ist. Die Ableitungen der Formfunktion nach den drei Koordinatenrichtungen ξ, η, θ lauten:

$$N_{I,1}(\xi, \eta, \theta) = \frac{1}{8} \xi_I (1 + \eta_I \eta) (1 + \theta_I \theta) \quad (5.7)$$

$$N_{I,2}(\xi, \eta, \theta) = \frac{1}{8} \eta_I (1 + \xi_I \xi) (1 + \theta_I \theta) \quad (5.8)$$

$$N_{I,3}(\xi, \eta, \theta) = \frac{1}{8} \theta_I (1 + \xi_I \xi) (1 + \eta_I \eta) \quad (5.9)$$

Das Volumenelement wird im Einheitsraum $\square = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ formuliert, siehe dazu auch Abb. 5.1. Dieser Einheits- oder auch Parameterraum stellt die Referenzkonfiguration \mathcal{B}_\square^e für das Element dar. Nach Gl.(3.124) ist das Ver-

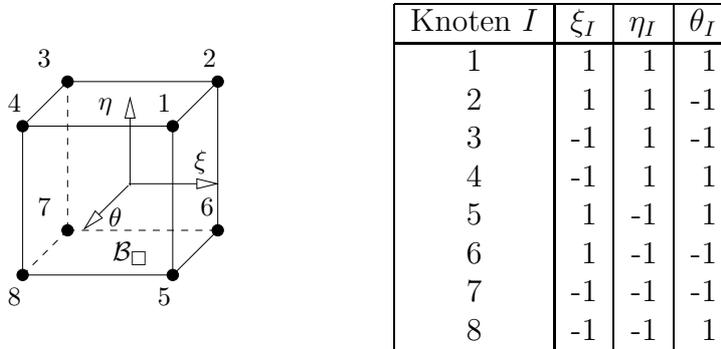


Abbildung 5.1: Elementbeschreibung im Parameterraum

schiebungsfeld \mathbf{u} zu diskretisieren und ebenso die Geometrie der Struktur \mathbf{X}, \mathbf{x} in der Ausgangskonfiguration \mathcal{B}_0 und der Momentankonfiguration \mathcal{B}_t . Für die Beschreibung der gesuchten Größen wird das isoparametrische Konzept genutzt, wo die Geometrie eines Elements mit den gleichen Ansatzfunktionen beschrieben wird wie diejenige des Verschiebungsfelds.

Die interpolierte Geometrie eines Elements in der Ausgangskonfiguration \mathcal{B}_0^e und der Momentankonfiguration \mathcal{B}_t^e lautet dann:

$$\mathbf{X}^h = \sum_{I=1}^{nodes} N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}_I^k = \mathbf{N} \mathbf{X}^k, \quad \mathbf{x}^h = \sum_{I=1}^{nodes} N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_I^k = \mathbf{N} \mathbf{x}^k \quad (5.10)$$

Mit den Koordinaten:

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \theta) \quad (5.11)$$

Der Index k weist darauf hin, dass diskrete Stellen, die Knoten, beschrieben werden. I bezeichnet die Knotennummer und $nodes$ die Anzahl der Knoten. In diesem Fall sind es acht Stück. Das Verschiebungsfeld wird mit demselben trilinearen Ansatz interpoliert.

$$\mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^{nodes} N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_I^k = \mathbf{N} \mathbf{u}^k \quad (5.12)$$

Die Geometrie in der Momentankonfiguration kann somit durch die Addition der Geometrie der Ausgangskonfiguration mit den Verschiebungen \mathbf{u} ermittelt werden - siehe auch Gl.(3.25).

$$\mathbf{x}^h = \mathbf{X}^h + \mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^{nodes} N_I(\boldsymbol{\xi}) (\mathbf{X}_I + \mathbf{u}_I) \quad (5.13)$$

5.2 Abbildung in die Konfigurationen

Im vorherigen Abschnitt ist ein volumetrisches Schalenelement in seiner Referenzkonfiguration erläutert worden. Die Referenzkonfiguration ist in einem Einheitsraum beschrieben, der sich besonders gut zur numerischen Integration eignet. Im Abschnitt 3.2 wurden mit Hilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} die Größen der Ausgangskonfiguration in die Größen der Momentankonfiguration transformiert. Diese Transformationen können jedoch auch mit Hilfe von isoparametrischen Abbildungen aus der Referenzkonfiguration erfolgen - siehe Abb. 5.2.

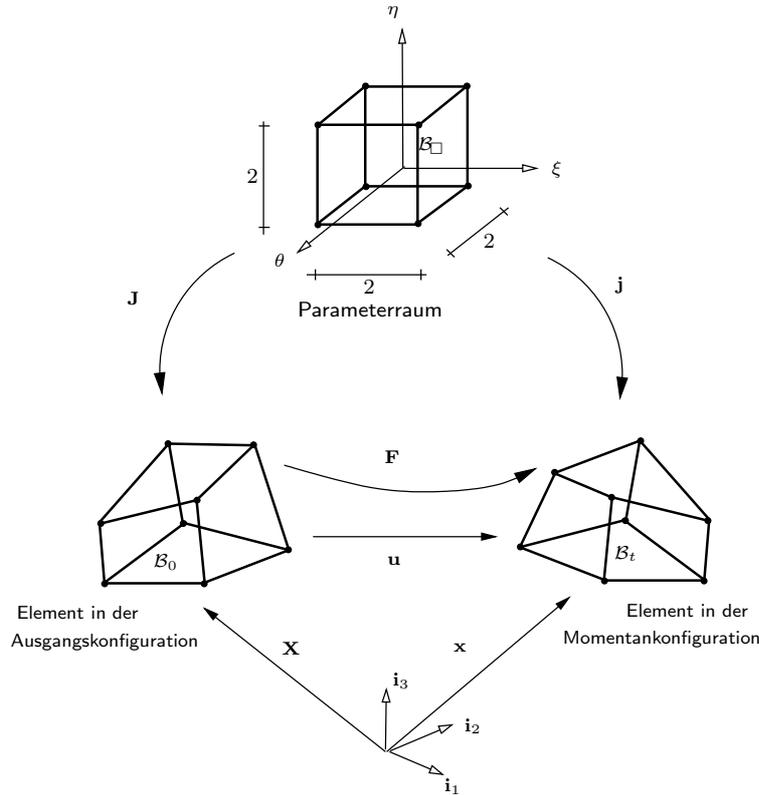


Abbildung 5.2: Abbildung des Einheitselements in die Konfigurationen

Die Basisvektoren in der Ausgangskonfiguration und der Momentankonfiguration berechnen sich aus den Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den Ortsvektoren der zugehörigen Knoten.

$$\mathbf{G}_i = \sum_{I=1}^{nodes} N_{I,i}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}_I^k = \mathbf{N}_{,i} \mathbf{X}^k, \quad \mathbf{g}_i = \sum_{I=1}^{nodes} N_{I,i}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_I^k = \mathbf{N}_{,i} \mathbf{x}^k \quad (5.14)$$

Die Basisvektoren \mathbf{i}_i im Parameterraum sind orthogonal zueinander, womit sich für die kovarianten und kontravarianten Basisvektoren folgender Zusammenhang $\mathbf{i}_i = \mathbf{i}^i$ ergibt.

$$\mathbf{J} = \mathbf{N}_{,i} \mathbf{X}^k \otimes \mathbf{i}_i \quad (5.15)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{N}_{,i} \mathbf{x}^k \otimes \mathbf{i}_i \quad (5.16)$$

Mit der Gl.(5.16) besitzt die Jacobimatrix folgenden Aufbau:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = [\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3], \quad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] \quad (5.17)$$

Der Deformationsgradient ergibt sich aus der Komposition der beiden Abbildungen.

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} \mathbf{J}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (5.18)$$

5.3 Linearisierung der Gleichgewichtsaussage

Die Gleichgewichtsaussage der Gl.(3.124) hängt nichtlinear von den Verschiebungen ab. Die numerische Lösung des Gleichgewichtszustandes kann daher nur iterativ erfolgen, wofür die Gl.(3.124) linearisiert werden muss. Die Linearisierung erfolgt durch die TAYLOR-Reihe an der Stelle $\check{\mathbf{u}}$, wobei die Entwicklung nach dem linearen Glied abgebrochen wird

$$\delta \Pi(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta \Pi(\check{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) + \mathbf{D} \delta \Pi(\check{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} + R(\Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \quad (5.19)$$

und $R(\Delta \mathbf{u})$ das Restglied der Taylorentwicklung ist. Das GATEAUX-Differential liefert die Richtungsableitung.

$$\mathbf{D} \delta \Pi(\check{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} = \frac{d}{d\epsilon} \delta \Pi(\check{\mathbf{u}} + \epsilon \Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u})|_{\epsilon=0} = \frac{\partial \delta \Pi(\check{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (5.20)$$

Damit ist dieses stückweise lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\mathbf{D} \delta \Pi_i \Delta \mathbf{u} = -\delta \Pi_a \quad (5.21)$$

Da von einem konservativen System ausgegangen wird, braucht nur das erste Glied der Gl.(3.124) linearisiert zu werden. Nach [84] ergibt sich die linearisierte Variation des inneren Potentials zu

$$\mathbf{D} \delta \Pi_i \Delta \mathbf{u} = \int_{\mathcal{B}_0} \left(\delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial^2 W_s}{\partial \mathbf{E}^2} \cdot \Delta \mathbf{E} + \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{E}} \cdot \Delta \delta \mathbf{E} \right) dV \quad (5.22)$$

Der erste Term im Integral stellt den materiellen Anteil der Steifigkeitsmatrix dar und der zweite Term den geometrischen Anteil. Die virtuellen GREENSchen Verzerrungen lauten:

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \delta \mathbf{g}_j + \delta \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (5.23)$$

Die virtuellen Verzerrungen in Vektorschreibweise - siehe Abschnitt 3.5 - werden mit der Verzerrungs-Verschiebungsmatrix \mathbf{B} und der virtuellen Verschiebung approximiert.

$$\delta \mathbf{E}^h = \begin{bmatrix} \delta E_{11}^h \\ \delta E_{22}^h \\ \delta E_{33}^h \\ 2\delta E_{12}^h \\ 2\delta E_{13}^h \\ 2\delta E_{23}^h \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{nodes} \mathbf{B}_I \delta \mathbf{u}_I = \sum_{I=1}^{nodes} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^{hT} N_{I,1} \\ \mathbf{g}_2^{hT} N_{I,2} \\ \mathbf{g}_3^{hT} N_{I,3} \\ \mathbf{g}_2^{hT} N_{I,1} + \mathbf{g}_1^{hT} N_{I,2} \\ \mathbf{g}_3^{hT} N_{I,1} + \mathbf{g}_1^{hT} N_{I,3} \\ \mathbf{g}_3^{hT} N_{I,2} + \mathbf{g}_2^{hT} N_{I,3} \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_I \quad (5.24)$$

Die in Gl.(5.22) benötigte Linearisierung der virtuellen GREENSchen Verzerrungen lautet:

$$\Delta\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{g}_i \cdot \delta\mathbf{g}_j + \delta\mathbf{g}_i \cdot \Delta\mathbf{g}_j)\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (5.25)$$

Die Diskretisierung der Gl.(5.25) ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta\delta\mathbf{E}^h &= \begin{bmatrix} \Delta\delta E_{11}^h \\ \Delta\delta E_{22}^h \\ \Delta\delta E_{33}^h \\ 2\Delta\delta E_{12}^h \\ 2\Delta\delta E_{13}^h \\ 2\Delta\delta E_{23}^h \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{nodes} \sum_{J=1}^{nodes} \delta\mathbf{u}_I^T \begin{bmatrix} N_{I,1} N_{J,1} \\ N_{I,2} N_{J,2} \\ N_{I,3} N_{J,3} \\ N_{I,1} N_{J,2} + N_{I,2} N_{J,1} \\ N_{I,1} N_{J,3} + N_{I,3} N_{J,1} \\ N_{I,2} N_{J,3} + N_{I,3} N_{J,2} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_J \\ &= \sum_{I=1}^{nodes} \sum_{J=1}^{nodes} \delta\mathbf{u}_I^T \mathbf{B}_{IJ} \Delta\mathbf{u}_J \end{aligned} \quad (5.26)$$

Bei der Linearisierung des inneren Potentials entsteht folgender Ausdruck

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \Delta\delta\mathbf{E}^h = \sum_{I=1}^{nodes} \sum_{J=1}^{nodes} \delta\mathbf{u}_I^T \hat{\mathbf{T}}_{IJ} \Delta\mathbf{u}_J \quad \hat{\mathbf{T}}_{IJ} = \hat{T}_{IJ} \mathbf{1} \quad (5.27)$$

mit der Definition für die Komponenten von \hat{T}_{IJ} :

$$\begin{aligned} \hat{T}_{IJ} &=: \tilde{T}^{11} N_{I,1} N_{J,1} + \tilde{T}^{22} N_{I,2} N_{J,2} + \tilde{T}^{33} N_{I,3} N_{J,3} + \\ &\quad \tilde{T}^{12} (N_{I,1} N_{J,2} + N_{I,2} N_{J,1}) + \\ &\quad \tilde{T}^{13} (N_{I,1} N_{J,3} + N_{I,3} N_{J,1}) + \tilde{T}^{23} (N_{I,2} N_{J,3} + N_{I,3} N_{J,2}) \end{aligned} \quad (5.28)$$

aus der die Einträge \mathbf{K}_{IJ}^G der geometrischen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^G berechnet werden.

Basierend auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebung ergibt sich die linearisierte Form der Gleichgewichtsaussage nach Gl.(3.124), Gl.(5.21) und Gl.(5.22).

$$\int_{\mathcal{B}_0} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \delta\mathbf{E} dV|_{\bar{\mathbf{u}}} - \int_{\mathcal{B}_0} \rho \mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{u} dV - \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{u} dA + \int_{\mathcal{B}_0} (\delta\mathbf{E} \cdot \Delta\tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{T}} \cdot \Delta\delta\mathbf{E}) dV|_{\bar{\mathbf{u}}} = 0 \quad (5.29)$$

Berücksichtigt man folgende Diskretisierungsansätze und beachtet die Vektor-Matrix Schreibweise,

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u} &= \mathbf{N} \delta\mathbf{u}^k && \text{Geometrie} \\ \delta\mathbf{E} &= \mathbf{B} \delta\mathbf{u} && \text{Kinematik} \\ \Delta\tilde{\mathbf{T}} &= \mathbf{C} \Delta\mathbf{E} && \text{Materialmodell,} \end{aligned}$$

so lässt sich das nichtlineare algebraische Gleichungssystem aufstellen:

$$\left[\int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} + \hat{\mathbf{T}}) dV \right] \cdot \Delta\mathbf{u} = - \left[\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{T}} dV - \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{k} dV - \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_0 dA \right] \quad (5.30)$$

Dessen Restglied im Zuge des inkrementellen, iterativen Lösungsverfahrens gegen Null tendiert. Für jedes einzelne Element entsteht ein Gleichungssystem, das dann durch den Zusammenbau aller Elemente in ein globales Gleichungssystem überführt wird.

$$\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}^{int} \quad (5.31)$$

Die Gl.(5.31) kann durch eine nichtlineare Lösungsmethode, wie zum Beispiel mit dem NEWTON Verfahren, iterativ gelöst werden. In jeder Iteration i wird das lineare Gleichungssystem gelöst und der Verschiebungsvektor $\mathbf{u}^{(i)}$ aufaddiert,

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{u}^{(i)} + \Delta \mathbf{u}^{(i)} \quad (5.32)$$

bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist. Anschließend kann die äußere Last \mathbf{f}^{ext} erhöht werden und im neuen Lastschritt das Gleichgewicht berechnet werden. Geeignete Abbruchkriterien sind Normen der Verschiebungen, der Kräfte oder der Energie. In der Nähe der Lösung konvergiert das NEWTON-Verfahren quadratisch. Zur Reduktion des numerischen Aufwandes werden modifizierte NEWTON-Verfahren genutzt.

5.4 Querdehndefekt der 6-Parametertheorie

Die im Abschnitt 4.2 und den Abschnitten 5.1 bis 5.3 hergeleitete 6-Parameter Schalentheorie mit linearen Ansätzen zeigt bei einer biegedominierten Belastung mit einer von null verschiedenen Querdehnzahl zu geringe Verformungen. Dieses zu steife Elementverhalten wird an einer Balkenstruktur unter reiner Biegung näher studiert - siehe Abb. 5.3. Aufgrund der von null verschiedenen Querkontraktion stellt sich oberhalb der geometrischen Mittellinie eine Querdehnung und unterhalb eine Querstauchung ein - siehe BRAUN & BISCHOFF und RAMM [22] und VERHOEVEN [141]. Dadurch wandert die materielle Mittelfaser nach oben und ist nicht mehr identisch mit der geometrischen Mittellinie - siehe Abb. 5.3 verformte Geometrie. Die Querschnittshöhe der Struktur bleibt davon unberührt. Aus dieser Überlegung folgt eine linear verlaufende Querdehnung über den Quer-

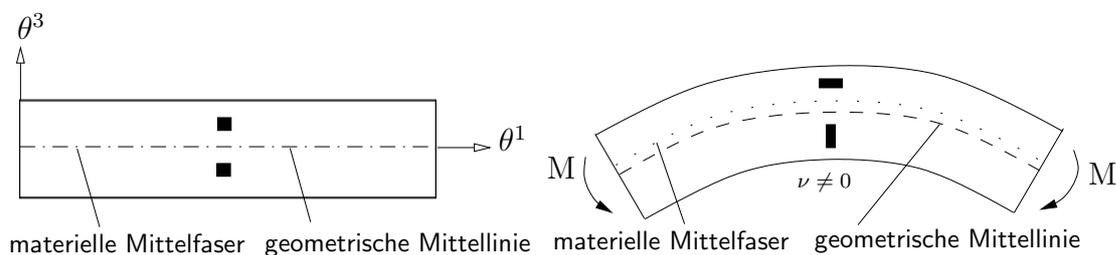
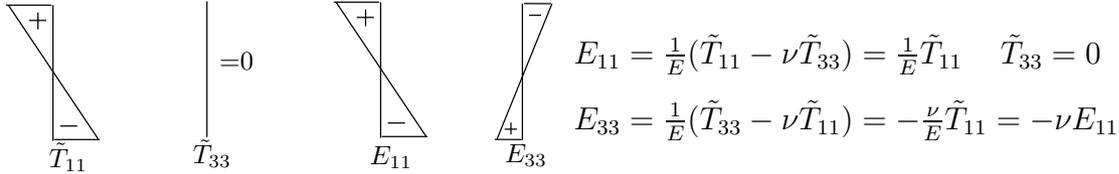


Abbildung 5.3: Balken unter reiner Biegung, in der unverformten und verformten Geometrie

schnitt. Die in Gl.(5.6) gewählte trilineare Ansatzfunktion zur Beschreibung der Verschiebung ist auf einen konstanten Verlauf der Verzerrungen beschränkt. Dieser Ansatz führt zu künstlichen Spannungen in Dickenrichtung der Schale, die

schließlich ein zu steifes Elementverhalten hervorrufen. In der Abb. 5.4 werden die Spannungen und Verzerrungen der 6-Parametertheorie mit den Spannungen und Verzerrungen, die sich nach der Elastizitätstheorie für einen Balken unter reiner Biegung einstellen, miteinander verglichen.

Lösung mit der Elastizitätstheorie:



Lösung mit der 6-Parametertheorie:

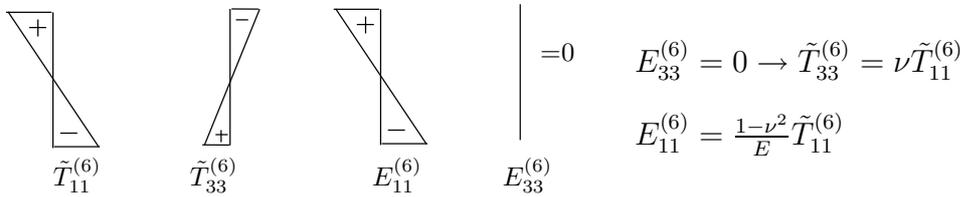


Abbildung 5.4: Studie der Spannungs- und Verzerrungsverläufe über die Querschnittshöhe

Werden die Verzerrungen der 6-Parametertheorie und der Elastizitätstheorie in Längsrichtung miteinander verglichen - siehe Gl.(5.33), so kann der resultierende Fehler der 6-Parametertheorie in der Größe von ν^2 abgeschätzt werden - siehe Gl.(5.34) und [22], [23].

$$\begin{array}{ll} \text{Exakte Dehnung:} & \text{6-Parametertheorie:} \\ E_{11} = \frac{1}{E} \tilde{T}_{11} & E_{11}^{(6)} = \frac{1-\nu^2}{E} \tilde{T}_{11}^{(6)} \end{array} \quad (5.33)$$

$$\text{Fehler:} \quad \frac{E_{11} - E_{11}^{(6)}}{E_{11}} = \nu^2 \quad (5.34)$$

Um den Querdehndefekt zu vermeiden, stehen drei Varianten zur Auswahl. Zuerst besteht die Möglichkeit durch die Kondensation des Werkstoffmodells die Normalspannung in Dickenrichtung zu Null zu setzen - siehe MATZENMILLER [93] Seite 72. Diese Degenerationsbedingung zieht aber nach sich, dass keine unveränderten dreidimensionalen Werkstoffmodelle genutzt werden können. Außerdem ist die analytische Kondensation für viele Materialmodelle nicht möglich, sondern muß iterativ durchgeführt werden.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, einen quadratischen Verschiebungsansatz in Dickenrichtung einzuführen. Der quadratische Verschiebungsansatz ermöglicht die notwendige lineare Dickenverzerrung. Arbeiten, die diesen Ansatz verfolgen, sind z.B. bei PARISCH [106], GRUTTMANN [63] und bei HAUPTMANN & SCHWEIZERHOF [67] zu finden.

Ein dritter Lösungsweg besteht in der Einführung eines erweiterten Verzerrungsfelds für die Dickenverzerrung. Die Idee ein erweitertes Verzerrungsfeld in eine

Schalenformulierung einzuführen, um dreidimensionale Werkstoffmodelle zu nutzen, stammt von BÜCHTER & RAMM [27]. Ein Vorteil der Methode besteht darin, dass die erweiterten Verzerrungen nur auf Elementebene eingeführt werden und damit keine weiteren Freiheitsgrade in der Gesamtsteifigkeitsmatrix berücksichtigt werden müssen. Wird bei der Formulierung der Schalentheorie ein erweitertes Verzerrungsfeld genutzt, so wird die in Abschnitt 4.2 beschriebene 6-Parametertheorie zu einer 7-Parametertheorie weiterentwickelt.

5.5 Reduktion des HU-WASHIZU Funktionals

Das HU-WASHIZU Funktional, das im Abschnitt 3.8 eingeführt wurde, besitzt drei unabhängige Feldfunktionen: die Verschiebungen \mathbf{u} , die Spannungen $\tilde{\mathbf{T}}$ und die erweiterten Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$. Die Diskretisierung des Verschiebungsfelds im Sinne der Finiten-Elemente-Methode wird in Abschnitt 5.1 gezeigt. Die Beschreibung des Spannungs- und Verzerrungsfelder erfolgt in ähnlicher Weise. Das Spannungsfeld $\tilde{\mathbf{T}}$ wird mit den Ansatzfunktionen $\mathbf{N}_{\tilde{\mathbf{T}}}$ und den Freiheitsgraden $\boldsymbol{\beta}$ beschrieben.

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{N}_{\tilde{\mathbf{T}}}\boldsymbol{\beta} \quad \delta\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{N}_{\tilde{\mathbf{T}}}\delta\boldsymbol{\beta} \quad (5.35)$$

Die erweiterten Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ werden durch den Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ und durch die Matrix $\tilde{\mathbf{M}}$ approximiert. Der interne Freiheitsgrad $\boldsymbol{\alpha}$ wird nur auf Elementebene eingeführt.

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{M}}\boldsymbol{\alpha} \quad \delta\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{M}}\delta\boldsymbol{\alpha} \quad (5.36)$$

Nach Gl.(3.129) wird das Integral der virtuellen Spannungen und der erweiterten Verzerrungen zu null gesetzt. Werden nun die Diskretisierungsansätze für die Spannungen und erweiterten Verzerrungen eingesetzt,

$$-\int_{\mathcal{B}_0} \delta\tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \, dV = -\delta\boldsymbol{\beta}^T \underbrace{\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{N}_{\tilde{\mathbf{T}}}^T \cdot \tilde{\mathbf{M}} \, dV}_{\mathbf{0}} \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad (5.37)$$

so wird zur Erfüllung von Gl.(5.37) die Orthogonalität der Ansatzfunktionen der Spannungen $\mathbf{N}_{\tilde{\mathbf{T}}}$ und der erweiterten Verzerrungen $\tilde{\mathbf{M}}$ gefordert, das heißt $\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{N}_{\tilde{\mathbf{T}}}^T \cdot \tilde{\mathbf{M}} \, dV = \mathbf{0}$, denn der Vektor $\delta\boldsymbol{\beta}^T$ ist beliebig. Werden die Diskretisierungsansätze für die Spannungen gemäß Gl.(5.35) und der erweiterten Verzerrungen gemäß Gl.(5.36) in die Gl.(3.130) eingesetzt,

$$\int_{\mathcal{B}_0} \left(\frac{\partial W_s}{\partial \hat{\mathbf{E}}} - \tilde{\mathbf{T}} \right) \cdot \delta\tilde{\mathbf{E}} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \left(\frac{\partial W_s}{\partial \hat{\mathbf{E}}} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}_{\tilde{\mathbf{T}}}^T \right) \cdot \tilde{\mathbf{M}}\delta\boldsymbol{\alpha} \, dV = 0 \quad (5.38)$$

so verbleibt aus Gl.(5.38) ein Restterm [136] für den wegen Gl.(5.37) gilt:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial W_s}{\partial \hat{\mathbf{E}}} \cdot \tilde{\mathbf{M}}\delta\boldsymbol{\alpha} \, dV = 0 \quad (5.39)$$

Gl.(5.39) ist immer erfüllt, wenn die Spannungen im Element durch stückweise konstante Funktionen approximiert werden.

Unter Ausnutzung von Gl.(3.129) und Gl.(5.39) kann das Spannungsfeld aus dem Mehrfeldfunktional entfallen. Somit reduziert sich das Dreifeldfunktional nach Gl.(3.128) durch eine geeignete Diskretisierung der Feldfunktionen auf ein Zweifeldfunktional.

$$\int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial W_s}{\partial \hat{\mathbf{E}}} \cdot \delta \mathbf{E} \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \quad (5.40)$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial W_s}{\partial \hat{\mathbf{E}}} \cdot \delta \tilde{\mathbf{E}} \, dV = 0 \quad (5.41)$$

Zur Lösung der nichtlinearen Gleichung (5.40), z.B. mit dem NEWTON-Verfahren, ist die Linearisierung um den Punkt $\mathbf{u} = \check{\mathbf{u}}$ und $\hat{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0$ notwendig. Sie lautet:

$$\begin{aligned} D \delta \Pi_{\mathbf{u}}(\check{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{E}}_0, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}, \Delta \tilde{\mathbf{E}}) &= \int_{\mathcal{B}_0} \left(\delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial^2 W_s}{\partial \hat{\mathbf{E}}^2} \cdot \Delta \mathbf{E} + \frac{\partial W_s}{\partial \hat{\mathbf{E}}} \cdot \Delta \delta \mathbf{E} \right) dV \\ &+ \int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial^2 W_s}{\partial \hat{\mathbf{E}}^2} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{E}} \, dV \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$D \delta \Pi_{\mathbf{u}}(\check{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{E}}_0, \delta \tilde{\mathbf{E}}, \Delta \mathbf{u}, \Delta \tilde{\mathbf{E}}) = \int_{\mathcal{B}_0} \delta \tilde{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial^2 W_s}{\partial \hat{\mathbf{E}}^2} \cdot \Delta \mathbf{E} \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \delta \tilde{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial^2 W_s}{\partial \hat{\mathbf{E}}^2} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{E}} \, dV \quad (5.43)$$

5.6 Erweiterung der Dickendehnungen

Die „Enhanced Assumed Strain“-Methode wird verwendet, um in die Kinematik der volumetrischen Schale eine lineare Dickendehnung einzuführen umso den in Abschnitt 5.4 beschriebenen Querdehndefekt zu verhindern. Die zu Grunde liegende Idee der Methode besteht darin, zusätzliche Freiheitsgrade nur auf Elementebene einzuführen. Die zusätzlichen Freiheitsgrade werden beim Zusammenbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix nicht berücksichtigt, sondern werden durch statische Kondensation auf der Elementebene eliminiert.

Die Idee der statischen Kondensation von Freiheitsgraden auf der Elementebene wurde bereits von TAYLOR & WILSON im Jahr 1973 [145, 136] in der von ihnen entwickelten „Methode der inkompatiblen Verschiebungen“ erfolgreich umgesetzt, allerdings fehlte die variationelle Absicherung der Methode. Erste Arbeiten zur mathematischen Erklärung der EAS-Methode stammen von SIMO & RIFAI [130], wo das Mehrfeldfunktional von HU-WASHIZU zur variationellen Absicherung ihrer Formulierung ausgenutzt wird. Die Erweiterung auf geometrisch nichtlineare Probleme erfolgte von SIMO & ARMERO [127]. Im Rahmen der EAS-Methode können

sowohl der Deformationsgradient \mathbf{F} wie auch die GREENSchen Verzerrungen \mathbf{E} erweitert werden. In den Originalarbeiten zur EAS-Methode wird der Deformationsgradient erweitert. In KLINKEL [83] auf der Seite 102 wird allerdings gezeigt, dass die Erweiterung der GREENSchen Verzerrungen unter Umständen zu robusteren Elementformulierungen führt.

Der GREENSche Verzerrungstensor \mathbf{E} wird additiv um die inkompatiblen Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ erweitert - siehe Gl.(3.126). Die erweiterten Verzerrungen werden in der kontravarianten Basis dargestellt.

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{E}_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \tilde{E}_{kl}^0 \mathbf{G}_0^k \otimes \mathbf{G}_0^l \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{E}_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_0^k \tilde{E}_{kl}^0 \mathbf{G}_0^l \cdot \mathbf{G}_j \quad (5.44)$$

Die Größen mit dem Index 0 werden am Elementmittelpunkt ausgewertet, damit auch bei verzerrten Elementen eine unveränderte Basis zur Verfügung steht - siehe dazu BRAUN [23] Seite 101. Mit Hilfe der Transformationsmatrix \mathbf{T}^0 , die zwischen den Basissystemen transformiert, gilt folgende Identität:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{T}^0 \tilde{\mathbf{E}}^0 \quad (5.45)$$

$$\mathbf{T}^0 = \begin{bmatrix} t_{11}^2 & t_{12}^2 & t_{13}^2 & t_{11}t_{12} & t_{11}t_{13} & t_{12}t_{13} \\ t_{21}^2 & t_{22}^2 & t_{23}^2 & t_{21}t_{22} & t_{21}t_{23} & t_{22}t_{23} \\ t_{31}^2 & t_{32}^2 & t_{33}^2 & t_{31}t_{32} & t_{31}t_{33} & t_{32}t_{33} \\ 2t_{11}t_{21} & 2t_{12}t_{22} & 2t_{13}t_{23} & t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21} & t_{11}t_{23} + t_{13}t_{21} & t_{12}t_{23} + t_{13}t_{22} \\ 2t_{11}t_{31} & 2t_{12}t_{32} & 2t_{13}t_{33} & t_{11}t_{32} + t_{12}t_{31} & t_{11}t_{33} + t_{13}t_{31} & t_{12}t_{33} + t_{13}t_{32} \\ 2t_{21}t_{31} & 2t_{22}t_{32} & 2t_{23}t_{33} & t_{21}t_{32} + t_{22}t_{31} & t_{21}t_{33} + t_{23}t_{31} & t_{22}t_{33} + t_{23}t_{32} \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } t_{ik} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_0^k \quad (5.46)$$

Für die erweiterten Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}^0$ wird eine inkompatible Interpolation genutzt:

$$\tilde{\mathbf{E}}^0 = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \mathbf{M}(\xi, \eta, \theta) \boldsymbol{\alpha}, \quad (5.47)$$

wobei $\boldsymbol{\alpha}$ der Vektor der internen Freiheitsgrade ist und \mathbf{M} die Matrix der erweiterten Ansatzfunktionen darstellt. Aufgrund der geforderten Orthogonalität - siehe Gl.(5.37) - zwischen dem Spannungsfeld $\tilde{\mathbf{T}}$ und dem erweiterten Verzerrungsfeld $\tilde{\mathbf{E}}$ muß gelten,

$$\int_{\tilde{\mathcal{B}}_0} \frac{1}{\det \mathbf{J}} (\mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}) dV = \mathbf{0} \quad (5.48)$$

da das Spannungsfeld $\tilde{\mathbf{T}}$ im Element als zumindest Konstant angenommen wird. Mit $dV = \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\theta$ muss die Interpolationsmatrix \mathbf{M} folgende Bedingung erfüllen.

$$\int_{\tilde{\mathcal{B}}_0} \mathbf{M}(\xi, \eta, \theta) d\xi d\eta d\theta = \mathbf{0} \quad (5.49)$$

Zwei Interpolationsmatrixen, die der Orthogonalitätsbedingung Gl.(5.48) genügen, sind in Gl.(5.50) angegeben, weitere Interpolationsmatrixen und nähere Information über ihre Eigenschaften werden im Abschnitt 6 beschrieben.

$$\mathbf{M}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \theta & \theta\xi & \theta\eta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Basierend auf dem Mehrfeldfunktional von HU-WASHIZU ergibt sich für ST. VENANT-KIRCHHOFF Materialmodelle die linearisierte Form der Gleichgewichtsaussage um den Punkt $(\delta\tilde{\mathbf{u}}_0, \delta\tilde{\mathbf{E}}_0)$ - siehe Gl.(5.42)

$$\int_{\mathcal{B}_0} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \delta\mathbf{E} \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho \mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{u} \, dA + \int_{\mathcal{B}_0} (\delta\mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \Delta\mathbf{E} + \Delta\delta\mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{T}}) \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \delta\mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \Delta\tilde{\mathbf{E}} \, dV = 0 \quad (5.51)$$

und Gl.(5.43).

$$\int_{\mathcal{B}_0} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \delta\tilde{\mathbf{E}} \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \delta\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{C} \cdot \Delta\mathbf{E} \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \delta\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{C} \cdot \Delta\tilde{\mathbf{E}} \, dV = 0 \quad (5.52)$$

Werden die Diskretisierungsansätze berücksichtigt,

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u} &= \mathbf{N}\delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{E} &= \mathbf{B}\delta\mathbf{u} \\ \Delta\tilde{\mathbf{E}} &= \tilde{\mathbf{M}}\Delta\boldsymbol{\alpha} \quad \text{mit } \tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{\det\mathbf{J}}\mathbf{T}^0\mathbf{M} \end{aligned}$$

können folgende Elementmatrizen

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} + \hat{\mathbf{T}}) \, dV \quad (5.53)$$

$$\mathbf{K}_{\alpha u} = \int_{\mathcal{B}_0} (\tilde{\mathbf{M}}^T \mathbf{C} \mathbf{B}) \, dV \quad (5.54)$$

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha} = \int_{\mathcal{B}_0} (\tilde{\mathbf{M}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{M}}) \, dV \quad (5.55)$$

und Elementvektoren aufgestellt werden.

$$\mathbf{f}_u^{int} = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{T}} \, dV \quad (5.56)$$

$$\mathbf{f}_u^{ext} = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{k} \, dV + \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_0 \, dA \quad (5.57)$$

$$\mathbf{f}_\alpha^{int} = \int_{\mathcal{B}_0} \tilde{\mathbf{M}}^T \tilde{\mathbf{T}} \, dV \quad (5.58)$$

Auf der Elementebene entsteht ein gekoppeltes Gleichungssystem mit den Freiheitsgraden $\Delta \mathbf{u}$ und $\Delta \boldsymbol{\alpha}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{\alpha u}^T \\ \mathbf{K}_{u\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u^{ext} - \mathbf{f}_u^{int} \\ -\mathbf{f}_\alpha \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Durch statische Kondensation auf Elementebene kann $\Delta \boldsymbol{\alpha}$ eliminiert werden:

$$\Delta \boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1}(\mathbf{f}_\alpha + \mathbf{K}_{u\alpha}\Delta \mathbf{u}), \quad (5.60)$$

wodurch wiederum eine reine Verschiebungsgleichung mit dem Freiheitsgrad $\Delta \mathbf{u}$ entsteht.

$$\underbrace{(\mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{\alpha u}^T \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{K}_{\alpha u})}_{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{K}_{\alpha u}^T \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{f}_\alpha + \mathbf{f}_u^{ext} - \mathbf{f}_u^{int}}_{\mathbf{R}} \quad (5.61)$$

Die reduzierte Gleichung lautet:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{R} \quad (5.62)$$

Für den iterativen Lösungsalgorithmus muss die Aktualisierung der internen Freiheitsgrade $\boldsymbol{\alpha}$ auf Elementebene bestimmt werden - siehe dazu auch Angaben von FREISCHLÄGER [54] Seite 61.

Nichtlinearer iterativer Lösungsalgorithmus

Mit dem Verschiebungsincrement $\Delta \mathbf{u}^{(i)}$ wird eine neue Gesamtverschiebung $\mathbf{u}^{(i+1)}$ berechnet.

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{u}^{(i)} + \Delta \mathbf{u}^{(i)}$$

↓

berechne mit $\mathbf{u}^{(i)}$ und $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$

$$\mathbf{K}_{u\alpha}^{(i)}, \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{(i)}, \text{ und } \mathbf{f}_\alpha^{(i)}$$

↓

berechne $\Delta \boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ als Lösung des LGS

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{(i)} \Delta \boldsymbol{\alpha}^{(i)} = -\mathbf{f}_\alpha^{(i)} - \mathbf{K}_{u\alpha}^{(i)} \Delta \mathbf{u}^{(i)}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(i+1)} = \boldsymbol{\alpha}^{(i)} + \Delta \boldsymbol{\alpha}^{(i)}$$

↓

berechne Verzerrungen und damit Spannungen

$$\hat{\mathbf{E}}^{(i+1)} = \mathbf{E}^{(i+1)} + \tilde{\mathbf{M}}\boldsymbol{\alpha}^{(i+1)}$$

berechne die neue Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}^{(i+1)} = \mathbf{K}_{uu}^{(i+1)} - \mathbf{K}_{\alpha u}^{(i+1)T} \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{(i+1)-1} \mathbf{K}_{\alpha u}^{(i+1)}$$

berechne den neuen inneren Kraftvektor

$$\mathbf{R}^{(i+1)} = \mathbf{K}_{\alpha u}^{(i+1)T} \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{(i+1)-1} \mathbf{f}_\alpha^{(i+1)} + \mathbf{f}_u^{(i+1)}$$

5.7 Querschubversteifung

Bereits in den sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts wurde versucht, mit Hilfe der schubweichen Plattentheorie nach REISSNER und MINDLIN [115] konforme, niedrig interpolierte, finite Elemente für die strukturmechanische Berechnung zu entwickeln. Allerdings tritt bei diesen Elementen eine starke Querschubversteifung, besonders bei dünnen Strukturen im Übergang zur schubstarreren KIRCHHOFF-Theorie auf.

Versteifung bedeutet in diesem Zusammenhang, dass sich das Element einem Verformungszustand „verschließt“ und so zu steife Berechnungsergebnisse liefert. In der Fachliteratur zur Methode der finiten Elemente hat sich der Begriff „Locking“ durchgesetzt. Zur Deutung dieses Phänomens gibt es eine Reihe von Erklärungsansätzen. BISCHOFF [17] bietet einen guten Überblick zu diesem Thema. Die Elementversteifung kann z.B. durch das Auftreten von künstlichen Spannungen erklärt werden. Dabei treten Spannungsanteile auf, die bei der wahren Lösung nicht existieren. Gemeinsamkeiten mit dem in Abschnitt 5.4 betrachteten Querdehndefekt lassen sich hier erkennen.

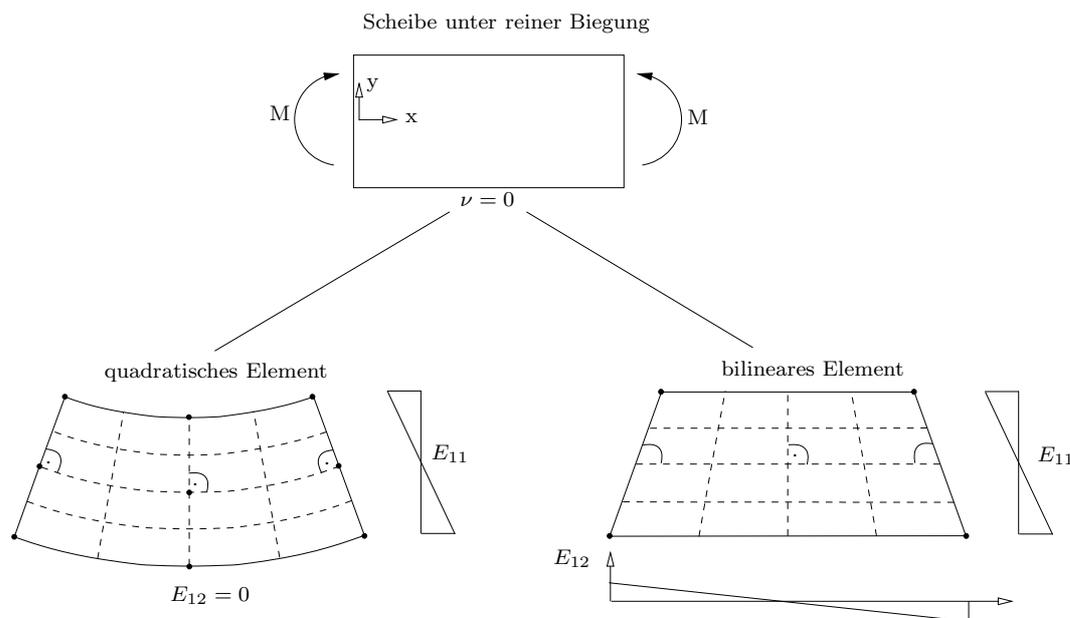


Abbildung 5.5: Rechteckige Scheibenstruktur aus einem Element unter reiner Biegung

Die Elementversteifung kann am Beispiel einer Scheibe unter reiner Biegung untersucht werden - siehe Abb. 5.5. Ein einzelnes finites Element unter reiner Biegung wird betrachtet; einmal mit einer bilinearen Ansatzfunktionen für die Verschiebung und eines mit einer quadratischen Ansatzfunktion. Das bilineare finite Element ist im Gegensatz zu einem quadratischen Element nicht in der Lage, einen reinen Biegezustand abzubilden. Vielmehr reagiert das Element mit einer unphysikalischen Schubverformung. Dieses Verhalten zeigen auch Schalenelemente mit einer REISSNER-MINDLIN Kinematik, wobei künstliche Querschubverzerrungen auftreten. Mit anwachsender Schlankheit - Verhältnis zwischen Länge und Querschnittshöhe eines Elements - versteift das Element zunehmend, was zu voll-

kommen unbrauchbaren Berechnungsergebnissen führt.

Für das Problem der Querschubversteifung finiter Schalenelemente sind im Rahmen der Entwicklung der Elementtechnologie eine Reihe von Lösungsansätzen erarbeitet worden. Das erste Verfahren, das erfolgreich angewandt wurde, beruht auf der Verringerung der Integrationsordnung. Dieses Verfahren ist als Unterintegration oder „Selektiv Reduzierte Integration“ (SRI) bekannt - siehe ZIENKIEWICZ & TAYLOR und TOO [150]. Allerdings treten bei dieser Formulierung Null-Energie-Eigenformen auf, die das Einsatzspektrum der Elemente erheblich einschränken. Um diese Einschränkungen zu umgehen wurden auf Basis einer Kollokationsmethode neue Verfahren entwickelt, die den Umstand der linear verlaufenden künstlichen Querschubspannungen ausnutzen - siehe Abb. 5.5. Verfahren dieser Art werden oft mit dem Begriff „Assumed Strain“ (AS) bezeichnet. Näheres dazu wird im Abschnitt 5.8 und Abschnitt 5.10 beschrieben.

Die im Abschnitt 5.6 behandelte EAS-Methode eignet sich ebenfalls um die Auswirkungen der Querschubversteifungen zu verhindern. Allerdings erweist sich dieses Vorgehen bei dünnen Strukturen als weniger erfolgreich (was durch ein numerisches Beispiel in der Tabelle 6.5 in Zeile 10 gezeigt wird). Wird darüber hinaus der numerische Mehraufwand berücksichtigt, der bei der EAS-Methode notwendig ist, so scheint die Kollokationsmethoden als vorteilhaft gegenüber der EAS-Methode zur Vermeidung des Querschublockings zu sein.

Das Interesse an diesem Forschungsgebiet ist nach wie vor ungebrochen. Neuere Arbeiten im Bereich der Vermeidung des Querschublockings sind unter dem Namen „Diskontinuierliche Galerkin Methode“ (DGM) [25] entstanden.

5.8 Verbesserung der Querschubdehnungen

Zur Vermeidung der Querschubversteifung wird in dieser Arbeit die „Assumed Strain“-Methode angewendet. Es handelt sich um eine Kollokationsmethode, wobei die Querschubverzerrungen nicht direkt aus den Ableitungen der Verschiebungen berechnet werden. Die Verzerrungen werden an ausgewählten Punkten aus den kinematischen Punkten ausgewertet und dann über das Element interpoliert. Das Verfahren nutzt aus, dass an den Mittelpunkten der Elementseiten keine künstlichen Spannungen auftreten - siehe Abb. 5.5. Das erste Plattenelement, das auf der Grundlage dieses Verfahrens entwickelt wurde, war das T1-Element von HUGHES & TEZDUYAR [75]. Die Erweiterung auf Schalenelement erfolgte von BATHE & DVORKIN [13]. Ihre Beschreibungsweise hat sich weitgehend durchgesetzt. Die Querschubverzerrungen werden dabei jeweils in die eine Richtung linear und in die andere Richtung als konstant angenommen - siehe dazu Gl.(5.63).

$$\begin{bmatrix} 2E_{13}^h \\ 2E_{23}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \eta) E_{13}^B + (1 + \eta) E_{13}^D \\ (1 - \xi) E_{23}^A + (1 + \xi) E_{23}^C \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

Die erste Diskussion über eine variationell konsistente Herleitung der „Assumed Strain“-Methode findet sich in SIMO & HUGHES [131] auf Basis des HU-WASHIZU Funktionals. Die „Assumed Strain“-Methode war daher ein wichtiger Ideengeber für die Entwicklung der „Enhanced Assumed Strain“-Methode.

Das von BATHE & DVORKIN [13] beschriebene Konzept wird auf die volumetrische Schale übertragen. So werden die Kollokationspunkte auf die Referenzfläche

in die Seitenmitte gelegt - siehe Abb. 5.6. Für die volumetrische Schale bedeutet dies, dass über die Querschnittshöhe der Querschubverlauf konstant ist. Erst bei geschichteten Schalen kann der Querschubverlauf korrekt dargestellt werden - siehe dazu Abschnitt 6.6. Ein Grund für den Erfolg des „Assumed Strain“-Konzepts

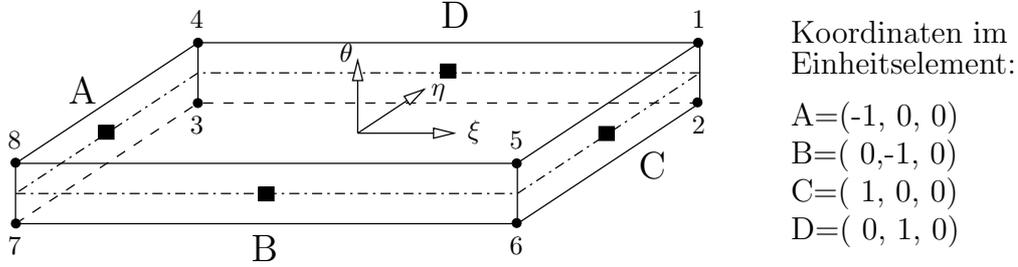


Abbildung 5.6: Lage der Kollokationspunkte zur Vermeidung der Querschubversteifung

liegt in der einfachen programmtechnischen Umsetzung der Methode. Die Variation der Querschubverzerrungen in Gl.(5.24) muss entsprechend dem Ansatz der Gl.(5.63) modifiziert werden.

$$\begin{bmatrix} 2\delta E_{13}^h \\ 2\delta E_{23}^h \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{nodes} \frac{1}{2} \left[(1-\eta)(\mathbf{g}_3^{B^T} N_{I,1}^B + \mathbf{g}_1^{B^T} N_{I,3}^B) + (1+\eta)(\mathbf{g}_3^{D^T} N_{I,1}^D + \mathbf{g}_1^{D^T} N_{I,3}^D) \right. \\ \left. + (1-\xi)(\mathbf{g}_3^{A^T} N_{I,2}^A + \mathbf{g}_2^{A^T} N_{I,3}^A) + (1+\xi)(\mathbf{g}_3^{C^T} N_{I,2}^C + \mathbf{g}_2^{C^T} N_{I,3}^C) \right] \delta \mathbf{u}_I \quad (5.64)$$

Gl.(5.64) stellt die verbesserten Querschubdehnungen zur Verfügung, die zur Berechnung der Verschiebungs-Verzerrungsmatrix \mathbf{B} dienen. Entsprechend ist es notwendig, die Gl.(5.26) zu modifizieren, aus der die geometrische Steifigkeitsmatrix gewonnen wird. Die folgenden Terme der Gl.(5.28)

$$\tilde{T}^{13}(N_{I,1}N_{J,3} + N_{I,3}N_{J,1}) + \tilde{T}^{23}(N_{I,2}N_{J,3} + N_{I,3}N_{J,2})$$

werden mit dem Ansatz der Gl.(5.63) modifiziert:

$$\tilde{T}^{13} \frac{1}{2} \left[(1-\eta)(N_{I,1}^B N_{J,3}^B + N_{I,3}^B N_{J,1}^B) + (1+\eta)(N_{I,1}^D N_{J,3}^D + N_{I,3}^D N_{J,1}^D) \right] \\ + \tilde{T}^{23} \frac{1}{2} \left[(1-\xi)(N_{I,2}^A N_{J,3}^A + N_{I,3}^A N_{J,2}^A) + (1+\xi)(N_{I,2}^C N_{J,3}^C + N_{I,3}^C N_{J,2}^C) \right] \quad (5.65)$$

Für das volumetrische Schalelement bedeutet die Verwendung des „Assumed Strain“-Ansatzes für die Querschubverzerrung, dass eine Richtungsabhängigkeit des Elements vorliegt, die bei der Netzgenerierung berücksichtigt werden muss. Die pathologische Auswirkung der Querschubversteifung mit zunehmender Elementschlankheit kann in der Tabelle 6.5 in der Zeile 9 studiert werden. In der Zeile 7 derselben Tabelle wird gezeigt, wie der „Assumed Strain“-Ansatz für die Querschubzerrung den Versteifungseffekt behebt.

5.9 Dickenversteifung gekrümmter Strukturen

Ein weiterer Versteifungseffekt, der bei niedrig interpolierten volumetrischen Schalenelementen existiert, ist die Dickenversteifung. Der Versteifungseffekt tritt bei Schalenformulierungen auf, bei denen der extensible Direktor aus der Differenz der Positionsvektoren gebildet wird, wie es in der im Abschnitt 4.2 vorgestellten 6- bzw. 7-Parametertheorie üblich ist - siehe Gl.(4.1). Die Dickenversteifung äussert sich durch künstliche, transversale Normalspannungen, die immer dann auftreten, wenn gekrümmte Strukturen diskretisiert werden bzw. bei großen Verschiebungen. Daher wird dieser Versteifungseffekt auch als „Krümmungs-locking“ bezeichnet. BISCHOFF [17] gibt den Artikel von RAMM & BISCHOFF und BRAUN [110] als erste Erwähnung der Dickenversteifung an. Allerdings hat bereits VERHOEVEN in seiner Dissertation, die im Jahr 1992 erschienen ist, im Abschnitt 3.6 die Dickenversteifung beschrieben und eine Möglichkeit zu ihrer Vermeidung angegeben, die dem Ansatz der Gl.(5.66) entspricht.

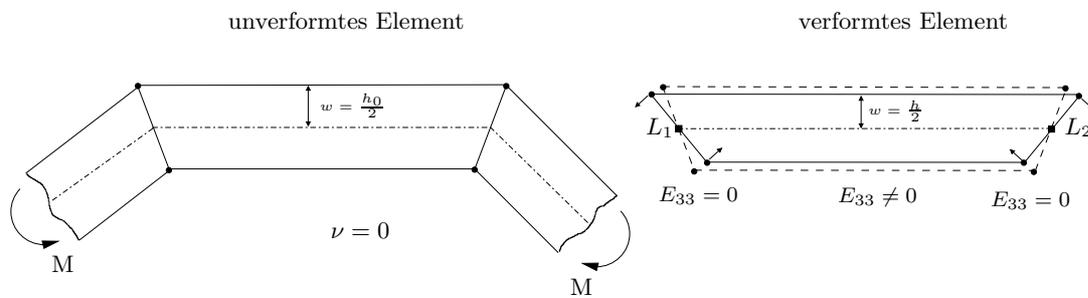


Abbildung 5.7: Gekrümmte Struktur aus volumetrischen Schalenelementen unter reiner Biegung

Der Versteifungseffekt kann an einem gekrümmten Träger unter reiner Biegung studiert werden - siehe Abb. 5.7. In Folge der Biegebelastung durch das Moment verjüngt sich das Element und eine künstliche Normalverzerrung stellt sich ein, siehe dazu Abb. 5.7 in der die Elementhöhe $\frac{h_0}{2}$ im unverformten Elemente und die Elementhöhe $\frac{h}{2}$ im verformten Element miteinander verglichen wird. So führt eine reine Biegung zu einer Verkürzung des Querschnittvektors, obwohl diese Belastung keinen Einfluss auf die Querschnittshöhe haben darf. Aufgrund der Trapez Gestalt eines verformten Elementes wird der Versteifungseffekt auch mit dem Begriff „Trapezoidal Locking“ [65] bezeichnet. Der Versteifungseffekt wird immer stärker, je dünner die Struktur ist und je größer der Winkel zwischen den Elementen wird.

5.10 Verbesserung der Dickendehnung

Eine Möglichkeit, die Dickenversteifung zu vermeiden, besteht nach SIMO & RIFAI und FOX [128] darin, die Längenänderung und die Verdrehung des Direktors getrennt voneinander zu berechnen. Für die volumetrische Schale bietet sich ein anderer Vorschlag an, der auf BETSCH & STEIN [16] und BISCHOFF & RAMM [18] zurückgeht. Dabei wird im Rahmen eines „Assumed Strain“-Ansatzes die Tatsache ausgenutzt, dass an den Elementkanten keine künstlichen transversalen Dickenverzerrungen auftreten - siehe Abb. 5.7 an der Stelle L_1 und L_2 . Für den

„Assumed Strain“-Ansatz spricht der geringe numerische Mehraufwand bei der Implementierung in einen finiten Elemente Code. Der „Assumed Strain“-Ansatz

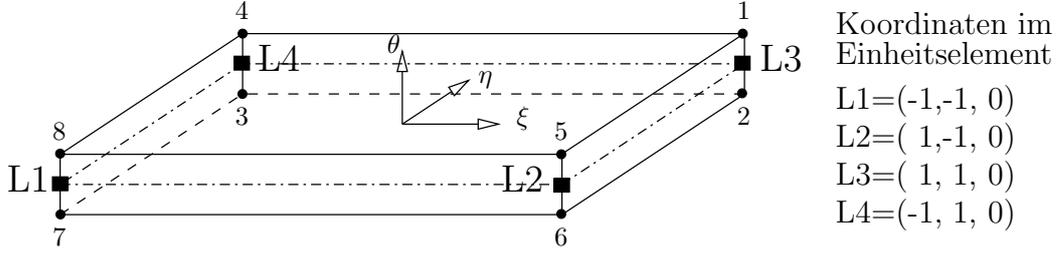


Abbildung 5.8: Lage der Kollokationspunkte zur Vermeidung der Dickenversteifung

für das volumetrische Schalenelement bedeutet, dass die Kollokationspunkte, an denen die Dickenverzerrungen ermittelt werden, an den Elementkanten auf die Schalenreferenzfläche bei $\theta = 0$ gelegt werden. Die konstant ermittelten Dickenverzerrungen werden bilinear mit der Gl.(5.66) über das Element interpoliert.

$$E_{33}^h = \sum_{L=1}^4 \frac{1}{4} (1 + \xi_L \xi) (1 + \eta_L \eta) E_{33}^L, \quad L = L1, L2, L3, L4 \quad (5.66)$$

Die Variation der transversalen Normalverzerrungen in der Gl.(5.24) muss entsprechend mit dem Ansatz der Gl.(5.66) modifiziert werden.

$$\delta E_{33}^h = \sum_{I=1}^{nodes} \sum_{L=1}^4 \frac{1}{4} (1 + \xi_L \xi) (1 + \eta_L \eta) \mathbf{g}_3^{L^T} N_{I,3}^L \delta \mathbf{u}_I \quad (5.67)$$

Die Gl.(5.67) stellt die verbesserten transversalen Normaldehnungen zur Verfügung, die zur Berechnung der Verzerrungs-Verschiebungsmatrix \mathbf{B} dienen. Außerdem ist es notwendig, die Gl.(5.26) zu modifizieren, aus der die geometrische Steifigkeitsmatrix gewonnen wird. Die folgenden Terme der Gl.(5.28)

$$\tilde{T}^{33} N_{I,3} N_{J,3}$$

werden entsprechend dem Ansatz der Gl.(5.66) modifiziert:

$$\tilde{T}^{33} \sum_{L=1}^4 \frac{1}{4} (1 + \xi_L \xi) (1 + \eta_L \eta) N_{I,3}^L N_{J,3}^L \quad (5.68)$$

Für das volumetrische Schalenelement bedeutet der „Assumed Strain“-Ansatz für die Dickendehnung, dass eine Richtungsabhängigkeit des Elements vorliegt, die bei der Netzgenerierung berücksichtigt werden muss. Die Auswirkung der Dickenversteifung auf die Berechnungsergebnisse kann anhand des numerischen Beispiels in Abschnitt 6.2 studiert werden. In der Tabelle 6.5 in der Zeile 7 ist zu beobachten, wie der Versteifungseffekt bei dünnen Strukturen zunimmt und in der Zeile 6 wie der „Assumed Strain“-Ansatz für die Dickenverzerrung den Versteifungseffekt behebt.

Kapitel 6

Numerische Beispiele zu volumetrischen Schalenelementen

In diesem Kapitel werden eine Reihe von numerischen Benchmarkbeispielen behandelt. Die Leistungsfähigkeit des in Kapitel 5 vorgestellten volumetrischen Schalenelements wird durch den Vergleich der Ergebnisse belegt, die mit einem Schalenelement erzielt werden, das auf der 5-Parametertheorie [109, 111, 134] beruht. Die Schalenelemente sind in das FE-Programm FEAP [148, 149] implementiert worden.

Zur besseren Übersicht werden an dieser Stelle die einzelnen Elemente mit ihren Optionen vorgestellt. Das Schalenelement sh4 ist ein vierknotiges schubweiches Schalenelement, das auf der 5-Parametertheorie beruht. Nähere Angaben können aus HÜTTEL & MATZENMILLER [77, 76] entnommen werden. Um Querschubversteifungen zu vermeiden, wird ein AS-Ansatz verwendet. Außerdem werden zwei weitere Elementoptionen benutzt. Zu einem die Option con und die Option ncon. Die erste Option bedeutet, dass ein kondensiertes Werkstoffmodell verwendet wird, bei dem die Normalspannung in Dickenrichtung zu null gesetzt wird. Bei der Option ncon kommt ein unverändertes dreidimensionales Werkstoffmodell zum Einsatz.

Das Element ssh8 ist ein volumetrisches Schalenelement mit acht Knoten und trilinearen Ansatzfunktionen, wie es in den Kapiteln 4 und 5 beschrieben wird. Die Abkürzung ssh leitet sich aus dem englischen Sprachgebrauch „solid-shell“ für die volumetrische Schale her. Das Element beruht auf der 7-Parametertheorie und verwendet eine Kombination aus AS- und EAS-Ansätzen - siehe dazu auch [52], [65] und [84]. Der Anhang A1 an die Bezeichnung ssh8 bedeutet, dass ein AS-Ansatz gegen die Dickenversteifung vorgenommen wird - siehe Abschnitt 5.10. Wird die Bezeichnung A2 angehängt, so wird die Querschubversteifung durch einen AS-Ansatz verhindert - siehe Abschnitt 5.8. Der Anhang A3 bedeutet eine Kombination aus beiden zuvor beschriebenen Optionen.

Der Anhang E zeigt an, dass die EAS-Methode verwendet wird - siehe Abschnitt 5.6. Die angehängte Zahl gibt die Anzahl der Spalten der Interpolationsmatrix \mathbf{M} an. Dabei wird zwischen drei Fällen unterschieden: Die ausschließliche Erweiterung der Dickenverzerrungen wird mit dem Anhang E1, E3 oder E4 bezeichnet. Die Erweiterung der Membran- und Dickenverzerrungen erfolgt mit dem Anhang E7. Zur Erweiterung der Membran-, Dicken- und Schubverzerrung mit der EAS-Methode wird der Anhang E9 verwendet.

Interpolationsmatrizen \mathbf{M} für die inkompatiblen Verzerrungen:

Erweiterung der Dickenverzerrung

$$\mathbf{M}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \theta & \theta\xi & \theta\eta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta & \theta\xi & \theta\eta & \theta\xi\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Erweiterung der Membranverzerrung und der Dickenverzerrung

$$\mathbf{M}^7 = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & \theta\xi & \theta\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Erweiterung der Membranverzerrung, der Dickenverzerrung und der Querschubverzerrung

$$\mathbf{M}^9 = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & \theta \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Beispiel:

Die Bezeichnung ssh8A3E7 für ein volumetrisches Schalenelement bedeutet, dass ein achtknotiges Volumenelement mit einem AS-Ansatz für die Querschubverzerrung und Dickenverzerrung verwendet wird. Die Verzerrungen werden durch die EAS-Methode erweitert, wobei die Interpolationsmatrix \mathbf{M}^7 verwendet wird. Die Membranverzerrung wird für die Schub- und Normalanteile verbessert und die Verzerrung in Dickenrichtung wird mit drei Termen bilinear erweitert.

6.1 Biegepatchtest

Mit dem Patchtest wird überprüft, ob ein Element Starrkörperbewegungen ausführen und zumindest konstante Spannungen abbilden kann. Das Bestehen des Patchtests ist daher eine notwendige Bedingung, um die Konvergenz von finiten Elementen gegen die wahre Lösung sicherzustellen. Für die volumetrische Schale soll der Biegepatchtest für Platten mit kleinen Verschiebungen von MACNEAL & HARDER [90] näher betrachtet werden. Diesem Test liegt ein rechteckiger Patch aus fünf Elementen zugrunde, wobei ein Element komplett von den restlichen Elementen umschlossen wird. Entlang aller Ränder des Patches wird ein parabolisches Verschiebungsfeld w und zwei Verdrehungsfelder b_x und b_y aufgebracht - siehe Gln.(6.4)-(6.6), so dass der Patch unter reiner Biegung beansprucht wird. Das Verdrehungsfeld ergibt sich aus der ersten Ableitung des Verschiebungsfeldes und entspricht der Verdrehung der Schalennormalen. Die zweite Ableitung des Verschiebungsfeldes ist konstant, deswegen steht der Patch unter reiner Biegung. Der Test gilt vom Element als erfüllt, wenn die Verschiebungen der Knoten des umschlossenen Elements den analytischen Verschiebungen und Verdrehungen der Gln.(6.4)-(6.6) genügen. Der betrachtete Patch - siehe Abb. 6.1 - ist 0.24 m lang,

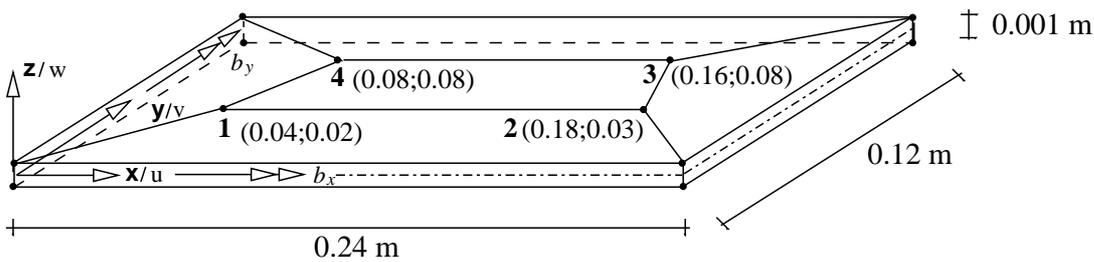


Abbildung 6.1: Biegepatchtest aus fünf Elementen

0.12 m breit und besitzt die Höhe $h = 0.001$ m. Der Elastizitätsmodul beträgt $E = 10^6$ und die Querdehnzahl lautet $\nu = 0.25$.

$$w(x, y) = 0.5 \cdot 10^{-3}(x^2 + xy + y^2) \quad (6.4)$$

$$b_x(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y} = 10^{-3}(y + x/2) \quad (6.5)$$

$$b_y(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial x} = 10^{-3}(-x - y/2) \quad (6.6)$$

Die volumetrische Schale besitzt keine Verdrehfreiheitsgrade, so dass die vorgegebenen Verdrehungen der Gl.(6.5) und Gl.(6.6) in Verschiebungen u und v der unteren und oberen Schalenlaibungen umgerechnet werden müssen. Dies kann mit der Gl.(6.7) geschehen.

$$[u, v, w] \Big|_o^u = [\mp \frac{h}{2} b_y, \pm \frac{h}{2} b_x, w] \quad (6.7)$$

Die analytischen Verschiebungen an den Innenknoten 1 bis 4, nach den Gln.(6.4)-

Knoten	u	v	w
1	-2.50000E-8	-2.00000E-8	1.40000E-6
2	-9.75000E-8	-6.00000E-8	1.93500E-5
3	-1.00000E-7	-8.00000E-8	2.24000E-5
4	-6.00000E-8	-6.00000E-8	9.60000E-6

Tabelle 6.1: Analytische Lösung für die Innenknoten

(6.7), ergeben sich, wenn die Ortskoordinaten der Innenknoten in die obigen Gleichungen eingesetzt werden - siehe dazu Tab. 6.1. Das volumetrische Schalenelement ssh8 erfüllt den Patchtest nicht - siehe dazu Tabelle 6.1 und Tabelle 6.2 im Vergleich - und ist somit nicht in der Lage einen reinen Biegezustand abzubilden. Ebenso erfüllt das Schalenelement ssh8E9, bei dem alle Verzerrungsanteile durch einen EAS-Ansatz verbessert werden - siehe Matrix \mathbf{M}^9 in Gl.(6.3) - den Patchtest nicht. Erst der Einsatz der „Assumed Strain“-Methode für die Quer-

Knoten	u	v	w
1	-7.46785E-8	-3.24833E-8	5.14131E-6
2	-5.23729E-8	-5.89987E-8	2.44100E-5
3	-0.64118E-7	-8.41308E-8	2.80667E-5
4	-9.57802E-8	-4.66576E-8	15.6877E-6

Tabelle 6.2: Verschiebungen der inneren Knoten für das Element ssh8

schubverzerrung nach Abschnitt 5.8 ermöglicht dem volumetrischen Schalenelement die Abbildung eines reinen Biegezustandes. Das Schalenelement ssh8A2E1 mit einer zusätzlichen linearen Erweiterung der Dickenverzerrung, um den Querdehndefekt der 6-Parametertheorie zu vermeiden, erfüllt den Patchtest nicht ganz genau - siehe dazu Tabelle 6.3. Zum Bestehen des Patchtests muss die Verzerrung

Knoten	u	v	w
1	-2.49406E-8	-2.00207E-8	1.39803E-6
2	-9.74938E-8	-5.94341E-8	1.93334E-5
3	-1.00572E-7	-8.01161E-8	2.23496E-5
4	-5.93407E-8	-5.97675E-8	9.55657E-6

Tabelle 6.3: Verschiebungen der inneren Knoten für das Element ssh8A2E1

in Dickenrichtung mit mindestens drei Gliedern erweitert werden, siehe Matrix \mathbf{M}^3 in Gl.(6.1) sowie die Ergebnisse in der Tabelle 6.4. Die Erweiterung der Normalverzerrung in der Schalenebene, wie sie von VU-QUOC & TAN in [142] für den Patchtest vorgeschlagen werden, ist jedoch nicht notwendig. Der Patchtest wird auch mit der Erweiterungsmatrix \mathbf{M}^4 der Gl.(6.1) mit dem zusätzlichen, vollständig gemischten Glied (θ, ξ, η) erfüllt. Dieses vollständig gemischte Glied wird von KLINKEL u.A. [84] und BETSCH [15] verwendet. Es bietet aber keine

Knoten	u	v	w
1	-2.50000E-8	-2.00000E-8	1.40000E-6
2	-9.75000E-8	-6.00000E-8	1.93500E-5
3	-1.00000E-7	-8.00000E-8	2.24000E-5
4	-6.00000E-8	-6.00000E-8	9.60000E-6

Tabelle 6.4: Verschiebungen der inneren Knoten für das Element ssh8A2E3

Vorteile bezüglich des Bestehens des Patchtests. Die Erweiterungsmatrix \mathbf{M}^3 kann daher als optimale Erweiterungsmatrix zum Bestehen des Patchtest angesehen werden und wird deswegen auch vorwiegend in den folgenden Beispielen genutzt.

6.2 Kragarm unter Einzellast

In diesem Beispiel wird das Verhalten des volumetrischen Schalenelements für den Fall einer dünnen, nicht gekrümmten Struktur studiert. Dabei sollen die Auswirkungen der in Kapitel 5 diskutierten künstlichen Elementversteifungen auf die Berechnungsergebnisse näher betrachtet werden. Als Beispiel dient ein Kragarm, der am freien Ende durch eine Einzellast, die in die Schalenreferenzfläche eingeleitet wird, belastet wird - siehe Abb. 6.2. Das Beispiel ist auch von BETSCH [15] untersucht worden.

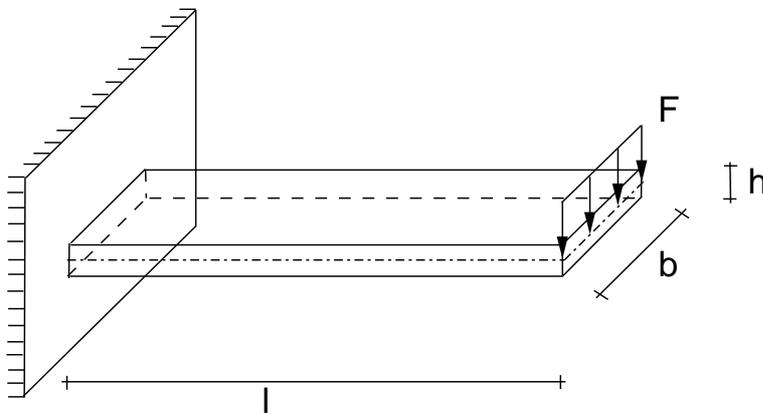


Abbildung 6.2: Einseitig eingespannter Balken unter Einzellast

$$F = 5 \cdot 10^4 \cdot h^3 \quad (6.8)$$

Die Last F wird in Abhängigkeit von der Strukturhöhe h gewählt - siehe Gl.(6.8). Dabei ergeben sich nahezu identische Durchbiegungen der Kragarmspitze für unterschiedliche Querschnittshöhen h . Der Balken hat die folgenden Abmessungen: Länge 10 und Breite 1. Es werden drei verschiedene Querschnittshöhen untersucht: 1, 0.1 und 0.01. Der Kragarm wird durch 10 Elemente in der Länge, einem Element in der Breite und einem Element über die Höhe modelliert. Der Elastizitätsmodul des isotropen Materials beträgt $E = 1E7$. Eine Querdehnzahl von $\nu = 0$ und

$\nu = 0.4$ wird untersucht. Als Referenzlösung für die Durchbiegung an der Last-einleitungsstelle dient die Simulation des Kragarms mit der 5-Parametertheorie, wobei das Schalenelement sh4con mit einem kondensierten Werkstoffmodell [134] eingesetzt wird. Zusätzlich sind noch Ergebnisse, die mit einem unverändertem dreidimensionalen Werkstoffmodell erzielt wurden [76], angegeben. Die Absenkung der Spitze wird für einen geometrisch linearen sowie für einen geometrisch nichtlinearen Kragarm ermittelt. Die Last F ist richtungstreu.

Zeile	Element	10	100	1000	lin. 1000
1	sh4con	7.53530	7.46240	7.46167	19.9500
2	sh4ncon	7.53530	7.46240	7.46167	19.9500
3	ssh8A3E4	7.55469	7.46258	7.46167	19.9505
4	ssh8A3E3	7.55469	7.46258	7.46167	19.9505
5	ssh8A3E1	7.55469	7.46258	7.46167	19.9505
6	ssh8A3	7.55469	7.46258	7.46167	19.9499
7	ssh8A2	7.51886	7.23144	5.92671	19.9499
8	ssh8A1	6.80492	0.39157	0.00040	0.00040
9	ssh8	6.77763	0.39156	0.00040	0.00040
10	ssh8E9	7.50856	7.22512	5.92506	19.9535

Tabelle 6.5: Kragarm unter Einzellast $\nu=0.0$

Zuerst wird der Fall einer Querdehnzahl von $\nu = 0$ betrachtet. In der Tabelle 6.5 ist die Absenkung der Kragarmspitze in Abhängigkeit der unterschiedlichen Elementformulierungen - siehe Zeilen - und dem Längen zu Höhen Verhältnis l/h - in den Spalten - aufgetragen. In der zweiten Spalte sind die gewählten Optionen der Elementtypen erläutert. In der dritten bis fünften Spalte findet sich die Auswertung der Durchbiegungen der geometrisch nichtlinearen Berechnung für das l/h Verhältnis 10, 100 und 1000. In der letzten Spalte sind die Ergebnisse für eine lineare Berechnung für $l/h = 1000$ angegeben.

Für das l/h Verhältnis von 10 weicht das Standardvolumenelement ssh8 um 27 % von der Referenzlösung ab. Eine Erweiterung aller Verzerrungen mit der EAS-Methode - vergleiche dazu Gl.(6.3) und Element ssh8E9 - verbessert das Ergebnis und die Abweichung von der Referenzlösung beträgt 0.35%. Wird nur die Dickenverzerrung durch einen AS-Ansatz verbessert, so verändert sich das Ergebnis des ssh8 Elements nur geringfügig - siehe Zeile 8. Wird aber ein AS-Ansatz für die Querschubverzerrung verwendet, so weicht die Durchbiegung nur noch um 0.22 % von der Referenzlösung ab - siehe dritte Spalte, siebte Zeile der Tabelle 6.5. Werden die beiden AS-Ansätze kombiniert, so ist die Lösung der volumetrischen Schale um 0.26 % weicher als die Referenzlösung der Schale sh4. Ähnliche Ergebnisse zeigen auch Untersuchungen von BETSCH [15] Seite 65. Die Erweiterung der Verzerrungen in Dickenrichtung mit der EAS-Methode mit der Gl.(6.1) in Zeile 3 bis 5 hat keinen Einfluss auf die ermittelte Durchbiegung, da sich für den Fall einer Querdehnzahl von $\nu = 0$ kein Querdehndefekt nach Abschnitt 5.6 einstellt. Die Erweiterung der Membrananteile mit Gl.(6.2) erfolgt nicht, da sie keine Auswirkung auf das Berechnungsergebnis hat.

Für das l/h Verhältnis von 100 weicht das Standardvolumenelement ssh8 um 94.7 % von der Referenzlösung ab. Ein AS-Ansatz für die Dickenverzerrung verbessert das Ergebnis kaum. Mit der Verbesserung aller Verzerrungen durch die EAS-Methode mit der Gl.(6.3) - siehe Zeile 10 - weicht die Berechnung um 3.2 % von der Referenzlösung ab. Nur durch den AS-Ansatz der Querschubverzerrung wird das Ergebnis der Referenzlösung bis auf 3.1 % erreicht. Werden die beiden AS-Ansätze kombiniert, so ist die volumetrische Schale 0.0024 % weicher als die Referenzlösung.

Bei einem l/h Verhältnis von 1000 weicht das Element ssh8E9 bereits um 20.5 % von der Referenzlösung ab, was auf die Dickenversteifung gekrümmter dünner Strukturen zurückgeführt werden kann - siehe Zeile 7 und 10. Das Element ssh8A2 weicht um 20.6 % ab. Die Kombination aus beiden AS-Ansätzen erzeugt exakt dasselbe Ergebnis wie die Referenzlösung.

Als Fazit aus diesem Beispiel kann folgendes festgehalten werden: Die ausschließliche Anwendung der EAS-Methode bei dünnen Strukturen $l/h > 100$ führt zu unzureichenden Ergebnissen. Die Modifikation der Dickenverzerrung mit der AS-Methode wird immer bedeutender je dünner die Strukturen werden - siehe dazu Zeile 6 und 7 der Tabelle 6.5.

Zeile	Element	10	100	1000	lin. 1000
1	sh4con	7.50034	7.41451	7.41366	19.6181
2	sh4ncon	7.07701	6.99762	6.99684	15.8618
3	ssh8A3E4	7.50772	7.41459	7.41366	19.6120
4	ssh8A3E3	7.50772	7.41459	7.41366	19.6120
5	ssh8A3E1	7.49327	7.40052	7.3996	19.5252
6	ssh8A3	7.09611	7.00112	7.00017	15.8579
7	ssh8A2	7.05076	6.80608	5.33579	15.8587
8	ssh8A1	6.44171	0.52758	0.0006	0.00060
9	ssh8	6.40685	0.52755	0.0006	0.00060
10	ssh8E9	7.44107	7.08096	5.67915	16.9053

Tabelle 6.6: Kragarm unter Einzellast $\nu=0.4$

Für den Fall einer Querdehnzahl von $\nu = 0.4$ kommt zusätzlich zu den oben beschriebenen Versteifungseffekten noch der Querdehndefekt der 6-Parametertheorie zum Tragen. Die Erweiterung der Dickenverzerrung mit einem Parameter \mathbf{M}^1 nach Gl.(6.1) reicht nicht aus - siehe Zeile 5 der Tabelle 6.6 - um die Referenzlösung für den dünnen Kragarm mit dem Verhältniss l/h von 1000 zu erreichen. Wie sich bereits im Beispiel des Abschnitts 6.1 gezeigt hat, bedarf es mindestens einer Erweiterung der Dickenverzerrung mit drei Parametern, um die Referenzlösung zu erreichen - in Zeile 4 bei $l/h=1000$. Die Erweiterung der Dickenverzerrung mit vier Parametern, wie sie von KLINKE [84] und BETSCH [15] verwendet wird, zeigt auch in diesem Beispiel keinerlei Vorteile. Anzumerken ist noch, dass der Querdehndefekt für große Verschiebungen wesentlich ausgeprägter ist als für kleine Verformungen - siehe dazu Spalte fünf und sechs der Tabelle 6.6. Für kleine Verformungen liegt der Fehler zwischen den Werten der Zeile 3 und 6, der durch

die Vernachlässigung der linearen Dickenverzerrung entsteht, bei circa 19.1%. Für große Verschiebungen kann ein Fehler von circa 5% festgestellt werden.

6.3 Kragarm unter Einzelmoment

Ein Kragarm unter reiner Biegung wird untersucht, bei dem die Kragarmspitze durch ein Drehmoment $M = 1$ belastet wird - siehe Abb. 6.3. Das isotrope Material besitzt einen Elastizitätsmodul von $E = 10000$ und eine Querdehnzahl von $\nu = 0$. Der Balken mit der Länge von $L = 10$ und der Breite $b = 1$ wird für unterschiedliche Höhen h untersucht. Er wird durch zehn Elemente über die Länge, einem Element über die Breite und einem Element über die Höhe modelliert.

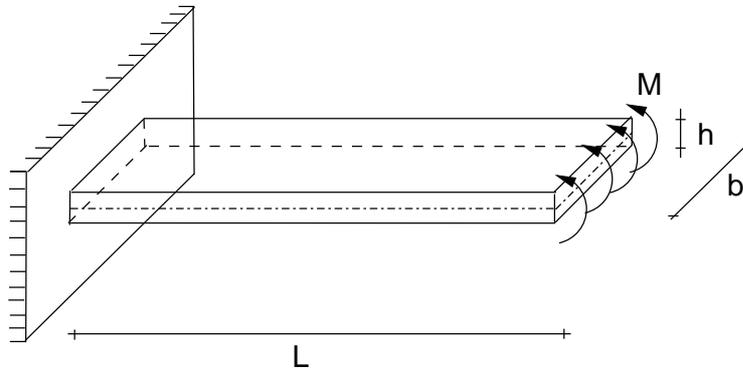


Abbildung 6.3: Kragarm unter Biegemoment

Bei der numerischen Lösung eines Gleichungssystems sind Schwierigkeiten zu erwarten, wenn die Sensitivität des Gleichungssystems groß ist. Die Konditionszahl c der Koeffizientenmatrix ist ein Maß zur Beurteilung der Sensitivität eines linearen Gleichungssystems. Ist die Konditionszahl groß, dann ist die Struktursteifigkeitsmatrix schlecht konditioniert. Die Konditionszahl ergibt sich aus dem Verhältnis des größten Eigenwerts λ_{max} zum kleinsten Eigenwert λ_{min} der Struktursteifigkeitsmatrix. Nach MATZENMILLER [93] kann für ein Modell aus volumetrischen Schalenelementen (7-Parametertheorie) der kleinste Eigenwert λ_{min} durch die Biegesteifigkeit eines charakteristischen Elements mit der charakteristischen l_c abgeschätzt werden. Der größte Eigenwert λ_{max} ist proportional zur Dehnsteifigkeit der Struktur in Dickenrichtung.

$$c^{(7)} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} < \frac{\frac{EA_c}{h}}{\frac{EI}{l_c^3}} = \frac{\frac{El_c^2}{h}}{\frac{El_c h^3}{12l_c^3}} \propto \left(\frac{l_c}{h}\right)^4 \quad (6.9)$$

Bei einem FE-Modell aus Schalenelementen mit einem inextensiblen Direktor (5-Parametertheorie) ist die Dehnsteifigkeit in Längsrichtung der Schale die größte Steifigkeit.

$$c^{(5)} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} < \frac{\frac{EA_c}{l_c}}{\frac{EI}{l_c^3}} = \frac{\frac{Ehl_c}{l_c}}{\frac{El_c h^3}{12l_c^3}} \propto \left(\frac{l_c}{h}\right)^2 \quad (6.10)$$

Die Konditionszahl der 7-Parametertheorie $c^{(7)}$ wächst nach der Abschätzungsformel Gl.(6.9) mit der 4. Potenz, während die Konditionszahl der 5-Parametertheorie nach Abschätzungsformel Gl.(6.10) mit der 2. Potenz wächst.

Das Elementverhalten für eine Plattenstruktur unter reiner Biegung bei abnehmender Querschnittshöhe wird untersucht - siehe Abb. 6.3. Die Schalenelemente nach der 7-Parametertheorie ssh8AE3 und nach der 5-Parametertheorie sh4 werden miteinander verglichen. Die Absenkung der Kragarmspitze wird über den Zusammenhang $w/(\frac{Ml^2}{2EI})$ normiert und über das Verhältnis der Kragarmlänge zur Querschnittshöhe aufgetragen - siehe Abb. 6.4. Die in diesem Beispiel betrachteten l/h Verhältnisse liegen außerhalb üblicher Abmessungen und sind eher von mathematischem Interesse.

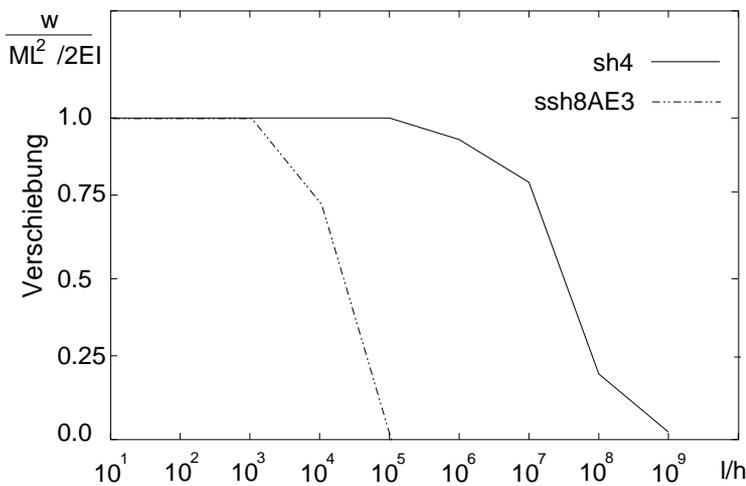


Abbildung 6.4: Normierte Verschiebung aufgetragen gegen das Verhältnis von Kragarmlänge zu Querschnittshöhe

Bei kleineren Querschnittshöhen h und damit wachsendem Verhältnis l/h weichen die mit der Finiten-Elemente-Methode erzielten Ergebnisse vom exakten Ergebnis ab, was auf eine zunehmend schlechtere Konditionierung der Struktursteifigkeitsmatrix hinweist. Das Schalenelement ssh8AE3 erreicht ab dem l/h Verhältnis größer 10^3 die exakte Lösung nicht mehr und das Schalenelement sh4 weicht ab einem l/h Verhältnis, das größer ist als 10^5 , von der Referenzlösung ab - siehe Abb. 6.4. In der Abb. 6.5 ist die Konditionszahl, die sich aus der FE-Berechnung für die beiden Schalenelemente ergibt, über das l/h Verhältnis des Kragarms aufgetragen. Die Konditionszahl der 7-Parametertheorie wächst mit der 4. Potenz und die Konditionszahl der 5-Parametertheorie wächst mit der 2. Potenz, bis die Konditionszahl $> 10^{14}$ erreicht - siehe dazu auch WALL & GEE und RAMM [143]. Diese Feststellung untermauert die Verlässlichkeit der Abschätzungsformeln Gl.(6.9) und Gl.(6.10). Das letzte „sichere“ Ergebnis für die Durchbiegung erreichen die beiden Schalenelemente bei einer nahezu identischen Konditionszahl von $\sim 10^{10}$ - siehe Abb. 6.5. Die Genauigkeit der Lösung variiert allerdings mit der rechnerischen Darstellbarkeit und der Wahl des Gleichungslösers. So gibt SEIFERT [126] (Seite 102) als Grenze für die Anwendbarkeit der volumetrischen Schalenelemente

eine Konditionszahl von 10^9 bis 10^{10} an. Die 5-Parametertheorie zeigt für das l/h Verhältnis größer als 10^5 ein „gutmütigeres“ Verhalten als die 7-Parametertheorie für ein l/h Verhältnis größer als 10^3 . Diese Eigenschaft findet die Ursache im langsameren Anwachsen der Konditionszahl der 5-Parametertheorie im Vergleich zum schnelleren Wachstum der Konditionszahl der 7-Parametertheorie - siehe Gl.(6.9) bzw. Gl.(6.10).

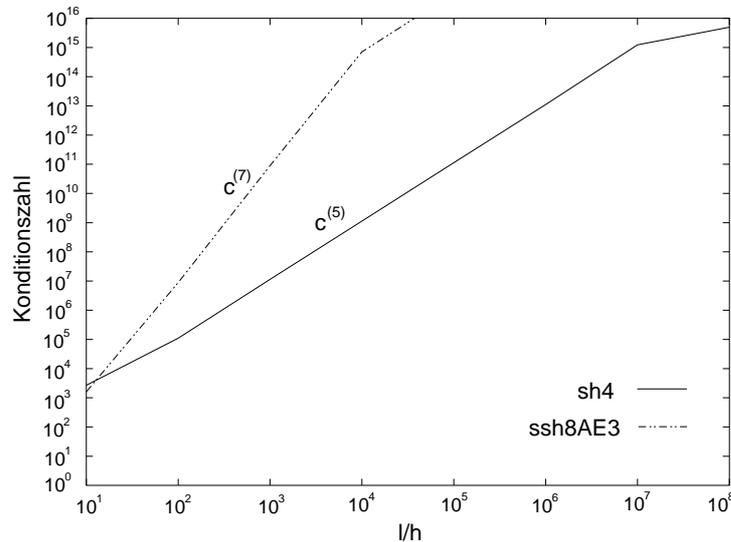


Abbildung 6.5: Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix entnommen aus dem Gleichungslöser aufgetragen gegen das Verhältnis von Kragarmlänge zu Querschnittshöhe

6.4 Zylinderschale

In diesem Beispiel wird eine Schale mit einer einfachen Krümmung untersucht. Es handelt sich um eine Zylinderschale mit der Länge von 30, dem Radius von 10 und der Dicke von 0.3 - siehe Abb. 6.6. Die Schale wird durch gegenüberliegende Einzellasten F mit der Last 1000 belastet. Sie wirken auf den äußeren Rand der Schale. Aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Schalen muß nur ein Viertel der Struktur modelliert zu werden. Dieser Test geht zurück auf eine Veröffentlichung von STANDER & MATZENMILLER und RAMM [134]. Das unbelastete Ende der Zylinderschale wird durch einen starren Deckel verschlossen, der biegesteif mit der Schalenfläche verbunden ist - siehe Abb. 6.6. Der Elastizitätsmodul des isotropen Materials beträgt $E = 2.0E7$ und die Querkontraktionzahl $\nu = 0.3$.

Das Finite-Elemente-Modell besteht aus 16 Elementen über die Länge und 16 Elementen über den Radius. Die Querschnittshöhe wird mit einem Element abgebildet. Die Berechnung erfolgt mit dem Schalenelement sh4con mit einem kondensiertem Werkstoffmodell und dem Schalenelement ssh8 mit der Option A3 für einen „Assumed Strain“-Ansatz für die Querschubverzerrung und die Dickenverzerrung. Zur Vermeidung des Querdehndefekts wird die Dickenverzerrung mit drei Parametern mit der Matrix \mathbf{M}^3 nach Gl.(6.1) erweitert. Die Berechnung erfolgt geometrisch nichtlinear mit einem Lastfaktor λ von 1 bis 80. Die Abb. 6.7 zeigt

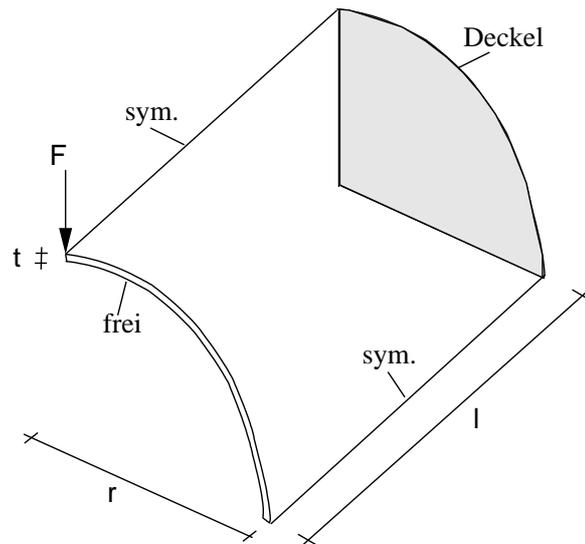
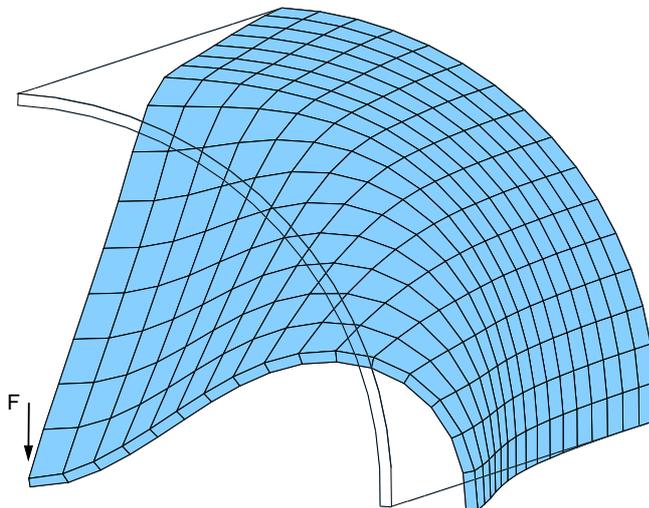


Abbildung 6.6: Zylinderschale unter Einzelast

Abbildung 6.7: Deformiertes FE Modell bei Lastfaktor $\lambda = 35$

die Schale in undeformierter und deformierter Lage beim Lastfaktor $\lambda = 35$. In der Abb. 6.8 ist die Verschiebung der Zylinderschale am Lastangriffspunkt über den Lastfaktor λ aufgetragen. Die Schale verformt sich in Lastrichtung mit dem Lastfaktor von $\lambda = 80$ bis zum 1.6 fachen des Radius. Bei dieser Verformung käme es bereits zu einer Durchdringung der Schalenlaibungen, wenn nicht die Symmetrie der Schale bei der Modellierung ausgenutzt würde.

Die Elemente sh4con und sh8A3E3 zeigen annähernd gleiche Lastverschiebungskurven - siehe Abb. 6.8. Das volumetrische Schalenelement ssh8A3 ohne die Erweiterung in Dickenrichtung zeigt ein im Vergleich zu den beiden anderen Lösungen zu steifes Elementverhalten, was auf den Querdehndefekt der 6-Parametertheorie zurückgeführt werden kann. Solange sich die Lastverformungskurve linear verhält, weisen alle drei Elemente ein identisches Verhalten auf. Erst ab dem Lastfaktor von $\lambda = 20$ zeigt das Element ssh8A3 eine geringere Verschiebung an der Lasteinleitungstelle als die beiden anderen Schalenelemente. Dieses Verhalten ist mit der

Tragwirkung der Schale zu erklären. Bis zum Lastfaktor $\lambda = 20$ trägt die Schalenstruktur die Last weitgehend über Druckkräfte ab, es kommt nur zu geringen „dehnungslosen Verformungen“. Da der Querdehndefekt nur bei Biegebeanspruchung auftritt, erzeugt die 6-Parametertheorie bis zu diesem Lastfaktor korrekte Ergebnisse. Ab dem Lastfaktor $\lambda = 20$ flacht die Lastverformungskurve stark ab und beim Element ssh8A3 wird die Auswirkung des Querdehndefekts sichtbar. In diesem Bereich trägt die Schale die Last F durch Biegung ab, wodurch die starken Verformungen, die auftreten, zu erklären sind. Ab dem Lastfaktor $\lambda = 40$ zeigt die Schalenstruktur ein zunehmend „steiferes“ Tragverhalten, da die Membrantragwirkung wieder stärker wird.

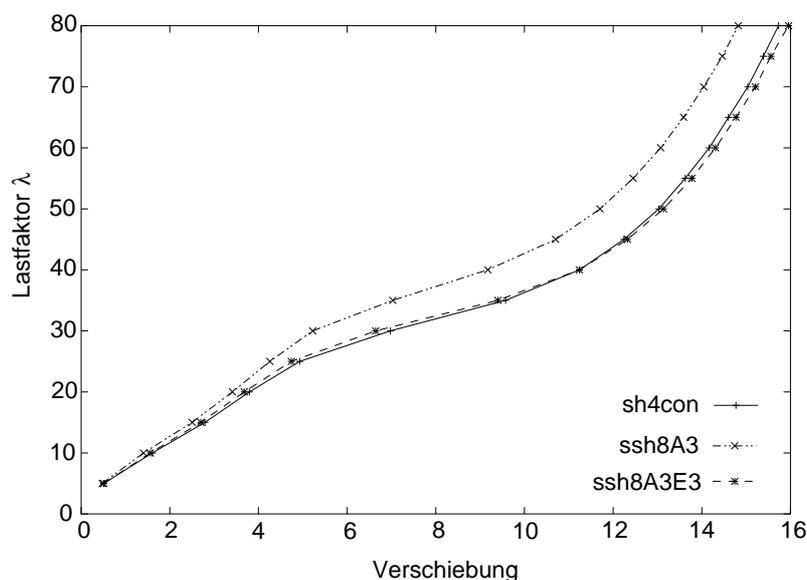


Abbildung 6.8: Lastverformungskurve am Lastangriffspunkt

6.5 Halbkugelschale

Diese doppelgekrümmte Struktur ist von SIMO & KENNEDY [129] als Beispiel für eine dicke Schale eingeführt worden. Es handelt sich dabei um eine Halbkugelschale, die statisch bestimmt im Raum gelagert ist - siehe Abb. 6.9. Wird die Symmetrie der Halbkugelschale ausgenutzt, braucht nur ein Viertel der Struktur modelliert zu werden. Der Radius der Schale beträgt 10 mm und die Dicke 0.5 mm. Belastet wird die Struktur durch zwei Einzellasten mit einer Einheitslast von 1. Sie greifen orthogonal entgegengesetzt zueinander in Richtung der x-Achse bzw. y-Achse an - siehe Abb. 6.9. Der Elastizitätsmodul wird zu 10 und die Querdehnzahl zu $\nu = 0.2$ gewählt.

Das Finite-Elemente-Netz besteht aus drei Teilstücken mit jeweils 64 Elementen, wobei jedes Element von der Rechteckform abweicht. Die Berechnung erfolgt geometrisch nichtlinear in fünf Lastschritten bis zum Lastfaktor von $\lambda = 0.05$. Bei den Berechnungsergebnissen ist zu beachten, dass sich die Verformungen an den Lastangriffspunkten aufgrund des geometrisch nichtlinearen Verhaltens sehr

unterschiedlich entwickeln. Die Tabelle 6.7 gibt die Verschiebung des Lastangriffspunkts auf der x -Achse in Richtung der Last wieder. Aus der Tabelle 6.8 kann die Verschiebung des Lastangriffspunkts auf der y -Achse in Richtung der Last entnommen werden. Der Lastfaktor λ wird soweit erhöht, bis sich die Schalenlambing beinahe durchdringen. Die Ergebnisse mit dem Schalenelement sh4con sind der Arbeit von HÜTTEL [76] entnommen. Die Berechnungsergebnisse mit dem volumetrischen Schalenelement ssh8 beziehen sich auf die Deformation der Schalenreferenzfläche.

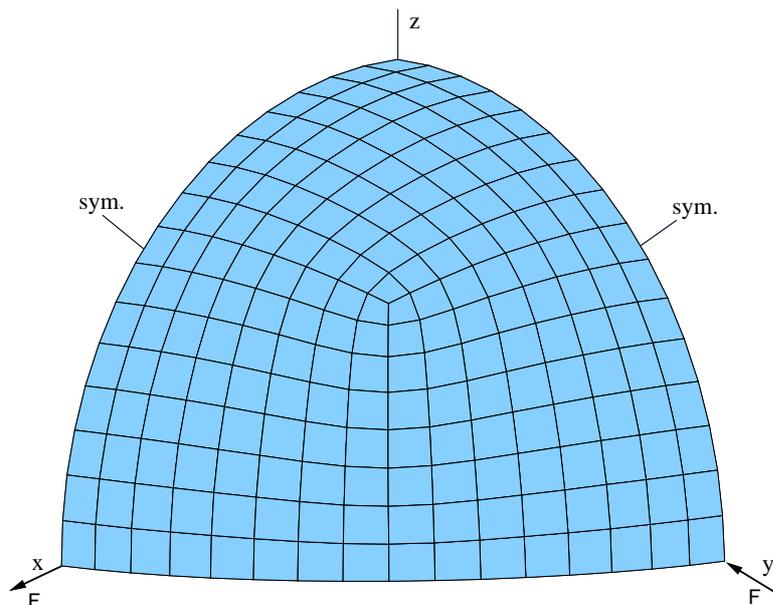


Abbildung 6.9: Viertelmodell der Halbkugelschale

In diesem Beispiel soll wiederum die Auswirkung der AS-Ansätze für die Querschubverzerrung und Dickenverzerrung sowie die der EAS-Methode für die Dickenrichtung zur Vermeidung von Versteifungseffekten untersucht werden. Zusätzlich wird auch die Auswirkung der Erweiterung der Membranverzerrung durch die EAS-Methode nach Gl.(6.2) auf die Berechnungsergebnisse untersucht.

Element	λ	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
sh4con		2.2693	3.2137	3.7024	4.0063	4.2171
ssh8		1.36153	2.24263	2.80479	3.18696	3.46423
ssh8A3E3		2.25852	3.21101	3.70695	4.01768	4.23536
ssh8A3E7		2.26101	3.21411	3.71028	4.02125	4.23930

Tabelle 6.7: Verschiebung am Lastangriffspunkt auf der x -Achse in Abhängigkeit des Lastfaktors

Das volumetrische Schalenelement ssh8 zeigt im Verhältnis zum Schalenelement sh4con ein zu steifes Verhalten. Mit der Verbesserung durch die AS-Ansätze und die EAS-Methode können die Versteifungseffekte beseitigt werden. Die Ergebnisse des volumetrischen Schalenelements sind bei großem Lastfaktor λ sogar ein wenig

Element	λ	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
sh4con		3.3427	5.7677	7.3948	8.5679	9.4674
ssh8		1.72973	3.39783	4.77962	5.88878	6.78941
ssh8A3E3		3.35114	5.78784	7.42672	8.612275	9.52541
ssh8A3E7		3.36121	5.8053	7.44638	8.63248	9.54576

Tabelle 6.8: Verschiebung am Lastangriffspunkt auf der y-Achse in Abhängigkeit des vorgegebenen Lastfaktors

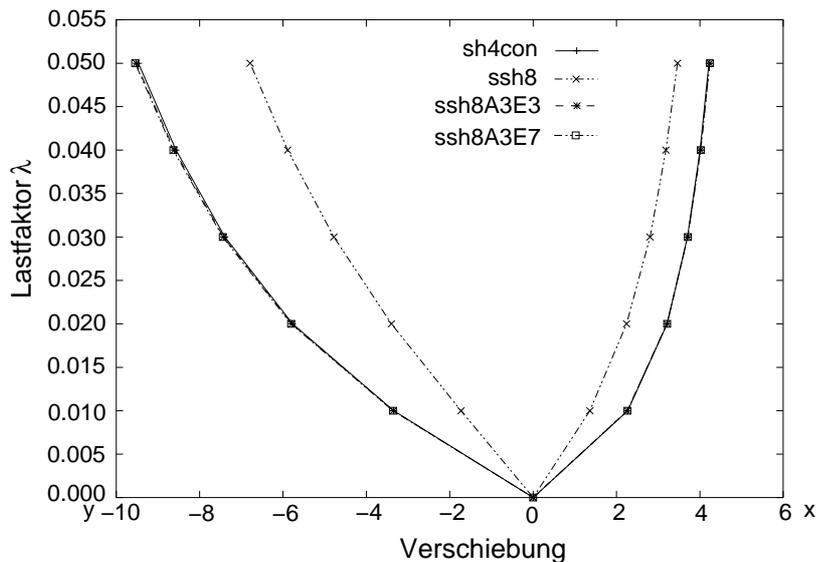


Abbildung 6.10: Verformung der Halbkugelschale an den Lastangriffspunkten an der x- und y-Achse

„weicher“ als die des Schalenelements sh4con - siehe Tabelle 6.7 und Tabelle 6.8 jeweils dritte Zeile.

Die Erweiterung der Membranverzerrung nach obigem Vorschlag für das volumetrische Schalenelement zeigt nur geringe Auswirkungen auf die Ergebnisse - siehe Tabelle 6.7 und Tabelle 6.8 jeweils letzte Zeile. In Abb. 6.10 ist die Verformung der Halbkugelschale graphisch für die vier untersuchten Fälle dargestellt. Auf der linken Seite der Abbildung ist die Verformung in y-Richtung dargestellt und auf der rechten Seite der Abbildung 6.10 die Verschiebung in Richtung der x-Achse aufgetragen.

Zum Abschluss dieses Beispiels wird die Kugelschale für unterschiedlich feine Netze bei einem Lastfaktor von $\lambda = 0.05$ untersucht - siehe Tabelle 6.9. Die Anzahl der Elemente in einem Patch wird bei jeder Verfeinerungsstufe um den Faktor vier erhöht. Das Element sh4con liefert auch bei einem groben Netz brauchbare Ergebnisse und konvergiert monoton von unten gegen die Lösung. Das Element ssh8 liefert für ein grobes Netz viel zu kleine Verformungen. Auch mit einem sehr feinen Netz mit 768 Elementen je Patch zeigt das Element ssh8 noch starke Versteifungseffekte. Das Element ssh8A3E3 liefert bereits bei groben Netzen sehr gute

Elemente	sh4con	ssh8A3E7	ssh8A3E3	ssh8
768	9.46532	9.49398	9.48687	8.73178
192	9.46740	9.54576	9.52541	6.78941
48	9.46540	9.78695	9.72635	3.51197
12	8.84011	10.04814	9.86356	0.99073

Tabelle 6.9: Verformung an dem Lastangriffspunkt an der y-Achse aufgetragen für verschieden feine Netze

Ergebnisse. Allerdings konvergiert es von der „weichen Seite“ her. Das Element ssh8A3E7 zeigt trotz der Erweiterung der Membranverzerrung annähernd dieselben Ergebnisse wie das Element ssh8A3E3. Festzuhalten bleibt, dass auch bei groben und verzerrten Netzen die Erweiterung der Membrananteile nur geringe Vorteile bietet. Der numerische Aufwand, der durch die Membranerweiterung entsteht, ist nur für Strukturen sinnvoll, die unter starker Membranbeanspruchung stehen.

In der Abb. 6.11 ist die Rechenzeit für unterschiedliche Schalenformulierungen über der Anzahl der Elemente pro Teilstück aufgetragen. Unter der Rechenzeit wird hier die Aufstellung und die Lösung der Gesamtsteifigkeitsmatrix verstanden. Die Rechenzeit für die 5-Parametertheorie entwickelt sich linear über eine steigende Anzahl von Elementen, während sich die Rechenzeit für die 7-Parametertheorie überlinear entwickelt. Der numerische Mehraufwand für die EAS- und ANS-Formulierung liegt bei etwa 10% der gesamten Rechenzeit.

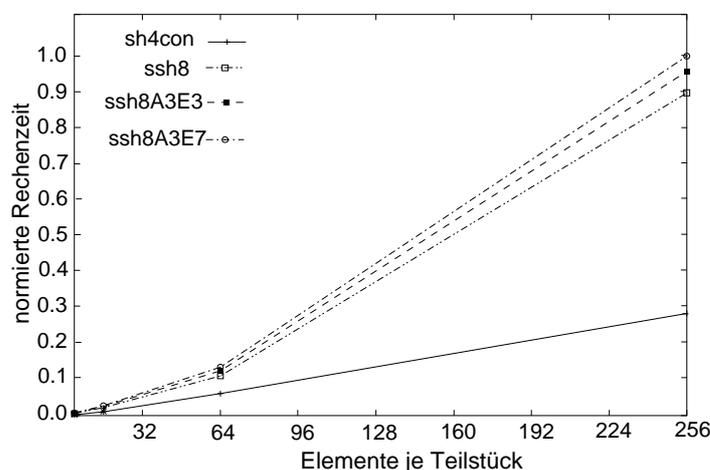


Abbildung 6.11: Vergleich der normierten Rechenzeit unterschiedlicher Schalenformulierungen für die Halbkugelschale

6.6 Geschichteter Kragbalken

Das Beispiel eines geschichteten Kragbalken aus isotropen Schichten soll einen Eindruck geben, welche zusätzlichen Informationen die Mehrschichttheorie (MLT)

- siehe Abschnitt 4.3 - über das transversale Spannungsfeld liefert. Die Einzelschichttheorie für Schalen kann aufgrund ihrer kinematischen Annahme die Querschubspannungen und Dickenspannungen, die sich aus der Elastizitätstheorie ergeben, unter Umständen nur in Sonderfällen abbilden. So ist es für die Einzelschichttheorie üblich, die transversalen Schubspannungen mit einem Schubkorrekturfaktor zu versehen, um zumindestens die Arbeit, die von der transversalen Schubspannung geleistet wird, korrekt zu erfassen. Die transversalen Normalspannungen werden bei den meisten Berechnungen vernachlässigt, obwohl sie einen entscheidenden Einfluss auf das Strukturverhalten haben kann. Das gilt besonders, wenn Lasten auf der Oberfläche angreifen sowie bei gekrümmten Strukturen - siehe auch Beispiel im Abschnitt 6.7. Die Mehrschichttheorie approximiert die Verläufe der transversalen Spannungsfeld stückweise konstant, was in diesem Beispiel für eine Struktur unter Auflast gezeigt wird.

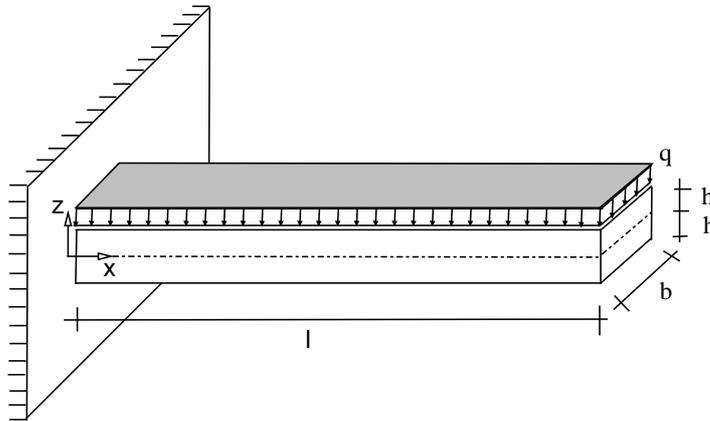


Abbildung 6.12: Geschichteter Balken unter Auflast

Ein Kragarm der Länge $l = 100$, der Höhe $h = 5$ und der Breite $b = 10$ - siehe Abbildung 6.12 - wird berechnet. Die Querschnittshöhe des Balken wird in kinematische Schichten aufgeteilt. Jede Schicht besteht aus einem isotropen Material mit dem Elastizitätsmodul von $E = 100000$. Belastet wird der Träger mit einer Gleichstreckenlast von $q = 1$ auf der Oberseite. Der Kragbalken wird durch zehn Elemente über die Länge, einem Element über die Breite und acht Elementen über die Höhe modelliert. Die Lagerung am linken Ende erfolgt, indem alle Freiheitsgrade gesperrt werden.

Aus der Elastizitätstheorie [94] kann eine analytische Lösung für den Kragarm unter Auflast, die die transversale Normalspannung und Schubspannung für den Fall einer Querdehnzahl von $\nu = 0$ beschreibt, hergeleitet werden. Zunächst soll der Verlauf der Dickenspannung näher untersucht werden. Nach der Elastizitätstheorie [94] ergibt sich die Dickenspannung eines Kragarm unter Auflast wie folgt.

$$\sigma_{33} = -\frac{q}{2} + q \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right)^3 - \frac{3z}{4h} \right] \quad (6.11)$$

Für das oben dargestellte Beispiel ergibt sich damit:

$$\sigma_{33} = -0.5 \cdot q + \left[\frac{z^3}{500} - \frac{3z}{20} \right] \quad (6.12)$$

Der kubische Verlauf der analytisch ermittelten Dickenspannung ist in Abb. 6.13(a) dargestellt. Zur Beschreibung des Verlaufs der Querschubspannung liefert die Elastizitätstheorie unter Verwendung der Querkraft Q folgende Gleichung.

$$\sigma_{13} = \frac{3Q}{4b} \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (6.13)$$

Für das oben dargestellte Beispiel ergibt sich damit:

$$\sigma_{13} = 0.75 \cdot Q \left[1 - \frac{z^2}{25} \right] \quad (6.14)$$

Der quadratische Verlauf der analytisch ermittelten Querschubspannung ist in der Abbildung 6.13(b) dargestellt.

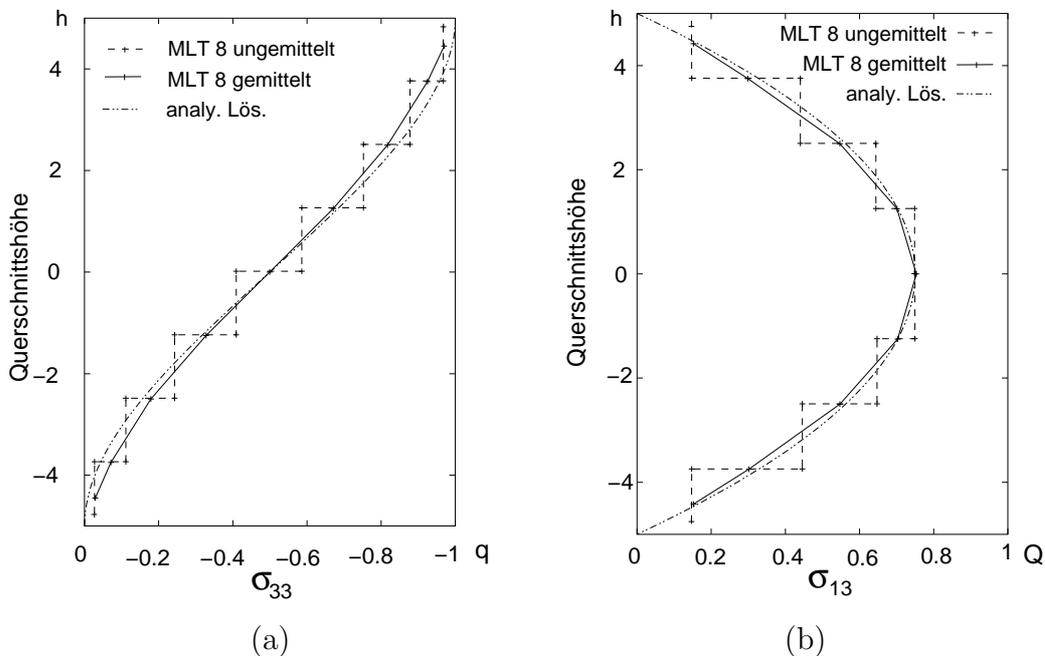


Abbildung 6.13: Verlauf der Dickenspannung (a) und der Querschubspannung (b) über den Querschnitt

Die numerischen Ergebnisse werden bei der halben Feldlänge $l/2$ ausgewertet, damit Randstöreffekte weitgehend vermieden werden. Wie in Abb. 6.13 zu erkennen ist, approximiert das geschichtete Schalenelement den Verlauf der Dickenspannung und der Schubspannungen stückweise konstant. Das trifft sowohl für die 6-Parametertheorie als auch für die 7-Parametertheorie zu. Damit verbessert das inkompatible Verzerrungsfeld nicht die Approximation der Dickenspannung, die aus der Auflast herrührt. In Abb. 6.13 ist noch zusätzlich die numerische Lösung angegeben, die an der jeweiligen Schichtgrenze gemittelt wurde. Für die hier verwendete Anzahl von acht Elementen über die Höhe approximiert die Mehrschichttheorie die transversalen Spannungsfelder sehr gut.

Im Folgenden wird untersucht, welche Auswirkung die Anwendung der Mehrschichttheorie zur verbesserten Beschreibung der transversalen Spannungsfelder

auf die Verschiebung der Kragarmspitze hat. Für den Fall einer Querdehnzahl von $\nu = 0.4$ ist in Abb. 6.14 die Durchbiegung der Kragarmspitze gegen eine zunehmende Anzahl von Schichten aufgetragen. Wird nur eine einzelne Schicht

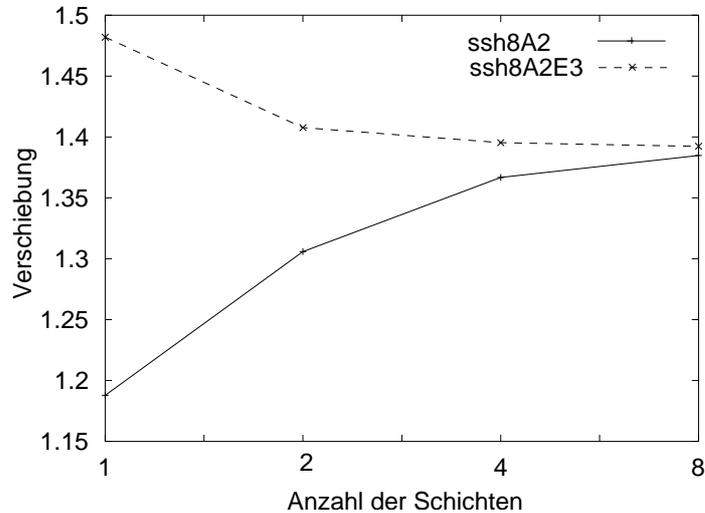


Abbildung 6.14: Verschiebung der Mittelfläche an der Kragarmspitze für die 6-Parametertheorie und die 7-Parametertheorie

betrachtet, so ergibt sie das Ergebnisse der Einzelschichttheorie. Die Abweichung zwischen dem Ergebnis der 6-Parametertheorie mit dem Element ssh8A2 und der 7-Parametertheorie mit dem Element ssh8A2E3 ist durch die fehlende lineare Dickendehnung der 6-Parametertheorie zu erklären - siehe Abb. 6.14. Wird das Netz in Dickenrichtung verfeinert, so konvergiert das 6-Parameterelement von der „steifen Seite“ gegen den Grenzwert der kompletten dreidimensionalen Lösung. Die 7-Parametertheorie konvergiert allerdings von der „weichen Seite“ gegen die Lösung der kompletten dreidimensionalen Theorie. Die Differenz zwischen der Lösung der Einzelschichttheorie und der Mehrschichttheorie für acht Schichten beträgt im Fall der 6-Parametertheorie 14,5% und für die 7-Parametertheorie 6,7%. In diesem Beispiel zeigt sich, dass die genaue Abbildung der transversalen Dickenspannung einen erheblichen Einfluss auf die Durchbiegung haben kann. Außerdem wird sichtbar, dass der Einsatz der EAS-Methode sich auch im Rahmen einer Mehrschichtformulierung lohnt. Diese Aussage gilt besonders für grobe Netze in Dickenrichtung, da hierbei der Approximationsfehler zur kompletten dreidimensionalen Lösung verringert wird.

6.7 Gekrümmter Balken

Der gekrümmte Balken ist ein weiteres Beispiel für ein kompliziertes transversales Normalspannungsfeld. Ziel ist es zu zeigen, dass die genaue Erfassung der Dickenspannung für die korrekte Beurteilung des Tragverhaltens einer Struktur entscheidend sein kann. Dazu wird ein 90°-Kreisausschnitt eines Balkens betrachtet - siehe Abb. 6.15. Der Balken besitzt folgende Abmessungen: einen Innenradius von $r_i = 10$ mm, einen Außenradius von $r_a = 20$ mm und die normierte Breite von 1 mm. Belastet wird der Balken durch ein Biegemoment von $M = 100$ Nmm,

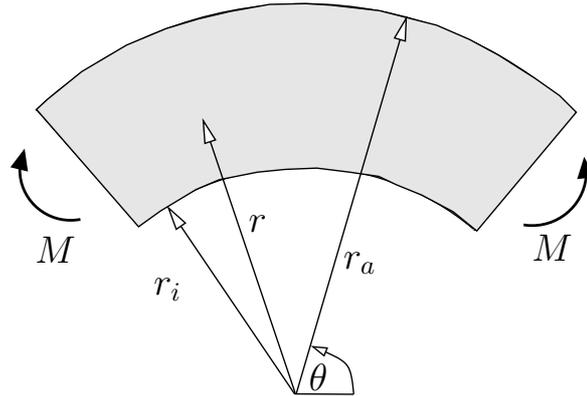


Abbildung 6.15: Kreisrunder Träger unter Momentenlast

das an den Balkenenden bei $\theta = 45^\circ$ und bei $\theta = 135^\circ$ eingeleitet wird - siehe Abb. 6.15.

Auf der Basis der Elastizitätstheorie ist im Jahr 1881 von GOLOVIN - siehe [138] auf Seite 71 - die analytische Lösung gefunden worden. Außerdem existiert eine Näherungslösung für dies Problem nach der hyperbolischen Biegetheorie von WINKLER & GRASHOF [61]. Gl.(6.15) und die Gl.(6.16) geben Auskunft über den exakten Verlauf der Umfangsspannung σ_θ und der Radialspannung σ_r über die Querschnittshöhe.

$$\sigma_\theta = -\frac{4M}{\text{Det}} \cdot \left[-\frac{r_i^2 r_a^2}{r^2} \ln \frac{r_a}{r_i} + r_a^2 \ln \frac{r}{r_a} + r_i^2 \ln \frac{r_i}{r} + r_a^2 - r_i^2 \right] \quad (6.15)$$

$$\sigma_r = -\frac{4M}{\text{Det}} \cdot \left[\frac{r_i^2 r_a^2}{r^2} \ln \frac{r_a}{r_i} + r_a^2 \ln \frac{r}{r_a} + r_i^2 \ln \frac{r_i}{r} \right] \quad (6.16)$$

$$\text{Det} = (r_a^2 - r_i^2)^2 - 4 r_i^2 r_a^2 \left(\ln \frac{r_a}{r_i} \right)^2 \quad (6.17)$$

Der gekrümmte Balken wird numerisch mit Hilfe der Mehrschichtkinematik für volumetrische Schalen untersucht. Die Struktur wird mit neun kinematischen Schichten über die Höhe und zehn Elementen über den Umfang des Trägers modelliert. Zur Berechnung wird das Standardvolumenelement ssh8 und die volumetrische Schale ssh8A3E3 genutzt. Die Ergebnisse der Berechnungen sind zusammen mit der analytischen Lösung in der Abb. 6.16 wiedergegeben. Die numerische Lösung ist an der Schichtgrenze gemittelt dargestellt. Das volumetrische Schalenelement ssh8A3E3 erreicht für die Umfangsspannung σ_θ beinahe identische Ergebnisse mit der analytischen Lösung. Das Element ssh8 weicht nur geringfügig von den beiden anderen Lösungen ab - siehe Abb. 6.16(a). Die Radialspannung σ_r wird vom Element ssh8A3E3 recht gut approximiert, hingegen ist das Element ssh8 nicht in der Lage den Spannungsverlauf einigermaßen korrekt nachzubilden. Es weicht um über 40 % von der analytischen Lösung ab - siehe Abb. 6.16(b). Jedoch ist gerade der Verlauf der Radialspannung σ_r von großem Interesse für die Analyse von Bauteilen aus geschichteten Faserverbundwerkstoffen. Die transversalen Zugspannungen, die bei diesem gekrümmten Bauteilen unter Momentenlast auftreten, können bei einem geschichteten Bauteil zum interlaminaren Versagen beitragen - siehe Abschnitt 2.2.2. Die interlaminaren Spannungen führen schließlich zur Delamination der Schichten - siehe SCHÜRMAN [125] Seite 376.

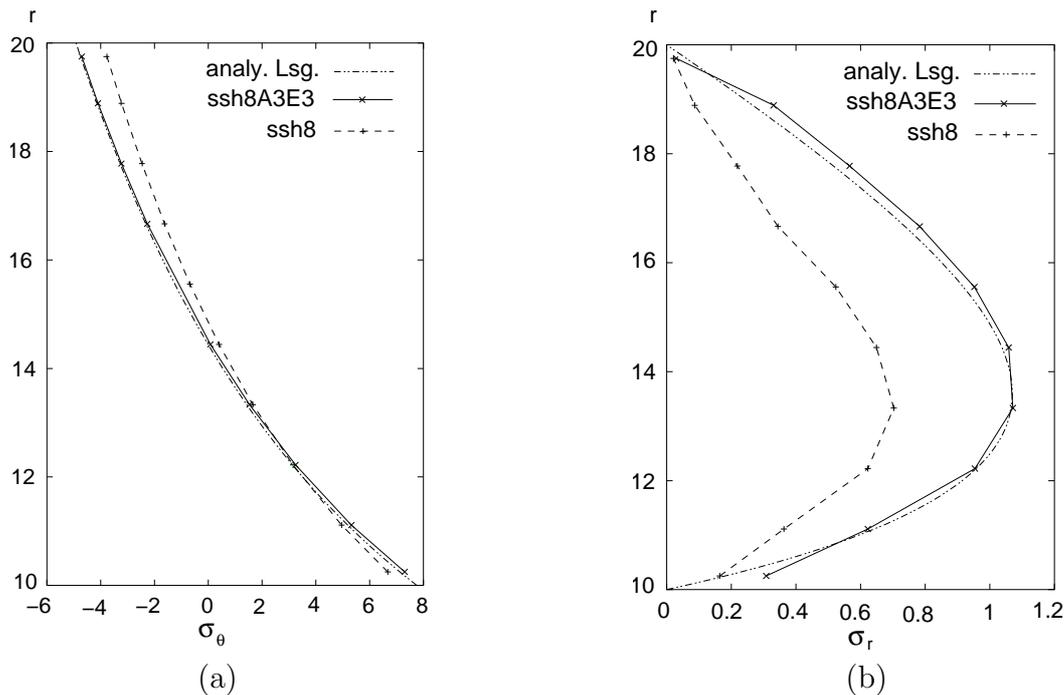


Abbildung 6.16: Verlauf der Umfangs- und Radialspannungen

6.8 Zugversuch an einer Faserprobe

Der Zugversuch ist ein Verifizierungsbeispiel für das im Abschnitt 3.5.2 hergeleitete Materialmodell der transversalen Isotropie. Dazu wird ein Quader untersucht, der aus einem transversal isotropen Material besteht - siehe Abb. 6.17 und [122]. Der Quader besitzt eine Länge von $l = 10$ mm, eine Breite von $b = 10$ mm und

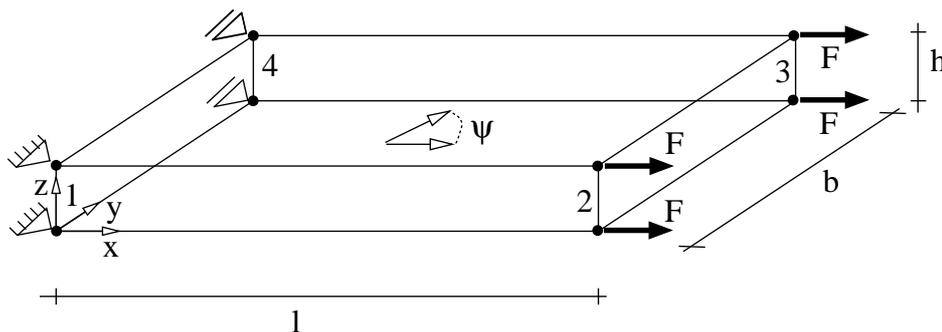


Abbildung 6.17: Zugversuch an einer Faserprobe im ebenen Verzerrungszustand mit unterschiedlichen Faserwinkeln

die Höhe $h = 1$ mm. Zur Berechnung wird der Quader durch ein einzelnes finites Element diskretisiert. Das Element befindet sich im ebenen Verzerrungszustand, der durch die Sperrung aller Freiheitsgrade in z -Richtung realisiert wird. Zusätzlich ist das Element an den Kanten 1 und 4, wie in der Abb. 6.17 gezeigt gehalten. An den Kanten 2 und 3 greift eine Zugkraft F in den Knoten von jeweils $1N$ an.

Die Materialparameter des homogenisierten Ersatzkontinuums lauten:

$$\begin{array}{ll} \lambda = 1000 \text{ N/mm}^2 & \mu_L = 375 \text{ N/mm}^2 \\ \alpha = 10 \text{ N/mm}^2 & \mu_T = 175 \text{ N/mm}^2 \\ \beta = 10 \text{ N/mm}^2 & \end{array}$$

Die Lage der Fasern wird zwischen $\psi = 0^\circ$ und $\psi=180^\circ$ variiert. In der Abb. 6.18 sind die berechneten Verschiebungen der Kanten 1 bis 4 über die Faserwinkel ψ von 0 bis 180 Grad aufgetragen. Die Verlängerung der Probe in horizontaler Richtung unter der Zuglast an den Kanten 2 und 3 kann an der Kurve h abgelesen werden. Die Verjüngung der Zugprobe an den Kanten 2, 3 und 4 ist durch die Kurven v2, v3 und v4 dargestellt. Die Kurven h und v4 sind symmetrisch bezüglich $\psi = 90^\circ$. Die Kurven v2 und v3 sind antimetrisch bezüglich $\psi = 90^\circ$. Die mit dem volumetrischen Schalenelement und dem transversal isotropen Ma-

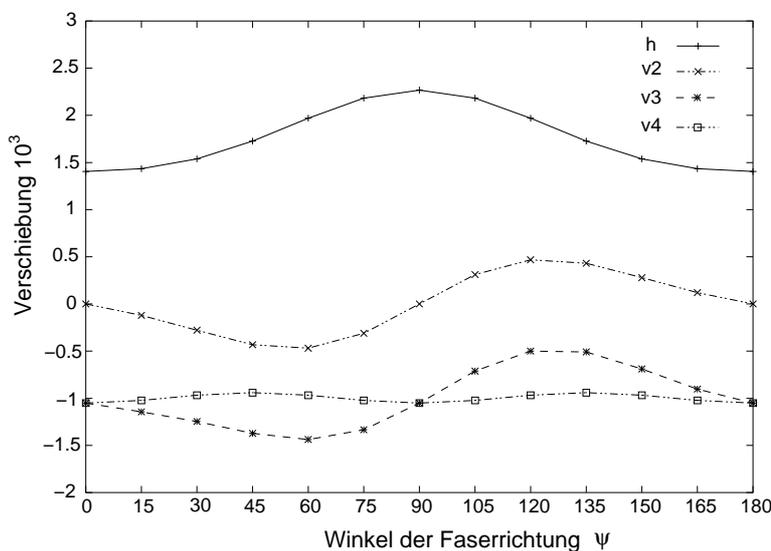


Abbildung 6.18: Verschiebungen der Probenkanten bei Variation der Faserrichtung zwischen 0° und 180°

terialmodell erzielten Berechnungsergebnisse stimmen exakt mit den Ergebnissen aus [122] überein. Die Berechnungen anhand 2-dimensionaler und 3-dimensionaler Modellen mit dem kommerziellen Finite-Elemente-Programm ANSYS [8] haben die Ergebnisse zusätzlich bestätigt. Am Beispiel der Zugprobe kann gezeigt werden, wie durch die Ausrichtung der Fasern die Steifigkeit der Strukturen gezielt gesteuert werden kann - siehe Abb. 6.18.

6.9 Zweischicht Zugprobe

Eine Zugprobe aus einem Faserverbundlaminate, das aus zwei Schichten besteht, wird untersucht. Durch den speziellen Aufbau der zweilagigen Zugprobe wird die Torsions-Dehnungs Kopplung, die in einem Winkelverbundlaminate auftritt, ange-regt - siehe [48].

Materialdaten der Zugprobe:

$$\begin{aligned} E_{11} &= 31100 \text{ N/mm}^2 & G_{12} &= 2900 \text{ N/mm}^2 \\ E_{22} &= 7600 \text{ N/mm}^2 & G_{13} &= 2900 \text{ N/mm}^2 \\ E_{33} &= 7600 \text{ N/mm}^2 & G_{23} &= 2600 \text{ N/mm}^2 \\ \nu_{12} &= 0.303 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Die Zugprobe ist an ihren Enden in eine Versuchseinrichtung eingespannt - siehe Abb. 6.19. Die Spannbacken der Zugvorrichtung können sich um ihre eigene Achse drehen, so dass die Torsionsverdrehung nicht behindert wird.

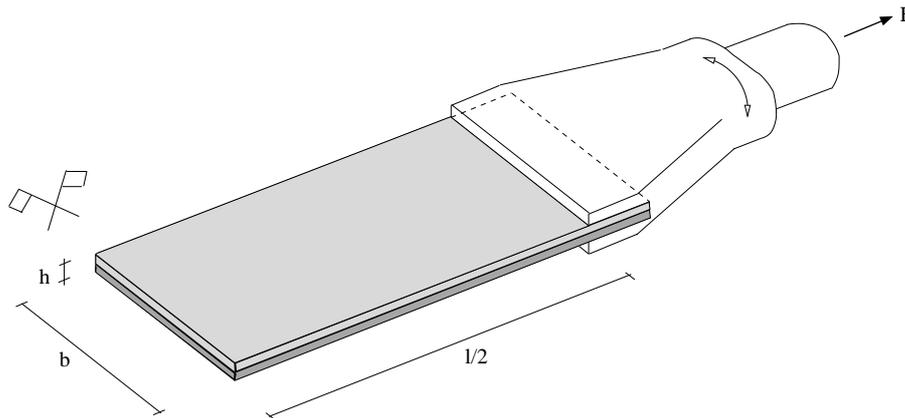


Abbildung 6.19: Darstellung der halben Versuchseinrichtung

Geometriedaten der Zugprobe:

$$\begin{aligned} l &= 400 \text{ mm} & h &= 2 \cdot 1.6 \text{ mm} \\ b &= 100 \text{ mm} & F &= 10000 \text{ N} \end{aligned}$$

Die Materialeigenschaften der einzelnen Schichten und die Schichtdicke sind für beide Lagen identisch. Die beiden Faserlagen unterscheiden sich durch die Orientierung der Einlagen im Raum. Die Fasern der oberen Schicht liegen bei einem Winkel von $\psi = -45^\circ$, jene der unteren Schicht sind bei $\psi = +45^\circ$ angeordnet - siehe Abb. 6.20.

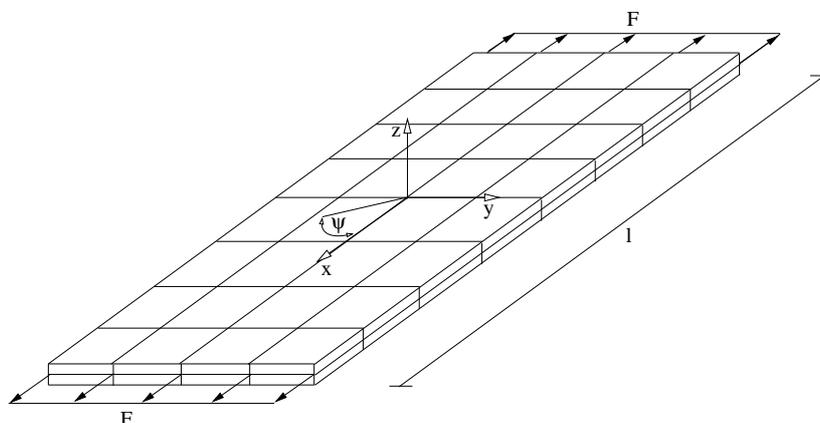


Abbildung 6.20: FE-Modell der Zugprobe

Die volumetrische Schale bietet sich für diese Untersuchung an, da jede Faserschicht durch eine Elementlage abgebildet werden kann. Die Struktur wird durch vier Elementen in der Breite und acht Elementen über die Länge modelliert. Jede Faserschicht wird durch eine Elementlage abgebildet - Abb. 6.20.

Die Lagerung der Struktur erfolgt im Koordinatenursprung in der z-Richtung und im Knoten darüber und darunter in der y-Richtung. An den Probenenden wird der Knoten bei $y = 0$, $z = 0$ und $x = \pm 200$ mm in der z-Richtung gesperrt. Mit dieser Lagerung ist sichergestellt, dass die Verdrehung der Probe nicht behindert wird. Eine detaillierte Modellierung der Spannbacken hat sich als nicht notwendig erwiesen. Die Zweischicht-Zugprobe ist für eine geometrisch lineare und nichtli-

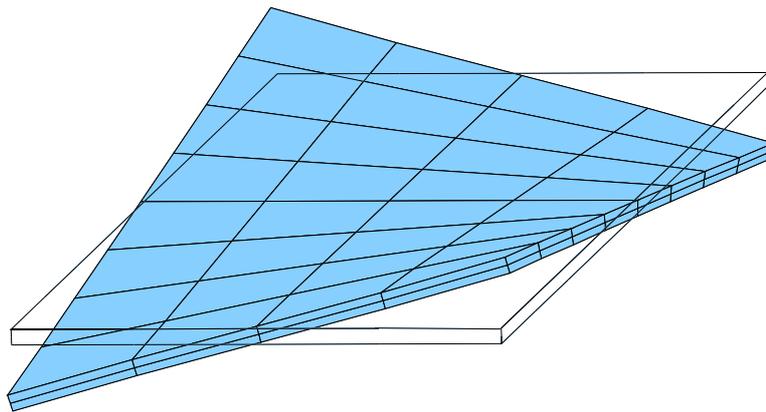


Abbildung 6.21: Verformung der Zweischicht-Zugprobe

neare Berechnung mit dem Schalenelement ssh8A3E3 untersucht worden. In der Abb. 6.21 ist die verformte und die unverformte Zugprobe dargestellt. Im Vergleich zu den Ergebnissen aus [48] und [81] kann eine sehr gute Übereinstimmung der Verformungen, die mit der volumetrischen Schale ssh8A3E3 ermittelt wurden, festgestellt werden - siehe dazu Abb. 6.22.

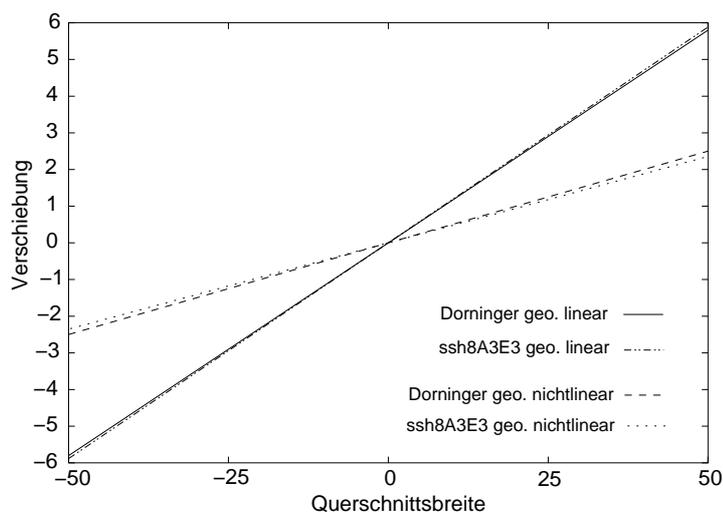


Abbildung 6.22: Vergleich der Randverformungen der Zweischicht-Zugprobe

Kapitel 7

Grundlagen der Bruch- und Schädigungsmechanik

Die Rissentstehung und der Rissfortschritt lässt sich mit der im Kapitel 3 eingeführten Kontinuumsmechanik nicht beschreiben. Da im Abschnitt 3.2 gefordert wird, dass ein materieller Körper stetig von materiellen Punkten ausgefüllt sein muss und jeder materieller Punkt ein innerer Punkt mit einer Umgebung ist, so ist die Beschreibung der Entstehung neuer Oberflächen mit der Kontinuumsmechanik nicht möglich. Die Bruchmechanik befasst sich hingegen mit apriori rissbehafteten Körpern. Als Bindeglied zwischen der Kontinuumsmechanik und der Bruchmechanik dient die Schädigungsmechanik. Die Schädigung von Material beruht auf der Entstehung, dem Wachstum und der Vereinigung von Mikrodefekten und führt schließlich zur Bildung eines makroskopischen Risses - siehe GROSS & SEELIG [62]. Der Schädigungszustand wird mit Hilfe der inneren Schädigungsvariablen d beschrieben, deren Einführung auf KACHANOV zurückgeht. Der Wert $d = 0$ entspricht einem ungeschädigtem Material. Erreicht die Schädigungsvariable den Wert $d = 1$, so ist das Material vollständig geschädigt und verliert seine Tragfähigkeit, was dem gerissenen Zustand entspricht.

Bruchvorgänge können in zwei unterschiedliche Brucharten aufgeteilt werden. Treten vor oder während des Bruchvorganges vorwiegend plastische Deformationen im Rissbereich auf, so wird von einem duktilen Bruch gesprochen. Diese Bruchart tritt häufig bei Metallen zusammen mit plastischem Fließen auf. Sind keine oder nur geringe plastische Deformationen während des Bruchvorgangs festzustellen, so liegt ein Spröbruch vor. Spröbrüche sind bei Nichtmetallen wie Stein und Glas zu beobachten, aber auch bei Metallen unter niedriger Temperatur oder als Ermüdungsbruch. Matrixmaterialien aus Kunststoff, die typischerweise für Faserverbunde verwendet werden, zeigen ebenfalls ein sprödes Versagen.

Der Riss geht von seiner Risspitze aus. Die gegenüberliegenden Bruchflächen werden Rissufer genannt. Die Bruchmechanik unterscheidet drei verschiedene Rissöffnungsarten - siehe Abb. 7.1. Der Modus I beschreibt eine zur x_1 - x_2 Ebene symmetrische Rissöffnung, die typisch für eine Zugbelastung ist. Bei einer ebenen Schubbelastung tritt der Modus II auf, der sich durch eine antimetrische Rissöffnung in x_1 -Richtung äussert. Im Fall der nichtebenen Schubbeanspruchung öffnet sich der Riss im Modus III. Dieser Fall stellt eine antisymmetrische Rissöffnung in x_2 -Richtung tangential zur Rissfront dar.

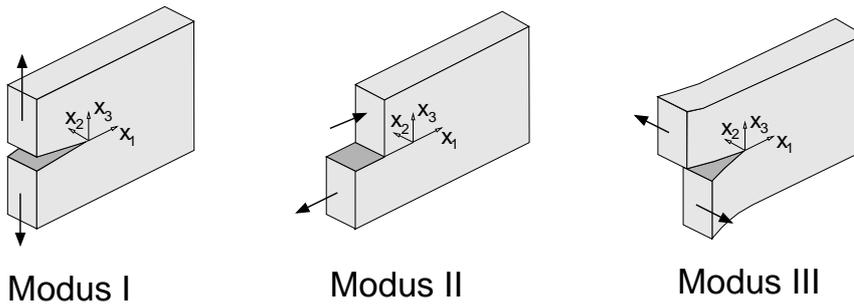


Abbildung 7.1: Rissöffnungsarten

7.1 Energiefreisetzungsrate

Die energetische Betrachtung des Materialverhaltens von Bauteilen mit Rissen beruht auf den Begriffen der Energiefreisetzungsrate oder der Rissausbreitungskraft \mathcal{G} und der kritischen Energiefreisetzungsrate \mathcal{G}_c bzw. dem Risswiderstand R . Die Energiefreisetzungsrate wird aus der Ableitung des Gesamtpotentials Π - siehe Gl.(3.122) - nach der Bruchfläche A gewonnen [62].

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial \Pi}{\partial A} \quad \text{mit} \quad \Pi = \Pi_i + \Pi_a \quad (7.1)$$

Grundgedanke der Spröbruchtheorie nach GRIFFITH ist der Umsatz der gespeicherten elastischen Energie in Oberflächenenergie zur Schaffung neuer Rissflächen - siehe ROSSMANITH [117]. Die Spröbruchtheorie ist von IRWIN durch die Einbeziehung plastischer Vorgänge bei der Rissinitierung ergänzt worden und führt zur Formulierung der erweiterten linear-elastischen Bruchmechanik. Die bei der Rissverlängerung freigesetzte elastische Energie ist für den Rissausbreitungsvorgang verfügbar. Sie deckt den Bedarf an benötigter Oberflächenenergie und evt. auftretender plastischer Verformung in der unmittelbaren Umgebung der Risssspitze. Die kritische Energiefreisetzungsrate kann experimentell ermittelt werden, da, solange die Rissausbreitung stabil (langsam) verläuft, die Gleichung $\mathcal{G} \geq \mathcal{G}_c$ erfüllt wird.

Nach IRWIN kann die gesamte Energiefreisetzungsrate für einen sich selbst abbildenden Rissfortschritt in drei Komponenten zerlegt werden:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_I + \mathcal{G}_{II} + \mathcal{G}_{III} \quad (7.2)$$

Die kritische Energiefreisetzungsrate ist im Allgemeinen von der Länge des Risses abhängig. Es gilt

$$\mathcal{G}_c = R(\Delta a) \quad \text{mit} \quad \Delta a = a - a_0 \quad (7.3)$$

mit der Risswiderstandskraft R [135]. Bei einem stabilen Risswachstum kann die Rissausbreitung jederzeit durch einen Laststopp zum Stillstand gebracht werden. Liegt jedoch ein instabiles Risswachstum vor, so kann die Rissausbreitung und damit der Bruch nicht mehr durch Anhalten der Lastaufbringung verhindert werden.

Im Bruchzustand $\mathcal{G} \geq \mathcal{G}_c$ gelten folgende Stabilitätskriterien:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial A} < \frac{\partial \mathcal{G}_c}{\partial A} & \quad \text{stabiles Risswachstum} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial A} = \frac{\partial \mathcal{G}_c}{\partial A} & \quad \text{kritischer Punkt} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial A} > \frac{\partial \mathcal{G}_c}{\partial A} & \quad \text{instabiles Risswachstum} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Im ebenen Verzerrungszustand ist der Risswiderstand R unabhängig von der Risslänge a - siehe BROEK [26], womit die kritische Energiefreisetzungsrate \mathcal{G}_c für diesen Fall konstant ist. Das Kriterium für die Stabilität des Risswachstums in Gl.(7.4) vereinfacht sich im ebenen Verzerrungszustand zu:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial A} \leq 0 \quad (7.5)$$

7.2 Rissmodell nach DUGDALE

Bei duktilen Werkstoffen bildet sich vor der Risspitze eine schmale plastische Zone endlicher Länge aus. Somit kann eine Abgrenzung zwischen dem elastischen und plastischen Bereich im Material erfolgen. Das Modell von DUGDALE [49] nimmt ein ideal-plastisches Verhalten mit einer konstanten Fließspannung innerhalb der plastischen Zone an - siehe Abb. 7.2 . Damit kann das elastisch-plastische Problem auf ein rein elastisches zurückgeführt werden und die Spannungssingularität an der Risspitze, die sonst bei der linearen Bruchmechanik auftritt, verschwindet.

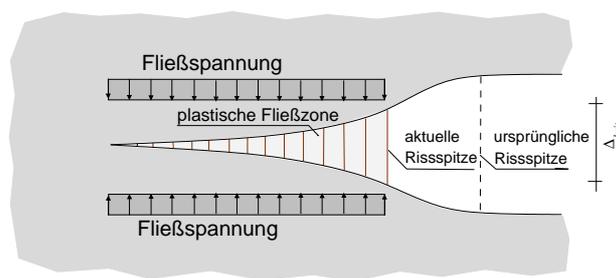


Abbildung 7.2: Rissmodell nach DUGDALE

Zwischen den Rissflanken tritt eine Verschiebung auf, die als Rissspitzenöffnung Δ (Crack Opening Displacement) bezeichnet wird. An der Risspitze nimmt Δ den Wert der kritischen Rissspitzenöffnung Δ_{krit} an. Am Ende der plastischen Zone beträgt der Wert Null. Die Erweiterung des DUGDALESchen Modells um veränderliche Verläufe der Fließspannungen ist möglich, um z.B. Verfestigung oder Entfestigung zu beschreiben.

7.3 Rissmodell nach BARENBLATT

Ein Rissmodell für spröde Werkstoffe ist von BARENBLATT [9], [10] entwickelt worden. Aus mathematischer Sicht wird der Riss als Schnitt betrachtet. Der Riss wird in zwei Bereiche aufgeteilt, einen inneren und einen äußeren Bereich. Der innere Bereich besitzt lastfreie Oberflächen, während im äußeren Bereich Kohäsivkräfte an den Rissenden existieren - siehe Abb. 7.3. Die Rissenden schließen glatt und die Ausdehnung der Kohäsivzone ist klein gegenüber der Risslänge - siehe HAHN [64]. In der Kohäsivzone findet die Bindungstrennung statt. Der genaue Verlauf der Kohäsivkräfte in der Kohäsivzone ist unbekannt und muss sinnvoll angenommen werden. Die Berücksichtigung einer Plastizitätszone im Bereich der Risspitze ist beim Modell von BARENBLATT nicht notwendig.

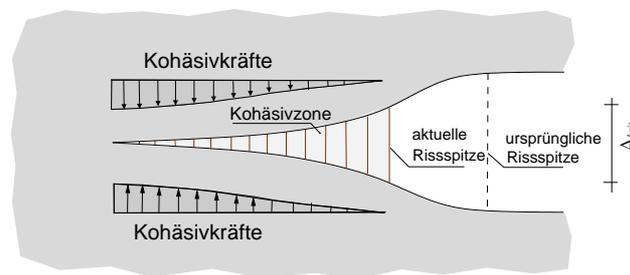


Abbildung 7.3: Rissmodell nach BARENBLATT

Kapitel 8

Grenzflächenschädigungsmechanik

Die Schädigungsmechanik kann unterteilt werden in die Kontinuumschädigungsmechanik (CDM) und die Grenzflächenschädigungsmechanik (IDM). Die Grenzflächenschädigungsmechanik befasst sich mit der Beschreibung der Rissentstehung und dem Rissfortschritt in einer Grenzfläche, die zwischen zwei Körpern liegt. Die Grenzfläche bzw. die Zwischenfläche stellt dabei kein räumliches Kontinuum dar, sondern eine zweidimensionale Struktur mit der Dicke Null. So wird die Grenzfläche von LEMAITRE [86] S.143 als „nothing between two somethings!“ definiert. Die Kontinuumschädigungsmechanik behandelt Fälle, bei denen die Schädigung volumenverteilt auftritt. Das Materialmodell wird üblicherweise durch die Beziehung zwischen den Spannungen und den Verzerrungen beschrieben. Die Grenzflächenschädigungsmechanik nutzt hingegen eine Beziehung zwischen der Grenzflächenspannung und der diskontinuierlichen Verschiebung in der Grenzfläche. Die diskontinuierliche Verschiebung bzw. Separation ist identisch mit der Rissspitzenöffnung Δ . Die kritische Energiefreisetzungsrate \mathcal{G}_c bestimmt dabei die Fläche unter der Spannungs-Separations-Beziehung.

Im Rahmen der Kontinuumschädigungsmechanik sind eine Reihe von Arbeiten entstanden, die sich dem Risswachstum in Faserverbundlaminaten widmen. Dazu wird meist eine plastische Materialformulierung mit Entfestigung verwendet - siehe SPRENGER [133] und HÖRMANN [74]. Bei dieser Vorgehensweise tritt eine ausgeprägte Lokalisierung auf. Unter Lokalisierung wird die Ausbildung schmaler Bereiche verstanden, in denen sich die Versagensvorgänge konzentrieren. Mathematisch lässt sich die Lokalisierung mit dem Verlust der Elliptizität der behandelten Differentialgleichung erklären. Als Folge der Lokalisierung sind die FE Berechnungsergebnisse netzabhängig. Durch die Einführung eines netzabhängigen Entfestigungsmoduls gelingt es, die Objektivität des Nachbruchverhaltens wieder herzustellen - siehe HÖRMANN [74]. Berechnungsmodelle, die auf der Grenzflächenschädigungsmechanik beruhen, zeigen hingegen keine pathologische Netzabhängigkeit - siehe BORG & NILSSON und SIMONSSON [21], da der Grenzfläche jeweils eine bestimmte Energiefreisetzungsrate zugeordnet ist.

Die Grenzflächenschädigungsmechanik wird in dieser Arbeit zur Beschreibung der fortschreitenden Rissausbreitung auf der Mesoebene der Faserverbundstrukturen verwendet. Allerdings ist es auch möglich, weitere Ingenieuraufgaben mit die-

ser Methode zu behandeln: Dünne Klebverbindungen, wie sie vermehrt im Automobilbau verwendet werden, lassen sich in hinreichender Genauigkeit mit der Grenzflächenschädigungsmechanik beschreiben - siehe GONCALVES U.A. [58]. Im Bereich der Mikromechanik kann man das Ablösen von Fasern aus der Matrix simulieren - siehe DÖBERT & MAHNKEN und STEIN [47]. Im Massivbau können die Verbundeigenschaften zwischen Beton und Stahl mit Hilfe der Grenzflächenschädigungsmechanik abgebildet werden - siehe MEHLHORN & KOLLEGER [96].

8.1 Kinematik der Grenzfläche

Ein Körper \mathcal{B}_0 , in dem eine Grenzfläche \mathcal{S}^0 verläuft, wird betrachtet - siehe Abb. 8.1. Innerhalb der Grenzflächen sind die auftretenden Verschiebungen diskontinuierlich. In der Ausgangskonfiguration soll die Grenzfläche spannungsfrei sein. Hingegen treten in der Momentankonfiguration aufgrund äußerer Einwirkung diskontinuierliche Verschiebungen in der Grenzfläche auf. Die beiden Teilkörper entfernen sich voneinander und zwei neue Oberflächen \mathcal{S}^+ und \mathcal{S}^- entstehen - siehe Abb. 8.1. Die materiellen Punkte \mathcal{P} , die die Grenzfläche in der Ausgangskonfiguration \mathcal{S}^0 beschreiben, sind in der Momentankonfiguration gleichzeitig in der Oberfläche des oberen Teilkörpers, wie auch in der Oberfläche des unteren Teilkörpers zu finden.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebung kann nicht auf den gesamten Körper angewendet werden, jedoch ist es möglich, das Prinzip der virtuellen Verschiebung auf die kontinuierlichen Teilkörper \mathcal{B}^+ und \mathcal{B}^- anzuwenden. Der Spannungsvektor \mathbf{t}^+ ist auf dem Rand des oberen Teilkörpers \mathcal{S}^+ definiert, wohingegen der Spannungsvektor \mathbf{t}^- am Rand des unteren Teilkörpers \mathcal{S}^- wirkt - siehe Abb. 8.2. Die Spannungsvektoren sind aus Gleichgewichtsgründen entgegengesetzt gleich groß. Die beiden Spannungsvektoren \mathbf{t}^+ und \mathbf{t}^- und die Verschiebung des oberen Teilkörpers \mathbf{u}^+ und des unteren Teilkörpers \mathbf{u}^- leisten eine äußere Arbeit - siehe Gl.(8.1) und Gl.(8.2).

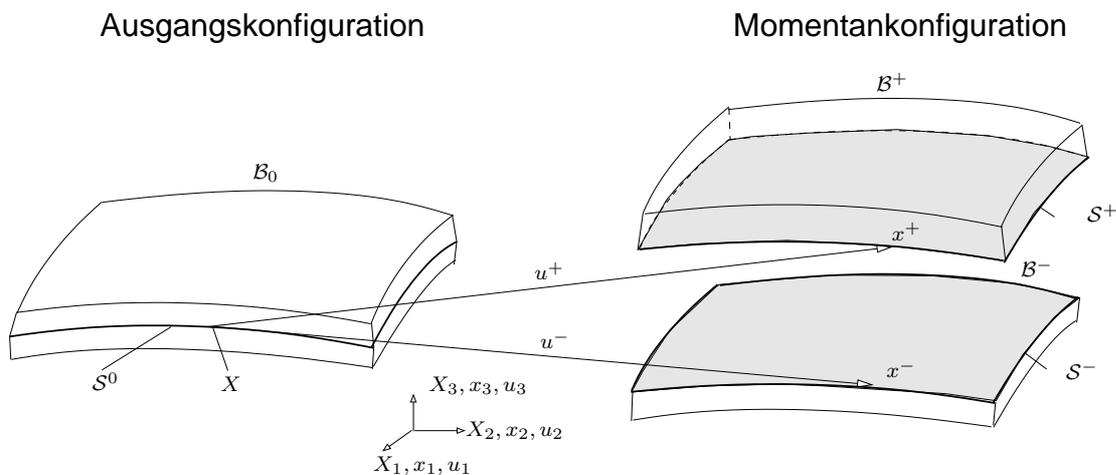


Abbildung 8.1: Kontinuierlicher Körper mit Grenzfläche

Die Arbeitsgleichung für den oberen Teilkörper lautet:

$$\int_{\mathcal{B}^+} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{E} dV = \int_{\mathcal{B}^+} \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial \mathcal{B}^+} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{\mathcal{S}^+} \mathbf{t}^+ \cdot \delta \mathbf{u}^+ d\mathcal{S}^+ \quad (8.1)$$

Die Arbeitsgleichung für den unteren Teilkörper lautet:

$$\int_{\mathcal{B}^-} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{E} dV = \int_{\mathcal{B}^-} \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial \mathcal{B}^-} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{\mathcal{S}^-} \mathbf{t}^- \cdot \delta \mathbf{u}^- d\mathcal{S}^- \quad (8.2)$$

Wird die Gl.(8.1) und Gl.(8.2) addiert und das Gleichgewicht der Oberflächenspannungen ausgenutzt,

$$\mathbf{t}^+ d\mathcal{S}^+ = -\mathbf{t}^- d\mathcal{S}^- \quad (8.3)$$

so folgt daraus Gl.(8.4). Sie beschreibt die virtuelle Arbeit für kontinuierliche Körper mit einer Grenzfläche, vergleiche dazu MALVERN [91] auf Seite 242.

$$\int_{\mathcal{B}_0} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{E} dV = \int_{\mathcal{B}_0} \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{\mathcal{S}^+} \mathbf{t}^+ \cdot (\delta \mathbf{u}^+ - \delta \mathbf{u}^-) d\mathcal{S}^+ \quad (8.4)$$

Der Verschiebungssprungvektor $[[\mathbf{u}]]$ beschreibt die globalen diskontinuierlichen Verschiebungen, die durch die Differenz der Oberflächenverschiebungen definiert sind:

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- \quad \text{bzw.} \quad \delta [[\mathbf{u}]] = \delta \mathbf{u}^+ - \delta \mathbf{u}^- \quad (8.5)$$

Der Spannungsvektor \mathbf{t}^+ auf der Oberfläche \mathcal{S}^+ und der Spannungsvektor $\bar{\mathbf{t}}$ in der Grenzfläche \mathcal{S} - siehe Abb. 8.2 - sind ebenfalls entgegengesetzt gleich groß.

$$\mathbf{t}^+ d\mathcal{S}^+ = -\bar{\mathbf{t}} d\mathcal{S} \quad (8.6)$$

Somit lautet die Gl.(8.4) unter Verwendung des Verschiebungssprungvektors $[[\mathbf{u}]]$.

$$\int_{\mathcal{B}_0} \tilde{\mathbf{T}} \delta \mathbf{E} dV + \int_{\mathcal{S}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta [[\mathbf{u}]] d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{B}_0} \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dA \quad (8.7)$$

Die Arbeit in der Grenzfläche ist somit eine innere Arbeit und wird in Gl.(8.7) auf der linken Seite aufgeführt.

Die Koordinaten der Grenzfläche $\mathbf{x}^{\mathcal{S}}$ in der Momentankonfiguration lassen sich mit den Koordinaten \mathbf{x}^+ und \mathbf{x}^- der Ober- und Unterseite der Teilkörper beschreiben.

$$\mathbf{x}^{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^+ + \mathbf{x}^-) \quad (8.8)$$

Jeder materieller Punkt \mathcal{P} auf den Oberflächen \mathcal{S}^+ und \mathcal{S}^- steht in eindeutigen Bezug zu einem materiellen Punkt \mathcal{P} in der Ausgangskonfiguration der Grenzfläche \mathcal{S}^0

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{X} + \mathbf{u}^+ \quad (8.9)$$

$$\mathbf{x}^- = \mathbf{X} + \mathbf{u}^- \quad (8.10)$$

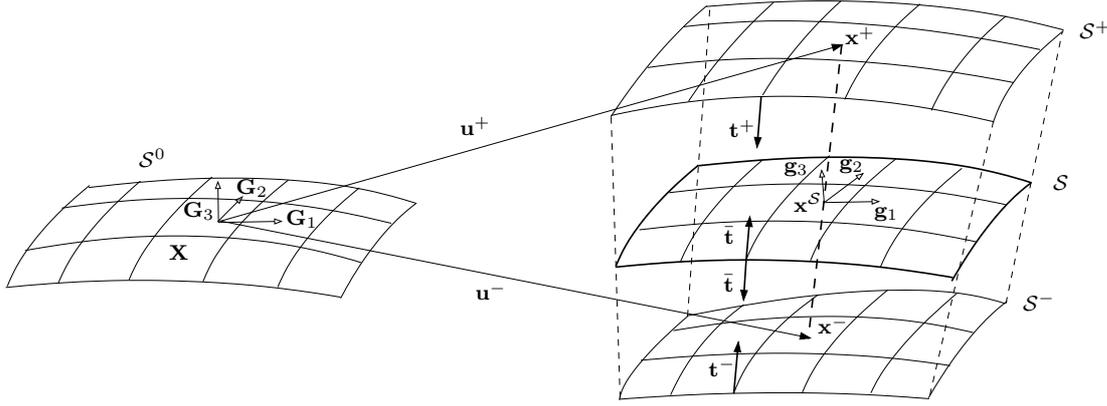


Abbildung 8.2: Kinematik der Grenzfläche

Die Lage der materiellen Punkte der Grenzfläche \mathbf{x}^S in der Momentankonfiguration kann mit der Gl.(8.9) und der Gl.(8.10) durch die materiellen Koordinaten der Ausgangskonfiguration und den Oberflächenverschiebungen ausgedrückt werden.

$$\mathbf{x}^S = \mathbf{X} + \frac{1}{2}(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-) \quad (8.11)$$

Um die Grenzflächenspannungen $\bar{\mathbf{t}}$ in einem lokalen Koordinatensystem zu erhalten, müssen die konvektiven Basisvektoren der Grenzfläche gebildet werden.

$$\mathbf{g}_1 = \left[\frac{\partial x_1^S}{\partial \theta^1}, \frac{\partial x_2^S}{\partial \theta^1}, \frac{\partial x_3^S}{\partial \theta^1} \right]^T \quad \mathbf{g}_2 = \left[\frac{\partial x_1^S}{\partial \theta^2}, \frac{\partial x_2^S}{\partial \theta^2}, \frac{\partial x_3^S}{\partial \theta^2} \right]^T \quad (8.12)$$

Der Normalenvektor \mathbf{g}_3 der Grenzfläche ergibt sich aus dem Kreuzprodukt von \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 .

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 \quad (8.13)$$

Die Tangentenvektoren \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 sind im allgemeinen Fall nicht orthogonal. Daher wird \mathbf{g}_2 aus der Operation

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 \quad (8.14)$$

gebildet. Mit Hilfe der Beträge der konvektiven Basisvektoren entsteht ein orthogonales Einheitskoordinatensystem.

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{g}_1}{|\mathbf{g}_1|} \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{g}_3}{|\mathbf{g}_3|} \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 \quad (8.15)$$

Die Matrix $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ transformiert den globalen Verschiebungssprung $[[\mathbf{u}]]$ in den lokalen Verschiebungssprung Δ , der normal und tangential zur Grenzfläche \mathcal{S} ist - siehe dazu auch BEER [14].

$$\Delta = \mathbf{A}^T [[\mathbf{u}]] \quad (8.16)$$

Die virtuelle Arbeit eines Körpers \mathcal{B}_0 mit der Grenzfläche \mathcal{S}_0 im lokalen Koordinatensystem lautet:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \tilde{\mathbf{T}} \delta \mathbf{E} dV + \int_{\mathcal{S}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \Delta d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{B}_0} \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dA \quad (8.17)$$

8.2 Entfestigungsmodelle für Grenzflächen

Der genaue Verlauf der Grenzflächenspannungen innerhalb der Entfestigungszone (Kohäsivzone) - siehe Abb. 7.3 - in Abhängigkeit der Rissöffnung Δ ist unbekannt und experimentell nicht zu ermitteln. Im Schrifttum sind unterschiedliche Annahmen für den Verlauf der Grenzflächenspannungen als Funktion der Separation getroffen worden. Drei bekannte Modelle sind in der Abb. 8.3 dargestellt. Die maximale Grenzflächenspannung \bar{t}^{max} und die maximale Separation Δ^{max} der einzelnen Grenzflächenmodelle sind zum Vergleich auf den Wert eins normiert worden. Das Modell mit einem bilinearen Verlauf ist von HILLERBORG u.A. [71] zur Berechnung von Risswachstum in Beton genutzt worden. Aufgrund des einfachen Verlaufes ist es weit verbreitet und wird oft zur Berechnung des Delaminationsfortschritts in Faserverbundstrukturen verwendet - siehe MI. u.A. [97] und GONCALVES u.A. [57]. Weiterhin ist das Modell von TVERGAARD & HUTCHINSON [140] mit einem trilinearen Verlauf der Grenzflächenspannung dargestellt. Dieses Modell wird meist im Zusammenhang mit der Rissberechnung in duktilen Werkstoffen eingesetzt. Das Modell von NEEDLEMAN [100] geht von einem kubischen Verlauf der Grenzflächenspannung aus. Es wurde für ein sprödes wie auch für ein duktilen Werkstoffverhalten entwickelt. Die Fläche unter der Spannungs-Separations-Beziehung wird durch die kritische Energiefreisetzungsrate \mathcal{G}_c bestimmt, die wiederum durch Experimente ermittelt werden kann.

Der Unterschied zwischen sprödem und duktilem Werkstoffverhalten zeigt sich bei der Rückentlastung - siehe Abb. 8.3. Überschreitet die Separation die maximale elastische Grenzflächenspannung, so plastiziert das Material, falls es duktile Eigenschaften besitzt, oder aber es erfährt Schädigung, falls es sich spröde verhält. Durchläuft die Grenzfläche eine Rückentlastung, so kehrt die Separation für eine spröde Grenzfläche auf ihren Ursprung zurück. Bei einer Grenzfläche mit plastischen Eigenschaften verbleiben inelastische Separationen - siehe Abb. 8.3.

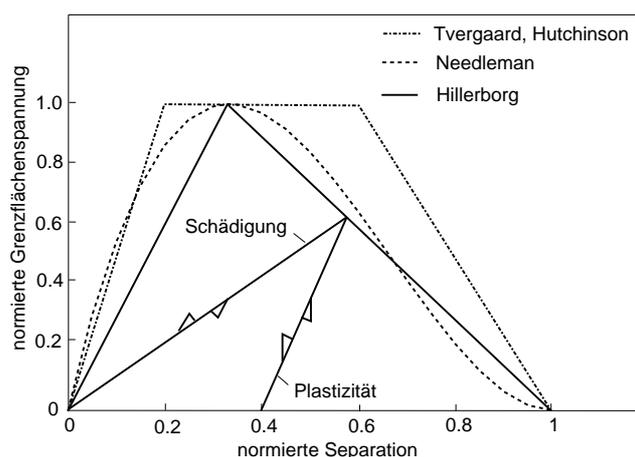


Abbildung 8.3: Verlauf der Grenzflächenspannung über die Separation

Im allgemeinen Belastungsfall tritt das Risswachstum nicht nur in einem einzelnen Modus auf, sondern in mehreren Bruchmoden gleichzeitig auf. Diese Belastung wird als „Mixed-Mode“ bezeichnet. Die Formulierung geeigneter Interaktionsbedingungen zwischen den einzelnen Bruchmoden ist notwendig. Damit wird

gewährleistet, dass keine innere Kraft mehr über eine Grenzfläche übertragen werden kann, wenn diese bereits in einem Modus vollständig versagt hat.

Für die Grenzfläche in der Ausgangskonfiguration wird die Existenz der freien Energiedichte Φ gefordert - siehe ORITZ & PANDOLFI [104]:

$$\Phi = \hat{\Phi}(\Delta, d), \quad (8.18)$$

die abhängig von der Separation Δ ist. Das Entfestigungsmodell kann wie folgt aus der freien Energiedichte hergeleitet werden:

$$\bar{\mathbf{t}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta} \quad (8.19)$$

Das konstitutive Modell der Grenzfläche liegt in Form eines Tensors zweiter Stufe vor - vergleiche dazu auch die Herleitung der Gl.(3.83).

$$\mathbf{D} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Delta^2} = \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial \Delta} \quad (8.20)$$

Die Matrix für das linear elastische Werkstoffmodell ist nur auf der Hauptdiagonalen mit den Elastizitätskennwerten D_{ii} in den drei ausgezeichneten Richtungen \mathbf{a}_i der Grenzfläche besetzt.

$$\mathbf{D} = D_{ii} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

Die Grenzflächenspannung ergibt sich aus dem Elastizitätskennwert der Grenzfläche und der zugehörigen Separation. Deren Variation lautet:

$$\delta \bar{\mathbf{t}}(\Delta) = \mathbf{D} \delta \Delta \quad (8.22)$$

Mit dem Rissmodell von DUGDALE bzw. BARENBLATT - siehe Abschnitt 7.2 bzw. 7.3 - können die drei Grenzflächenspannungen den drei Bruchmoden zugeordnet werden. Ein Riss im Modus I wird durch eine überkritische Grenzflächenspannung \bar{t}_3 in Normalenrichtung initiiert - siehe Abb. 7.1. Druckspannung normal zum Riss soll nicht zum Versagen der Grenzfläche führen. Die Grenzflächenspannung \bar{t}_1 kann einen Schubriss im Modus II auslösen und die Spannung \bar{t}_2 einen Riss im Modus III.

8.2.1 Bilineares Modell von HILLERBORG

Ein Entfestigungsmodell mit einem einfachen Verlauf der Grenzflächenspannung über der Separation ist das bilineare Modell nach HILLERBORG, das in der Abb. 8.4 graphisch dargestellt ist. Der Wert Δ_i^e beschreibt die Separation, bei der die maximale Grenzflächenspannung \bar{t}_i^{max} erreicht wird. Bis zu diesem Wert verhält sich das Modell ideal elastisch. Wird die Separation von Δ_i^e überschritten, so tritt Entfestigung durch Schädigung der Grenzfläche auf. Die Grenzfläche soll sich bei einer Rückentlastung ideal spröde verhalten, daher ergibt sich keine bleibende Separation bei der vollständigen Rückentlastung der Grenzfläche. Wird der q_i -fache

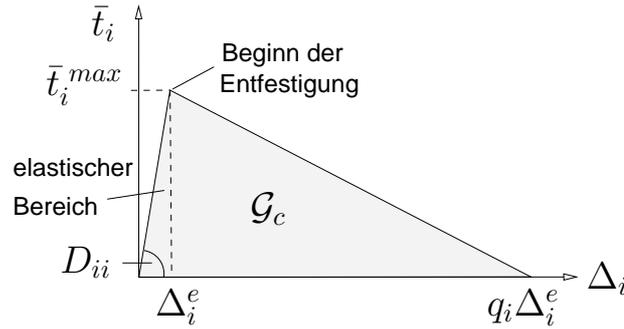


Abbildung 8.4: Bilineares Spannungs-Separations Modell

Wert der elastischen Separation Δ_i^e erreicht, so versagt die Grenzfläche vollständig und es können keine inneren Kräfte mehr über die Grenzfläche übertragen werden.

Die kritische Energiefreisetzungsrate \mathcal{G}_c entspricht dem Wert des Integrals der Grenzflächenspannung \bar{t}_i in Abhängigkeit der Separation Δ_i . Für das bilineare Entfestigungsmodell gilt folgender Zusammenhang:

$$\int_0^{q_i \Delta_i^e} \bar{t}_i d\Delta_i = \mathcal{G}_c \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \bar{t}_i^{max} q_i \Delta_i^e = \mathcal{G}_c \quad (8.23)$$

Die Steigung des elastischen Astes in Abb. 8.4 ist identisch mit der Steifigkeit der Grenzfläche. Die Steifigkeit der ungeschädigten Grenzfläche kann aus dem Elastizitätsmodul des Materials in der Prozesszone und der Dicke der Prozesszone h ermittelt werden - siehe CORIGLIANO [38].

$$D_{33} = \frac{E_3}{h}, \quad D_{11} = \frac{2G_{13}}{h}, \quad D_{22} = \frac{2G_{23}}{h} \quad (8.24)$$

Da die Dicke der Prozesszone im Allgemeinen unbekannt ist und sich das effektive „in-situ-Verhalten“ des Materials in der Prozesszone von dem einer Substanzprobe unterscheidet, sind die nach Gl.(8.24) ermittelten Werte für die ungeschädigte Grenzflächensteifigkeit immer mit einer großen Unsicherheit behaftet. Die Steigung des elastischen Astes wird von einigen Autoren, z.B. CAMANHO & DAVILA [31, 32], als Strafparameter k im Rahmen eines Strafverfahrens verstanden - siehe dazu auch Ausführungen von HÜTTEL [76]. Für den Strafparameter wird ein hoher Zahlenwert gewählt, damit die Nebenbedingung möglichst genau erfüllt wird. Ein zu hoher Wert kann allerdings zu einem schlecht konditionierten Gleichungssystem führen. In NOUR-OMID & Wriggers [101] wird einem optimalen Strafparameter nachgegangen. Für die Berechnung von Delaminationen gibt GONCALVES U.A. [57] einen optimalen Wert für den Strafparameter von $10^7 N/mm^3$ an.

Das bilineare Entfestigungsmodell für Modus I ist in der Abb. 8.5 dargestellt. Die maximale Grenzflächenspannung \bar{t}_3^{max} in Normalenrichtung ergibt sich nach Gl.(8.23) aus der kritischen Energiefreisetzungsrate \mathcal{G}_{Ic} im Modus I und der maximalen Separation $q_3 \Delta_3^e$, bei der die Grenzfläche vollständig versagt.

$$\bar{t}_3^{max} = \frac{2 \mathcal{G}_{Ic}}{q_3 \Delta_3^e} \quad (8.25)$$

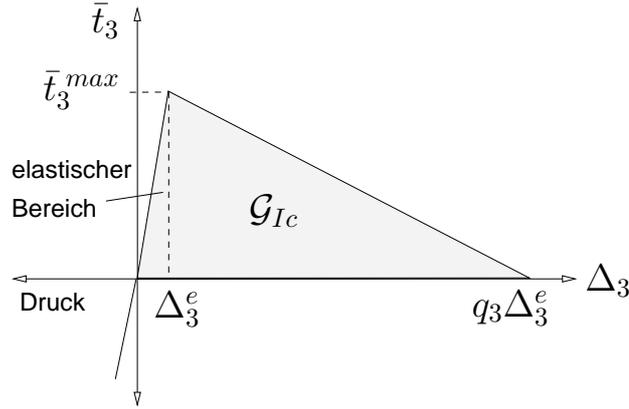


Abbildung 8.5: Bilineares Entfestigungsmodell im Modus I

Die Steifigkeit der Grenzfläche in Normalenrichtung D_{33} ergibt sich nach Gl.(8.20) aus der partiellen Ableitung der Grenzflächenspannung nach der Separation.

$$D_{33} = \frac{\partial \bar{t}_3}{\partial \Delta_3} \quad (8.26)$$

Bereich 1:

$$0 \leq \Delta_3 \leq \Delta_3^e: \quad D_{33} = \frac{\bar{t}_3^{max}}{\Delta_3^e}$$

Bereich 2:

$$\Delta_3^e \leq \Delta_3 \leq q_3 \Delta_3^e: \quad D_{33} = \frac{-\bar{t}_3}{q_3 \Delta_3^e - \Delta_3}$$

Bereich 3:

$$\Delta_3 \geq q_3 \Delta_3^e: \quad D_{33} = 0$$

Im Modus I werden drei Separationsbereiche unterschieden. Im Bereich 1 von $0 \leq \Delta_3 \leq \Delta_3^e$ verhält sich die Grenzfläche rein elastisch. Im Bereich 2 von $\Delta_3^e \leq \Delta_3 \leq q_3 \Delta_3^e$ tritt eine lineare Entfestigung auf und die Grenzflächenspannung nimmt linear mit der zunehmenden Separation ab. Die Variable d_I beschreibt die irreversible Schädigung in einem Wertebereich von $[0, 1]$. Die Variable Ξ_I beschreibt hingegen die Kontinuität der Grenzfläche. Im Bereich 3 mit einer Separation von $\Delta_3 \geq q_3 \Delta_3^e$ ist die vollständige Entfestigung der Grenzfläche erreicht. Damit können keine inneren Kräfte in Normalenrichtung mehr übertragen werden.

Tritt im Modus I eine negative Separation $\Delta_3 < 0$ auf, so befinden sich die Ober- und Unterseite der Grenzfläche im Kontakt. Eine Durchdringung der Ober- und Unterseite der Grenzfläche ist ein unphysikalischer Vorgang, der im Rahmen eines Strafverfahrens verhindert wird. Die Vorgehensweise entspricht einem „Knoten-zu-Knoten“-Kontaktmodell mit dem Strafparameter k .

Bereich 1:

$$0 \leq \Delta_3 \leq \Delta_3^e: \quad \bar{t}_3 = \frac{2\mathcal{G}_{Ic}}{\Delta_3^e q_3 \Delta_3^e} \Delta_3$$

Bereich 2:

$$\Delta_3^e \leq \Delta_3 \leq q_3 \Delta_3^e: \quad \bar{t}_3 = \frac{2\mathcal{G}_{Ic}}{\Delta_3^e q_3} \frac{\Xi_I}{\Delta_3^e} \Delta_3 \quad \text{mit} \quad \Xi_I = \frac{q_3 \Delta_3^e - \Delta_3}{q_3 \Delta_3^e - \Delta_3^e}$$

$$d_I = 1 - \Xi_I; \quad d_I \in [0, 1]$$

Bereich 3:

$$\Delta_3 \geq q_3 \Delta_3^e: \quad \bar{t}_3 = 0$$

Das Entfestigungsmodell für Modus II ist in der Abb. 8.6 dargestellt. Die maximale Grenzflächenspannung \bar{t}_1^{max} ergibt sich aus der Gl.(8.23) durch Umstellung.

$$\bar{t}_1^{max} = \frac{2\mathcal{G}_{IIc}}{q_1 \Delta_1^e} \quad (8.27)$$

Die Steifigkeit der Grenzfläche in Tangentialrichtung D_{11} ergibt sich nach Gl.(8.20) aus der partiellen Ableitung der Grenzflächenspannung nach der Separation.

$$D_{11} = \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial \Delta_1} \quad (8.28)$$

Bereich 1:

$$0 \leq \Delta_1 \leq \Delta_1^e: \quad D_{11} = \frac{\bar{t}_1^{max}}{\Delta_1^e}$$

Bereich 2:

$$\Delta_1^e \leq \Delta_1 \leq q_1 \Delta_1^e: \quad D_{11} = \frac{-\bar{t}_1}{q_1 \Delta_1^e - \Delta_1}$$

Bereich 3:

$$\Delta_1 \geq q_1 \Delta_1^e: \quad D_{11} = 0$$

Für Modus II müssen drei Separationsbereiche voneinander unterschieden werden. Im Bereich 1 von $0 \leq |\Delta_1| \leq \Delta_1^e$ verhält sich die Grenzfläche rein elastisch. Im Bereich 2 von $\Delta_1^e \leq |\Delta_1| \leq q_1 \Delta_1^e$ tritt Entfestigung auf und die Grenzflächenspannung nimmt linear mit zunehmender Separation ab. Die Variable d_{II} beschreibt die irreversible Schädigung in einem Wertebereich von $[0, 1]$. Die Variable Ξ_{II} beschreibt hingegen die Kontinuität der Grenzfläche. Im Bereich 3 bei einer Separation von $|\Delta_1| \geq q_1 \Delta_1^e$ ist die Grenzfläche vollständig entfestigt. Damit können keine Kräfte in tangentialer Richtung mehr übertragen werden. Das Entfestigungsmodell ist antisymmetrisch bezüglich des Ursprungs - siehe Abb. 8.6. Somit sind auch negative Verschiebungssprünge tangential zur Grenzfläche möglich. Sie rufen negative Grenzflächenspannungen hervor.

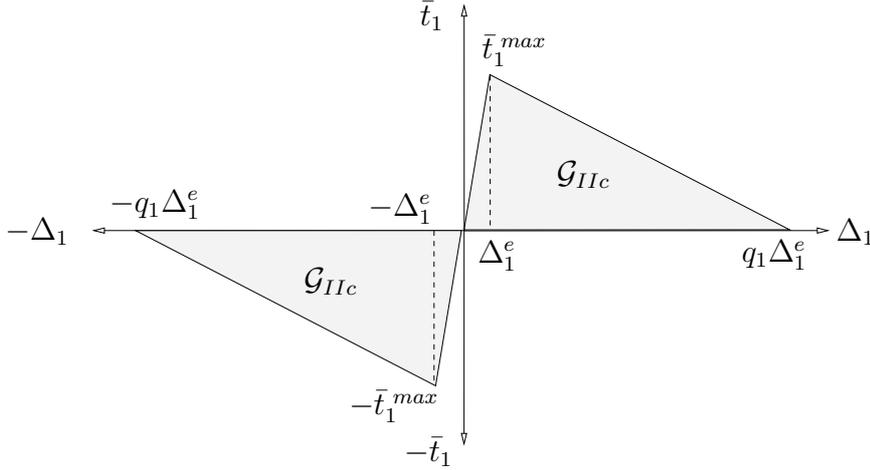


Abbildung 8.6: Bilineares Entfestigungsmodell für Modus II

Bereich 1:

$$0 \leq |\Delta_1| \leq \Delta_1^e: \quad \bar{t}_1 = \frac{2\mathcal{G}_{IIc}}{\Delta_1^e q_1 \Delta_1^e} \Delta_1$$

Bereich 2:

$$\Delta_1^e \leq |\Delta_1| \leq q_1 \Delta_1^e: \quad \bar{t}_1 = \frac{2\mathcal{G}_{IIc}}{\Delta_1^e q_1} \frac{\Xi_{II}}{\Delta_1^e} |\Delta_1| \quad \text{mit} \quad \Xi_{II} = \frac{q_1 \Delta_1^e - |\Delta_1|}{q_1 \Delta_1^e - \Delta_1^e}$$

$$d_{II} = 1 - \Xi_{II}; \quad d_{II} \in [0, 1]$$

Bereich 3:

$$|\Delta_1| \geq q_1 \Delta_1^e: \quad \bar{t}_1 = 0$$

Die Form des Entfestigungsmodells für Modus III entspricht dem des Modus II. Deswegen wird auf das Modell für den Bruchmodus II verwiesen. Die maximale Grenzflächenspannung \bar{t}_2^{max} ergibt sich aus der Umformung der Gl.(8.23).

$$\bar{t}_2^{max} = \frac{2\mathcal{G}_{IIIc}}{q_2 \Delta_2^e} \quad (8.29)$$

8.2.2 Trilineares Modell von TVERGAARD & HUTCHINSON

Das Modell von TVERGAARD & HUTCHINSON [140] zeichnet sich durch einen trilinearen Verlauf der Grenzflächenspannungen aus. Der Entfestigungsansatz wird durch die freie Energiedichte Φ beschrieben.

$$\Phi(\lambda) = \hat{\Phi}(\Delta_3, \Delta_1) =: \Delta_3^{max} \int_0^\lambda \sigma(\lambda') d\lambda' \quad (8.30)$$

Der Parameter λ beschreibt die Schädigung der Grenzfläche. Erreicht λ den Wert eins, so fällt die Grenzflächenspannung auf den Wert Null ab - siehe Abb. 8.7. Außerdem erfasst λ die Interaktion der Separation in normaler und tangentialer Richtung.

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_3^{max}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1^{max}}\right)^2} \quad (8.31)$$

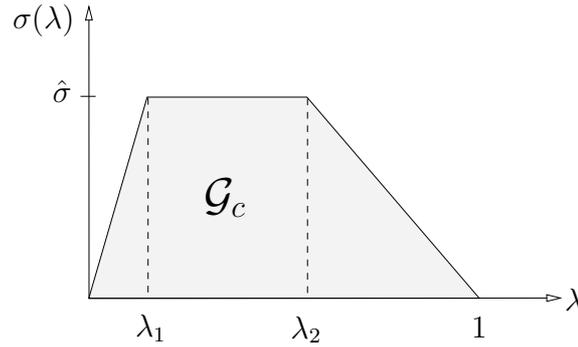


Abbildung 8.7: Trilineares Entfestigungsmodell

Die Grenzflächenspannungen in normaler und tangentialer Richtung \bar{t}_3 und \bar{t}_1 ergeben sich aus:

$$\bar{t}_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_3} = \frac{\sigma(\lambda)}{\lambda} \frac{\Delta_3}{\Delta_3^{max}}, \quad \bar{t}_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_1} = \frac{\sigma(\lambda)}{\lambda} \frac{\Delta_3^{max}}{\Delta_1^{max}} \frac{\Delta_1}{\Delta_1^{max}} \quad (8.32)$$

Die kritische Energiefreisetzungsrate \mathcal{G}_c wird beim Modell von TVERGAARD & HUTCHINSON mit $\lambda = 1$ wie folgt gebildet,

$$\mathcal{G}_c = \frac{1}{2} \hat{\sigma} \Delta_3^{max} (1 - \lambda_1 + \lambda_2) \quad (8.33)$$

wobei nur die maximale Separation in Normalenrichtung Δ_3^{max} Berücksichtigung findet.

8.2.3 Kubisches Modell von NEEDLEMAN

Das Modell von NEEDLEMAN [100] nimmt einen kubischen Verlauf der Grenzflächenspannung über der Separation an - siehe Gl.(8.36). Die maximale Grenzflächenspannung \bar{t}^{max} wird bei einem Drittel der maximalen Separation Δ^{max} erreicht, siehe dazu Abb. 8.3.

Die freie Energiedichte der Grenzfläche lautet:

$$\Phi(\Delta_i) = \int_0^{\Delta_i^{max}} \bar{t}_i d\Delta_i \quad (8.34)$$

Für die Separation in Normalenrichtung der Grenzfläche gibt NEEDLEMAN folgende Gleichung an:

$$\Phi(\Delta_3) = \frac{27}{8} \bar{t}_3^{max} \Delta_3^{max} \left(\frac{\Delta_3}{\Delta_3^{max}} \right)^2 \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta_3}{\Delta_3^{max}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_3}{\Delta_3^{max}} \right)^2 \right] \quad (8.35)$$

Daraus lässt sich der Verlauf der Grenzflächenspannung \bar{t}_3 über der Separation gewinnen.

$$\bar{t}_3(\Delta_3) = \frac{27}{4} \bar{t}_3^{max} \frac{\Delta_3}{\Delta_3^{max}} \left[1 - \frac{\Delta_3}{\Delta_3^{max}} \right]^2 \quad (8.36)$$

Aus der Ableitung der Spannungs-Separations-Beziehung nach der Separation erhält man die Grenzflächensteifigkeit D_{33} in Normalenrichtung.

$$D_{33} = \frac{\partial \bar{t}_3}{\partial \Delta_3} = \frac{27}{4} \bar{t}_3^{max} \left(1 - \frac{4 \Delta_3}{\Delta_3^{max}} + 3 \left(\frac{\Delta_3}{\Delta_3^{max}} \right)^2 \right) / \Delta_3^{max} \quad (8.37)$$

Das Integral über die Spannungs-Separations Beziehung ergibt die kritische Energiefreisetzungsrate:

$$\mathcal{G}_{Ic} = \frac{9}{16} \bar{t}_3^{max} \Delta_3^{max} \quad (8.38)$$

Die Formulierung des Modells von NEEDLEMAN für Modus II und Modus III lautet entsprechend der Gl.(8.36) bzw. Gl.(8.37).

8.2.4 Mixed-Mode Modell von DÁVILA & CAMANHO

Zur Beschreibung der interlaminaren Schädigung unter einer „Mixed-Mode“ Belastung für ein bilineares Entfestigungsmodell ist es sinnvoll, zwei Separationszustände der Grenzflächen genauer zu betrachten. Zu einem ist es der Separationszustand bei dem die interlaminare Spannung so groß wird, dass erstmalig eine irreversible Schädigung eintritt. Dieser Zustand wird als Schädigungsbeginn bezeichnet. Die zweite interessante Separation ist diejenige, bei der es zu einem vollständigen Versagen der Grenzfläche kommt. Diese beiden Zustände werden durch ein Spannungskriterium für den Schädigungsbeginn und ein Energiekriterium für das Grenzflächenversagen beschrieben.

Als Spannungskriterium für den Beginn des inelastischen Verhaltens der Grenzfläche mit den interlaminaren Spannungen \bar{t}_1, \bar{t}_2 und \bar{t}_3 wird ein Vorschlag von BREWER & LAGACE [24] verwendet.

$$\sqrt[2]{\left(\frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1^{max}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_2^{max}} \right)^2 + \left(\frac{\langle \bar{t}_3 \rangle}{\bar{t}_3^{max}} \right)^2} = 1 \quad (8.39)$$

Der Vorschlag beruht auf der quadratischen Interaktion der drei möglichen Grenzflächenspannungen normal und tangential zur Grenzfläche - siehe Gl.(8.39). Nur positive Normalspannungen \bar{t}_3 - also Zugspannungen - in der Grenzfläche sollen einen Beitrag zur Schädigungsinitiierung liefern - siehe Abb. 8.8. Dies wird durch die MACCAULEY Klammer in der Gl.(8.39) berücksichtigt.

$$\langle \bar{t}_3 \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } \bar{t}_3 \leq 0 \\ \bar{t}_3 & \text{falls } \bar{t}_3 > 0 \end{cases} \quad (8.40)$$

Das vollständige Versagen der Grenzfläche tritt ein, wenn die kritische Energiefreisetzungsrate \mathcal{G}_c erreicht wird. Das Energiekriterium beschreibt das Versagen der Grenzfläche. Der Vorschlag von WHITCOMB [144] wird hier verfolgt. Er beruht auf einer quadratischen Interaktion $n = 2$ der Energiefreisetzungsraten für die drei Bruchmoden. Für den Interaktionsparameter n existieren noch weitere Vorschläge, so schlägt GARG [55] eine lineare Interaktion mit $n = 1$ vor. HWU & KAO und

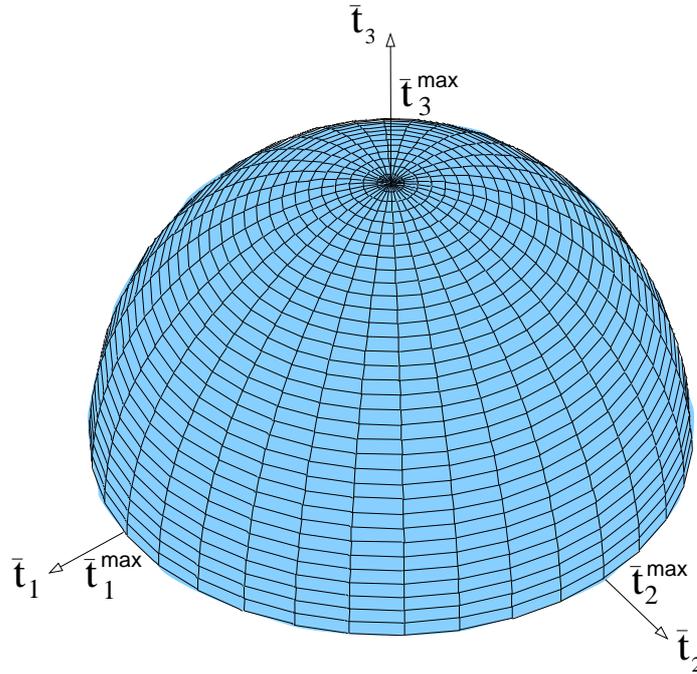


Abbildung 8.8: Spannungsraum der ungeschädigten Grenzfläche

CHANG [78] haben durch Auswertung von interlaminaren Bruchtests einen Interaktionsparameter von 1.25 für Modus I und einen Interaktionsparameter von 1.5 für Modus II und III ermittelt.

In vereinfachter Form lautet das Energiekriterium:

$$\left(\frac{\mathcal{G}_I}{\mathcal{G}_{Ic}}\right)^n + \left(\frac{\mathcal{G}_{II}}{\mathcal{G}_{IIc}}\right)^n + \left(\frac{\mathcal{G}_{III}}{\mathcal{G}_{IIIc}}\right)^n = 1 \quad (8.41)$$

Abb. 8.9 (a) veranschaulicht das Energiekriterium mit einer linearen Interaktion der Energiefreisetzungsraten und Abb. 8.9 (b) zeigt das Energiekriterium mit quadratischer Interaktion. Durch die Anwendung des Energiekriteriums wird gewährleistet, dass nach dem Versagen der Grenzfläche in einem Bruchmode nicht weiter innere Kraft in einem anderen Bruchmode über die Rissflanken übertragen wird.

Im Fall der „Mixed-Mode“ Belastung wird die Separation Δ_m^e gesucht, bei der die Entfestigung beginnt. Um ein Entfestigungsmodell für die „Mixed-Mode“ Belastung mit möglichst wenigen Parameter herzuleiten, werden folgende Annahmen getroffen. Es wird angenommen, dass im Fall der „Mixed-Mode“ Belastung die elastischen Kennwerte D_{ii} in allen drei Richtungen der Grenzfläche identisch sind - siehe DÁVILA & CAMANHO [42, 43].

$$D_{ii} = D_m \quad (8.42)$$

Mit der Annahme aus Gl.(8.42) ergibt sich die Grenzflächenspannung im Bereich von $0 \leq \Delta_m \leq \Delta_m^e$ zu,

$$\bar{t}_m = D_m \Delta_m \quad (8.43)$$

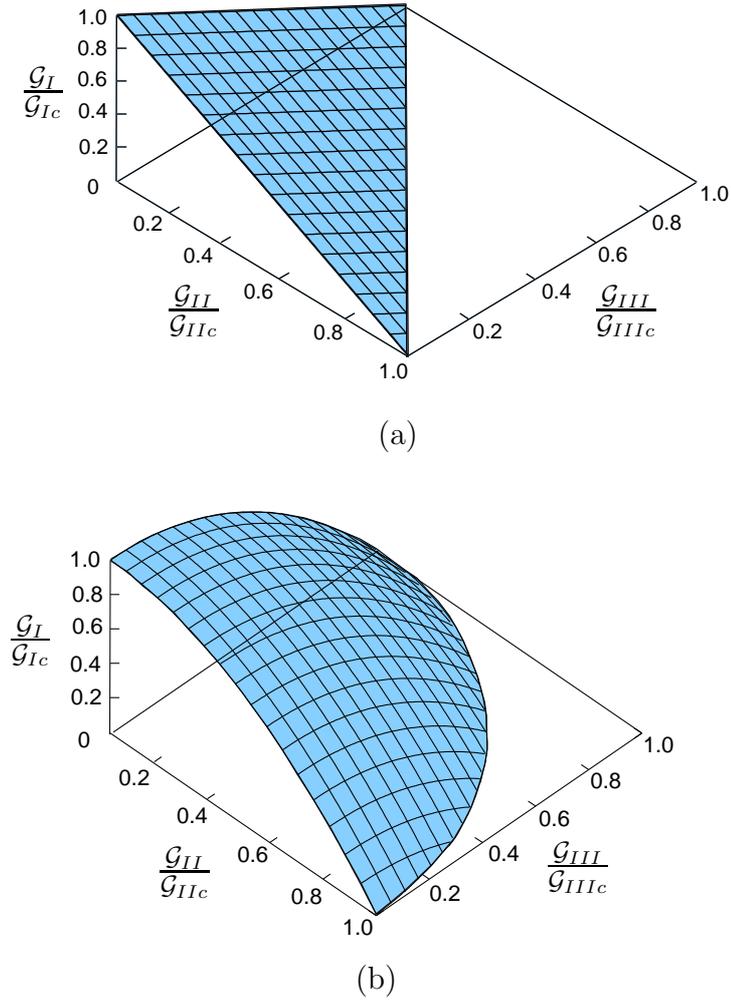


Abbildung 8.9: Energiekriterium mit linearer $n = 1$ Interaktion (a) oder quadratischer $n = 2$ Interaktion (b)

und die maximale Grenzflächenspannung folgt aus:

$$\bar{t}_m^{max} = D_m \Delta_m^e \quad (8.44)$$

Die Separationen Δ_1 und Δ_2 werden zu einer effektiven tangentialen Separation Δ_t zusammengefasst.

$$\Delta_t = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} \quad (8.45)$$

Mit Hilfe der Variablen α wird das Verhältnis zwischen der Separation in tangentialer Richtung und der Separation in normaler Richtung beschrieben.

$$\alpha = \frac{\Delta_t}{\Delta_3} \quad (8.46)$$

Gln.(8.42) bis (8.46) werden in Gl.(8.39) eingesetzt und nach der Separation Δ_m^e aufgelöst. Damit ergibt sich die Separation, bei der unter „Mixed-Mode“-Belastung die Entfestigung beginnt, zu:

$$\Delta_m^e = \Delta_3^e \Delta_t^e \sqrt{\frac{1 + \alpha^2}{(\Delta_t^e)^2 + \alpha^2 (\Delta_3^e)^2}} \quad (8.47)$$

Das Versagen und damit die vollständige Entfestigung der Grenzfläche wird mit dem Energiekriterium von WHITCOMB [144] nach Gl.(8.41) ermittelt. Die zu ermittelnde Größe ist das Vielfache q_m der elastischen Separation Δ_m^e , bei der die Grenzfläche unter einer „Mixed-Mode“ Belastung vollständig versagt. Die kritischen Energiefreisetzungsrate im Modus II und im Modus III werden durch eine kritische Energiefreisetzungsrate in tangentialer Richtung \mathcal{G}_{tc} zusammengefasst. So lautet das Energiekriterium:

$$\left(\frac{\mathcal{G}_I}{\mathcal{G}_{Ic}}\right)^n + \left(\frac{\mathcal{G}_t}{\mathcal{G}_{tc}}\right)^n = 1 \quad (8.48)$$

Die tangentielle Energiefreisetzungsrate \mathcal{G}_t wird mit Hilfe der Separation Δ_t berechnet.

$$\mathcal{G}_t = \int_0^{\Delta_t} t_t d\Delta_t \quad (8.49)$$

Die Energiefreisetzungsrate im „Mixed-Mode“ \mathcal{G}_m wird mit Hilfe der Separation Δ_m bestimmt:

$$\mathcal{G}_m = \int_0^{\Delta_m} t_m d\Delta_m \quad (8.50)$$

Die kritische Energiefreisetzungsrate \mathcal{G}_{mc} im „Mixed-Mode“-Fall lautet:

$$\mathcal{G}_{mc} = \frac{1}{2} D_m \Delta_m^{e 2} q_m \quad (8.51)$$

Die Gl.(8.48) wird nach dem Vielfachen q_m der elastischen Separation Δ_m^e

$$q_m = \frac{2(1 + \alpha^2)}{D_m \Delta_m^{e 2}} \left(\left(\frac{1}{\mathcal{G}_{Ic}}\right)^n + \left(\frac{\alpha^2}{\mathcal{G}_{tc}}\right)^n \right)^{-\frac{1}{n}}, \quad (8.52)$$

das zum Versagen der Grenzfläche führt, aufgelöst [42, 43].

8.2.5 Materieller Operator

Für die konsistente Linearisierung der Gl.(8.17) ist die Berechnung des materiellen Tangentenoperators D_{ii} für das Entfestigungsmodell der Grenzfläche notwendig. Bei Entfestigungsmodellen treten für die geschädigte Grenzfläche negative Werte des materiellen Tangentenoperators auf. In Abb. 8.10 ist der Verlauf des materiellen Tangentenoperators über die normierte Separation für die in den Abschnitten 8.2.1 - 8.2.3 vorgestellten Entfestigungsmodellen mit den Werten entsprechend Abb. 8.3 dargestellt - siehe auch Gl.(8.37).

Der nicht positiv definite, materielle Tangentenoperator kann zu einer schlecht konditionierten tangentialen Steifigkeitsmatrix führen - siehe DE BORST & ROTS [46]. Die dadurch auftretenden numerischen Schwierigkeiten können umgangen werden, indem z.B. der Sekantenoperator verwendet wird - siehe dazu auch ALFANO & CRISFIELD [3]. Der Sekantenoperator wird gebildet, indem die aktuelle Grenzflächenspannung \bar{t} durch die vorliegende Separation Δ geteilt wird. In Abb.

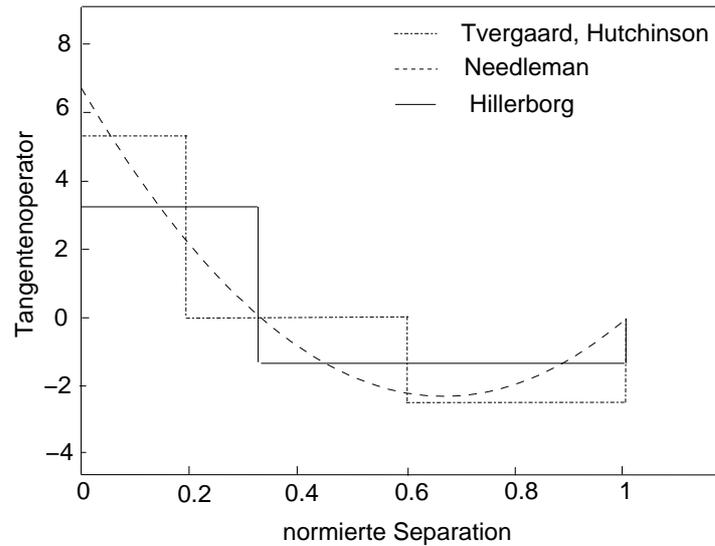


Abbildung 8.10: Tangentenoperator für unterschiedliche Entfestigungsmodelle

8.11 ist der Sekantenoperator über die normierte Separation für die drei vorgestellten Entfestigungsmodelle angegeben.

In vielen Veröffentlichungen, die die Delamination von Faserverbundstrukturen mittels Grenzflächenelementen und Entfestigungsmodellen beschreiben, wird der Sekantenoperator genutzt - so z.B. in GONCALVES U.A. [57]. Neben dem Sekantenoperator können auch andere positiv definite Operatoren verwendet werden, um numerische Schwierigkeiten zu umgehen.

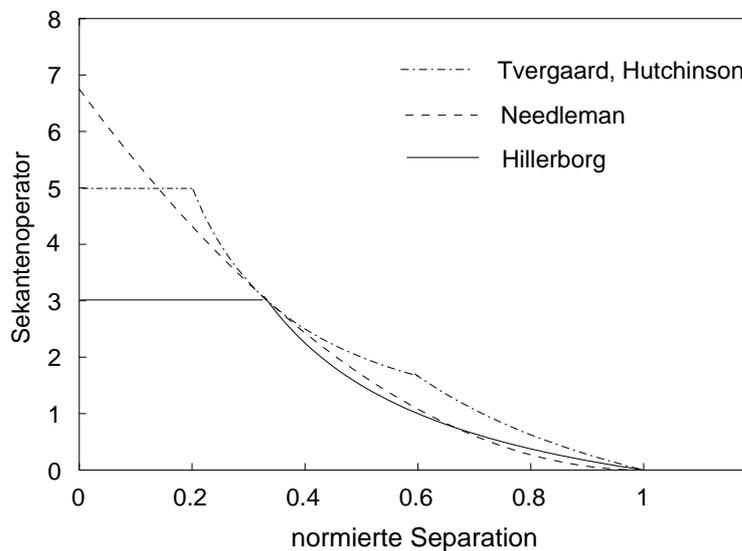


Abbildung 8.11: Sekantenoperator für unterschiedliche Entfestigungsmodelle

So wird von GOYAL in [59] darauf hingewiesen, dass bei auftretenden numerischen Schwierigkeiten eine positiv definite Tangente verwendet werden kann. Eine Pseudotangente wird vorgeschlagen, die sich aus folgender Vorschrift ergibt:

$$D_{ii} = 0 \quad \text{falls} \quad D_{ii} < 0 \quad (8.53)$$

Wobei der materielle Tangentenoperator D_{ii} für negative Werte zu Null gesetzt wird. Im Kapitel 9 wird anhand numerischer Beispiele untersucht, ob und wann sich die angesprochenen numerischen Schwierigkeiten bei den einzelnen Entfestigungsmodellen einstellen und wie sie sich äußern. Ferner sollen die unterschiedlichen Konvergenzeigenschaften der materiellen Operatoren untersucht werden.

8.3 Dreidimensionales Grenzflächenelement

Um eine Grenzfläche in einer Struktur mit der Methode der finiten Elemente zu diskretisieren, werden spezielle Grenzflächenelemente eingesetzt. Für das Grenzflächenelement sind auch die Bezeichnungen Interfaceelement, Kohäsivzonenelement oder im speziellen Fall Klebschichtersatzelement gebräuchlich. Die Entwicklung von Grenzflächenelementen findet ihren Ursprung im Bereich der Geomechanik, wo die Berechnung der Diskontinuität zwischen Gesteinsschichten Gegenstand des Interesses war - siehe hierzu Literaturhinweise von BEER [14]. Ausgehend von diesen Entwicklungen hat sich ein reges Interesse an der Formulierung von Grenzflächenelementen entwickelt. Eine Reihe von Autoren z.B. CRISFIELD U.A. [97], CORIGLIANO [38], SCHELLEKENS & DE BORST [119] haben eindimensionale oder zweidimensionale Grenzflächenelemente vorgestellt. Zur Berechnung des Delaminationsfortschritts in Faserverbundstrukturen werden meist bilineare Entfestigungsmodelle, wie sie im Abschnitt 8.2.1 beschrieben sind, genutzt. Grenzflächenelemente, die zwei Schalenelemente mit Rotationsfreiheitsgraden miteinander verbinden, sind von BEER [14], REDDY [114] und HÜTTEL [76] veröffentlicht worden. BORG U.A. [21] nutzen zur Berechnung der Delamination mit dem expliziten FE-Programm LS-DYNA [89] Schalenelemente mit Rotationsfreiheitsgraden und ein Kohäsivzonenmodell. Mittels einer Kontaktformulierung werden die einzelnen Schalenelemente miteinander verbunden.

Ein dreidimensionales Grenzflächenelement, das zusammen mit dem in Kapitel 5 beschriebenen volumetrischen Schalenelement verwendet werden kann, wird im Folgenden vorgestellt. Das Element verfügt über insgesamt acht Knoten mit jeweils vier Knoten an der Oberseite und vier Knoten an der Unterseite - siehe Abb. 8.12. Jeder Knoten besitzt drei Translationsfreiheitsgrade, aber keine Rotationsfreiheitsgrade.

Die bilinearen Ansatzfunktionen lauten:

$$N_I(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_I \xi) (1 + \eta_I \eta) \quad (8.54)$$

Die Verschiebungen der Oberseite \mathbf{u}^+ und der Unterseite \mathbf{u}^- der Grenzfläche wird wie folgt gebildet:

$$\mathbf{u}^{+h} = \sum_{I=1}^{nodes} N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_I^{+k} = \mathbf{N} \mathbf{u}^{+k} \quad (8.59)$$

$$\mathbf{u}^{-h} = \sum_{I=1}^{nodes} N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_I^{-k} = \mathbf{N} \mathbf{u}^{-k} \quad (8.60)$$

Die Geometrie der Grenzfläche \mathbf{x}^S wird auf folgende Weise bestimmt:

$$\mathbf{x}^{Sh} = \mathbf{N} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{x}^{+k} + \mathbf{x}^{-k}) \right) \quad (8.61)$$

An dieser Stelle soll nochmal angemerkt werden, dass eine Interpolation der Verschiebungen senkrecht zur Grenzfläche mithilfe von Formfunktionen nicht vorgenommen wird. Dies unterscheidet ein dreidimensionales Grenzflächenelement eindeutig von einem Volumenelement mit trilinearen Ansatzfunktionen, wie es im Abschnitt 5.1 beschrieben wird. Zwar verfügen beide Elemente über acht Knoten mit jeweils drei Freiheitsgraden, dennoch ähnelt die Formulierung des Grenzflächenelements mehr dem eines Kontaktelements - siehe SCHNEIDER [120]. Das Grenzflächenelement in Verbindung mit einem Entfestigungsmodell aus dem Abschnitt 8.2 kann mit einer Feder, die einem nichtlinearen Kraft-Weg Gesetz folgt, verglichen werden. Ein negativer Federweg wird durch eine hohe Federsteifigkeit verhindert und mit zunehmendem Federweg nimmt die Federsteifigkeit ab.

Der Verschiebungssprungvektor $[[\mathbf{u}]]$ wird aus der Differenz der interpolierten Verschiebungen an der Oberseite \mathbf{u}^+ und Unterseite \mathbf{u}^- gebildet.

$$[[\mathbf{u}]]^h = \sum_{I=1}^{nodes} N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_I^{+k} - \sum_{I=1}^{nodes} N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_I^{-k} = \mathbf{N} \mathbf{u}^{+k} - \mathbf{N} \mathbf{u}^{-k} \quad (8.62)$$

Der virtuelle Verschiebungssprungvektor $\delta \boldsymbol{\Delta}$ im lokalen Koordinatensystem wird mit der Transformationsmatrix \mathbf{A} Gl.(8.16) aus der interpolierten globalen Verschiebungsdifferenz gewonnen:

$$\delta \boldsymbol{\Delta} = \mathbf{A}^T \mathbf{N} \delta \mathbf{u}^+ - \mathbf{A}^T \mathbf{N} \delta \mathbf{u}^- \quad (8.63)$$

Die Darstellung von \mathbf{N} in der Matrixschreibweise lautet:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (8.64)$$

Aus der Gl.(8.63) erhält man die Verschiebungssprung-Verschiebungsmatrix \mathbf{P} ,

$$\mathbf{P} = [\mathbf{A}^T \mathbf{N}, -\mathbf{A}^T \mathbf{N}] \quad (8.65)$$

die die Verschiebungen der Oberflächen in den lokalen Verschiebungssprungvektor umrechnet, vergleiche dazu die Analogie zur Gl.(5.24).

$$\delta \mathbf{\Delta} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^+ \\ \delta \mathbf{u}^- \end{bmatrix} \quad (8.66)$$

Für die Verschiebungen der Oberflächen $\begin{bmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{bmatrix}$ wird weiterhin vereinfacht $\bar{\mathbf{u}}$ geschrieben.

Der virtuelle Verschiebungssprungvektor kann wie folgt beschrieben werden:

$$\delta \mathbf{\Delta} = \mathbf{P} \delta \bar{\mathbf{u}} \quad (8.67)$$

Die virtuelle innere Arbeit der Grenzfläche lautet nach Gl.(8.17):

$$\delta A_{i_S} = \int_S \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{\Delta} \, dS \quad (8.68)$$

Die Gl.(8.67) wird in den Ausdruck für die virtuelle Arbeit Gl.(8.68) eingesetzt,

$$\delta A_{i_S}^h = \int_S \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{P} \delta \bar{\mathbf{u}} \, dS \quad (8.69)$$

$$= \delta \bar{\mathbf{u}}^T \int_S \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{t}} \, dS \quad (8.70)$$

so dass der Ausdruck für die interpolierte virtuelle innere Arbeit entsteht.

Die inneren Kräfte der Grenzfläche ergeben sich aus dem Ausdruck für die innere Arbeit der Grenzfläche - siehe die Analogie zur Gl.(5.56) für die inneren Kräfte der volumetrischen Schale.

$$\mathbf{f}_S^{int} = \int_S \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{t}} \, dS \quad (8.71)$$

Dem isoparametrischen Konzept der finiten Elemente folgend, werden die inneren Kräfte der Grenzfläche im zweidimensionalen Einheitsraum von -1 bis +1 beschrieben.

$$\mathbf{f}_S^{int} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{t}} \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \quad (8.72)$$

Die inneren Kräfte \mathbf{f}^i werden in einer TAYLOR-Reihe entwickelt, die nach dem ersten Glied abgebrochen wird.

$$\mathbf{f}_S^{int}(\bar{\mathbf{u}} + \Delta \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}_S^{int}(\bar{\mathbf{u}}) + \underbrace{\left[\frac{\partial \mathbf{f}_S^{int}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \right]}_{\mathbf{k}} \Delta \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{R}(\bar{\mathbf{u}}) \quad (8.73)$$

Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{k} des Grenzflächenelements lautet schließlich:

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{P}^T \mathbf{D} \mathbf{P} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (8.74)$$

Da zwischen der Oberseite und der Unterseite der Grenzfläche Gleichgewicht besteht, besitzt die Steifigkeitsmatrix folgende doppelsymmetrische Eigenschaft.

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}} & -\hat{\mathbf{k}} \\ -\hat{\mathbf{k}} & \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \quad (8.75)$$

Die Submatrizen $\hat{\mathbf{k}}$ der Steifigkeitsmatrix \mathbf{k} setzen sich zusammen aus:

$$\hat{\mathbf{k}} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^T \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^T \mathbf{N} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (8.76)$$

Ausgeprägte Versteifungseffekte, wie sie für das volumetrische Schalenelement im Kapitel 5 beschrieben sind, treten beim Grenzflächenelement nicht auf. Allerdings verfügen Grenzflächenelemente über keinerlei Membransteifigkeit, daher ist ihr Einsatz nur zusammen mit Elementen, die die Grenzfläche umgebende Struktur diskretisieren, sinnvoll. Die Auswertung des Elementlastvektors in Gl.(8.72) und der Elementsteifigkeitsmatrix gemäß Gl.(8.76) erfolgt numerisch durch eine Integration über die Einheitsgrenzfläche. Verschiedene Autoren, z.B. SCHELLEKENS & DE BORST [119] und HOHBERG [72], haben auf eine Oszillation der Grenzflächen­spannung bei der Verwendung der GAUSS-Integration hingewiesen. Die Oszillation tritt verstärkt bei hohen Steifigkeitskennwerten der Grenzfläche auf - siehe DE BORST [45]. Wird jedoch die LOBATTO-Integration genutzt, so sind keinerlei Oszillationen auszumachen. Außerdem wird vorgeschlagen, eine höhere Anzahl von Integrationspunkten als die für bilineare Ansatzfunktionen üblichen 2x2 Integrations­ordnung zu verwenden, um evt. auftretende Oszillationen zu vermeiden. Eine feinere Diskretisierung in der Prozesszone trägt ebenfalls zur Glättung der Ergebnisse bei. Der Einfluss der oben genannten Punkte auf die Berechnungsergebnisse ist unter anderem Gegenstand der numerischen Untersuchungen im Kapitel 9.

Kapitel 9

Numerische Beispiele zur Delaminationsberechnung

Interlaminare Bruchtests für laminierte Faserverbundstrukturen dienen der Ermittlung des interlaminaren Risswiderstandes sowie der Bestimmung der Rissfortpflanzung - siehe auch MOORE U.A. [98]. Die Teststrukturen bestehen meist aus zwei rechteckigen, unidirektional verstärkten Faserverbundplatten. Die Platten sind laminiert und an einem Ende ist ein Anriss eingearbeitet. Die Lagerung und Belastung der Probe wird so gewählt, dass sich der Anfangsriss nur in einem gewünschten Modus fortpflanzt.

Drei interlaminare Bruchtest werden vorgestellt und numerisch simuliert. Um die numerischen Ergebnisse für die Proben zu verifizieren und zu validieren, stehen für die Proben neben experimentellen Daten auch analytische Lösungen zur Verfügung. Die analytischen Lösungen basieren auf einfachen Balkenmodellen, deren Herleitung im Anhang A dargestellt ist.

Im Einzelnen werden folgende Beispiele behandelt: Der „Double Cantilever Beam“ (DCB) Test ist eine Prüfstruktur, die nur im Modus I beansprucht wird. Der „End Notched Flexure“ (ENF) Test wird für die Bestimmung der kritischen Energiefreisetzungsrates im Modus II verwendet, da die Beanspruchung ausschließlich im besagten Modus stattfindet. Es existieren eine Reihe von Bruchtests, bei denen eine gemischte Belastung im Modus I und Modus II auftritt DAVIES U.A. [41]. Dazu gehören unter anderem der „Cracked Lap Shear“ (CLS) Test, der „ARCAN“ Test oder auch der „Mixed Mode Bending“ (MMB) Test. In dieser Arbeit wird der „Fixed Ratio Mixed Mode“ (FRMM) Test als Beispiel für eine gemischte Belastung im Modus I und Modus II behandelt. Für den Modus III existiert kein weit verbreiteter Test, da bei den vorhandenen Tests meist eine gemischte Belastung im Modus II und Modus III auftritt, so z.B. beim „Split Cantilever Beam“ (SCB) Test - siehe O'BRIEN [102]. Ein relativ neuer Test für den Modus III ist der „End Crack Torsion“ (ECT) Test - siehe RATCLIFFE [112]. Eine analytische Lösung existiert allerdings nicht. Da der Rissfortschritt im Modus III in der Technik eine eher untergeordnete Rolle spielt, wird auf ein Simulationsbeispiel verzichtet.

9.1 DCB-Probe

Die „Double Cantilever Beam“ Probe ist der am weitesten verbreitete interlaminaire Bruchtest für das Risswachstum im Modus I. Ein typischer Versuchsaufbau ist in Abb. 9.1 zu sehen. Die Fasern der Probe sind parallel zur Probenlängsrichtung angeordnet und an der Probenspitze ist bei der Herstellung ein Anriss der Länge $a_0 = 31.75 \text{ mm}$ mittels einer Teflonfolie eingearbeitet worden - siehe Abb. 9.2.

Experimentelle Daten über den Kraft-Wegverlauf der DCB-Proben stehen von ALIYU & DANIEL [5] zur Verfügung. Von ihnen ist eine Probe, die aus dem Graphit-Epoxid Faserverbundwerkstoff AS-4/3501-6 besteht, untersucht worden. Die homogenisierten Materialparameter sind wie folgt angegeben.

Elastizitätsparameter der DCB-Probe:

$$E_{11} = 138000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad E_{22} = 8960 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad G_{12} = 7100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad G_{23} = 3446 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \nu_{12} = 0.3$$



Abbildung 9.1: Versuchsaufbau für die DCB-Probe [34]

Die experimentellen Ergebnisse der DCB-Probe von ALIYU & DANIEL sind bereits des öfteren numerisch untersucht worden z.B. von HÖRMANN [74], SPRENGER [133] und TESSMER [137]. Aus der zuvor genannten Literatur sind die Angaben über die Geometrie der Probe und die Materialeigenschaften der Grenzfläche entnommen worden. Experimentell ist eine kritische Energiefreisetzungsrate von $\mathcal{G}_{Ic} = 0.222 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$ ermittelt worden. Die maximale Grenzflächenspannung in Normalenrichtung ist mit $\bar{t}_3^{max} = 51.7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ angegeben. Für eine weggesteuerte Versuchsdurchführung ist das Risswachstum der DCB-Probe stabil - siehe dazu CARLSSON

& PIPES [34] Kapitel 13.1.1. Die analytische Lösung der DCB-Probe kann aus der Gl.(A.4) und der Gl.(A.7) aus dem Anhang entnommen werden.

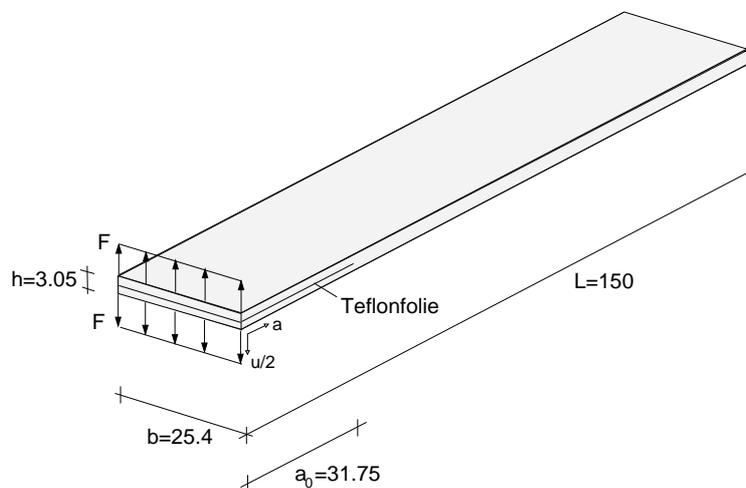


Abbildung 9.2: Skizze der DCB-Probe

Das finite Elemente Modell der DCB-Probe besteht aus zwei Lagen von volumetrischen Schalenelementen und einer Lage von Grenzflächenelementen, die zwischen den Schalen liegen - siehe Abb. 9.3. Im Bereich des Anrisses werden keine Grenzflächenelemente angeordnet. Der Anriss wird durch insgesamt zehn volumetrische Schalenelemente abgebildet. Die Struktur wird mit einem Element über die Breite diskretisiert.

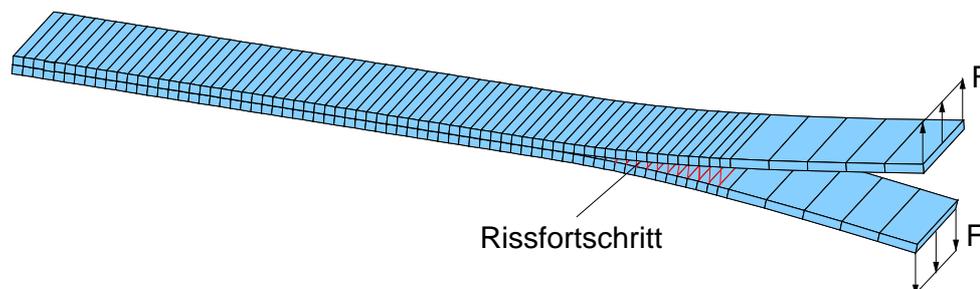


Abbildung 9.3: FE-Modell der DCB-Probe

Abb. 9.4 zeigt die Gegenüberstellung der numerischen, analytischen und experimentellen Ergebnisse der DCB-Probe. Dem numerischen Ergebnis liegt ein finites Elementenetz aus 290 volumetrischen Schalenelementen und 140 Grenzflächenelementen zugrunde. Die Berechnung ist statisch und verschiebungsgesteuert mit dem finiten Elemente Programm FEAP [148, 149] ausgeführt worden. Als Materialmodell für die Grenzfläche ist in diesem Fall das bilineare Entfestigungsmodell nach HILLERBORG verwendet worden, wobei das bilineare Modell den Vorgaben des Modells von NEEDLEMAN [100] angepasst worden ist. Dies bedeutet, dass die maximale Grenzflächenspannung bei einem Drittel des maximalen Verschiebungssprungs erreicht wird.

Die Eigenschaften der Grenzfläche lauten dann nach Gl.(8.23):

$$q_3 = 3 \quad \Delta_3^e = 2.86267 \cdot 10^{-3} \text{ mm.}$$

In Abb. 9.4 ist die äußere Kraft F über die Verschiebung u am Kraftangriffspunkt aufgetragen. Das Ergebnis der Simulationsrechnung liefert eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen wie auch mit der analytischen Lösung. Bevor die größte Bruchlast bei $u < 1.7 \text{ mm}$ erreicht wird, liegen die Last-Verschiebungskurve der FE-Berechnung und die der experimentell ermittelten Ergebnisse sehr nahe zusammen. Die Kurve der analytischen Lösung ist dagegen etwas steiler und zeigt damit ein steiferes Strukturverhalten. Die analytische Lösung ist steifer, da die Nachgiebigkeit der Grenzfläche und die beginnende Entfestigung an der Risspitze nicht berücksichtigt wird.

Versagen die ersten Grenzflächenelemente vollständig, so wird die maximale Bruchlast überschritten und der Riss pflanzt sich entlang der Grenzfläche weiter in die Struktur fort - siehe Abb. 9.3. Im Nachbruchverhalten für $u > 1.7 \text{ mm}$ ist die Kurve der numerischen Lösung mit dem Ergebnis der analytischen Lösung nahezu identisch.

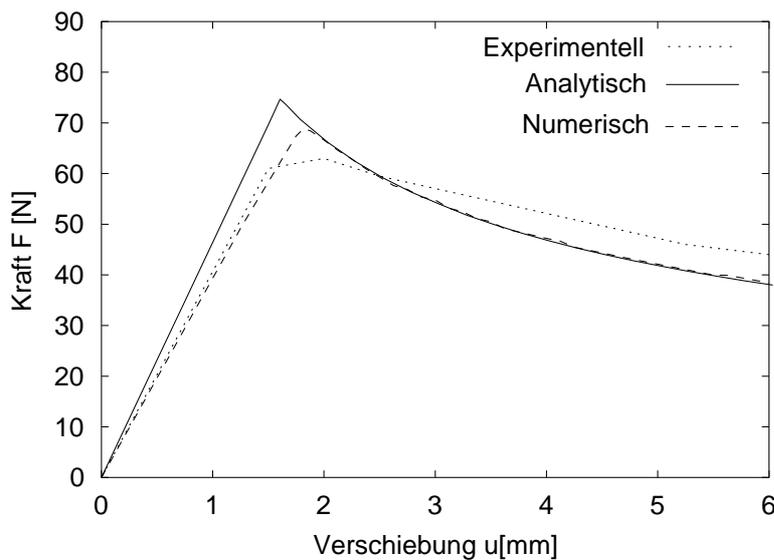


Abbildung 9.4: Last-Verschiebungskurve der DCB-Probe für das Modell nach HILLERBORG

Im Folgenden werden numerische Studien an der DCB-Probe vorgestellt: Dabei soll einerseits die Auswirkung unterschiedlich feiner Netze auf die Last-Verschiebungskurve untersucht werden. Andererseits wird die Auswirkung der GAUSS- bzw.LOBATTO-Integration auf die numerischen Ergebnisse gezeigt. Schließlich wird das Verhalten der unterschiedlichen Entfestigungsmodelle auf die Last-Verschiebungskurve und auf das Konvergenzverhalten der Berechnung studiert.

In den Abbildungen 9.5 - 9.7 sind die Ergebnisse der DCB-Probe mit dem Entfestigungsmodell nach NEEDLEMAN unter Verwendung des materiellen Tangentenoperators dargestellt. Die maximale Separation beträgt $\Delta_3^{max} = 0.0076338 \text{ mm}$ für eine kritische Energiefreisetzungsrate von $\mathcal{G}_{Ic} = 0.222 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$ und einer maxi-

malen Grenzflächenspannung von $\bar{t}_3^{max} = 51.7 \frac{N}{mm^2}$. Abb. 9.5 stellt eine Studie der Ergebnisse der DCB-Probe mit unterschiedlich fein diskretisierten FE-Netzen dar. Drei Netze sind untersucht worden: eines mit 70, eines mit 105 und eines mit 140 Grenzflächenelementen. Die Berechnung ist für dieses Beispiel mit einer 3x3-GAUSS-Integration ausgeführt worden. Es kann festgestellt werden, dass mit einer steigenden Anzahl von Grenzflächenelementen das Niveau der Last-Verschiebungskurven absinkt. Außerdem wird der Verlauf der Last-Verschiebungskurve mit zunehmender Netzverfeinerung glatter. CRISFIELD U.A. merken in [97] an, dass für eine glatte Lösung mindestens zwei Grenzflächenelemente am Entfestigungsprozess beteiligt sein müssen.

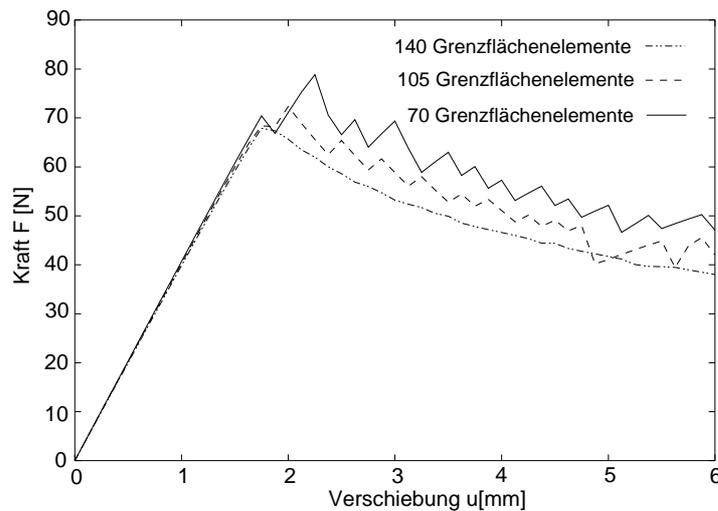


Abbildung 9.5: Simulation der DCB-Probe mit dem NEEDLEMAN-Modell für unterschiedlich feine Netze

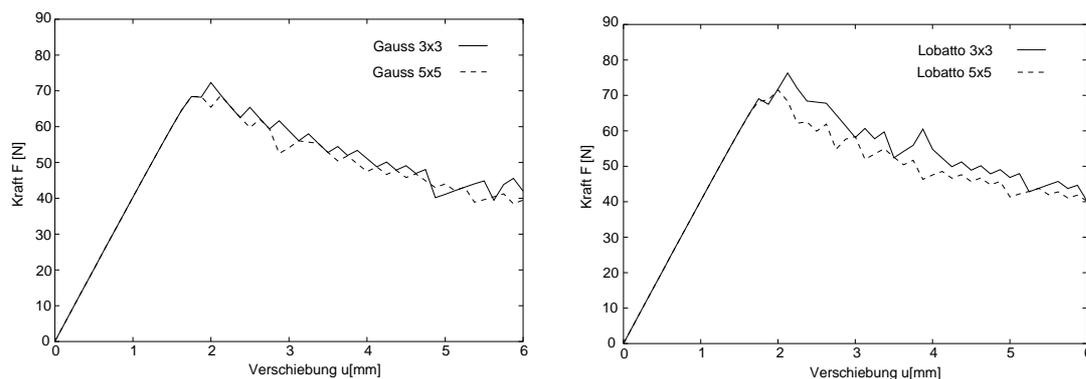


Abbildung 9.6: Vergleich der Integrationsart anhand der DCB-Probe mit dem Modell nach NEEDLEMAN und einem Netz aus 105 Grenzflächenelementen

Nicht nur die Netzdiskretisierung, sondern auch die Integrationsart und die Höhe der Integrationsordnung besitzen einen Einfluss auf die Berechnungsergebnisse. Der Einfluss dieser Parameter wird an Netzen aus 105 und 140 Grenzflächenelementen und mit der Integrationsart nach GAUSS und nach LOBATTO untersucht.

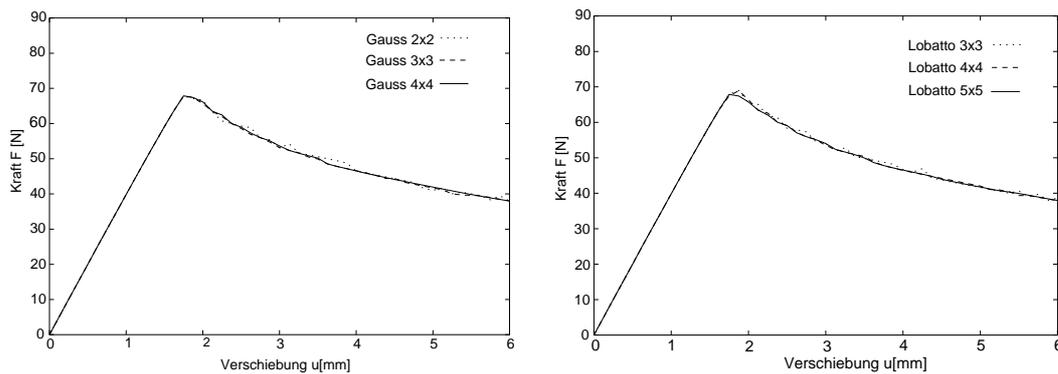


Abbildung 9.7: Vergleich der Integrationsart anhand der DCB-Probe mit dem Modell nach NEEDLEMAN und einem Netz aus 140 Grenzflächenelementen

Für das Netz aus 105 Grenzflächenelementen sinkt das Niveau der Last-Verschiebungskurve ab, wenn eine höhere Integrationsordnung verwendet wird, und nähert sich damit der Lösung des feiner diskretisierten Netzes an - siehe Abb. 9.6. Für ein Netz aus 140 Grenzflächenelementen zeigt die Last-Verschiebungskurve mit einer steigenden Integrationsordnung einen glatteren Verlauf - siehe Abb. 9.7. Ein entscheidender Vorteil mit dem Integrationsverfahren nach LOBATTO kann im Vergleich zum Verfahren nach GAUSS bei diesem Beispiel nicht festgestellt werden. Es sollte noch angemerkt werden, dass die Glättung der Last-Verschiebungskurve durch eine höhere Integrationsordnung mit einem steigenden numerischen Aufwand erkauft wird.

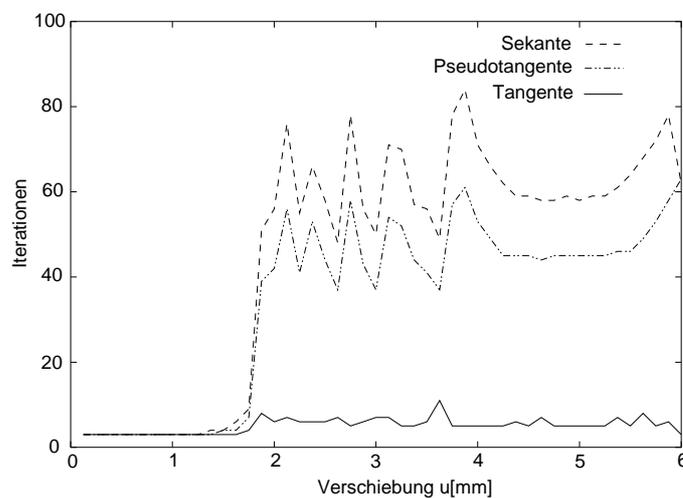


Abbildung 9.8: Anzahl der Iterationen je Verschiebungsschritt für das Modell nach NEEDLEMAN

Im Abschnitt 8.2.5 ist bereits angesprochen worden, dass bei der Gleichungslösung von Entfestigungsvorgängen Probleme aufgrund einer schlecht konditionierten Steifigkeitsmatrix auftreten können. Diese Probleme treten auch bei der Gleichungslösung mit einem „Standard“ Bogenlängenverfahren auf [97], daher haben ALFANO & CRISFIELD [4] ein modifiziertes Bogenlängenverfahren vorgeschlagen.

Eine weitere Möglichkeit die numerische Schwierigkeiten zu umgehen besteht darin, die maximale Grenzflächenspannung bei gleichbleibender Energiefreisetzungsrate zu reduzieren, ALFANO & CRISFIELD [3] haben dies im Zusammenhang mit dem Bogenlängenverfahren gezeigt.

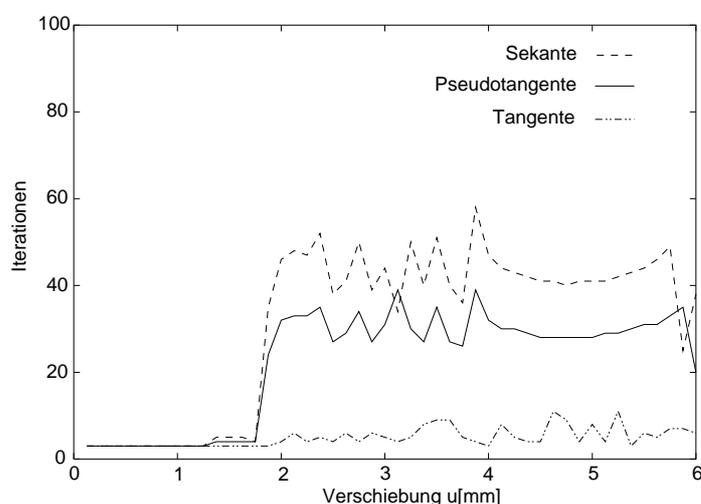


Abbildung 9.9: Anzahl der Iterationen je Verschiebungsschritt für das Modell nach HILLERBORG

Am Beispiel der zuvor beschriebenen DCB-Probe werden die einzelnen Konzepte zur Vermeidung von Konvergenzproblemen für die unterschiedlichen Entfestigungsmodelle untersucht. Die Gesamtverschiebung von 6 mm wird in 48 Einzelschritten eingeleitet. Für diese Untersuchung wird als Abbruchkriterium für die Iteration die Energienorm mit einer Toleranz von $1 \cdot 10^{-8}$ gewählt. Bei dieser relativ geringen Abbruchtoleranz bleibt gewährleistet, dass ein weitgehend auskonvergierendes Ergebnis mit einer realitätsnahen Last-Verschiebungskurve berechnet wird. In Abb. 9.8 ist die Anzahl der Iterationen je Verschiebungsschritt für das Modell von NEEDLEMAN dargestellt. Wird der Sekantenoperator verwendet, so benötigt jeder Verschiebungsschritt circa 60 Iterationen, bis die vorgegebene Toleranz erreicht wird. Durch die Verwendung der Pseudotangente kann die Anzahl der Iterationen auf durchschnittlich 40 gesenkt werden. Mit dem konsistenten Tangentenoperator braucht es meist weniger als 10 Iterationsschritte, bis die geforderte Toleranzschranke unterschritten wird.

Wird die Berechnung mit dem bilinearen Modell nach HILLERBORG ausgeführt, so braucht es bei Verwendung des Sekantenoperators durchschnittlich 40 Iterationen, bis die Toleranzschranke unterschritten wird. Wird die Pseudotangente genutzt, so sind durchschnittlich nur 30 Iterationen notwendig - siehe Abb. 9.9. Bei der Berechnung unter Verwendung des Tangentenoperators konnte die vorgegebene Toleranzschranke in einigen Verschiebungsschritten nicht erfüllt werden bzw. die Berechnung divergierte. Weder eine geänderte Strafzahl noch eine erhöhte Anzahl von Integrationspunkten kann die Konvergenzeigenschaften so stark positiv beeinflussen, damit die Toleranzschranke unterschritten wird. Als mögliche Ursache für die Konvergenzprobleme kommen zu große Lastschritte in Frage, wobei dann die Lösung außerhalb des Anziehungsbereichs für den Ausgangswert liegt. Abhil-

fe könnte die Regularisierung der Funktion für die Spannungen in Abhängigkeit des Vektors der Verschiebungsdiskontinuität leisten. Die Absenkung der Grenzflächenspannung auf ein Drittel des vorgegebenen Wertes beeinflusst das Konvergenzverhalten hingegen so positiv, dass meist weniger als 10 Iterationen benötigt werden um das geforderte Abbruchkriterium zu erfüllen. Allerdings verändert die niedrigere Grenzflächenpannung die Last-Verschiebungskurve in der Art, dass die Probe ein weicheres Vorbruchverhalten zeigt. Eine Studie hierzu kann Abb. 9.13 entnommen werden.

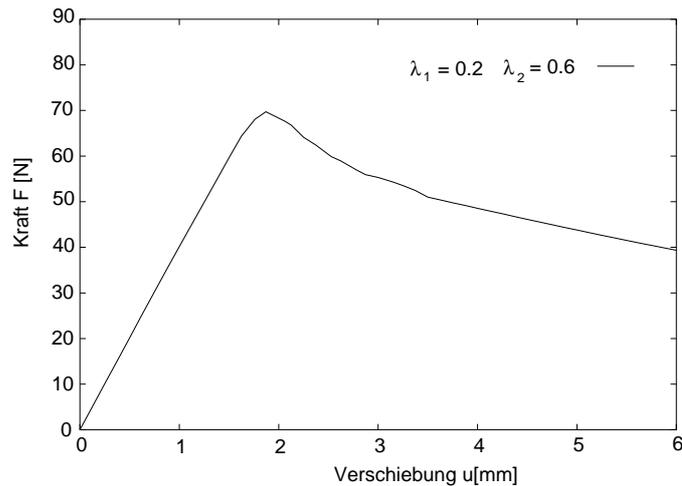


Abbildung 9.10: Last-Verschiebungskurve der DCB-Probe für das Modell nach TVERGAARD & HUTCHINSON und einem Netz aus 140 Grenzflächenelementen

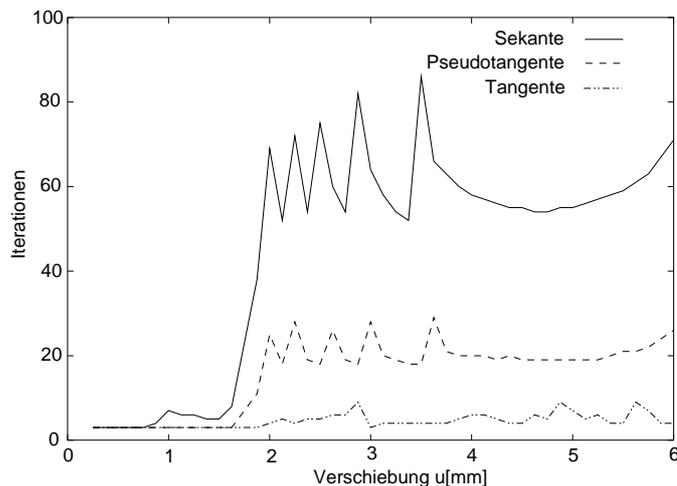


Abbildung 9.11: Anzahl der Iterationen je Verschiebungsschritt für das Modell nach TVERGAARD & HUTCHINSON

Das trilineare Modell von TVERGAARD & HUTCHINSON mit $\lambda_1 = 0.2$ und $\lambda_2 = 0.6$ führt zu einer Last-Verschiebungskurve - siehe Abb. 9.10 - die mit den Last-Verschiebungskurven der Abb. 9.4 und Abb. 9.5 nahezu identisch ist. Die Berechnung mit dem Sekantenoperator konvergiert nach durchschnittlich 60 Iterationen,

bei Verwendung der Pseudotangente verringert sich die Zahl der Iterationen auf circa 20 je Verschiebungsschritt. Wird die konsistente Tangente verwendet, so treten wiederum Konvergenzprobleme auf. Mit einer auf 25% reduzierten Grenzflächenspannung bei gleicher Energiefreisetzungsrate konvergiert die Berechnung und es werden meist weniger als 10 Iterationen je Verschiebungsschritt benötigt - siehe Abb. 9.11.

Im weiteren wird die Auswirkung unterschiedlicher Formen des bilinearen „Entfestigungsdreiecks“ auf den Weg-Kraftverlauf untersucht. Dazu wird die maximale Grenzflächenspannung bei $\bar{t}_3^{max} = 51.7 \frac{N}{mm^2}$ belassen. Der Wert q_3 , der das Verhältnis zwischen elastischer Separation und vollständiger Separation beschreibt, wird variiert, wobei die Werte $q_3 = 2/3/5$ untersucht werden. Für den Wert $q_3 = 2$ bildet das Entfestigungsdreieck ein gleichwinkliges Dreieck. Wird $q_3 = 3$ gewählt, so entspricht das Entfestigungsmodell den Vorgaben des NEEDLEMAN-Modells. Für $q_3 = 5$ ist der elastische Anteil an der Spannungs-Separationsbeziehung - siehe Abb. 8.4 - bereits sehr gering. In Abb. 9.12 ist zu erkennen, dass die Form des bilinearen Modells nur eine geringe Auswirkung auf die Last-Verschiebungskurve hat. Sowohl vor dem Erreichen der maximalen Bruchlast, wie auch im Nachbruchverhalten zeigen alle drei Modelle dasselbe Last-Verschiebungsverhalten, wobei das Modell mit dem Wert $q_3 = 3$ etwas glattere Ergebnisse erzielt als die beiden anderen Modelle.

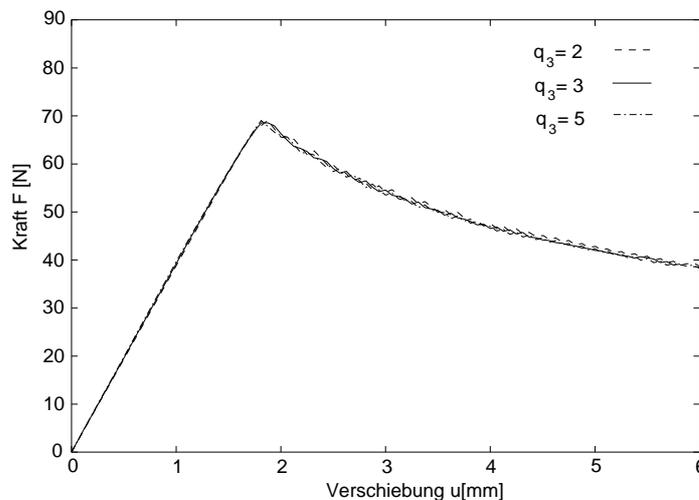


Abbildung 9.12: Untersuchung der DCB-Probe für unterschiedliche Formen des bilinearen Entfestigungsmodells

In den Abbildungen 9.13 und 9.14 wird die Auswirkung unterschiedlich hoher maximaler Grenzflächenspannungen auf die Last-Verschiebungskurve gezeigt. Für die Energiefreisetzungsrate von $\mathcal{G}_{Ic} = 0.222 \frac{N}{mm}$ werden mit dem Modell nach NEEDLEMAN die drei Grenzflächenspannungen $\bar{t}_3^{max} = 10/30/60 \frac{N}{mm^2}$ im Hinblick auf das Verhalten der Traglastkurve untersucht.

Die Anfangssteigung der Last-Verschiebungskurve erweist sich als abhängig von der maximalen Grenzflächenspannung. Je höher die maximale Grenzflächenspannung gewählt wird, umso steiler ist die Anfangssteigung und die Struktur verhält sich steifer. Im Nachbruchbereich, wenn also die ersten Grenzflächenelemente

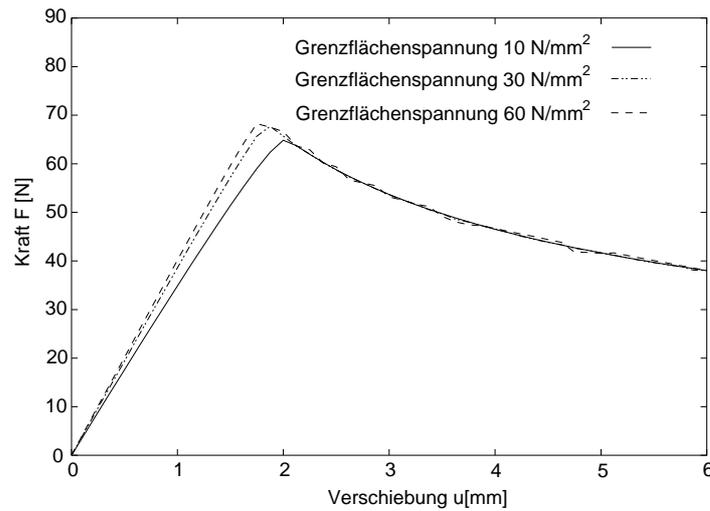


Abbildung 9.13: DCB-Probe mit unterschiedlich großen maximalen Grenzflächenspannungen

vollständig versagt haben, zeigen alle drei Proben ein beinahe identisches Verhalten. Abb. 9.14 stellt die Anzahl der notwendigen Iterationen bei einer Abbruchtoleranz für die Energienorm von $1 \cdot 10^{-16}$ dar. Beobachtbar ist der Anstieg der Anzahl der notwendigen Iterationen mit der maximalen Grenzflächenspannung. Während für die Grenzflächenspannung $\bar{t}_3^{max} = 10 \frac{N}{mm^2}$ nur maximal 6 Iterationen gebraucht werden, steigt die Anzahl bei einer Grenzflächenspannung von $\bar{t}_3^{max} = 60 \frac{N}{mm^2}$ bis auf teilweise 70 Iterationen an.

Der Einfluss der Grenzflächenspannung auf die maximale Bruchlast wird beson-

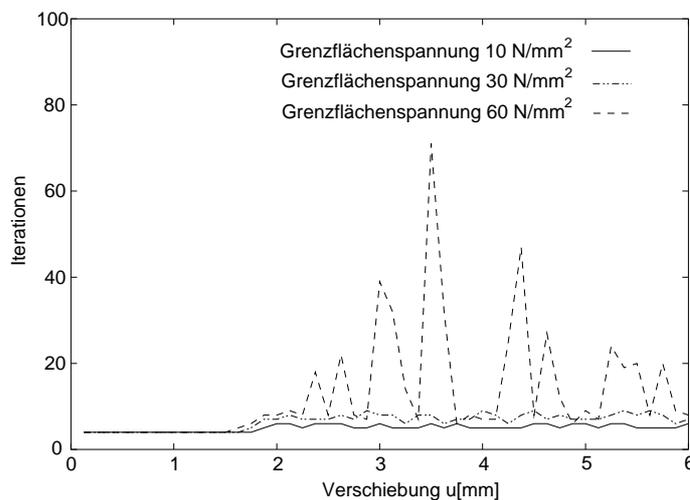


Abbildung 9.14: Anzahl der Iterationen für die Berechnung der DCB-Probe mit unterschiedlich großen maximalen Grenzflächenspannungen

ders deutlich, wenn eine DCB-Probe mit einem kurzen Anriss betrachtet wird. Abb. 9.15 stellt die Last-Verschiebungskurve für eine DCB-Probe dar, bei der der Anriss von $a_0 = 31.75 \text{ mm}$ auf $a_0 = 3 \text{ mm}$ verkürzt worden ist. Wiederum

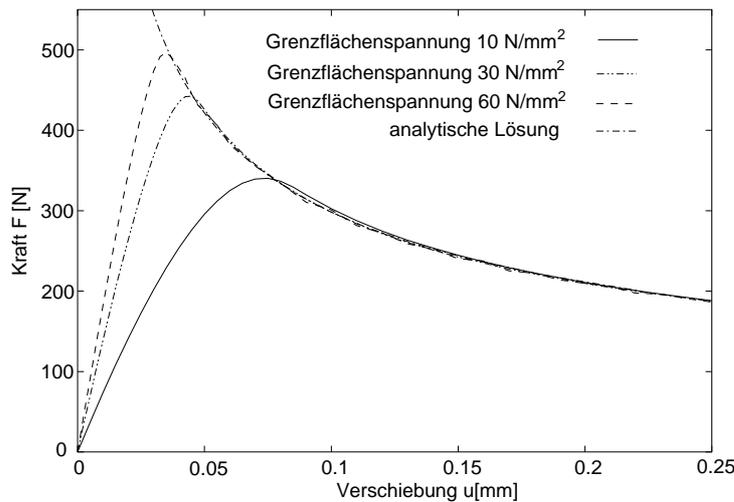


Abbildung 9.15: DCB-Probe mit einem Anriss von 3 mm und unterschiedlich großen maximalen Grenzflächenspannungen

wird die Probe für die drei Grenzflächenspannungen $\bar{t}_3^{max} = 10/30/60 \frac{N}{mm^2}$ untersucht, wobei die Energiefreisetzungsrates konstant bei $\mathcal{G}_{Ic} = 0.222 \frac{N}{mm}$ belassen wird. Es ist sehr deutlich zu erkennen, dass die größte Bruchlast mit der maximalen Grenzflächenspannung ansteigt, wobei sich die numerische Lösung zunehmend der analytischen Lösung nach Gl.(A.7) annähert. Im Nachbruchbereich verhalten sich die numerische Lösung und die analytische Lösung nahezu identisch.

Aus den zuvor gezeigten Untersuchungen sollen nun einige Schlußfolgerung gezogen werden:

Die numerischen Untersuchungen haben gezeigt, dass die Form des Spannungsverlaufs im Entfestigungsmodell nur eine geringe Auswirkung auf die Ergebnisse der Simulation hat. Eine Identifizierung der Grenzflächeneigenschaften durch einen angepassten Verlauf der Spannungs-Separations Beziehung an experimentelle Daten scheint daher nur schwer möglich zu sein, siehe hierzu auch SCHNEIDER [120]. Den entscheidenden Einfluss auf den Verlauf der Last-Verschiebungskurve haben die Werte der kritischen Energiefreisetzungsrates und der maximalen Grenzflächenspannung. Mit dem Wert der maximalen Grenzflächenspannung kann die größte Bruchlast, also die Höhe des Peaks, gesteuert werden. Die kritische Energiefreisetzungsrates beeinflusst hingegen das Niveau der Last-Verschiebungskurve im Nachbruchbereich.

Aus numerischer Sicht hat sich das Entfestigungsmodell nach NEEDLEMAN mit dem kontinuierlichen, kubischen Verlauf der Grenzflächenspannungen als vorteilhaft gegenüber den stückweise linearen Modellen nach HILLERBORG bzw. nach TVERGAARD & HUTCHINSON erwiesen. Bei der Verwendung der konsistenten Materialtangente zusammen mit hohen Grenzflächenspannungen sind bei den stückweise linearen Entfestigungsmodellen numerische Problemen aufgetreten. Durch die Verwendung der Sekantensteifigkeit oder der Pseudotangente können diese Konvergenzprobleme umgangen werden, allerdings ist dann ein höherer numerischer Aufwand zu erwarten.

9.2 ENF-Probe

Der „End Notched Flexure“-Test ist neben dem „End Loading Split“ (ELS) Test - siehe hierzu Anhang A.3 - ein weit verbreiteter interlaminarer Bruchtest für den Modus II [33], [21]. Der experimentelle Aufbau des ENF-Tests kann Abb. 9.16 entnommen werden.

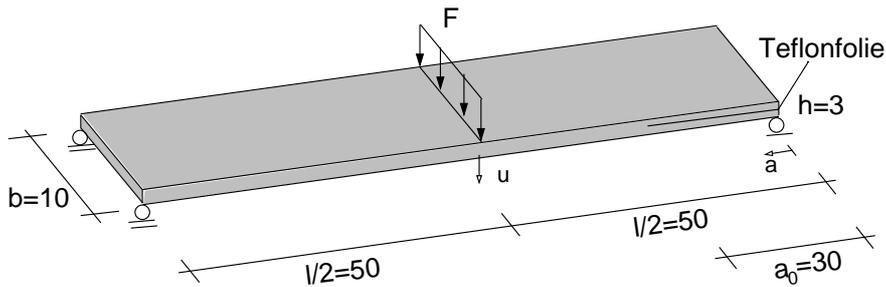


Abbildung 9.16: Skizze der ENF-Probe

Der Test besteht aus einer Probe, die an ihren Enden vertikal gelenkig gelagert wird. In der Probenmitte erfolgt die Lasteinleitung F - siehe Abb. 9.17. Als Material für die Probe wird Aluminium mit einem Elastizitätsmodul von $69000 \frac{N}{mm^2}$ und einer Querdehnzahl von $\nu = 0.3$ verwendet. Die beiden Metallprofile sind durch einen spröden Kleber auf Epoxidharzbasis, wie er auch für Faserverbundlamine verwendet wird, miteinander verbunden. Am rechten Ende der Probe ist mittels einer Teflonfolie ein Anriss der Länge $a_0 = 30 \text{ mm}$ eingearbeitet worden.

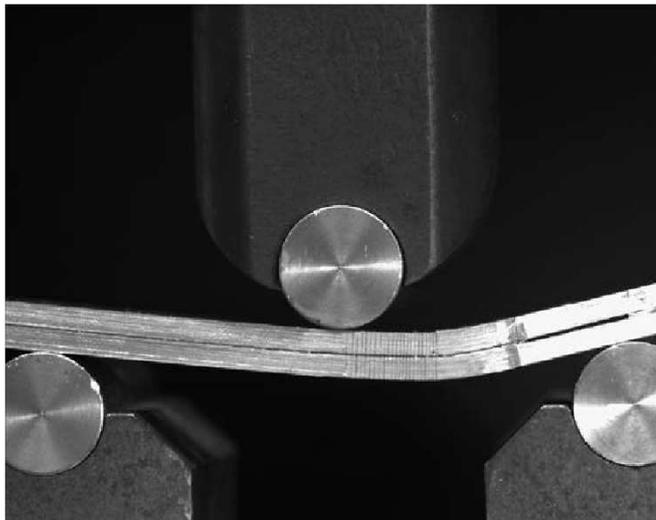


Abbildung 9.17: Experimenteller Aufbau der ENF-Probe

Die kritische Energiefreisetzungsrate ist experimentell zu $\mathcal{G}_{IIc} = 1.45 \frac{N}{mm}$ [57] ermittelt worden. Die maximale Grenzflächenspannung ist mit $\bar{t}_1^{max} = 40 \frac{N}{mm^2}$ ange-

geben. Das Risswachstum der ENF-Probe ist bei einer weggesteuerten Versuchsdurchführung für eine Risslänge von $a \geq 0.35 L$ stabil - siehe CARLSSON & PIPES [34] Kapitel 13.2.1.

Die Probe wird mit zwei Lagen von volumetrischen Schalenelementen und einer Lage von Grenzflächenelementen diskretisiert. Die Breite der Probe wird mit einem Element abgebildet. Insgesamt besteht das FE-Netz aus 148 volumetrischen Schalenelementen, 69 Grenzflächenelementen und 5 Kontaktelementen. Die Kontaktelemente sind im Bereich des vorgefertigten Anrisses zwischen den Schalenelementen angeordnet - siehe Abb. 9.18. Sie verhindern die Durchdringung der beiden Lagen. Als Kontaktelemente werden Grenzflächenelemente, wie sie im Abschnitt 8.3 beschrieben werden, eingesetzt. Eine hohe Strafzahl von $1 \cdot 10^7 \frac{N}{mm^3}$ verhindert die Durchdringungen der Schalenlagen in Normalenrichtung. In den beiden tangentialen Richtungen können sich die Schalenelemente ungehindert bewegen.

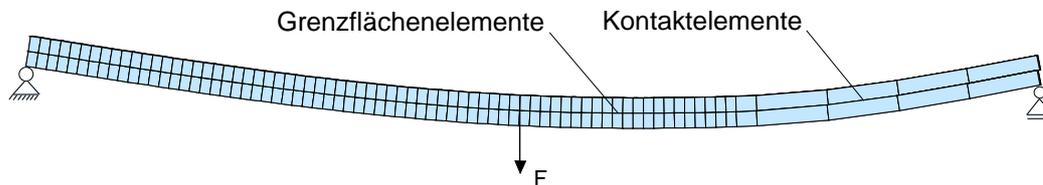


Abbildung 9.18: FE-Modell der ENF-Probe

Die Abbildungen 9.19 und 9.21 zeigen die Ergebnisse aus der FE Simulation der ENF-Probe. In den Schaubildern ist die äussere Kraft F über der Verschiebung u am Kraftangriffspunkt aufgetragen. Die Simulationsrechnungen liefern eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung, die sich aus Gl.(A.8), Gl.(A.10) und Gl.(A.11) zusammensetzt. Die Last-Verschiebungskurve, die sich aus der Simulation der ENF-Probe ergibt, ist im Vergleich zur Last-Verschiebungskurve der DCB-Probe auch schon für ein grobes FE-Netz glatt. Ein Grund hierfür liegt darin, dass sich bei der ENF-Probe wegen der relativ hohen Energiefreisetzungsrate im Modus II immer mehrere Grenzflächenelemente gleichzeitig im Entfestigungsprozess befinden.

Für das bilineare Modell nach HILLERBORG sind unterschiedlich große q_1 Werte untersucht worden, wie es in Abb. 9.19 für den Fall $q_1 = 1.5/3/20$ dokumentiert ist. Im Bereich der Durchbiegung bis zu $u = 0.5 mm$ sind die Ergebnisse der Simulation nahezu identisch mit der analytischen Lösung der Gl.(A.8). Ab diesem Bereich beginnt die Schädigung der ersten Grenzflächenelemente am Anriss und das FE-Modell verhält sich zunehmend weicher im Vergleich zur analytischen Lösung. Die maximale Bruchlast beträgt bei allen drei Rechenläufen mit unterschiedlichen q_1 Werten 220 N. Sie ist unabhängig von der Form des Spannungs-Separations-Modells und wird bei einer Durchbiegung von $u = 4.5 mm$ erreicht. Nachdem die ersten Grenzflächenelemente vollständig versagt haben, fällt die Last-Verschiebungskurve im Wert stark ab - siehe auch Gl.(A.10), wobei sich die Ergebnisse für die drei Entfestigungsmodelle geringfügig voneinander unter-

scheiden. Hat sich der Riss in der Struktur auf eine Länge von $a = 50 \text{ mm}$ erweitert Abb. 9.20, so wächst bei der Durchbiegung von $u = 6.0 \text{ mm}$ die Last wieder an. Ab einer Verschiebung von $u = 6 \text{ mm}$ zeigen die numerischen Ergebnisse und die analytische Lösung der Gl.(A.14) dann auch einen übereinstimmenden Verlauf. Von den drei untersuchten Entfestigungsmodellen zeigt der Rechenlauf mit dem

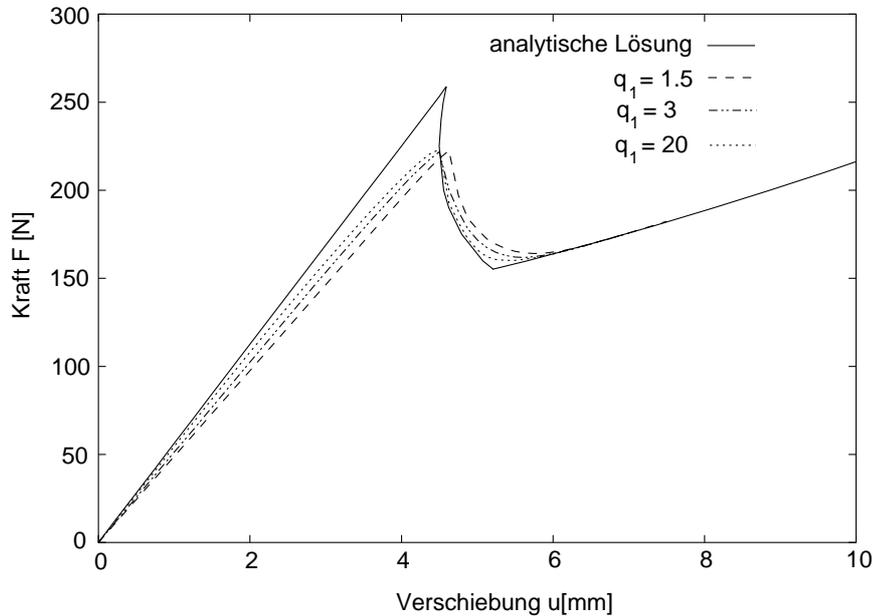


Abbildung 9.19: Last-Verschiebungskurve der ENF-Probe mit dem bilinearen HILLERBORG-Modell und der maximalen Grenzflächenspannung $\bar{t}_1^{max} = 40 \frac{N}{mm^2}$

Wert $q_1 = 20$ die beste Übereinstimmung mit der analytischen Lösung. Für höhere q_1 Werte verändert sich die Last-Verschiebungskurve nicht weiter. Die Form des Entfestigungsmodells hat nur eine geringe Auswirkung auf den Verlauf der Last-Verschiebungskurve. Selbst bei einem eher unphysikalisch anmutenden Verlauf der Spannungs-Separationsbeziehung von $q_1 = 1.5$ ergeben sich akzeptable Simulationsergebnisse. Die dargestellten Last-Verschiebungskurven sind verschiebungsgesteuert berechnet worden. Wird anstelle der Verschiebungssteuerung das Bogenlängenverfahren verwendet, so gelangt man zu denselben Ergebnissen.

Die Last-Verschiebungskurven der ENF-Probe, die sich mit dem Entfestigungsmodell nach NEEDLEMAN ergeben, sind in der Abb. 9.21 dargestellt. Für die Grenzflächenspannung $\bar{t}_1^{max} = 40 \frac{N}{mm^2}$ liefern beide Entfestigungsmodelle - das Modell von HILLERBORG und das von NEEDLEMAN - identische Last-Verschiebungskurven. Neben dem vorgegebenen Wert für die maximale Grenzflächenspannung von $\bar{t}_1^{max} = 40 \frac{N}{mm^2}$ sind weitere Werte $\bar{t}_1^{max} = 10/20/80 \frac{N}{mm^2}$ untersucht worden. Wird eine höhere Grenzflächenspannung bei gleicher Energiefreisetzungsrate verwendet, so nähert sich das Ergebnis immer weiter der analytischen Lösung an. Für kleinere Grenzflächenspannungen ist der Lastrückgang, der bei der analytischen Lösung für eine Verschiebung von 4.5 mm beginnt, weniger stark ausgeprägt.

Wiederum zeigt sich bei diesem Simulationsbeispiel, dass die Form des Entfestigungsmodells auf die Last-Verschiebungskurven nur einen geringen Einfluss hat. Hingegen beeinflusst die maximale Grenzflächenspannung die Berechnungsergeb-

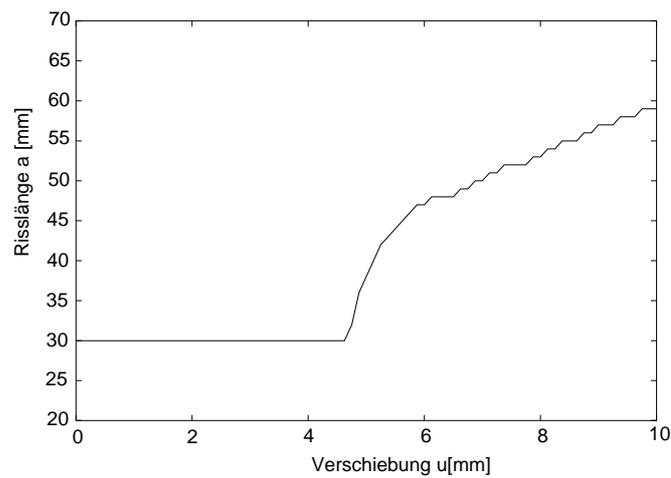


Abbildung 9.20: Risslänge der ENF-Probe mit dem bilinearen HILLERBORG-Modell und der maximalen Grenzflächenspannung $\bar{t}_1^{max} = 40 \frac{N}{mm^2}$

nisse sehr stark. Numerische Probleme bei der Gleichungslösung, wie sie im Abschnitt 9.1 beschrieben werden, sind bei der Simulation der ENF-Probe nicht aufgetreten.

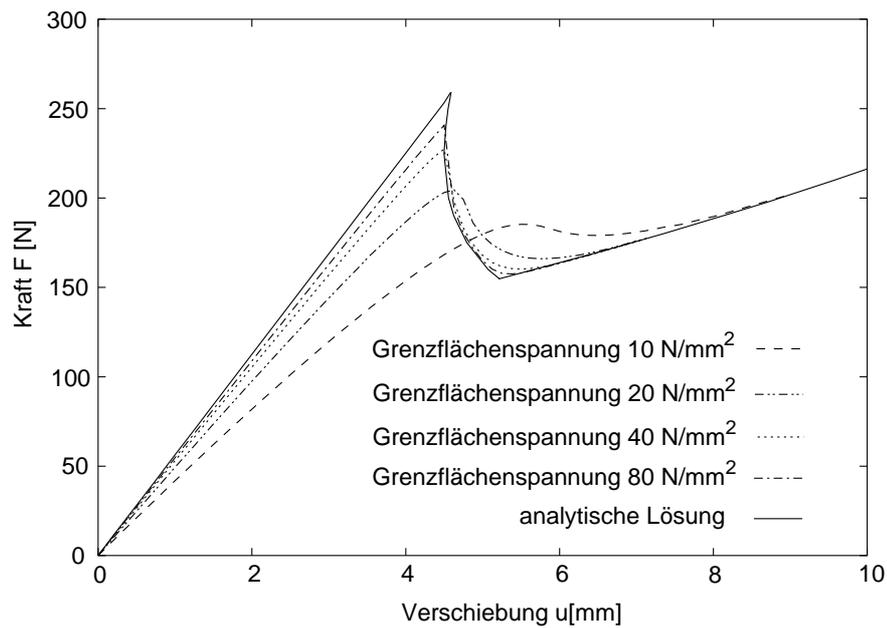


Abbildung 9.21: Last-Verschiebungskurve der ENF-Probe mit dem NEEDLEMAN-Modell für unterschiedlich große maximale Grenzflächenspannungen

9.3 FRMM-Probe

Der „Fixed Ratio Mixed Mode“-Test ist neben dem MMB-Test [113] ein oft untersuchter interlaminarer Bruchversuch, bei dem die Rissentwicklung im Modus I und im Modus II gleichzeitig auftritt. Die untersuchte Probe besteht aus Faserverbundmaterial und ist seitlich auf der Länge von $a_0 = 45 \text{ mm}$ geschlitzt [35] - siehe Skizze in der Abb. 9.22. An der ungeschlitzten Seite wird die Probe fest in die Versuchsapparatur eingespannt. Am oberen Arm der geschlitzten Seite der Probe wird die Last F verschiebungsgesteuert in die Struktur eingeleitet. GOYLA U.A. [60] geben eine maximale Ausgangsrisslänge von $a_0 < 0.41 L$ an, damit eine stabile Rissentwicklung während der Versuchsdurchführung gewährleistet bleibt.

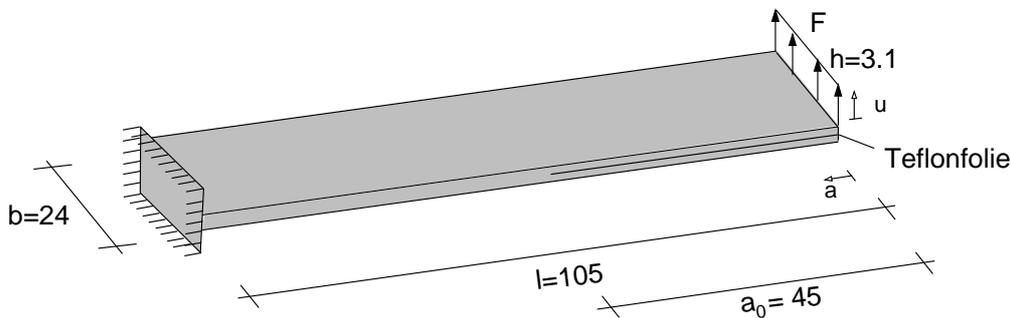


Abbildung 9.22: Skizze der FRMM-Probe

Die Elastizitätsparameter der untersuchten FRMM-Probe lauten:

$$E_{11} = 130000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, E_{22} = 8000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, G_{12} = 6000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, G_{23} = 8000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \nu_{12} = 0.27$$

In CHEN U.A. [35] ist für die Materialeigenschaft der Grenzfläche, die die beiden Faserverbundschichten miteinander verbindet, die kritische Energiefreisetzungsrate im Modus I von $\mathcal{G}_{Ic} = 0.257 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$ angegeben. Im Modus II beträgt die Energiefreisetzungsrate $\mathcal{G}_{IIc} = 0.856 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$. Die beiden kritischen Energiefreisetzungsraten sind jeweils durch einen interlaminaren Bruchversuch im Modus I bzw. im Modus II ermittelt worden. Die gesamte kritische Energiefreisetzungsrate für den FRMM-Versuch ist experimentell zu $\mathcal{G}_c = 0.434 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$ bestimmt worden. Die maximale Grenzflächenspannung ist für beide Modi mit $\bar{t}_1^{\text{max}} = 48 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ und $\bar{t}_3^{\text{max}} = 48 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ identisch angegeben. Der elastische Kennwert für den „Mixed-Mode“-Fall - siehe Gl.(8.21) bzw. Gl.(8.42) - beträgt $D_m = 1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3}$.

Die analytische Lösung für die Last-Verschiebungskurve der FRMM-Probe kann für eine lineare bzw. für eine quadratische Interaktion der Energiefreisetzungsraten wie folgt berechnet werden:

Nach Gl.(A.20) herrscht für die auf einem Balkenmodell basierende analytische Lösung der FRMM-Probe während des Risswachstums ein konstantes Verhältnis zwischen der Energiefreisetzungsrate im Modus I und jener im Modus II von:

$$0.75 \cdot \mathcal{G}_I = \mathcal{G}_{II} \quad (9.1)$$

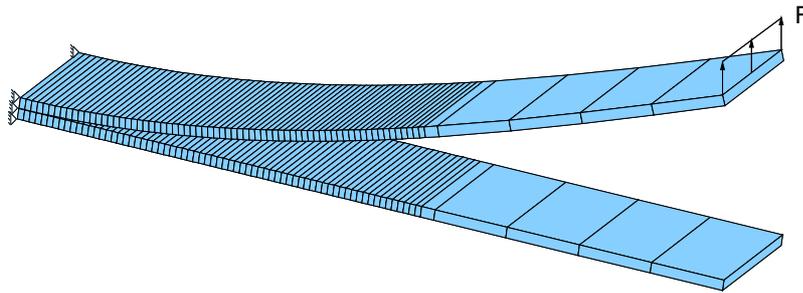


Abbildung 9.23: FE-Modell der FRMM-Probe bei einer Verschiebung von $u = 20 \text{ mm}$

Die Versagensbedingung für die Grenzfläche im „Mixed-Mode“-Fall mit der linearen Interaktion $n = 1$ lautet nach Gl.(8.41):

$$\frac{\mathcal{G}_I}{\mathcal{G}_{Ic}} + \frac{\mathcal{G}_{II}}{\mathcal{G}_{IIc}} = 1 \quad (9.2)$$

Daraus kann mit dem Verhältnis in Gl.(9.1) die Energiefreisetzungsrate, die zum Versagen der Grenzfläche führt, für den Modus I zu $\mathcal{G}_{Ic} = 0.2098 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$ und für den Modus II zu $\mathcal{G}_{IIc} = 0.1574 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$ ermittelt werden. Damit ergibt sich die kritische Energiefreisetzungsrate für eine lineare Interaktion zu:

$$\mathcal{G}_c = \mathcal{G}_{Ic} + \mathcal{G}_{IIc} = 0.367 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad (9.3)$$

Mit diesem Wert wird die analytische Lösung berechnet - siehe Abb. 9.24.

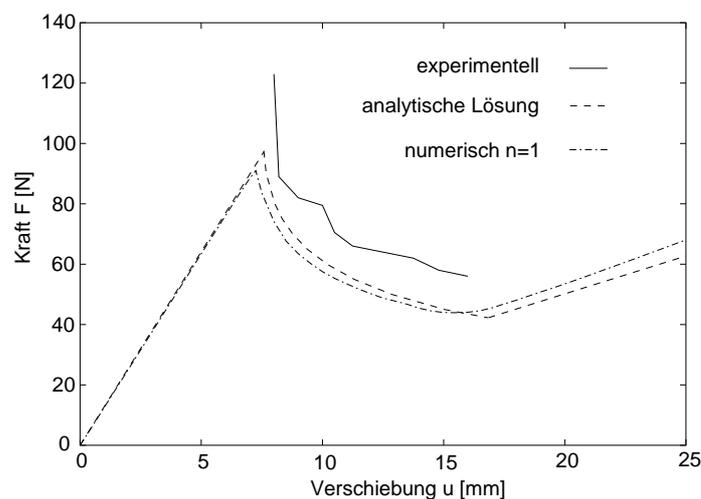


Abbildung 9.24: Last-Verschiebungskurve der FRMM-Probe für das Modell von DÁVILA & CAMANHO mit einer linearen Interaktion im Vergleich zur analytischen Lösung und den experimentellen Ergebnissen

Die Versagensbedingung für die Grenzfläche im „Mixed-Mode“-Fall mit der quadratischen Interaktion $n = 2$ lautet:

$$\left(\frac{\mathcal{G}_I}{\mathcal{G}_{Ic}}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{G}_{II}}{\mathcal{G}_{IIc}}\right)^2 = 1 \quad (9.4)$$

Daraus kann mit dem Verhältnis in Gl.(9.1) die Energiefreisetzungsrates, die zum Versagen der Grenzfläche führt, für den Modus I zu $\mathcal{G}_{Ic} = 0.2507 \frac{N}{mm}$ und für den Modus II zu $\mathcal{G}_{IIc} = 0.1880 \frac{N}{mm}$ ermittelt werden. Die kritische Energiefreisetzungsrates für die analytische Lösung mit einer quadratischen Interaktion lautet damit:

$$\mathcal{G}_c = \mathcal{G}_{Ic} + \mathcal{G}_{IIc} = 0.439 \frac{N}{mm} \quad (9.5)$$

Mit diesem Wert wird dann die analytische Lösung berechnet - siehe Abb. 9.25.

Das betrachtete FE-Modell besteht aus 148 Schalenelementen und 69 Grenzflächenelementen; Kontaktelemente kommen bei diesem Beispiel nicht zum Einsatz. Abb. 9.23 zeigt die FRMM-Probe mit einer aufgebrachten Verschiebung von $u = 20 \text{ mm}$. Bei diesem Verschiebungszustand ist die Probe bereits vollständig delaminiert und der Riss hat sich bis kurz vor die Einspannung ausgebreitet.

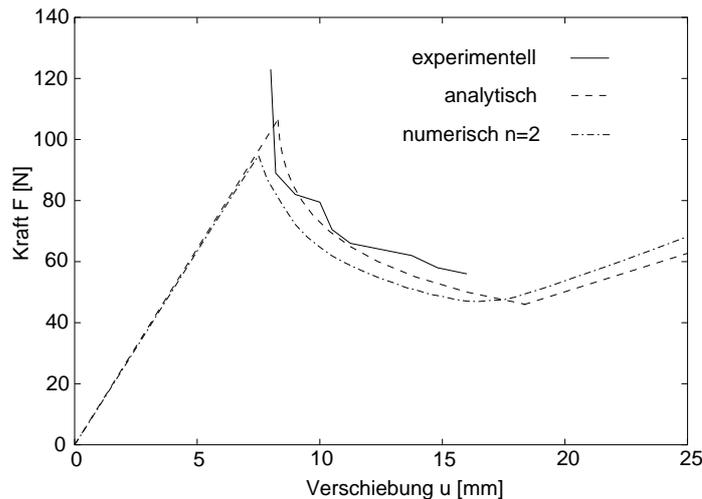


Abbildung 9.25: Last-Verschiebungskurven der FRMM-Probe für das Modell von DÁVILA & CAMANHO mit einer quadratischen Interaktion im Vergleich zur analytischen Lösung und den experimentellen Ergebnissen

In den Abbildungen 9.24 und 9.25 wird zur Validierung des „Mixed-Mode“-Modells von DÁVILA & CAMANHO die numerische Last-Verschiebungskurven der analytischen Last-Verschiebungskurve gegenübergestellt, wobei die lineare und die quadratische Interaktionsbedingung für die Energiefreisetzungsrates untersucht wird. Vor dem Erreichen der Bruchlast zeigt das numerische und das analytische Ergebnis für die lineare wie auch für die quadratische Interaktionsbedingung einen identischen Verlauf. Kurz vor dem Erreichen der größten Bruchlast fallen die numerischen Lösungen gegenüber den analytischen Lösungen im Wert ein wenig ab. Dieses Verhalten wird durch die beginnende Schädigung der Grenzflächenelemente ausgelöst. Nachdem die größte Bruchlast überschritten ist, beginnt der Riss zu

wachsen, wobei die Last-Verschiebungskurven je nach Interaktionsbedingungen voneinander abweichen. Die numerische und die analytische Lösung zeigt für eine identische Interaktionsbedingung eine gute Übereinstimmung im Verlauf, wobei jedoch das Lastniveau der numerischen Lösungen im Vergleich zur analytischen Lösung niedriger ist.

Im Nachbruchverhalten für $u > 17 \text{ mm}$ erweist sich die numerische Lösung sowohl für $n = 1$ und $n = 2$ gegenüber den analytischen Lösungen als steifer. Dieses Verhalten ist dadurch zu erklären, dass die Grenzflächenelemente, die direkt an der Einspannung liegen, aufgrund der kleinen Verformungen nicht delaminieren, da sie durch die Einspannung daran gehindert werden. Diese nicht delaminierten Grenzflächenelemente versteifen den belasteten Kragarm der Probe zusätzlich, da er im Vergleich zur analytischen Lösung Gl.(A.19) dann eine kürzere auskragende Länge besitzt.

Schließlich werden in den Abbildungen 9.24 und 9.25 noch die numerischen Ergebnisse mit den experimentellen Daten von CHEN u.A. [35] verglichen. Dieser Vergleich dient der Validierung der beschriebenen Methoden zur Analyse von Delaminationsvorgängen. Die experimentellen Daten liegen nur für den Bereich vor, in dem der Riss stark anwächst, nämlich zwischen $8 \text{ mm} < u < 16 \text{ mm}$. Die Berechnung mit der quadratischen Interaktionsbedingung trifft die experimentellen Daten besser als die Analyse mit der linearen Interaktion. Allerdings liegen die experimentellen Daten im Wert immer noch ein wenig höher als die analytischen Ergebnisse, die mit einer quadratischen Interaktion ermittelt wurden. In diesem Beispiel sind wiederum numerische Schwierigkeiten aufgetreten, wie sie im Abschnitt 9.1 ausführlich beschrieben werden, weshalb die Berechnungen mit der Pseudotangente durchgeführt worden sind. Eine weitere Erhöhung des Interaktionsparameters n beeinflusst den Verlauf der Last-Verschiebungskurve kaum noch. Damit erweist sich der Vorschlag für den Interaktionsparameter $n = 2$ von WHITCOMB als sinnvoll. Obwohl die experimentell ermittelten Werte größer sind als die Berechnungsergebnisse mit einer quadratischen Interaktion, lässt sich dennoch eine gute Voraussagefähigkeit des FE-Modells erkennen, da sie den Verlauf der experimentellen Daten sehr gut abbilden.

Die Abb. 9.26 stellt die Grenzflächenspannungen der ersten beiden Grenzflächenelemente an der Risspitze gegenüber den aufgebrachten Verschiebungen dar. Während des Entfestigungsprozesses treten sowohl Normalspannungen auf - siehe Abb. 9.26 (a), als auch Schubspannungen - siehe Abb. 9.26 (b). Das erste Element steht durchgängig unter einer Zugspannung und versagt bei der Verschiebung von $u = 8.25 \text{ mm}$ vollständig unter einer „Mixed-Mode“-Beanspruchung. Das zweite Element wird zunächst auf Druck beansprucht. Erst wenn die Schädigung beim ersten Element beginnt, wechselt die Normalspannung vom Druckbereich in den Zugbereich. Im Weiteren wird nun das „Mixed-Mode“-Entfestigungsmodell von TVERGAARD & HUTCHINSON zur Simulation der FRMM-Probe genutzt. Das Modell wird einmal in seiner bilinearen Form mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$ benutzt und das andere Mal mit trilinearem Ansatz von $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.6$ verwendet - siehe dazu Abb. 8.7. Das Modell von TVERGAARD & HUTCHINSON erweist sich dabei als weniger geeignet, die experimentellen Daten der FRMM-Probe zu simulieren als das Entfestigungsmodell von DÁVILA & CAMANHO. Die maximale Bruchlast wird vom Modell stark unterschätzt, sodass der gesamte Verschiebungsbereich, in

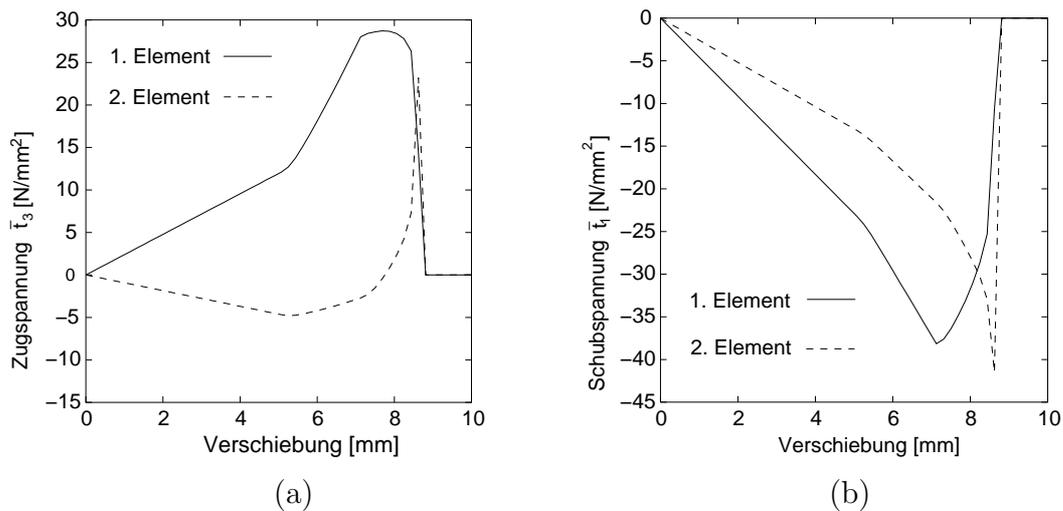


Abbildung 9.26: Grenzfächenspannungen \bar{t}_3 (a) und \bar{t}_1 (b) der ersten beiden Elemente an der Rissspitze aufgetragen über die Verschiebung

dem der Riss anwächst - also zwischen $7 \text{ mm} < u < 17 \text{ mm}$ - nur unzureichend wiedergegeben wird. Dieser Fakt hängt damit zusammen, dass die gesamte kritische Energiefreisetzungsrate \mathcal{G}_c nur von der Energiefreisetzungsrate im Modus I beeinflusst wird - siehe Gl.(8.33) und [3]. Daher ist das Modell für Fälle, bei denen sich die kritische Energiefreisetzungsrate maßgeblich aus den Anteilen \mathcal{G}_{Ic} und \mathcal{G}_{IIc} zusammensetzt, unbrauchbar. Wenn also wie in diesem Fall die Energiefreisetzungsrate im Modus II höher ist als die im Modus I, wird das Niveau des Entfestigungsastes unterschätzt. Ein signifikanter Unterschied zwischen den Last-Verschiebungskurven für das bilineare Modell und dem trilinearen Modell ist nicht auszumachen und beide Ergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung.

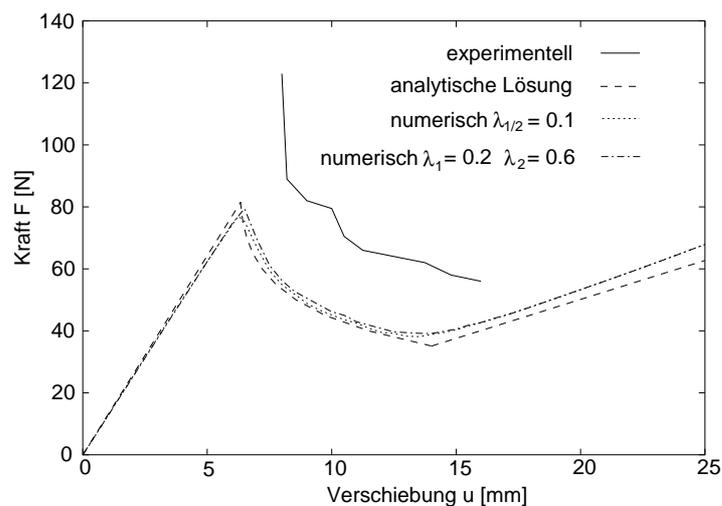


Abbildung 9.27: Last-Verschiebungskurven der FRMM-Probe für das Modell von TVERGAARD & HUTCHINSON mit experimentellen und analytischen Ergebnissen

9.4 Delamination eines gekrümmten Balkens

In diesem Beispiel wird der gekrümmte Balken unter Momentenlast der bereits im Kapitel 6.7 beschrieben wurde erneut behandelt. Allerdings wird der gekrümmte Balken um eine Grenzschicht erweitert mit deren Hilfe die Neigung der Struktur zur Delamination aufgrund von Quersugspannungen untersucht wird. Die Abmessungen, die Belastung und die Materialdaten werden ebenfalls aus dem Kapitel 6.7 übernommen, allerdings wird ein 180°-Kreisausschnitt untersucht. Die Delaminationsschicht befindet sich im Bereich der maximalen Radialspannungen bei $r_d = 14$ mm - siehe Abb. 9.28. Die Einleitung des Moments in die Struktur erfolgt mittels zweier Stahlscheiben die jeweils an den Balkenenden angebracht sind.

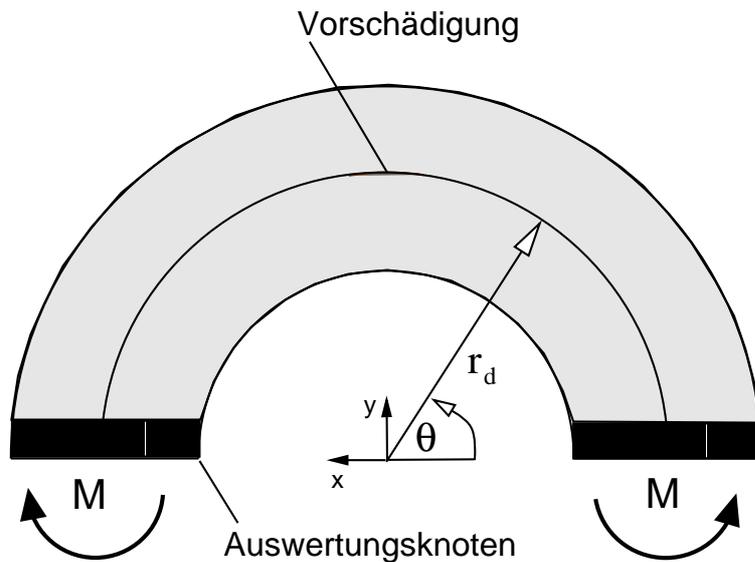


Abbildung 9.28: Kreisrunder Träger unter Momentenlast mit Delaminationsschicht

Der gekrümmte Balken wird aus Volumen- und Grenzflächenelementen modelliert. Über die Querschnittsdicke werden 20 Elemente verwendet und der Umfang wird mit 33 Elementen modelliert. Die Stahlscheiben werden aufgrund ihrer großen Steifigkeit als Starrkörper abgebildet. Die Momentenlast wird mittels Folgelasten eingeleitet, um auch bei großen Deformationen ein lokales einknicken der Struktur zu verhindern. Die Struktur wird am oberen Rand in z-Richtung gelagert um ein ausknicken der Struktur zu verhindern. Zur Berechnung ist das FE-Programm LS-DYNA in der Version 971 [89] genutzt worden. In diesem Programm ist der im Kapitel 8.2.4 beschriebende Delaminationsalgorithmus implementiert worden und als Materialroutine *MAT138 „MAT-COHESIVE-MIXED-MODE“ verfügbar - siehe hierzu auch [51] und [56].

Materialdaten der Grenzschicht:

$$D_m = 1 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^3}, \bar{t} = 0.5 \frac{N}{mm^2}, \mathcal{G}_c = 0.4 \frac{N}{mm}$$

Das Moment von 100 Nmm wird linear innerhalb eines Zeitraumes von 4 s in die Struktur eingeleitet. Um den örtlichen Beginn der Delamination besser beeinflus-

sen zu können werden die beiden Grenzflächenelemente bei $\theta=90^\circ$ vorgeschädigt. Die Vorschädigung erfolgt durch die Halbierung der Energiefreisetzungsrate auf $\mathcal{G}_c = 0.2 \frac{N}{mm}$.

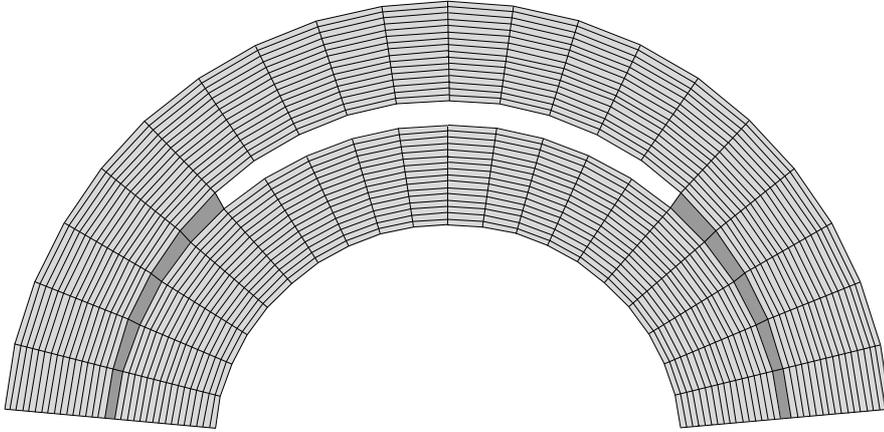


Abbildung 9.29: Kreisrunder Träger mit Delaminationsschicht bei einem Moment von 60 Nmm

Die Deformation des gekrümmten Balkens mit Grenzschrift wird mit der Deformation des Balken ohne Grenzschrift verglichen. Dazu wird die Verschiebung in x- und y-Richtung am inneren Randknoten - siehe Abb. 9.28 - an der Lasteinleitung über dem Lastmoment aufgetragen. Bei einem Moment von 12.5 Nmm versagen die beiden vorgeschädigten Elemente bei $\theta=90^\circ$ und das Lastverschiebungsverhalten der Struktur wird zunehmend weicher - siehe Abb. 9.30. Erreicht die Momentenlast 25 Nmm so versagen die ersten nicht geschädigten Grenzflächenelemente. Bei dem Moment von 60 Nmm ist die Delamination bis zu $\theta=45^\circ$ bzw. $\theta=135^\circ$ fortgeschritten - siehe Abb. 9.29.

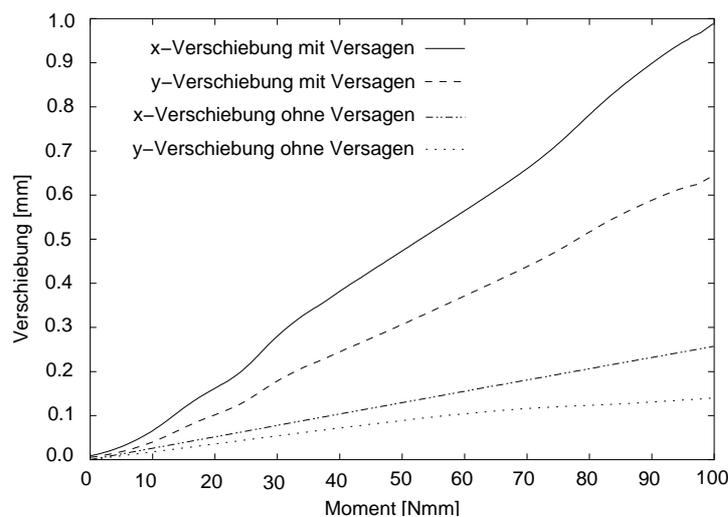


Abbildung 9.30: Verschiebungen des gekrümmten Balkens mit und ohne Delaminationsschicht aufgetragen über der Momentenlast

Kapitel 10

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung von Schalentragwerken und die Analyse des postkritischen Verhaltens von Faserverbundstrukturen. Ein erster Schwerpunkt bildet die Beschreibung der Verformung dünnwandiger Schalentragwerke aus isotropen und transversal isotropen Materialien. Dabei wird besonders auf die Erfassung der transversalen Spannungsfelder und ihre Auswirkung auf das Verformungsverhalten der untersuchten Strukturen Wert gelegt. Ein zweiter Schwerpunkt liegt auf der Berücksichtigung der Versagensvorgänge innerhalb von Faserverbundlaminate durch die fortschreitende Delamination. Die theoretische Beschreibung und die numerische Umsetzung der oben genannten Punkte mit der Methode der finiten Elemente ist Gegenstand dieser Arbeit. Bei der Auswahl der numerischen Beispiele zu den Schalentragwerken sowie der Delamination ist besonderer Wert auf die Möglichkeit der Verifikation und Validierung der Ergebnisse anhand analytischer Lösungen und experimenteller Ergebnisse gelegt worden.

Ein volumetrisches Schalenelement mit trilinearen Ansatzfunktionen ohne Rotationsfreiheitsgrade zur Berechnung der Schalenstrukturen wird vorgestellt. Die Neigung des Schalenelements zur künstlichen Versteifung wird durch die Verwendung etablierter numerischer Verfahren verhindert. Die „Assumed Strain“-Methode wird gegen Querschubversteifung und Dickenversteifung angewandt. Mit der „Enhanced Assumed Strain“-Methode, die auf einer gemischten finiten Elementformulierung beruht, wird die Dickendehnung erweitert, um so den Querdehndefekt einer 6-Parameterschalentheorie zu verhindern. Unterschiedliche Möglichkeiten zur Erweiterung der Dickendehnung werden vorgestellt und ihre Leistungsfähigkeit an numerischen Beispielen demonstriert. Die Erweiterung der Dickendehnung mit drei Parametern hat sich als optimal herausgestellt. Sie ermöglicht mit einem geringen numerischen Mehraufwand gegenüber einem reinem Verschiebungsmodell das Bestehen des Biegepatchtests für Platten. Das volumetrische Schalenelement zeigt bei dünnen Strukturen eine ähnlich gute Leistungsfähigkeit wie ein Schalenelement basierend auf der 5-Parametertheorie mit einem degenerierten Werkstoffmodell. Jedoch wächst die Konditionszahl der volumetrischen Schalen mit der vierten Potenz vom Verhältnis der charakteristischen Länge zur Querschnittshöhe, während die Konditionszahl einer 5-Parameterschalentheorie nur mit der zweiten Potenz anwächst, was bei sehr dünnen Strukturen zu einer schlechten Konditionierung des Gleichungssystems führt.

Die Mehrschichttheorie für Schalen wird verwendet, um die kinematische Be-

schreibung der Schalenverformungen in Dickenrichtung zu verbessern. Sie erweist sich als geeignetes Instrument zur genauen Analyse der transversalen Querschubspannungen und transversalen Dickenspannung bei geschichteten Strukturen und dicken Querschnitten. Es hat sich gezeigt, dass die EAS-Methode Versteifungen aufgrund des nicht erfassten Possioneffekts durch die Erweiterung des Dickendehnungsfeldes um einen linearen Anteil verhindert. Jedoch wird die Dickendehnung durch die EAS-Methode nicht erweitert, falls die Dickendehnung aus einer Auflast oder durch die Krümmung der Struktur nichtkonstante Anteile erhält. Die EAS-Methode ist dabei in der Lage die Konvergenzeigenschaften bei Verfeinerung des FE-Netz über die Dicke im Fall der Mehrschichttheorie zu verbessern. Dieses Verhalten wird am Beispiel eines Kragarms unter Auflast und eines gekrümmten Trägers gezeigt.

Zur Beschreibung der fortschreitenden Delamination wird die Grenzflächenschädigungsmechanik genutzt. Die Zwischenschicht, die einzelne Lamina miteinander verbindet, wird näherungsweise als Grenzfläche aufgefasst. Dazu wird das Rissmodell von BARENBLATT & DUGDALE verwendet, wobei die Betrachtung auf sprödes Grenzflächenverhalten beschränkt bleibt. Die Energiefreisetzungsrate stellt den entscheidenden Wert zur Bestimmung der Rissöffnung dar. Speziell entwickelte Grenzflächenelemente werden zur Beschreibung des Rissfortschritts eingesetzt. Diese dreidimensionalen Elemente werden in Richtung der Grenzfläche bilinear interpoliert und können so zusammen mit den volumetrischen Schalenelementen verwendet werden. Im Schrifttum bekannte Modelle, die das Entfestigungsverhalten der Grenzfläche beschreiben, werden vorgestellt. Dazu gehören Entfestigungsmodelle mit einem bilinearen, einem trilinearen und einem kubischen Verlauf der Grenzflächenspannung über der Separation. Der Vergleich der Entfestigungsmodelle erfolgt an interlaminaren Bruchproben. Im Modus I wird die DCB-Probe und im Modus II die ENF-Probe untersucht. Die diskutierten Interaktionsmöglichkeiten für den „Mixed-Mode“ werden an der FRMM-Probe untersucht, wobei sich die quadratische Interaktion der Energiefreisetzungsraten als sinnvoll erweist. Insgesamt konnte festgestellt werden, dass die Variation der Form des Entfestigungsverlaufs zur Anpassung der numerischen Ergebnisse an experimentelle Last-Verschiebungskurven nicht geeignet ist. Die maximale Grenzflächenspannung beeinflusst die größte Bruchlast, während die kritische Energiefreisetzungsrate maßgeblich das Nachbruchverhalten steuert. Aus numerischer Sicht erweist sich das kubische Modell gegenüber den stückweise linearen Modellen als vorteilhaft, da keine numerischen Schwierigkeiten auftreten, wenn der materielle Tangentenoperator verwendet wird. Als numerisch besonders empfindlich zeigen sich die Entfestigungsmodelle für den Modus I. Mit der in dieser Arbeit teilweise verwendeten Pseudotangente kann das Problem mit deutlich erhöhtem Aufwand umgangen werden. Alternativ bietet sich auch die explizite Zeitintegration als Lösungsalgorithmus für die Bewegungsgleichung an, da hierbei keine Materialtangente aufgestellt werden muss BORG [20].

Abschließend kann festgestellt werden, dass die Kombination eines volumetrischen Schalenelements und eines dreidimensionalen Grenzflächenelements sich sehr gut zur Simulation von interlaminaren Schädigungsvorgängen eignet.

Bei der Untersuchung der interlaminaren Bruchproben, besonders bei der DCB-Probe, hat sich gezeigt, dass die Diskretisierungsdichte der Grenzfläche entscheidenden Einfluss auf die Erfassung der Vorgänge in der Prozesszone hat und damit die maximale Bruchlast und den Verlauf der Last-Verschiebungskurve stark beeinflusst. In ihren Approximationseigenschaften verbesserte Grenzflächenelemente könnten hier Abhilfe schaffen. Eine Verbesserung der Grenzflächenelemente ohne die Erhöhung der Knotenanzahl kann durch die Verwendung von hierarchischen Formfunktionen oder einer inkompatiblen Interpolation herbeigeführt werden. Erste Ansätze für den ebenen Fall finden sich bei CRISFIELD & ALFANO [39]. Das in dieser Arbeit beschriebene Grenzflächenelement ist auf kleine Deformationen beschränkt. Die Erweiterung auf große Deformationen oder zumindestens große Rotationen ist erstrebenswert, besonders wenn an die Anwendung im Zusammenhang mit Crashvorgängen gedacht ist. In der Literatur sind bisher nur wenige Veröffentlichungen zu diesem Thema zu finden. So beschreiben QIU & CRISFIELD und ALFANO [108] ein eindimensionales Grenzflächenelement mit einer mitdrehenden Formulierung. Bei ORITZ & PANDOLFI [104] findet sich eine Formulierung für große Verzerrungen.

Die in dieser Arbeit verwendeten Methoden zur Berechnung der Verformung und dem Versagen von Faserverbundstrukturen lassen sich auch auf die Analyse von strukturellen Klebverbindungen übertragen, jedoch sind die Kleber, die z.B. in der Automobilindustrie zu Einsatz kommen, meist zähmodifiziert und zeigen somit auch ein plastisches Verhalten. Dennoch können die hier vorgestellten Entfestigungsmodelle erfolgreich eingesetzt werden, indem die maximalen Grenzflächenstressspannungen bzw. die kritischen Energiefreisetzungsraten, die aus Substanz- und Bauteilversuchen für die Klebschicht gewonnen werden, zur Simulation der Klebverbindungen angesetzt werden - siehe FIOŁKA & GERLACH und MATZENMILLER [53].

Anhang A

Analytische Lösung der Delaminationsproben

Das Gesamtpotential setzt sich nach Gl.(3.122) aus dem inneren Potential und dem äußeren Potential zusammen.

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a \quad (\text{A.1})$$

Mit dem 1. Satz von CASTIGLIANO ergibt sich aus der Ableitung des inneren Potentials nach der Kraft F die Verschiebung u des Kraftangriffspunktes in Richtung dieser Kraft [69].

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial F} = u \quad (\text{A.2})$$

Die Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} folgt aus der Ableitung des Gesamtpotentials nach der Bruchfläche $\partial A = b \cdot \partial a$:

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial \Pi}{\partial A} = -\frac{\partial \Pi}{b \partial a} \quad (\text{A.3})$$

A.1 Analytische Lösung der DCB-Probe

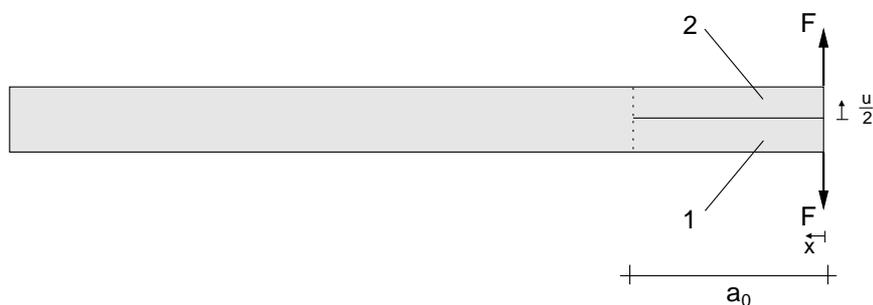


Abbildung A.1: Balkenmodell der DCB-Probe

Das innere Potential der DCB-Probe lautet:

$$\Pi_i = \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI_1} dx + \int_0^a \frac{M_2^2}{2EI_2} dx$$

$$M_1 = F \cdot x \quad M_2 = F \cdot x$$

$$\Pi_i = \int_0^a \frac{F^2 x^2}{2EI_1} dx + \int_0^a \frac{F^2 x^2}{2EI_2} dx$$

mit den Flächenträgheitsmomenten $I_1 = I_2 = I$ ergibt sich

$$\Pi_i = \frac{F^2 a_0^3}{3EI}$$

Das äußere Potential lautet:

$$\Pi_a = -Fu$$

Die Verschiebung der Kragarmspitze mit einem konstanten Anriss $a = a_0$ ergibt sich mit Gl.(A.2) zu:

$$u = \frac{2Fa^3}{3EI} \quad (\text{A.4})$$

Das Gesamtpotential Π beträgt:

$$\Pi = \frac{F^2 a^3}{3EI} - \frac{2F^2 a^3}{3EI} = -\frac{F^2 a^3}{3EI} \quad (\text{A.5})$$

Die Energiefreisetzungsrate für die DCB-Probe ergibt sich mit Gl.(A.3) und Gl.(A.5) zu:

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial \Pi}{b \partial a} = \frac{F^2 a^2}{b EI}$$

$$a = \sqrt{\frac{\mathcal{G} b EI}{F^2}} \quad (\text{A.6})$$

mit Gl.(A.4) und Gl.(A.6) ergibt sich für den Fall des Risswachstums $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$ mit $a > a_0$ folgende Beziehung zwischen der Last F und der Verschiebung u :

$$u = \frac{2(\mathcal{G}_c b EI)^{1.5}}{3 F^2 EI} \quad (\text{A.7})$$

A.2 Analytische Lösung der ENF-Probe

Das innere Potential der ENF-Probe lautet:

$$\Pi_i = \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI_1} dx + \int_0^a \frac{M_2^2}{2EI_2} dx + \int_a^{\frac{l}{2}} \frac{M_3^2}{2EI_3} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{M_4^2}{2EI_4} dx$$

mit $I = I_1 = I_2 = I_3/8 = I_4/8$ ergibt sich:

$$\Pi_i = \frac{F^2 l^3 + 12F^2 a_0^3}{768EI}$$

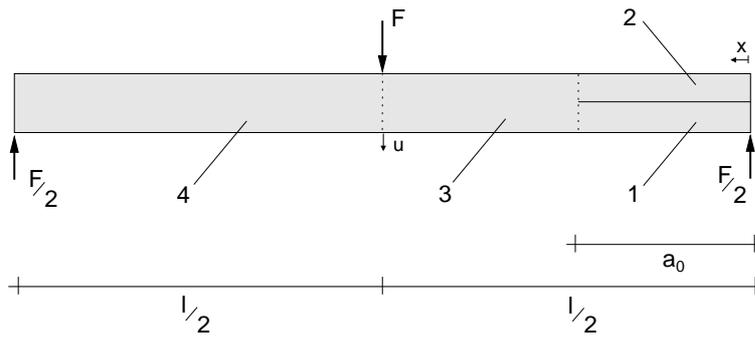


Abbildung A.2: Balkenmodell der ENF-Probe

Das äußere Potential lautet:

$$\Pi_a = -Fu$$

Die Durchbiegung am Lastangriffspunkt ergibt sich aus Gl.(A.2) mit einem konstanten Anriss $a = a_0$ zu:

$$u = \frac{Fl^3 + 12Fa^3}{384EI} \tag{A.8}$$

Die Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} folgt mit Gl.(A.3):

$$\mathcal{G} = \frac{3F^2a^2}{64bEI}$$

$$a = \sqrt{\frac{64bEI\mathcal{G}}{3F^2}} \tag{A.9}$$

Für den Fall des Risswachstums $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$ mit einer Risslänge von a zwischen $a_0 < a < \frac{l}{2}$ gilt mit Gl.(A.8) und Gl.(A.9) der folgende Zusammenhang zwischen der Verschiebung u und der Last F :

$$u = \frac{Fl^3 + 12F\left(\frac{64bEI\mathcal{G}_c}{2F^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{384EI} \tag{A.10}$$

Für eine Risslänge $a > \frac{l}{2}$ ist das folgende Balkenmodell zu untersuchen:

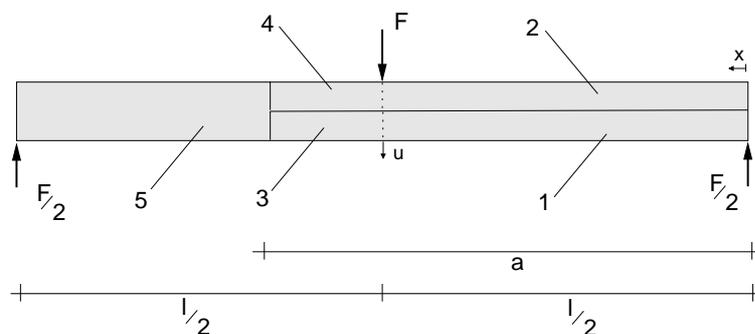


Abbildung A.3: Balkenmodell der ENF-Probe für eine Risslänge $a > \frac{l}{2}$

Das innere Potential berechnet sich aus:

$$\Pi_i = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_2^2}{2EI} dx + \int_{\frac{l}{2}}^a \frac{M_3^2}{2EI} dx + \int_{\frac{l}{2}}^a \frac{M_4^2}{2EI} dx + \int_a^l \frac{M_5^2}{16EI} dx$$

$$\Pi_i = \frac{F^2}{192EI} (l^3 - 3(l-a)^3)$$

Das äußere Potential lautet:

$$\Pi_a = -Fu$$

Die Durchbiegung in Feldmitte bei $x = \frac{l}{2}$ beträgt mit Gl.(A.2):

$$u = \frac{F}{96EI} (l^3 - 3(l-a)^3)$$

Die Energiefreisetzungsrate lautet mit Gl.(A.3):

$$\mathcal{G} = \frac{3F^2}{64bEI} (l-a)^2$$

Bei Risswachstum $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$ ergibt sich die Durchbiegung u in Abhängigkeit von der Last F zu:

$$u = \frac{F}{96EI} \left(l^3 - 3 \left(\frac{\mathcal{G}_c 64bEI}{3F^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \quad (\text{A.11})$$

A.3 Analytische Lösung der ELS-Probe

Damit für die FRMM-Probe das Verhältnis der Energiefreisetzungsraten im Mode I und Mode II ermittelt werden kann, wird zunächst die ELS-Probe untersucht.

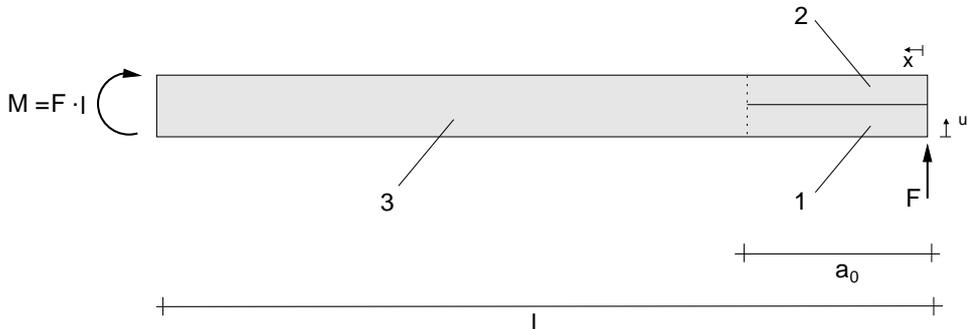


Abbildung A.4: Balkenmodell der ELS-Probe

Das innere Potential der ELS-Probe lautet:

$$\Pi_i = \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_0^a \frac{M_2^2}{2EI} dx + \int_a^l \frac{M_3^2}{16EI} dx$$

daraus ergibt sich:

$$\Pi_i = \frac{F^2 l^3 + 3F^2 a^3}{48EI}$$

Das äußere Potential lautet:

$$\Pi_a = -Fu$$

Die Durchbiegung am Lastangriffspunkt ergibt sich aus Gl.(A.2) mit einem konstanten Anriss $a = a_0$ zu:

$$u = \frac{Fl^3 + 3Fa^3}{24EI} \quad (\text{A.12})$$

Die Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} folgt aus Gl.(A.3):

$$\mathcal{G} = \frac{3F^2 a^2}{16bEI} \quad (\text{A.13})$$

Für den Fall des Risswachstums $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$ ergibt sich die Verschiebung u in Abhängigkeit von Belastung der F zu:

$$u = \frac{Fl^3 + 3F \left(\frac{16bEI\mathcal{G}_c}{3F^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{24EI} \quad (\text{A.14})$$

A.4 Analytische Lösung der FRMM-Probe

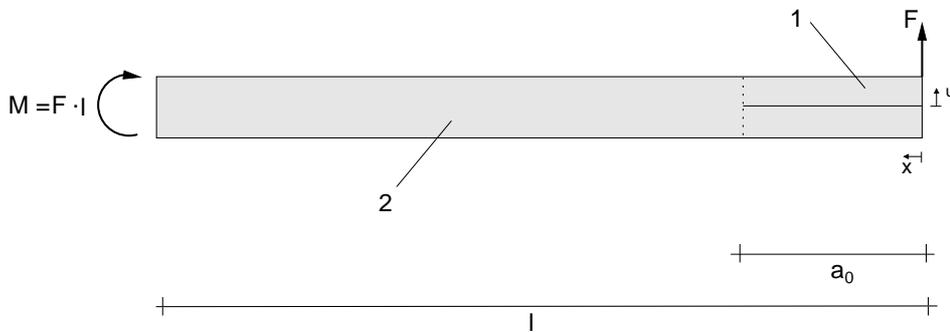


Abbildung A.5: Balkenmodell der FRMM-Probe

Das innere Potential der FRMM-Probe lautet:

$$\Pi_i = \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_a^l \frac{M_2^2}{16EI} dx$$

$$\Pi_i = \frac{F^2 l^3 + 7F^2 a^3}{48EI}$$

Das äußere Potential lautet:

$$\Pi_a = -Fu$$

Die Durchbiegung am Lastangriffspunkt ergibt sich mit einem konstanten Anriss $a = a_0$ aus Gl.(A.2):

$$u = \frac{Fl^3 + 7Fa^3}{24EI} \quad (\text{A.15})$$

Die Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} folgt aus Gl.(A.3):

$$\mathcal{G} = \frac{7F^2a^2}{16bEI} \quad (\text{A.16})$$

$$a = \sqrt{\frac{16\mathcal{G}EIb}{7F^2}} \quad (\text{A.17})$$

Für den Fall des Risswachstums $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$ mit $a > a_0$ gilt:

$$u = \frac{Fl^3 + 7F\left(\frac{16\mathcal{G}_cEIb}{7F^2}\right)^{3/2}}{24EI} \quad (\text{A.18})$$

Für den Fall, dass der Riss die Länge l erreicht hat, ist folgendes System zu untersuchen.

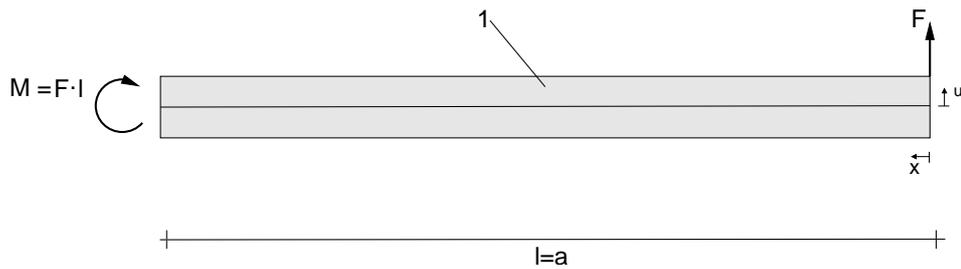


Abbildung A.6: Balkenmodell der FRMM-Probe für die Risslänge $a = l$

Mit dem inneren Potential:

$$\Pi_i = \int_0^l \frac{M_1^2}{2EI} dx = \frac{F^2 l^3}{6EI}$$

Die Durchbiegung am Lastangriffspunkt lautet für den Fall $a = l$ somit:

$$u = \frac{Fl^3}{3EI} \quad (\text{A.19})$$

Die FRMM-Probe ist eine „Mixed-Mode“ Probe, die im Modus I und im Modus II beansprucht wird. Das Verhältnis der Energiefreisetzungsraten zueinander kann ermittelt werden, indem die FRMM-Probe aus den Modellen der DCB und der ELS-Probe zusammengesetzt wird.

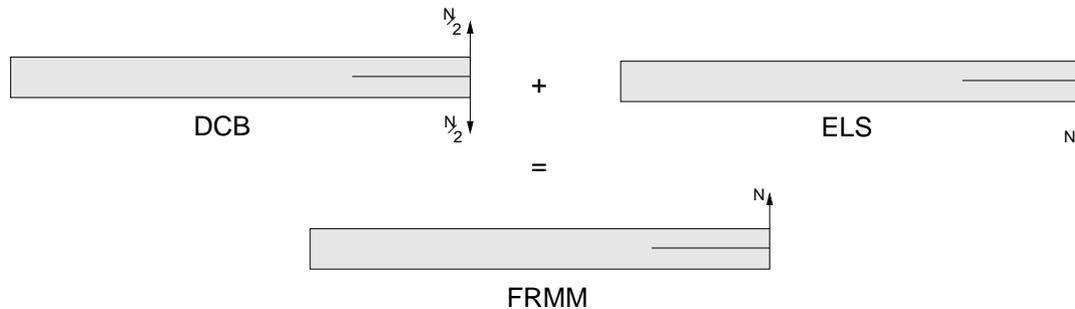


Abbildung A.7: Überlagerung der FRMM-Probe

Die Energiefreisetzungsrate für die DCB-Probe lautet nach Gl.(A.6):

$$\mathcal{G}_I = \frac{F^2 a^2}{b EI} = \frac{N^2 a^2}{4b EI}$$

Die Energiefreisetzungsrate für die ELS-Probe lautet nach Gl.(A.13):

$$\mathcal{G}_{II} = \frac{3F^2 a^2}{16 b EI} = \frac{3N^2 a^2}{16 b EI}$$

Die gesamte Energiefreisetzungsrate erhält man aus:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_I + \mathcal{G}_{II} = \frac{N^2 a^2}{4b EI} + \frac{3N^2 a^2}{16 b EI} = \frac{7N^2 a^2}{16bEI}$$

bzw. Vergleich mit Gl.(A.16).

Das Verhältnis der Energiefreisetzungsraten \mathcal{G}_I und \mathcal{G}_{II} zueinander ist konstant und unabhängig von der Geometrie der Probe und der Länge des Risses.

$$\frac{\mathcal{G}_I}{\mathcal{G}_{II}} = \frac{\frac{N^2 a^2}{4b EI}}{\frac{3N^2 a^2}{16 b EI}} = \frac{4}{3} \quad (\text{A.20})$$

Anhang B

Zeichenerklärung

Abkürzungen

AS	Assumed Strain
ANS	Assumed Natural Strain
CDM	Continuum Damage Mechanics
CFK	Kohlefaser bewehrte Kunststoffe
CLS	Cracked Lap Shear
COD	Crack Opening Displacement
DCB	Double Cantilever Beam
DGM	Discontinuous Galerkin Methods
DSG	Discrete Shear Gap
EAS	Enhanced Assumed Strain
ECT	End Crack Torsion
ENF	End Notched Flexure
FEM	Finite Elemente Methode
FRMM	Fixed Ratio Mixed Mode
IDM	Interface Damage Mechanics
MLT	Multi Layer Theory
MDT	Multidirektorthorie
MMB	Mixed Mode Bending
SCB	Split Cantilever Beam
SdT	Singledirektorthorie
SLT	Single Layer Theory
SRI	Selectiv Reduced Integration
TSL	Traction Separation Law
PdvV	Prinzip der virtuellen Verschiebung

Skalare

a	Risslänge
a_0	Ausgangsrislänge
A_a	äußere Arbeit
A_i	innere Arbeit
A_{iS}	innere Arbeit der Grenzfläche
A_T	Arbeit der Impulsänderung
c	Konditionszahl
d_I	Schädigungsvariable im Modus I
d_{II}	Schädigungsvariable im Modus II
d_{III}	Schädigungsvariable im Modus III
D_m	Elastischer Kennwert für den Mixed-Mode
Δ_{krit}	kritische Rissspitzenöffnung
E	Elastizitätsmodul
E_{11}	Elastizitätsmodul in Faserrichtung
E_{22}	Elastizitätsmodul senkrecht zur Faserrichtung
E_{33}	Elastizitätsmodul senkrecht zur Faserrichtung
ν_{ij}	Querkontraktionszahlen
G	Schubmodul
G_{12}	Schubmodul parallel zur Faserebene
G_{13}	Schubmodul senkrecht zur Faserebene
G_{23}	Schubmodul senkrecht zur Faserebene
\mathcal{G}	Energiefreisetzungsrate
\mathcal{G}_c	kritische Energiefreisetzungsrate
ϵ	Richtungswinkel
f	Funktion
F	Funktional
H	Schalenhöhe in der Ausgangskonfiguration
h	Schalenhöhe in der Momentankonfiguration
k	Strafparameter
K	Kompressionsmodul
n	Interaktionsparameter
ν	Querdehnzahl
Π	Gesamtpotential
Π_a	äußeres Potential
Π_i	inneres Potential
Ξ	Kontinuitätsvariable
Φ	freie Energiedichte der unverformten Grenzfläche
Ψ	freie HELMHOLTZ-Energie
ψ	Richtungswinkel
R	Risswiderstandskraft
W	Formänderungsenergiefunktion
W_s	spezifische Formänderungsenergie
λ_{min}	kleinster Eigenwert
λ_{max}	größter Eigenwert

Vektoren

α	interner Freiheitsgrad
\mathbf{D}	Direktor in der Ausgangskonfiguration $ \mathbf{D} = 1$
\mathbf{d}	Direktor in der Momentankonfiguration $ \mathbf{d} = 1$
\mathbf{f}	Kraftvektor
\mathbf{I}	Impulsvektor
\mathbf{i}	Basisvektor eines orthonormalen Koordinatensystems
\mathbf{a}	orthonormiertes Einheitskoordinatensystem
\mathbf{N}	Formfunktion
\mathbf{t}	CAUCHY-Spannungsvektor
\mathbf{t}_0	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungsvektor
$\tilde{\mathbf{t}}$	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungsvektor
$\bar{\mathbf{t}}$	Grenzflächenspannungsvektor
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$	Verschiebungssprungvektor
\mathbf{k}	Volumenkraftvektor
\mathbf{X}	Ortsvektor in der Ausgangskonfiguration
\mathbf{x}	Ortsvektor in der Momentankonfiguration
$\mathbf{g}_i, \mathbf{G}_i$	konvektive Basisvektoren

Matrizen und Tensoren

\mathbf{A}	Transformationsmatrix
$\mathbf{1}$	Einheitstensor
\mathbf{B}	Verzerrungs-Verschiebungsmatrix
\mathbf{C}	rechter CAUCHY-GREEN Tensor
\mathbf{C}	Elastizitätsmatrix
\mathbf{D}	Elastizitätskennwerte der Grenzfläche
$\overset{4}{\mathbf{C}}$	Materialtensor
\mathbf{E}	GREENScher Verzerrungstensor
$\tilde{\mathbf{E}}$	erweiterter GREENScher Verzerrungstensor
\mathbf{F}	Deformationsgradient
\mathbf{g}, \mathbf{G}	Metriktensoren
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}^G	geometrischer Anteil der Steifigkeitsmatrix
\mathbf{L}	räumlicher Geschwindigkeitsgradient
\mathbf{M}	Interpolationsmatrix
\mathbf{P}	Verschiebungssprung-Verschiebungsmatrix
\mathbf{R}	Drehtensor
\mathbf{T}	CAUCHY Spannungstensor
\mathbf{T}_0	1. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor
$\tilde{\mathbf{T}}$	2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor
\mathbf{T}^0	Transformationsmatrix
\mathbf{U}	rechter Strecktensor
\mathbf{V}	linker Strecktensor

Körper und Konfigurationen

\mathcal{B}_R	Referenzkonfiguration
\mathcal{B}_\square	Referenzkonfiguration im Sinne der FEM
\mathcal{B}_0	Ausgangskonfiguration
\mathcal{B}_t	Momentankonfiguration
\mathcal{B}^+	oberer Teilkörper
\mathcal{B}^-	unterer Teilkörper
\mathcal{S}^0	Grenzfläche in der Ausgangskonfiguration
\mathcal{S}	Grenzfläche in der Momentankonfiguration

Operatoren

δ	Variation
δ_i^j	Kronecker Symbol
det	Determinante
div, DIV	Divergenz
D	GATEAUX-Ableitung
grad, GRAD	Gradient
tr	Spur
\otimes	Dyadisches Produkt
\times	Kreuzprodukt

Literaturverzeichnis

- [1] ABOUDI, J.: *Constitutive behaviour of multiphase metal matrix composites with interface damage by the generalized cells model*. In: *Damage in composite material*, Seiten 3–22. Amsterdam: Elsevier, Voyiadjis G.Z., 1993.
- [2] AHMAD, S., IRONS B.M. und O.C ZIENKIEWICZ: *Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axi-symmetric problems*. In: *Proc. of the 2nd. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech.* Berke G.Z., 1968.
- [3] ALFANO, G. und M.A. CRISFIELD: *Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 50:1701–1736, 2001.
- [4] ALFANO, G. und M.A. CRISFIELD: *Solution strategies for the delamination analysis based on a combination of local-control arc-length and line searches*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 58:999–1048, 2003.
- [5] ALIYU, A.A und I.M. DANIEL: *Effects of strain rate on delamination fracture toughness of graphite/epoxy*. In: *Delamination and Debonding of Materials*, Seiten 336–348. ASTM STP 876, Johnson W.S., 1985.
- [6] ALTENBACH, H., ALTENBACH J. und RIKARDS R.: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Stuttgart, 1. Auflage, 1996.
- [7] ALTENBACH, J. und A. ALTENBACH: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner Studienbücher Mechanik, 1994.
- [8] ANSYS, 7.0: *SAS IP, Inc. Southpointe 275 Technology Drive Canonsburg, PA 15317*. <http://www.ansys.com>.
- [9] BARENBLATT, G.: *The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks*. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 23:622–636, 1959.
- [10] BARENBLATT, G.: *Mathematical theory of equilibrium cracks*. *Advances in Applied Mechanics*, 7:56–129, 1962.
- [11] BASAR, Y. und D. WEICHERT: *Nonlinear continuum mechanics of solids*. Springer, 1998.

- [12] BATHE, K. J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, 2002.
- [13] BATHE, K.-J. und E.N. DVORKIN: *A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components*. Int. J. Num. Meth. Eng., 22:697–722, 1986.
- [14] BEER, G.: *An isoparametric joint/interface element for finite element analysis*. Int. J. Num. Meth. Eng., 21:585–600, 1985.
- [15] BETSCH, P.: *Statische und dynamische Berechnungen von Schalen endlicher elastischer Deformationen mit gemischten finiten Elementen*. Dissertation, Bericht aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1996.
- [16] BETSCH, P. und E. STEIN: *An assumed strain approach avoiding artificial thickness straining for a non-linear 4-node shell element*. Comm. Num. Meth. Eng., 11:899–909, 1995.
- [17] BISCHOFF, M.: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertation, Universität Stuttgart, Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen, 1999.
- [18] BISCHOFF, M. und E. RAMM: *Shear deformable shell elements for large strains and rotations*. Int. J. Num. Meth. Eng., 40:4427–4449, 1997.
- [19] BOEHLER, J.P.: *Applications of tensor functions in solid mechanics, CISM Courses No.292*. Springer, 1987.
- [20] BORG, R., L. NILSSON und K. SIMONSSON: *Modeling of delamination using a discretized zone and damage formulation*. Composites Science and Technology, 62:1299–1314, 2002.
- [21] BORG, R., L. NILSSON und K. SIMONSSON: *Simulating DCB, ENF and MMB experiments using shell elements and a cohesive zone model*. Composites Science and Technology, 64:269–278, 2004.
- [22] BRAUN, M., BISCHOFF M und E. RAMM: *Nonlinear shell formulations for complete three-dimensional constitutive laws including composites and laminates*. Comp. Mech., 15:1–18, 1994.
- [23] BRAUN, M.: *Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken*. Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart, 1995.
- [24] BREWER, J.C. und LAGACE P.A.: *Quadratic stress criterion for initiation of delamination*. Journal of Composite Materials, 22:1141–1155, 1988.
- [25] BREZZI, F. und L.D. MARINI: *A nonconforming element for the Reissner-Mindlin plate*. Computers & Structures, 81:515–522, 2003.
- [26] BROEK, D.: *Elementary engineering fracture mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, 4. Auflage, 1986.

- [27] BÜCHTER, N. und E. RAMM: *3d-extension of nonlinear shell equations based on the enhanced assumed strain concept*. In: *Computational Methods in Applied Sciences*, Seiten 55–61. Ch. Hirsch, 1992.
- [28] BÜCHTER, N., RAMM E. und D. ROEHL: *Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37:2551–2568, 1994.
- [29] BUFLER, H: *Energiemethoden II*. Vorlesungsskript an der Universität Stuttgart, 1976.
- [30] BÜCHTER, N.: *Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen*. Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart, 1992.
- [31] CAMANHO, P.P., C.G. DAVILA: *Mixed-mode decohesion finite elements for the simulation of delamination in composite materials*. NASA/TM-2002-211737, 2002.
- [32] CAMANHO, P.P., C.G. DAVILA und D.R. AMBUR: *Numerical simulations of delamination growth in composite materials*. NASA/TP-2001-211041, 2001.
- [33] CARLSSON, L.A., J.W. GILLESPIE und R.B. PIPES: *On the analysis and design of the end notches flexure (ENF) specimen for mode II testing*. *Journal of Composite Materials*, 20:594–603, 1986.
- [34] CARLSSON, L.A. und R.B. PIPES: *Hochleistungsfaserverbundwerkstoffe*. Teubner Studienbücher, 1989.
- [35] CHEN, J., M. CRISFIELD und A.J. KINLOCH U.A.: *Predicting progressive delamination of composite material specimens via interface elements*. *Mech. Comp. Mat. Struc.*, 6:301–317, 1999.
- [36] CLOUGH, R.W: *The finite element method in plane stress analysis*. Proc. A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation, 1960.
- [37] CLOUGH, R.W: *Original formulation of the finite element method*. *Finite Elements in Analysis and Design*, 7:89–101, 1990.
- [38] CORIGLIANO, A.: *Formulation, identification and use of interface models in the numerical analysis of composite delamination*. *Int. J. of Solids and Structures*, 30:2779–2811, 1993.
- [39] CRISFIELD, M.A. und G. ALFANO: *Adaptive hierarchical enrichment for delamination fracture using a decohesive zone model*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 54:1369–1390, 2002.
- [40] CUNTZE, C.: *Non-linear failure analysis of FRP laminates composed of UD lamina*. Presentation at Helsinki University of Technology, ESPOO, 2005.

- [41] DAVIES, P., B.R.K. BLACKMAN und A.J. BRUNNER: *Standard test methods for delamination resistance of composite materials: current status*. Applied Composite Materials, 5:345–364, 1998.
- [42] DAVILA, C.G., P.P. CAMANHO: *Decohesion elements using two and three-parameter mixed-mode criteria*. American Helicopter Society Conference, Williamsburg, VA, 29. October - 1. November, 2001.
- [43] DAVILA, C.G., P.P. CAMANHO: *Analysis of the effects of residual strains and defects on skin/stiffener debonding using decohesion Elements*. NASA-AIAA-2003-1465, 2003.
- [44] DE BOER, R.: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag, 1982.
- [45] DE BORST, R.: *Damage, material instabilities, and fracture*. In: *Encyclopedia of computational mechanics*, Seiten 335–373. John Wiley & Sons, Stein E., de Borst, R and Hughes J.R., 2004.
- [46] DE BORST, R. und G. ROTS: *Occurrence of spurious mechanisms in computations of strain-softening solids*. Eng. Comput., 6:272–280, 1989.
- [47] DÖBERT, C., R. MAHNKEN und E. STEIN: *Numerical simulation of interface debonding with a combined damage/friction constitutive model*. Comp. Mech., 25:456–467, 2000.
- [48] DORNINGER, K.: *Entwicklung von nichtlinearen FE-Algorithmen zur Berechnung von Schalenkonstruktionen aus Faserverbundstoffen*. Dissertation, Technische Universität Wien, Institut für Leichtbau und Flugzeugbau, 1989.
- [49] DUGDALE, D.S.: *Yielding of steel sheets containing slits*. J. Mech. Phys. Solids, 8:100–104, 1960.
- [50] DÜSTER, A.: *High order finite elements for three-dimensional, thin-walled nonlinear continua*. Dissertation, Lehrstuhl für Bauinformatik, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Technische Universität München, 2001.
- [51] FIOILKA, M., A. MATZENMILLER: *Delaminationsberechnung von Faserverbundstrukturen*. Proc. Appl. Math. Mech., 5:393–394, 2005.
- [52] FIOILKA, M., A. MATZENMILLER: *On the resolution of transverse stresses in solid-shells with a multi-layer formulation*. Comm. Num. Meth. Eng., 23:313–326, 2007.
- [53] FIOILKA, M., S. GERLACH und A. MATZENMILLER: *Efficient modeling of adhesively bonded joints with interfacial mechanics for crash analysis*. 6th European Solid Mechanics Conference, Budapest, Hungary, 2006.
- [54] FREISCHLÄGER, C.: *Konzepte zur Formulierung versteifungsfreier Volumenelemente*. Dissertation, Universität Fridericiana zu Karlsruhe TH, 2000.

- [55] GARG, A.C.: *Delamination - a damage mode in composite structures*. Engineering Fracture Mechanics, 5:557–584, 1988.
- [56] GERLACH, S., M. FIOJKA und A. MATZENMILLER: *Modeling and analysis of adhesively bonded joints with interface elements for crash analysis*. 4th LS-DYNA Forum 20.-21. Oktober, Bamberg, 2005.
- [57] GONCALVES, J.P.M., M.F.S.F. DE MOURA, P.M.S.T. DE CASTRO und A.T. MARQUES: *Interface element including point-to-surface constraints for three-dimensional problems with damage propagation*. Engineering Computations, 17:28–47, 2000.
- [58] GONCALVES, J.P.M., M. MOURA und A. MAGALHAES U.A.: *Application of interface finite elements to three-dimensional progressive failure analysis of adhesive joints*. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., 26:479–486, 2003.
- [59] GOYAL, V.K., E.R. JOHNSON C.G. DAVILA und N. JAUNKY: *An irreversible constitutive law for modeling the delamination process using interface elements*. NASA/CR-2002-211758, ICASE Report No. 2002-25, 2002.
- [60] GOYAL, V.K., E.R. JOHNSON und C.G. DÁVILA: *Irreversible constitutive law for modeling the delamination process using interfacial surface discontinuities*. Computers & Structures, 65:289–305, 2004.
- [61] GRASHOF, F.: *Theorie der Elasticität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendung in der Technik*. 2. Auflage, 1878.
- [62] GROSS, D. und TH. SEELIG: *Bruchmechanik mit einer Einführung in die Mikromechanik*. Springer-Verlag, 3. Auflage, 2001.
- [63] GRUTTMANN, F.: *Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen*. Habilitation, Bericht des Instituts für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover, 1996.
- [64] HAHN, H.G.: *Bruchmechanik: Einf. in d. theoret. Grundlagen*. Teubner Studienbücher, 1976.
- [65] HARNAU, M. UND K. SCHWEIZERHOF UND R. HAUPTMANN: *On solid-shell elements with linear and quadratic shape functions for small and large deformations*. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, 2000.
- [66] HASHIN, Z.: *Failure criteria for unidirectional fiber composites*. Journal of Applied Mechanics, 47:329–334, 1980.
- [67] HAUPTMANN, R. und K. SCHWEIZERHOF: *A systematic development of solid-shell element formulations for linear and non-linear analyses employing only displacement degrees of freedom*. Int. J. Num. Meth. Eng., 42:49–69, 1998.
- [68] HAUPT, P.: *Continuum mechanics and theory of materials*. Springer, 1. Auflage, 1999.

- [69] HAUPT, P.: *Einführung in die Mechanik, Technische Mechanik III*. Vorlesungsskript: Instituts für Mechanik der Universität Kassel, 2000.
- [70] HAUPT, P.: *Kontinuumsmechanik I: Mathematische Grundlagen der Kontinuumsmechanik*. Vorlesungsskript: Institut für Mechanik der Universität Kassel, 2001.
- [71] HILLERBORG, A., M. MODEER und P.E. PETERSSON: *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*. Cement and Concrete Research, 6:773–782, 1976.
- [72] HOHBERG, J.-M.: *Short communication a note on spurious oscillations in FEM joint elements*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 19:773–779, 1990.
- [73] HOLZAPFEL, G. A.: *Nonlinear solid mechanics*. John Wiley & Sons Ltd, 2000.
- [74] HÖRMANN, M.: *Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen*. Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik, Universität Stuttgart, 2002.
- [75] HUGHES, T.J.R. und TEZDUYAR T.E.: *Finite elements based upon mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric Element*. Journal of Applied Mechanics, 48:587–596, 1981.
- [76] HÜTTEL, C.: *Finite-Elemente-Berechnung von Schalen aus spröden Faserverbundwerkstoffen*. Dissertation, Bericht des Instituts für Mechanik der Universität Kassel, 2001.
- [77] HÜTTEL, C. und A. MATZENMILLER: *Consistent discretization of thickness strains in thin shells including 3D-material models*. Comm. Num. Meth. Eng., 15:283–293, 1999.
- [78] HWU, C., KAO C.J. und L.E. CHANG: *Delamination fracture criteria for composite laminates*. Journal of Composite Materials, 29:1962–1987, 1995.
- [79] KIM, R.Y.: *Experimental observation of free-edge delamination*. In: *Interlaminar response of composite materials*, Seiten 111–160. Elsevier Science Publishers B.V., 1989.
- [80] KIRCHHOFF, G.: *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*. Journal für reine angewandte Mathematik, 40:51–58, 1850.
- [81] KLARMANN, R.: *Nichtlineare Finite Element Berechnungen von Schalentragwerken mit geschichtetem anisotropen Querschnitt*. Dissertation, Universität Fridericiana zu Karlsruhe TH, 1991.
- [82] KLINGBEIL, E.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. B.I.-Hochschultaschenbuch Band 197 Wissenschaftsverlag, 2. Auflage, 1988.

- [83] KLINKEL, S.: *Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen*. Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik der Universität Karlsruhe (TH), 2000.
- [84] KLINKEL, S., F. GRUTTMANN und W. WAGNER: *A continuum based three-dimensional shell element for laminated structures*. Computers & Structures, 71:43–62, 1999.
- [85] KRÄTZIG, W.B. und D. JUN: *Multi-layer multi-director concepts for D-adaptivity in shell theory*. Computers & Structures, 80:719–734, 2002.
- [86] LEMAITRE, J.: *A course on damage mechanics*. Springer, 2. Auflage, 1996.
- [87] LINK, M.: *Finite Elemente in der Statik und Dynamik*. B.G. Teubner Verlag, 2002.
- [88] LOVE, A.E.H: *On the small vibrations and deformations of thin elastic Shells*. Philosophical Transactions of the Royal Society, 179:491–ff., 1850.
- [89] LS-DYNA: *keyword user's manual, version 971*. Livermore Software Technological Corporation, 2007.
- [90] MACNEAL, R.H und R.L. HARDER: *A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*. Finite Elements in Analysis and Design, 1:3–20, 1985.
- [91] MALVERN, L.E.: *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, 1969.
- [92] MARSDEN, J.E., HUGHES T.J.R.: *Mathematical foundations of elasticity*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1983.
- [93] MATZENMILLER, A.: *Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnung*. Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart, 1988.
- [94] MATZENMILLER, A.: *Theorie und Berechnung von Scheiben, Platten und Schalen*. Vorlesungsskript: Des Instituts für Mechanik der Universität Kassel, 1997.
- [95] MATZENMILLER, A., GERLACH S. und B. KÖSTER: *Ein Zweiskalenmodell für die mikromechanisch basierte FE-Analyse von Faserverbundstrukturen*. 22. CAD-FEM Meeting 2004.
- [96] MEHLHORN, G. und J. KOLLEGGER: *Anwendung der Finite Elemente Methode im Stahlbetonbau*. In: *Der Ingenieurbau, Rechnerorientierte Baumechanik*, Seiten 293–425. Ernst & Sohn, Mehlhorn G., 1995.
- [97] MI, Y., CRISFIELD Y.M., DAVIES G.A. und H.B. HELLWEG: *Progressive delamination using interface elements*. Journal of Composite Materials, 32:1246–1272, 1998.

- [98] MOORE, D.R., PAVAN A. und J.G. WILLIAMS: *Fracture mechanics testing methods for polymers adhesives and composites*. ESIS Publication 28, Elsevier, 2001.
- [99] NAGHDI, P.M.: *The theory of shells and plates*. Handbuch der Physik, VIa/2:425–640, 1972.
- [100] NEEDLEMAN, A.: *A continuum model for void nucleation by inclusion debonding*. Journal of Applied Mechanics, 54:525–531, 1987.
- [101] NOUR-OMID, B. und P. WRIGGERS: *A note on the optimum choice for penalty parameters*. Comm. in Applied Numerical Methods, 3:581–585, 1987.
- [102] O'BRIEN: *Interlaminare fracture toughness: the long and winding road to standardization*. Composites Part B, 29:57–61, 1997.
- [103] OCHOA, O. O. und J.N. REEDY: *Finite element analysis of composite laminates, Solid Mechanics and its Applications 7*. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [104] ORTIZ, M. und A. PANDOLFI: *Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis*. Int. J. Num. Meth. Eng., 44:1267–1282, 1999.
- [105] PAGANO, N.J. und S.R. SONI: *Models for studying free-edge effects*. In: *Interlaminar response of composite materials*, Seiten 1–68. Elsevier Science Publishers B.V., 1989.
- [106] PARISCH, H.: *A continuum-based shell theory for non-linear applications*. Int. J. Num. Meth. Eng., 38:1855–1883, 1995.
- [107] PUCK, A: *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten, Modelle für die Praxis*. Carl Hanser Verlag München Wien, 1996.
- [108] QIU, Y., M.A. CRISFIELD und G. ALFANO: *An interface element formulation for the simulation of delamination with buckling*. Engineering Fracture Mechanics, 68:1755–1776, 2001.
- [109] RAMM, E.: *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente*. Habilitation, Bericht des Instituts für Baustatik, Universität Stuttgart, 1976.
- [110] RAMM, E., M. BISCHOFF und M. BRAUN: *Higher order nonlinear shell formulations- a step back into three dimensions*. In: *From Finite Elements to the Troll Platform, Norwegian Inst. of Techn.*, 1994.
- [111] RAMM, E. und A. MATZENMILLER: *Large deformation shell analyses based on the degeneration concept*. In: *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*. T.J.R. Hughes, E. Hinton, 1986.
- [112] RATCLIFFE, J.G.: *Characterization of the edge crack torsion (ECT) test for mode III fracture toughness measurement of laminated composites*. NASA/TM-213269, 2004.

- [113] REEDER, J.R.: *A mixed mode bending apparatus for delamination testing*. NASA Technical Memorandum 100662, Langley Research Center, Hampton, VA, 23665-5225, 1988.
- [114] REEDY, E.D., F.J. MELLO und T.R. GUESS: *Modeling the initiation and growth of delaminations in composite structures*. Journal of Composite Materials, 31:812–831, 1997.
- [115] REISSNER, E.: *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*. Journal of Applied Mechanics, 23:69–77, 1945.
- [116] ROSENBAUM, U.: *Kohlenstoffaserverstärkte Kunststoffe: Eigenschaften und Anwendung eines modernen Werkstoffes*. Verl. Moderne Industrie, 1994.
- [117] ROSSMANITH, H.P.: *Finite Elemente in der Bruchmechanik*. Springer-Verlag, 1982.
- [118] SCHADE, H.: *Tensoranalysis*. De-Gruyter-Lehrbuch, 1997.
- [119] SCHELLEKENS, J.C.J. und R. DE BORST: *On the numerical integration of interface elements*. Int. J. Num. Meth. Eng., 36:43–66, 1993.
- [120] SCHNEIDER, I.: *Bruchmechanische Bewertung von Laserschweißverbindungen durch numerische Rißfortschrittsimulation mit dem Kohäsivzonenmodell*. Bericht des GKSS-Forschungszentrums Geesthacht GmbH, 2001.
- [121] SCHOOP, H.: *Oberflächenorientierte Schalentheorien endlicher Verschiebungen*. Ingenieur-Archiv, 56:427–437, 1986.
- [122] SCHRÖDER, J.: *Theoretische und algorithmische Konzepte zur phänomenologischen Beschreibung anisotropen Materialverhaltens*. Dissertation, Forschungs- und Seminarberichte aus der Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1996.
- [123] SCHULTZ, R.: *Nichtlineare Struktur- und Versagensanalyse von Faserverbundsystemen mit Mehrschichten-Schalenelementen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, 1996.
- [124] SCHWARZ, H.R.: *Methode der finiten Elemente*. Teubner Studienbücher, 1980.
- [125] SCHÜRMAN, H.: *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. Springer-Verlag, 2004.
- [126] SEIFERT, B.: *Zur Theorie und Numerik finiter elastoplastischer Deformationen von Schalenstrukturen*. Dissertation, Bericht aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1996.
- [127] SIMO, J.C. und F. ARMERO: *Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes*. Int. J. Num. Meth. Eng., 33:1413–1449, 1992.

- [128] SIMO, J. C., D.D. FOX und M.S. RIFAI: *On a stress resultant geometrically exact shell modell. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory.* Comp. Meth. Appl. Mech. & Engrg., 79:21–70, 1990.
- [129] SIMO, J.C. und J.G. KENNEDY: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part 5. Nonlinear plasticity: formulation and integration algorithms.* Comp. Meth. Appl. Mech. & Engrg., 96:133–171, 1992.
- [130] SIMO, J.C. und M.S. RIFAI: *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes.* Int. J. Num. Meth. Eng., 29:1595–1638, 1990.
- [131] SIMO, L.C. und T.J.R. HUGHES: *On the variational foundations of assumed strain methods.* Journal of Applied Mechanics, 53:51–54, 1986.
- [132] SPENCER, A.J.M.: *Continuum theory of the mechanics of fibre-reinforced composites, CISM Course No. 282.* Springer-Verlag, 1984.
- [133] SPRENGER, W.: *Delaminationsanalysen von Faserverbundstrukturen mit der Methode der finiten Elemente.* Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH), 2000.
- [134] STANDER, N., MATZENMILLER A. und E. RAMM: *An assement of assumed strain methods in finite rotation shell analysis.* Engineering Computations, 6:58–66, 1989.
- [135] SUO, Z., G. BAO und B. FAN: *Delamination R-Curve phenomena due to damage.* J. Mech. Phys. Solids, 40:1–16, 1992.
- [136] TAYLOR, R.L., P.J. BERESFORD und E.L. WILSON: *A non-conforming element for stress analysis.* Int. J. Num. Meth. Eng., 10:1211–1219, 1976.
- [137] TESSMER, J.: *Theoretische und algorithmische Beiträge zur Berechnung von Faserverbundschalen.* Dissertation, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 2000.
- [138] TIMOSHENKO, S.P. und GOODIER J.N.: *Theory of elasticity.* 3. Auflage, 1982.
- [139] TRUESDELL, C. und NOLL W.: *The nonlinear field theories of mechanics.* In: *Volume 3/3 of Encyclopedia of Physics.* Springer Verlag, Flügge, 1965.
- [140] TVERGAARD, V und J.W. HUTCHINSON: *The influence of plasticity on mixed mode interface toughness.* J. Mech. Phys. Solids, 41:1119–1135, 1993.
- [141] VERHOEVEN, H.: *Geometrisch und physikalisch nichtlineare finite Platten-elemente mit Berücksichtigung der Dickenverzerrungen.* Dissertation, Technische Universität Berlin, 1992.

-
- [142] VU-QUOC, L. und X.G. TAN: *Optimal solid shell for non-linear analyses of multilayer composites. I. Statics*. Comp. Meth. Appl. Mech. & Engrg., 192:975–1016, 2003.
- [143] WALL, W.A., M. GEE und E. RAMM: *The challenge of a three-dimensional shell formulation - the conditioning problem -*. Computational Methods for Shell and Spatial Structures, IASS-IACM. Athen, 2000.
- [144] WHITCOMB, J.D.: *Parametric analytical study of instability-related delamination growth*. Comp. Science Tech., 25:19–48, 1986.
- [145] WILSON, E.L., R.L. TAYLOR, W.P. DOHERTY und J. GABOUSSI: *Incompatible displacement models*. In: *Numerical and computational methods in structural mechanics*, Seiten 43–57. Academic Press, New York, Fenves S.T., 1973.
- [146] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Elemente-Methode*. Springer-Verlag, 2001.
- [147] ZIENKIEWICZ, O.C.: *Methode der finiten Elemente*, deutsche Übersetzung von: *The finite element method in engineering science, 2th ed., 1971*. 1. Auflage, 1975.
- [148] ZIENKIEWICZ, O.C. und TAYLOR R.L.: *The finite element method, Vol.1*. 4. Auflage, 1989.
- [149] ZIENKIEWICZ, O.C. und TAYLOR R.L.: *The finite element method, Vol.2*. 4. Auflage, 1989.
- [150] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR R.L. und J.M TOO: *Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells*. Int. J. Num. Meth. Eng., 3:275–290, 1971.