In: Die berufsbildende Schule, Zeitschrift des Bundesverbandes für Lehrer an beruflichen Schulen, 28. Jahrgang, 1976, Heckners Verlag, Wolfenbüttel, S. 578-586

WERNER BLUM

Elementare Ableitungsbestimmung für Exponentialfunktionen im Mathematikunterricht der beruflichen Oberstufe

Wir wollen zuerst einige allgemeine Prinzipien für den Analysisunterricht in der beruflichen Oberstufe hervorheben und diese sodann an Hand der Ableitungsbestimmung für Exponentialfunktionen verdeutlichen.

1. Zum Analysisunterricht in der beruflichen Oberstufe[1]

1.1. Die neuere fachdidaktische Diskussion zur Analysis auf der Schule läßt sich idealtypisch durch 2 *Pole* kennzeichnen. Auf der einen Seite steht, ausgehend von der Kritik an der unexakten Analysis früherer Jahre, die Forderung nach unbedingter fachwissenschaftlicher Exaktheit. Diese Forderung hat sich seit Ende der 60er Jahre in den Lehrbüchern für das allgemeinbildende Schulwesen in der Weise niedergeschlagen, daß faktisch die Universitäts-Analysis kopiert und in mehr oder weniger reduzierter Form in die Schule transformiert wird. Dieses *Streben nach fachsystematischer Exaktheit* wurde mit einiger Zeit-Verzögerung in weiten Teilen auch von fast allen neueren Mathematikbüchern für berufliche Schulen übernommen[2]. Auf der anderen Seite steht eine Auffassung von der Analysis als einer *Rezeptesammlung*, bei der unter weitgehendem Verzicht auf mathematische Überlegungen kalkülmäßig Übungsbeispiele gelöst werden[3]).

1.2. Zur Minderung des bestehenden curricularen und didaktischen Defizits bzgl. der Mathematik im beruflichen Schulwesen und als Alternative zu den genannten Extrem-Positionen bzgl. der Analysis wird in [3] ein Vorschlag für eine Art „Grundkurs in Analysis" für die berufliche Oberstufe gemacht. Dieser Vorschlag basiert auf den *allgemeinen Zielen*, die der Mathematikunterricht an der beruflichen Oberstufe verfolgen sollte. Zu nennen sind hierbei sowohl materiale Ziele wie *Umweltverständnis, Berufsvorbereitung, Verstehen von Praxisproblemen* oder *Bewältigung von Problemen aus Beruf und Alltag* als auch formale Ziele wie *Persönlichkeitsbildung, Förderung kognitiver Strukturen* oder *Förderung von Kreativität, Motivation und Kommunikation* durch Beschäftigung mit Mathematik. Diese allgemeinen Ziele des Mathematikunterrichts orientieren sich wiederum an allgemeinen Erziehungszielen wie Emanzipation, Mündigkeit u.a.

1.3. Unter Würdigung dieser Ziele in Bezug auf die Schüler der beruflichen Oberstufe und auf den Stoff der Analysis ergibt sich hieraus als wichtigstes Ziel des Analysis-Unterrichts in der berufsbildenden Oberstufe, daß beim Schüler *adäquate Vorstellungen von den grundlegenden Begriffen, Methoden und Regeln der Differential- und Integralrechnung aktiv aufgebaut* werden. Der Schüler soll dadurch in die Lage versetzt werden, die Begriffe, Methoden und Sätze der Analysis möglichst weitgehend – verbunden mit Erfolgserlebnissen – in *Eigenaktivität* zu erarbeiten und *verständig zu handhaben.*

Diese Ziele lassen sich mit den geschilderten Extrem-Positionen nicht erreichen. Der Vorschlag in [3] basiert hingegen auf dem *Spiralprinzip* (siehe *Bruner* [6]). Hierbei ist es wichtig zu unterscheiden zwischen einer ersten Begegnung mit den Gegenständen der Analysis und einem späteren Wiederaufgreifen mit Präzisierungen und Vertiefungen. Es ist in einem ersten Durchgang der Analysis *nicht* das wesentliche, daß die Schüler sämtliche Begriffe, Methoden und Sätze in ihrer abschließenden exakten mathematischen Fassung und an der genauen Stelle innerhalb des deduktiven Gerüsts der Analysis kennenlernen. Entsprechende mathematische Skrupel hat nur der Lehrer oder der Schulbuchautor. Viel-

1 Vgl. [3, S. 291–293] sowie bzgl. einiger etwas ausführlicher beschriebener Stellen, welche auch auf die berufliche Oberstufe zutreffen, [4].

2 Als Beispiel sei [8] genannt.

3 Als Beispiel hierfür seien die Bücher [14a/b] genannt.

mehr ist es *legitim und notwendig, didaktische Vereinfachungen*[4] vorzunehmen, die *keine Verfälschungen*, sondern – um mit *Bruner* [6] zu sprechen – *intellektuell ehrlich* sind und *auf höherer Stufe ausgebaut* werden können. Dies bedeutet, daß an ein *Vorverständnis* der Schüler bewußt angeknüpft wird und somit einerseits einige *Begriffe* in einer *noch nicht präzisierten Form* eingeführt und benutzt, andererseits *bewußt Lücken* im mathematischen Aufbau gelassen werden. Stets muß jedoch – wenn auch manchmal auf der Grundlage von solch unpräzisierten Begriffen – *mathematisch einwandfrei* argumentiert werden und müssen diese Lücken für Lehrer *und* Schüler bewußt gelassen werden, d.h. der Schüler soll stets wissen, wann vereinfacht wird und wann nicht und er soll unterscheiden können zwischen Plausibilitätsbetrachtungen und exakten Beweisen. In einem derartigen Aufbau ist es auch möglich, im mathematischen Sprachniveau auf die Adressaten einzugehen und die diesbezüglichen bekannten Überforderungen zu vermeiden, ohne auf einem vormathematischen Niveau stehenbleiben zu müssen.

Als wichtige *Beispiele für didaktische Vereinfachungen* in unserem Analysis-Konzept seien genannt:

- der Verzicht auf vorgängige Behandlung von Vollständigkeit, Konvergenz und Stetigkeit, um die grundlegenden Begriffe Ableitung und Integral schnell ansteuern zu können
- die Verwendung eines noch unpräzisierten Grenzwertbegriffs.
- die bewußte Entnahme derjenigen Tatsachen aus der Anschauung, die auf dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung beruhen.

1.4. Ein ganz wesentliches Prinzip eines solchen Analysis-Konzepts ist die *Betonung des Anwendungsaspektes als integraler Bestandteil.* „Anwendung" bedeutet dabei nicht bloße Anwendung fertiger Mathematik auf außermathematische Probleme, sondern auch und m.E. noch wichtiger *Mathematisierung realer Problemsituationen,* d.h. Entwicklung der Begriffe und Methoden der Analysis an Hand von Problemkontexten[5].

In aller gebotenen Kürze ist damit für den Analysisunterricht in der beruflichen Oberstufe eine didaktische Konzeption aufgezeigt, die sich nicht unkritisch an die gymnasiale Oberstufe anlehnt, trotzdem gleichwertig ist und curriculare Integration ermöglicht.

2. Exponentialfunktionen im Mathematikunterricht

2.1. Zu den für reale außermathematische Anwendungsprobleme wichtigsten reellen Funktionen gehören ohne Zweifel die (in [11] so genannten) exponentiellen *Wachstumsfunktionen*[6]

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto ab^x\ (a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1).$$

In einem Analysisunterricht wie in Abschnitt 1 beschrieben sind diese Funktionen daher unverzichtbar.

Nun stehen einer frühen Beschäftigung mit Wachstumsfunktionen auf der Schule bekanntlich beträchtliche mathematische Schwierigkeiten entgegen (vgl. [2]). Bei *Kirsch* [11] sind jedoch Wege aufgezeigt, diese Funktionen in elementarer Weise bereits vor Beginn der Analysis zu behandeln. Aus Platzgründen kann hierauf in vorliegendem Aufsatz nicht ge-

4 Vgl. [9, S. 909–911] zur gesamten Problematik der *didaktischen Reduktion*

5 Eine besonders wichtige Klasse von Anwendungsproblemen wird übrigens durch den Aspekt *„Änderungsraten"* charakterisiert (z.B. Wachstums- oder Zerfallsgeschwindigkeit, Erwärmungs- oder Abkühlungsgeschwindigkeit, Reaktionsgeschwindigkeit, Luftdruckgefälle, Grenzkosten, Spitzensteuer, Empfindlichkeit usw.). Stets interessiert hierbei die *lokale Änderung* einer Größe, die man durch *Grenzübergang* aus den *durchschnittlichen Änderungen* erhält.

6 Vgl. die Examensarbeit [13] für das Lehramt an beruflichen Schulen, in der weit über 100 diesbezügliche Anwendungsbeispiele aus Physik, Technik, Biologie, Chemie und Ökonomie zusammengestellt und teilweise didaktisch aufbereitet sind.

nauer eingegangen werden. Jedenfalls gehen wir davon aus, daß vor Beginn der Analysis die Wachstumsfunktionen als in der folgenden Weise *charakterisiert* bekannt sind:

Durch je zwei Punkte der oberen Koordinatenhalbebene, die nicht auf einer Parallelen zu einer der Achsen liegen, geht genau eine Funktion f mit den Eigenschaften

(1) f ist eine streng monotone reelle Funktion mit Wertemenge $\mathbb{R}^+$

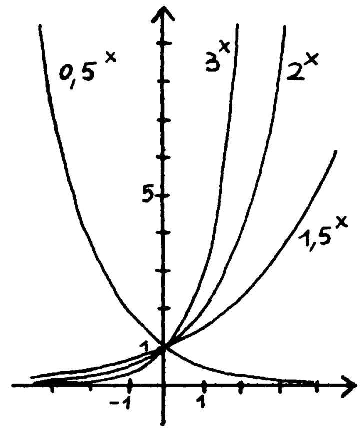
(2) f erfüllt die „Grundeigenschaft": Wenn sich das Argument jeweils um denselben Summanden v erhöht, multipliziert sich der Funktionswert jedesmal mit demselben Faktor q:

$$f(u+v) = q \cdot f(u), \text{ wobei } q = \frac{f(v)}{f(0)}$$

2.2. Es genügt für alles folgende, wenn wir uns auf die *Exponentialfunktionen*[7]

$$\exp_b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto b^x \quad (b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

beschränken, da alle Wachstumsfunktionen ja auf einfache Weise aus ihnen entstehen. Die Grundeigenschaft der Exponentialfunktionen entspricht der ersten Potenzregel $b^{u+v} = b^u b^v$ für alle $u, v \in \mathbb{R}$. Aus den obigen Eigenschaften läßt sich sofort die zweite Potenzregel $b^{uv} = (b^u)^v$ für alle $u, v \in \mathbb{R}$ herleiten (vgl. [11]).



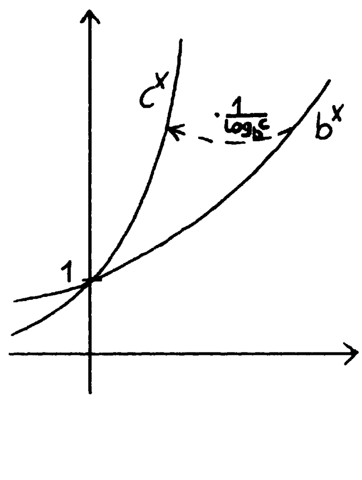
Als streng monotone Funktion hat jede der Exponentialfunktionen eine Umkehrfunktion, die *Logarithmusfunktion*

$$\log_b\colon \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R},\ x \mapsto \log_b x.$$

2.3. Je zwei Exponentialfunktionen zu verschiedenen Basen hängen auf einfache Weise zusammen. Aus der zweiten Potenzregel folgt nämlich

$$c^x = b^{\log_b c \cdot x}$$

für alle $b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $x \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet also[8]: Die Streckung $x \to \frac{1}{\log_b c} \cdot x$ parallel zur ersten Achse (im folgenden kurz „*x-Affinität*") überführt den Graphen von $x \mapsto b^x$ in den Graphen von $x \mapsto c^x$.



Als ausgezeichnete Basis, auf die sich solche Transformationen beziehen, empfiehlt sich vor der Analysis die Basis 2. Erst in der Differentialrechnung erweist es sich als zweckmäßig, die Eulersche Zahl e als ausgezeichnete Basis zu nehmen (siehe Abschnitt 5).

7 Wir benutzen im folgenden mitunter $\exp_b$ als Name für die Exponentialfunktion $x \to b^x$. Im Unterricht wird sich dies weitgehend vermeiden lassen.

8 Man mache sich klar: Durch $x \to x^* = \frac{x}{k}$ ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) geht der Graph von $x \to f(x)$ in den Graphen von $x \to f(kx)$ über, denn für jedes x ist $f(kx^*) = f(x)$.

3. Haupt-Ziele dieser Arbeit

3.1. In einem anwendungsorientierten Analysisunterricht in der beruflichen Oberstufe werden recht bald auch die Ableitungen der Exponentialfunktionen benötigt. Eine exakte Ableitungsbestimmung stößt jedoch auf größere mathematische Schwierigkeiten[9] (vgl. [2]). Unser *Ziel* ist es nun, einen Vorschlag zu unterbreiten, der diese *Ableitungsbestimmung* im Sinne der in Abschnitt **1** genannten Prinzipien *in elementarer Weise* bereits früh – etwa in einem „Grundkurs" zur Analysis (vgl. [3]) – ermöglicht[10].

Unser Weg läßt an *einer* genau gekennzeichneten Stelle eine bewußte Lücke, indem aus der Anschauung entnommen wird, daß jede der Exponentialfunktionen $x \mapsto b^x$ eine „Linkskurve" beschreibt und im Punkt (0/1) eine Tangente besitzt, die – außer in 0 – ganz unterhalb des Graphen verläuft. Auf diese Weise können Anwendungsprobleme im Zusammenhang mit Exponentialfunktionen ohne begrifflichen Aufwand *allen* Schülern zugänglich gemacht werden.

3.2. Bei der eben erwähnten Stelle handelt es sich keineswegs um einen Baustein, dessen Fehlen das ganze mathematische Gebäude der Ableitungsbestimmung für Exponentialfunktionen zum Einsturz bringt. Vielmehr ließe sich der bewußt ausgegliederte Nachweis der Konvexität der Exponentialfunktionen und ihrer Differenzierbarkeit an der Stelle 0 auch im Rahmen eines Grundkurses exakt führen. Hierzu fehlt hier aber der Platz (siehe jedoch [5]) und im Unterricht die Zeit.

3.3. In der Literatur wird oft ein Weg gewählt, bei dem zuerst die Ableitungen der Logarithmusfunktionen bestimmt werden[11] – obwohl diese für Anwendungsprobleme weit weniger relevant sind – und danach erst auf geometrischem (Spiegelung an der Winkelhalbierenden) oder rein formalem Wege (Ableitungsregel für die Umkehrfunktion) die Ableitungen der Exponentialfunktionen. Abgesehen davon, daß hier – im Gegensatz zu unserem Vorschlag – die Stetigkeit der Logarithmusfunktionen in der Form der Vertauschbarkeit von „$\log_b$" mit „$\lim\limits_{n\to\infty}$" substantiell eingeht und auch – entsprechend unserem Vorschlag – die Differenzierbarkeit der Logarithmusfunktionen ohne Beweis vorausgesetzt werden muß, muß bei diesem Weg die Konvergenz der Folge $((1 + \frac{1}{n})^n)$ mit allen dazu notwendigen unangenehmen Abschätzungen bereits vorher behandelt worden sein. Unser Zugang hat also den großen Vorzug, auch für einen „Grundkurs" geeignet zu sein, in dem Folgen nicht vorgängig behandelt worden sind.

Wir zählen nun in Abschnitt **4** die Voraussetzungen auf, welche die Schüler in unserem Vorschlag besitzen müssen; sodann schildern wir unseren Weg in Abschnitt **5**. In Abschnitt **6** beschäftigen wir uns näher mit der numerischen Bestimmung der Eulerschen Zahl.

---

9 Diese Schwierigkeiten werden in den meisten Schulbüchern für die gymnasiale Oberstufe dadurch umgangen, daß Logarithmus- und Exponentialfunktionen erst im Anschluß an die Integralrechnung behandelt werden. In einigen Schulbüchern für das berufliche Schulwesen werden die Schwierigkeiten dadurch „behoben", daß stillschweigend über sie hinweggegangen wird und den Schülern unbegründete Tatsachen, die manchmal den Aufbau echt verfälschen, heimlich untergeschoben werden. So wird in [18] $e^{\Delta x} - 1 = \frac{1}{n}$ gesetzt und stillschweigend $n \in \mathbb{N}$ angenommen, um $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ von vorher benutzen zu können. In [10], [14] und [18] wird stillschweigend die Vertauschbarkeit von „ln" und „$\lim\limits_{n\to\infty}$" angenommen. In [19], [14] und [17] werden zuerst die Logarithmusfunktionen abgeleitet und wird ohne Kommentar $\Delta x = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ gesetzt.

10 Vgl. zu unserem Weg auch [16] und [15, S. 171–174]

11 In einigen Schulbüchern vielleicht deshalb, weil jenes in Fußnote 9 montierte Unterschieben unbegründeter Tatsachen hier einfacher geht?

4. Schüler-Voraussetzungen

4.1. Den Schülern müssen die *Exponentialfunktionen* in der Weise bekannt sein, wie dies in Abschnitt 2 geschildert wurde. Die Schüler müssen also

- die Graphen der Exponentialfunktionen kennen, insbesondere deren strenge Monotonie
- wissen, daß die Exponentialfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ und deren Umkehrfunktionen $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bijektiv sind
- die erste und zweite Potenzregel kennen

sowie (für vertiefende Betrachtungen über die Existenz der Eulerschen Zahl, vgl. 5.3)

- wissen, daß die Graphen je zweier Exponentialfunktionen durch eine bestimmte Affinität auseinander hervorgehen.

4.2. Die Schüler müssen

- den Begriff der *Ableitung* $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ einer Funktion f an einer Stelle x kennen.
- wissen, daß die Ableitung als Tangentensteigung gedeutet werden kann.

Der *Grenzwertbegriff* darf dabei durchaus in einer noch vorläufigen, mehr intuitiven Form im Sinne einer „immer besseren Approximation" behandelt worden sein (vgl. [1, S. 23], [15, S. 50], [3, S. 295]); die einfachen Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten werden dabei bewußt ohne Begründung verwendet.

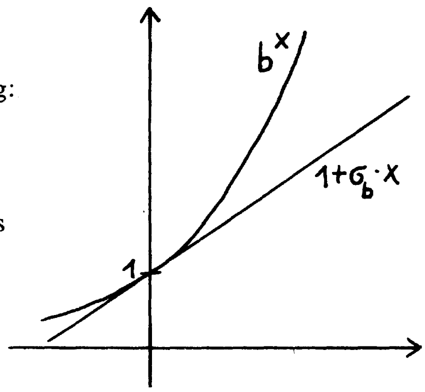
5. Die Ableitungsbestimmung

5.1. Der Differenzenquotient zur Exponentialfunktion $\exp_b$ ($b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) an der Stelle x ist[12])

$$\frac{b^{x+h} - b^x}{h} = b^x \cdot \frac{b^h - 1}{h}.$$

Nun entnehmen wir *bewußt* aus der Anschauung:

Der Graph von $\exp_b$ beschreibt eine Linkskurve und hat an der Stelle 0 eine wohlbestimmte Tangente, die – außer in 0 – ganz unterhalb des Graphen verläuft. Bezeichnet σ_b die Steigung dieser Tangente, so existiert also



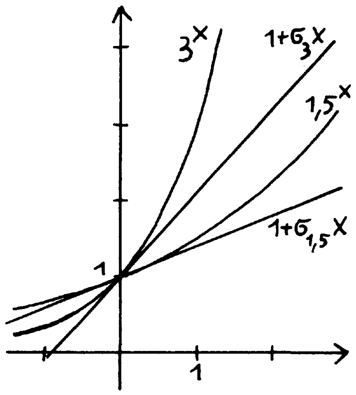
$$\sigma_b = \lim_{h \to 0} \frac{b^n - 1}{h} \quad (b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}).$$

Hieraus ergibt sich die Differenzierbarkeit von b^x an *jeder* Stelle x , mit der Ableitung $\sigma_b \cdot b^x$. Es gilt somit $\exp_b' = \sigma_b \cdot \exp_b$, d. h. die ***Ableitung einer Exponentialfunktion ist bis auf einen konstanten Faktor,*** der nur von der Basis abhängt, ***gleich der Funktion selbst.*** Dieser Faktor ist gleich der *Tangentensteigung* im Punkt (0/1).

12 Bei der folgenden Umformung wird die Potenzregel $b^{x+h} = b^x b^h$ benutzt. Da wir die benötigten Eigenschaften der Exponentialfunktionen eben zusammengestellt haben, werden wir im folgenden nicht jedesmal einzeln darauf hinweisen, wenn wir sie verwenden.

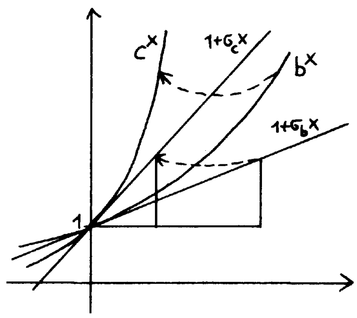
5.2. Das Problem ist nun reduziert auf die Bestimmung der Konstanten σ_b für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Durch Zeichnen verschiedener Exponentialfunktionen in der Umgebung von 0 und näherungsweises Zeichnen der Tangenten in (0/1) lassen sich erste *Nährungswerte* für σ_b ermitteln. Z.B. ergibt sich

$$\sigma_{1,5} \approx 0{,}4;\ \sigma_2 \approx 0{,}7;\ \sigma_{2,5} \approx 0{,}9;$$
$$\sigma_3 \approx 1{,}1;\ \sigma_{10} \approx 2{,}3 \text{ usw.}$$



5.3. Wir wissen, daß die Graphen zweier Exponentialfunktionen $\exp_b$, $\exp_c$ jeweils durch eine x-Affinität auseinander hervorgehen (siehe 2.2). Dieselbe x-Affinität überführt auch die Tangenten in (0/1) ineinander. Für ihre Steigungen gilt damit[13)]

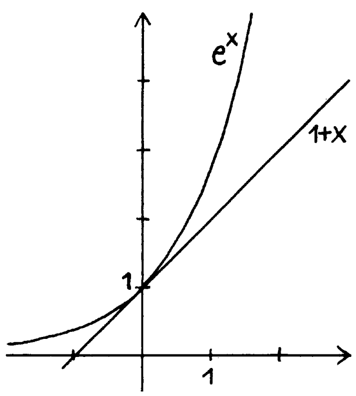
$$\sigma_c = \log_b c \cdot \sigma_b \quad (b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}).$$



5.4. Anschaulich ist klar, daß es genau eine Exponentialfunktion geben muß, deren Tangente in (0/1) gerade die Steigung 1 hat, und daß deren Basis zwischen 2,5 und 3 liegen muß. Diese Exponentialfunktion ist deshalb besonders interessant, da sie mit ihrer Ableitungsfunktion übereinstimmt.

Die Begründung[14)] für die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Basis e mit $\sigma_e = 1$, also $\exp_e' = \exp_e$, geschieht mittels der Bijektivität der Logarithmusfunktionen. Für beliebig festgehaltenes $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ nimmt nämlich $\log_b c$ und damit auch $\log_b c \cdot \sigma_b$ jeden reelen Wert genau einmal an, wenn c alle positiven reellen Zahlen durchläuft. Insbesondere gibt es genau eine Zahl $e \in \mathbb{R}^+$ mit $\sigma_e = \log_b e \cdot \sigma_b = 1$.

Diese Zahl e wird *Eulersche Zahl* genannt. Sie ist hier also in der Weise definiert, wie ihre *praktische Bedeutung* begründet ist, nämlich als Basis derjenigen Exponentialfunktion, die an der Stelle 0 die Steigung 1 hat, also mit ihrer Ableitung übereinstimmt.



Natürlich interessiert die Schüler der genaue numerische Wert von e; vgl. dazu Abschnitt 6.

13 Natürlich läßt sich dies auch formal mit Hilfe der Ableitungsregel „$f(x) = g(kx) \curvearrowright f'(x) = k \cdot g'(kx)$" berechnen:

$$c^x = f(x) = b^{\log_b c \cdot x} \curvearrowright \sigma_c \cdot c^x = f'(x) = \log_b c \cdot \sigma_b \cdot b^{\log_b c \cdot x} = \log_b c \cdot \sigma_b \cdot c^x.$$

Jene Regel kann übrigens unabhängig von der – in einem Grundkurs entbehrlichen – Kettenregel ganz elementar algebraisch oder geometrisch (vgl. [12, S. 25/26]) bewiesen werden, wobei dieser geometrische Beweis substantiell derselbe ist wie unserer mittels x-Affinitäten.

14 Vgl. auch das Schulbuch [7].

5.5. Da die Eulersche Zahl e nach ihrer Definition die *in der Differentialrechnung adäquate Basis* für Exponentialfunktionen ist, werden – entsprechend 5.3. – die Graphen aller Exponentialfunktionen $\exp_c$ mit $\exp_e$ verglichen. Wenn ln: = $\log_e$ gesetzt wird, ergibt sich wegen $\sigma_e = 1$ wie in 5.3. $\sigma_c = \ln c$ für alle $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Damit sind die gesuchten konstanten Faktoren bestimmt[15], und es gilt mithin

$$\exp'_b = \ln b \cdot \exp_b \quad \text{für alle } b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} .$$

5.6. Im *Unterricht* wird man in der Regel nicht die in 5.3. bis 5.5. vorgezeichnete Reihenfolge einhalten. Vielmehr kann die eindeutige Existenz einer Basis e mit $\sigma_e = 1$ schon direkt im Anschluß an die Ermittlung von Näherungswerten für einige σ_b (vgl. 5.2.) aus der Anschauung entnommen werden, da diese Existenz den Schülern völlig plausibel ist. Dann steht die Exponentialfunktion zur Basis e mit ihrer wichtigen Eigenschaft $\exp'_e = \exp_e$ sofort für Anwendungen zur Verfügung[16]. Auch die im nachfolgenden Abschnitt 6 geschilderte numerische Bestimmung der Eulersche Zahl e ist unabhängig von der Begründung für deren Existenz. Dieser *Existenznachweis* (entsprechend 5.3 und 5.4), der ja im Anspruchsniveau etwas höher liegt, kann *im Unterricht als vertiefende Betrachtung hintan gestellt* werden.

6. Numerische Bestimmung der Eulerschen Zahl

6.1. Eine möglichst genaue Ermittlung der Tangentensteigungen in (0/1) für einige Exponentialfunktionen mit Basen zwischen 2,5 und 3 liefert $e \approx 2{,}7$.

Diese Genauigkeit ist jedoch noch unbefriedigend. Weit bessere Näherungswerte liefert der *lineare Approximationsaspekt* (siehe [4, S. 174/175]): In der Umgebung von 0 läßt sich der Graph einer jeden Exponentialfunktion näherungsweise durch die zugehörige Tangente in (0/1) ersetzen, d.h. es gilt

$$b^x \approx 1 + \sigma_b \cdot x \quad \text{für kleine } |x|,$$

insbesondere also

$$e^x \approx 1 + x \quad \text{für kleine } |x|.$$

Mit $x = \frac{1}{n}$ wird also $e^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n}$ für große n. Indem in dieser Näherungsgleichung einfach auf beiden Seiten die n-te Potenz gebildet wird, ergibt sich

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{für große } n.$$

Hieraus berechnet man mit Hilfe eines Taschenrechners – unter vorteilhafter Verwendung von Zweierpotenzen: $e \approx \left(1 + \frac{1}{2^m}\right)^{2^m}$ – sofort $e \approx 2{,}718$.

6.2. Wir haben eben naiv auf beiden Seiten der Näherungsgleichung die n-te Potenz gebildet. Dies erscheint plausibel, ist aber bisher durch nichts gerechtfertigt, da im Unterricht

15 Es gilt also $\ln b = \lim\limits_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$ für alle $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Damit hat sich als Nebenresultat eine *Berechnungsmöglichkeit für* die *Logarithmenwerte* zur Basis e ergeben.

16 Die Ableitung der Exponentialfunktion zur Basis b für beliebiges $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ (siehe 5.5) kann dann auch direkt formal bewiesen werden (vgl. Fußnote 13):

$$\exp_b(x) = b^x = e^{\ln b \cdot x} \curvearrowright \exp'_b(x) = \ln b \cdot e^{\ln b \cdot x} = \ln b \cdot b^x.$$

das Rechnen mit dem „≈"-Zeichen sicherlich noch nicht thematisiert worden ist. Daher ergibt sich die Notwendigkeit der Präzisierung und Begründung der Aussage $e \approx (1+\frac{1}{n})^n$ für große n. Dies ist nun aber im Unterricht in elementarer Weise möglich: Wir benutzen aus **5.1.** daß der Graph von $\exp_e$ – außer an der Stelle 0 – oberhalb der Tangente in (0/1) verläuft. Es gilt also

$$e^x > 1 + x \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Setzen wir nun *einerseits* $x = \frac{1}{n}$, so folgt $e^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n}$, also $e > (1+\frac{1}{n})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Setzen wir *andererseits* $x = -\frac{1}{n+1}$, so folgt $e^{-\frac{1}{n+1}} > 1 - \frac{1}{n+1}$, also

$$e^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{(n+1)-1} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

und damit

$$e < (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^n \cdot (1+\frac{1}{n}) = (1+\frac{1}{n})^n + \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n} < (1+\frac{1}{n})^n + \frac{e}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt hat sich also ergeben

$$(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^n + \frac{e}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ ist insbesondere $e < 4$ (setze $n = 1$). Daher kann man auf der rechten Seite auch $\frac{4}{n}$ statt $\frac{e}{n}$ schreiben, wodurch die Ungleichung erst numerisch handhabbar wird[17].

Wir haben damit gezeigt, in welchem präzisen Sinn unsere Aussage $e \approx (1+\frac{1}{n})^n$ zu verstehen ist. Unser Beweis war deshalb so einfach im Vergleich zu den üblichen Abschätzungen im Zusammenhang mit der Folge $((1+\frac{1}{n})^n)$, weil wir die Zahl e *nicht* mehr *definieren*, sondern *nur* noch *berechnen* mußten.

6.3. Aus der eben hergeleiteten Ungleichung folgt sofort

$$0 < e - (1+\frac{1}{n})^n < \frac{4}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

also $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$. Hierbei brauchen keineswegs Folgen bereits vorher thematisiert worden zu sein (vgl. [3, S. 292]). Diese Grenzwertaussage ist aufgrund obiger expliziter Abschätzung vollkommen klar, gleichgültig ob ein exakter Grenzwertbegriff zugrundeliegt oder aber – wie wir für den ersten Durchgang der Analysis vorschlagen – ein didaktisch vereinfachter.

---

17 Das „Fehlerglied" $\frac{4}{n}$ macht es im übrigen plausibel, weshalb die Annäherung von $(1+\frac{1}{n})^n$ an die Zahl e so langsam erfolgt.

Literaturverzeichnis

[1] Artin, E.: A Freshman Honors Course in Calculus and Analytic Geometry. Charlottesville, Virginia 1957

[2] Baumgartner, E.: Zur Einführung der Logarithmus- und Exponentialfunktionen in der Sekundarstufe II. Didaktik der Mathematik 3 (1975), H. 1, S. 1–28.

[3] Blum, W.: Ein Grundkurs in Analysis für die berufliche Oberstufe. Die berufsbildende Schule 27 (1975), H. 5, S. 290–301

[4] Blum, W.: Ein Grundkurs in Analysis. Didaktik der Mathematik 3 (1975), H. 3, S. 163–184

[5] Blum, W./Kirsch, A.: Elementare Behandlung der Exponentialfunktionen in der Differentialrechnung. Erscheint in Didaktik der Mathematik 5 (1977)

[6] Bruner, J.S.: The Process of Education. Cambridge 1960

[7] Frommer, M./Frommer, H.: Funktionen – Leitfaden der Analysis für die Sekundarstufe II. Hamburg 1972

[8] Füssel, K./Jansen, R./Schwermann, K.: Mathematik für Fachoberschulen. Porz am Rhein 1974

[9] Hauptmeier, G./Kell, A./Lipsmeier, A.: Zur Auswahlproblematik von Lerninhalten und zur didaktischen Reduktion von Aussagen. Die Deutsche Berufs- und Fachschule 71 (1975), H. 12, S. 899–922

[10] Hoffmann, M./Röhrig, F.: Mathematik für Fachoberschulen 2, Teil A: Analysis, Fachrichtung Technik + Wirtschaft. München 1975

[11] Kirsch, A.: Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht. Erscheint in Didaktik der Mathematik 4 (1976)

[12] Koch, A.: Eine propädeutische Behandlung der Analysis. Der Mathematikunterricht 14 (1968), H. 5, S. 12–37

[13] Kruszyna, P./Döring, K.-W.: Vorbereitende Überlegungen sowie deren Aufarbeitung unter didaktischen Gesichtspunkten bezüglich der Behandlung von Exponential- und Logarithmusfunktionen in der Fachoberschule. Wissenschaftliche Hausarbeit, Gesamthochschule Kassel 1975

[14a/b] Kusch, L./Rosenthal, H.-J.: Mathematik für Schule und Beruf, Teil 3: Differentialrechnung/ Teil 4: Integralrechnung. Essen ^{5}1974/ ^{2}1974

[15] Lang, S.: A First Course in Calculus. Reading Massachusetts^{3}1973

[16] Meyer, F.: Didaktisches zur Behandlung der Exponential- und der Logarithmusfunktion auf der Mittelstufe. Elemente der Mathematik 2 (1947), H. 3, S. 64–66

[17] Schärf, J./Seidl, E.: Mathematik für Fachoberschulen 12. München 1973

[18] Sommer, E./Sommer, D.: Mathematik für Wirtschaftsgymnasien, Teil 1: Analysis. Bad Homburg ^{4}1974

Die anerkannten Ausbildungsberufe

Der Bundesminister für Bildung und Wissenschaft hat eben nach § 30 des Berufsbildungsgesetzes die Ausgabe 1976 des „Verzeichnisses der anerkannten Ausbildungsberufe" herausgebracht. In jeder beruflichen Schule sollte dieses wichtige Dokument vorhanden sein, das im W. Bertelsmann Verlag KG, Bielefeld, unter der Bestell-Nr. 600111462 h bezogen werden kann (Preis 15,30 DM).

Diesem Verzeichnis entnehmen wir, daß es zum 1. Juni 1976 in der Bundesrepublik Deutschland 456 Ausbildungsberufe gegeben hat. Zum Vergleichszeitpunkt des Vorjahres waren es noch 465. Diese 456 Ausbildungsberufe können wie folgt aufgeteilt werden:

92 Ausbildungsberufe sind neu (nach § 25 BBiG/§ 25 HwO) geregelte Berufe;

338 Ausbildungsberufe waren schon vor Inkrafttreten des Berufsbildungsgesetzes anerkannt und

26 Ausbildungsberufe sind vergleichbar geregelte Ausbildungsberufe (§ 108 Abs. 1).

Weitere wichtige Daten: 1974 gab es im Ausbildungsbereich der Industrie, des Handels und des Dienstleistungsgewerbes 664.554 Auszubildende, im Handwerk 486.531, in der Landwirtschaft 27.404, im öffentlichen Dienst 47.189, in sonstigen Ausbildungsbereichen 105.090 Auszubildende.