In: Lernzielorientierter Unterricht. Mathematik, Naturwissenschaften, Technik in der Weiterbildung, Hrsg.: Deutscher Volkshochschul-Verband - Pädagogische Arbeitsstelle- in Verbindung mit dem Verband Österreichischer Volkshochschulen und dem Verband der Schweizerischen Volkshochschulen, Heft 1, 1977, Hueber-Holzmann Verlag, München, S. 30-41

Werner Blum

Lineares Optimieren mit zwei Variablen

1. Einleitung

In der didaktischen Diskussion zum Mathematikunterricht ist in den letzten Jahren ein deutlicher Trend in Richtung auf eine verstärkte *Anwendungsorientierung* zu beobachten. [1] In diesem Zusammenhang kommt auch eines der für Anwendungen in der Praxis wichtigsten mathematischen Gebiete ins Blickfeld, das *Lineare Optimieren* (im folgenden meist kurz: LO). LO ist erst in den letzten 20 Jahren zu einer geschlossenen Theorie entwickelt worden. Kurz gesagt handelt es sich hierbei darum, Extrema einer linearen Funktion mehrerer Variabler unter Beachtung linearer Nebenbedingungen zu finden. Planungs- und Entscheidungsprobleme, die auf eine derartige Form gebracht werden können, gibt es in der Praxis in großer Zahl. Genannt seien z.B. Transport-, Produktions-, Mischungs-, Zuschnitts-, Investitions- oder Lagerhaltungsprobleme in den verschiedensten Disziplinen, einschließlich dem Militärwesen, wo das LO seinen Ausgangspunkt hatte.

Die in der Praxis vorkommenden Optimierungsprobleme haben in der Regel sehr viele Variable und erfordern zu ihrer Lösung Verfahren [2], welche mathematisch höchstens in Leistungs- oder Zusatzkursen der Sekundarstufe II zugänglich sein werden und welche i.a. die Zuhilfenahme von Computern erfordern. Wir wollen hierauf im Rahmen dieses Aufsatzes nicht näher eingehen, sondern uns hier nur mit Problemen beschäftigen, die vom mathematischen Aufwand her ohne weiteres auch für die *Erwachsenenbildung,* für *berufliche Schulen* (Berufsfachschulen, Berufsaufbauschulen, Fachschulen, Fachoberschulen) und für die *Sekundarstufe I* in Frage kommen.

Derartige Optimierungsprobleme mit wenigen, insbesondere mit *zwei* Variablen, sind zwar meist Vereinfachungen einer komplexeren Realität; die schulische Behandlung solcher *vereinfachten Probleme* ist jedoch legitim, sofern keine Verfälschungen auftreten, die Vereinfachungen dem Lernenden bewußt gemacht werden und Ausbaumöglichkeiten gewährleistet sind. Da sich die Grund-Prinzipien der Probleme und der Lösungsverfahren des LO bereits am Fall zweier Variabler exemplarisch deutlich machen lassen, ist der Absolvent eines Kurses in LO mit zwei Variablen besser darauf vorbereitet, in der Berufspraxis oder im Studium mit realen LO-Problemen verständig umgehen zu können.

Auf eine Erörterung von *Begründungen* für eine schulische Behandlung des Gebiets LO (wie z.B. Berufs- und Studienvorbereitung im eben genannten Sinne, Möglichkeiten der Anwendungsorientierung, Motivationsgehalt des Themas, Möglichkeiten der Förderung

1 Auf die vielfältigen Begründungen hierfür — Mathematik als Hilfsmittel zum Verstehen und Bewältigen von Umweltproblemen, Anwendungsprobleme zur Motivation und zum besseren Verständnis der Mathematik, ausgewogenes Bild der Wissenschaft Mathematik durch Berücksichtigung von Anwendungen — kann hier nicht näher eingegangen werden.

2 z.B. das von Dantzig entwickelte *Simplexverfahren* (vgl. [7]).

von allgemeinen Lernzielen des Mathematikunterrichts — wie etwa Schulung algorithmischen Denkens — oder Möglichkeiten für eine vertiefende Wiederholung mathematischer Schulstoffe) sowie auf eine Abwägung dieses Gebiets gegen andere müssen wir hier verzichten; man vergleiche dazu [4], S. 15/16, sowie [12].

Wir werden im folgenden zuerst zwei Beispiele für LO-Aufgaben mit zwei Variablen betrachten und diese lösen. Darauf aufbauend stellen wir im Rahmen einer Sachanalyse die mathematischen Grundlagen des LO mit zwei Variablen dar und erarbeiten Lösungsverfahren. Schließlich nennen und kommentieren wir einige kognitive Lernziele, die ein Kurs zum LO in zwei Variablen anstreben sollte. *Nicht* eingehen werden wir auf eventuelle Möglichkeiten, die sich durch den Einsatz von *Taschenrechnern* bei der Behandlung von LO-Problemen — auch mit mehr als 2 Variablen — ergeben können. Hierzu sind gesonderte didaktische Analysen notwendig.

2. Beispiele für LO-Aufgaben in zwei Variablen

Aufgabe 1:

Es sollen Vitamin-Rationen zum Versand in ein Katastrophen-Gebiet zusammengestellt werden. Diese Rationen sollen durch Mischung zweier Vitamin-Präparate, Multivit und Vitasan, hergestellt werden. 1 g von M enthält u.a. 1 E (1 Einheit, das sind 0,1 g) Vitamin B, 3 E Vitamin C und 1 E Vitamin E. 1 g von V enthält u.a. 2 E Vitamin B, 1 E Vitamin C und kein Vitamin E. Eine Ration soll mindestens 10 E Vitamin B, 15 E Vitamin C und 2 E Vitamin E enthalten; sie darf aber höchstens 13 g wiegen. 1 g von M kostet 2,-- DM, 1 g von V 1,-- DM. Wieviel g von M und wieviel g von V muß eine Mischungskombination enthalten, die unter allen möglichen Kombinationen am wenigsten kostet?

Mathematisierung:

Wir fassen die Aufgabenstellung in Tabellenform zusammen:

	1 g M	1 g V	1 Ration
	enthält [in E]	enthält [in E]	soll enthalten [in E]
Vitamin B	1	2	mind. 10
Vitamin C	3	1	" 15
Vitamin E	1	-	" 2
			soll wiegen [in g]
			höchstens 13
	kostet [in DM]	kostet [in DM]	soll kosten
	2	1	möglich wenig

Nun führen wir Variable ein: Eine Ration enthalte x g von M und y g von V. Die Aufgabenstellung lautet dann also:

$$x \geqslant 0 \qquad y \geqslant 0$$
$$x + 2y \geqslant 10$$
$$3x + y \geqslant 15$$
$$x \geqslant 2$$
$$x + y \leqslant 13$$
$$2x + y \rightarrow \text{Min!}$$ [3)]

Lösung:

Wir stellen diese Bedingungen graphisch dar: Jede der Ungleichungen bestimmt eine Halbebene in der x-y-Ebene. Die gemeinsamen Punkte (d.h. die Punkte des Durchschnitts) aller dieser Halbebenen bilden das „Planungsvieleck" M (siehe Abb. 1); M ist also die Menge all derjenigen Punkte, deren Koordinaten *alle* Bedingungen zugleich erfüllen.

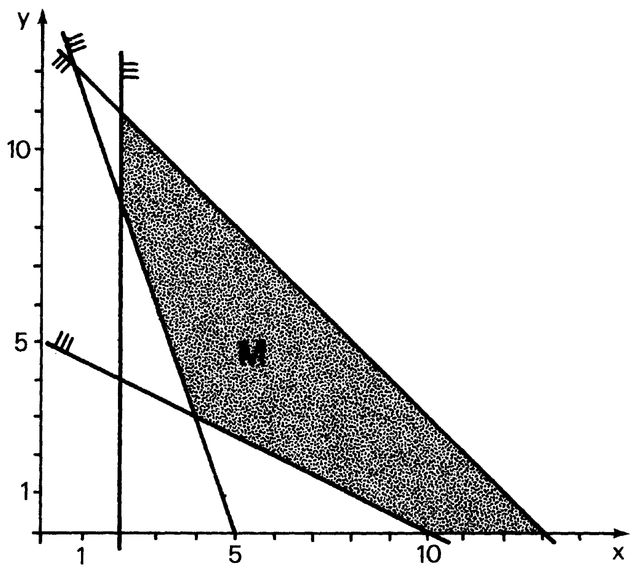

Abb. 1: Planungsvieleck

Innerhalb dieser Menge M sollen nun diejenigen Punkte [4)] (x | y) bestimmt werden, für

3 Wir schreiben — in Anlehnung an [6] — hier und im folgenden kurz „→Min!" um auszudrücken, daß diejenigen Einsetzungen in den betreffenden Term gesucht sind, die unter allen zulässigen — d.h. den Ungleichungen genügenden — einen minimalen Wert liefern. Über Existenzfragen ist dabei nichts gesagt.

4 Wir identifizieren der Einfachheit halber hier und im folgenden die Paare $(x|y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den Punkten der x-y-Ebene. Für den Lernenden kann eine Unterscheidung zwischen der algebraischen und der geometrischen Deutung und damit ein Bewußtmachen des Transfers zwischen symbolischer und ikonischer Ebene hilfreich sein.

welche der Term 2x + y den kleinstmöglichen Wert hat; d.h. also: Auf M soll die Funktion $(x \mid y) \rightarrow z = 2x+y$, die jedem Punkt $(x \mid y)$ die Zahl $2x+y$ zuordnet, minimiert werden.

Um diese Aufgabe besser überschauen zu können, stellen wir für den Moment diese „Zielfunktion" $(x \mid y) \rightarrow z$ graphisch dar. Der „Graph" ist eine ebene Fläche im x-y-z-Raum (siehe Abb. 2). Gesucht sind also tiefste Punkte dieser Fläche.

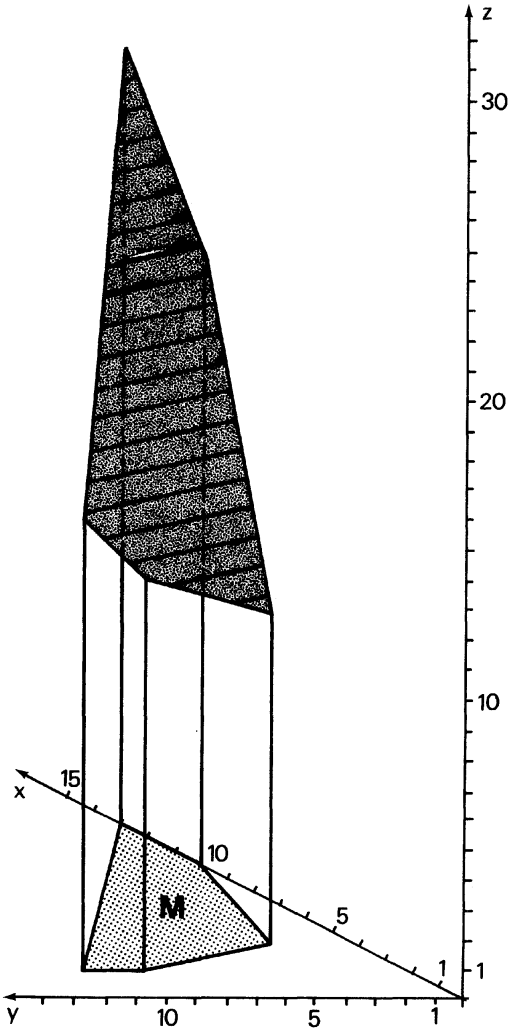

Abb. 2: Graphische Darstellung der Zielfunktion

Wir haben in Abb. 2 auch einige Höhenlinien dieser Fläche eingezeichnet; unter einer Höhenlinie verstehen wir die Menge aller Punkte $(x \mid y \mid z)$ der Fläche, welche dieselbe dritte Koordinate $z = a$ besitzen. Da die Fläche eben ist, sind die Höhenlinien Strecken bzw. Punkte.

Den Höhenlinien entsprechen – wie bei einer Landkarte – Linien in der x-y-Ebene. Wenn wir sie über M hinaus fortsetzen, so handelt es sich hierbei um untereinander parallele Geraden (siehe Abb. 3). Eine solche „Zielgerade“ besteht aus lauter Punkten $(x \mid y)$, für die der Wert $2x+y$ der Zielfunktion derselbe ist; die Gleichungen der Zielgeraden haben demnach alle die Form $2x+y = a$ mit $a \in \mathbb{R}$, oder in Normalform geschrieben $y = -2x+a$. Diejenige Zielgerade, die noch Punkte mit M gemeinsam hat und für die (unter allen Geraden mit dieser Eigenschaft) der Parameter a minimalen Wert hat, liefert die Lösung unserer Aufgabe. Wir erkennen in Abb. 3: Dies ist die Gerade $2x+y = 11$; sie bestimmt eindeutig den Lösungspunkt $(x_0 \mid y_0) = (4 \mid 3)$.

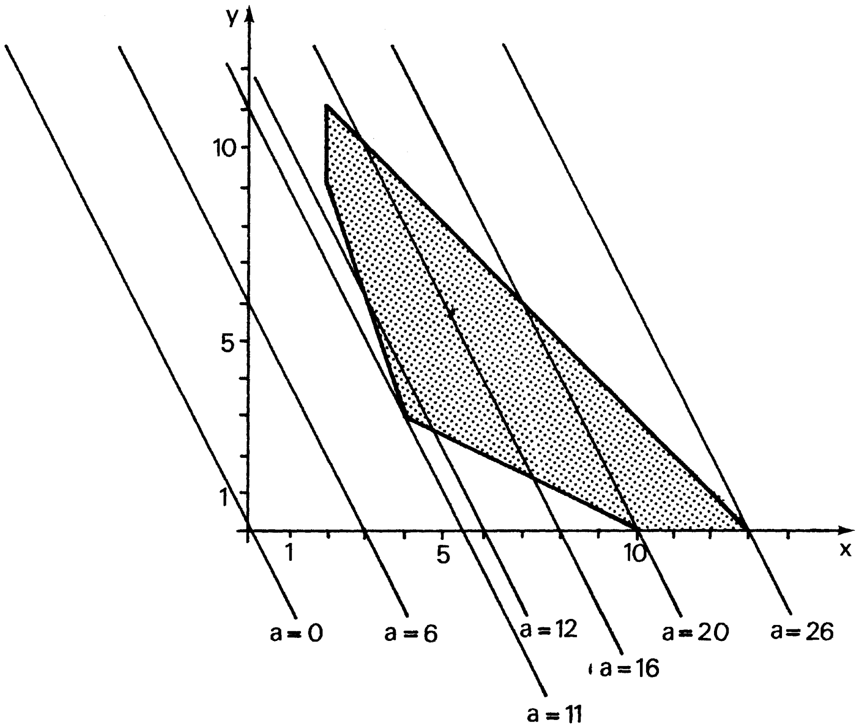

Abb. 3: Zielgeraden

Interpretation der Lösung:

Es gibt also genau eine billigste Mischungskombination. Sie besteht aus 4 g von M und 3 g von V und sie kostet 11 DM.

Sie enthält:	10 E	Vitamin B	(Mindestmenge)
	15 E	Vitamin C	(Mindestmenge)
	4 E	Vitamin E	(2 E mehr als Mindestmenge)
und wiegt:	7 g	(6 g weniger als Höchstgewicht)	

Damit ist der *Prozeß der Lösungsfindung* abgeschlossen:

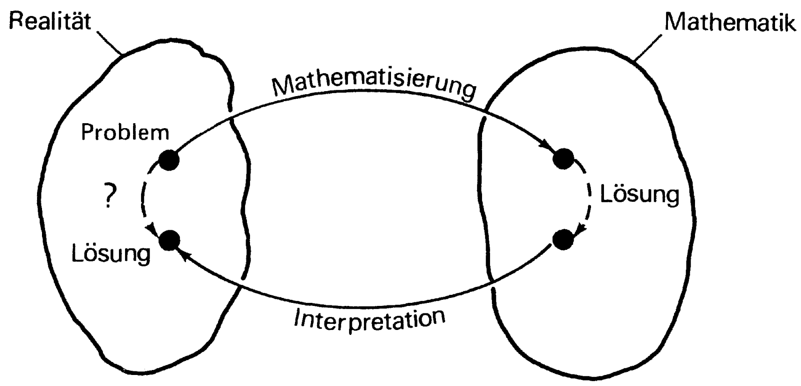

Abb. 4: Prozeß der Lösungsfindung

Wir haben diesen Prozeß absichtlich so ausführlich dargestellt, da wir sämtliche auftretenden Schritte auch für die Schule für wichtig halten; dies gilt insbesondere auch für die graphische Darstellung der Zielfunktion, die innerhalb eines LO-Kurses vor allem zur Gewinnung von Einsicht dient (vgl. [4], S. 16). Um LO-Aufgaben mit zwei Variablen zu lösen, genügt es jedoch, sich auf wenige Schritte zu beschränken. Wir erläutern ein solches Lösungsverfahren an Hand eines zweiten Beispiels, wobei wir uns auf den mathematischen Teil beschränken. Derartige Verfahren haben in einem LO-Kurs vor allem in der Phase der Übung und Mechanisierung ihren Platz.

Aufgabe 2:

Zu lösen ist das Problem

$$\begin{array}{ll} x \geqslant 0 & y \geqslant 0 \\ 2x + y \geqslant 4 & \\ x - 2y \leqslant 2 & \\ 5x - 2y \leqslant 20 & \\ 3x - 2y \rightarrow \text{Max!} & \end{array}$$

Lösung:

1) Graphische Darstellung des Planungsvielecks M

2) Einzeichnen einer beliebigen Zielgeraden, etwa $3x-2y = 0$

3) Parallelverschiebung dieser Geraden in Richtung wachsender Werte für $a = 3x-2y$ solange, bis eine Gerade mit maximalem Wert für a erreicht ist, die noch Punkte mit M gemeinsam hat.

4) Ablesen des (hier wieder eindeutig bestimmten) Lösungspunktes:
Es ist der Schnittpunkt der beiden Geraden mit $x-2y = 2$ und $5x-y = 20$

5) Berechnung des Lösungspunktes durch Schnitt der beiden Geraden liefert als Lösung

$(x_0 \mid y_0) = (\frac{38}{9} \mid \frac{10}{9})$ mit $3x_0 - 2y_0 = \frac{94}{9}$.

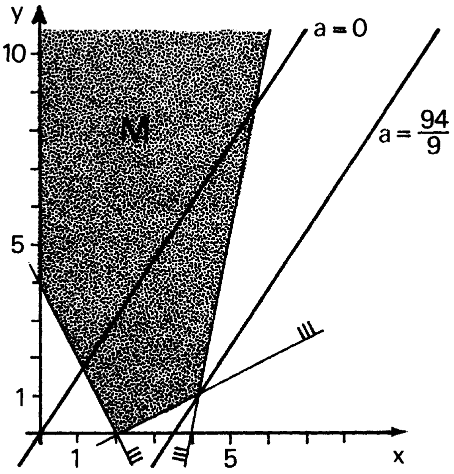

Abb. 5: Graphische Lösung einer LO-Aufgabe

Das Auffinden von für den Unterricht geeigneten (d.h. insbesondere nicht realitätsverfälschenden, lerngruppenrelevanten und vom außermathematischen Problem her faßlichen) LO-Aufgaben mit zwei Variablen ist ein Problem, mit dem wir uns im Rahmen dieses Aufsatzes nicht beschäftigen können; bzgl. einiger geeigneter Beispiele vgl. etwa [10], [11], [3] oder Schulbücher wie [1].

3. Mathematische Sachanalyse [5)]

Die mathematische Form für LO-Aufgaben mit 2 Variablen ist ein *lineares Ungleichungssystem*

$x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0$ *(Vorzeichen-Bedingungen)*

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &\leqslant c_1 \\ a_2x + b_2y &\leqslant c_2 \\ &\vdots \\ a_mx + b_my &\leqslant c_m \end{aligned}$$

(Neben-Bedingungen)

5 Bzgl. einer Sachanalyse für LO-Probleme mit mehr als zwei Variablen vgl. die elementaren Darstellungen [5] oder [11].

mit der Optimierungs-Bedingung

$px + qy \rightarrow$ Min!

Gesucht ist also das Minimum einer Funktion F mit $F((x \mid y)) = px + qy$ unter gewissen (linearen) Neben- bzw. Vorzeichen-Bedingungen. Dabei sind die Koeffizienten p, q, a_i, b_i, c_i $(i = 1, \ldots, m)$ reelle Zahlen. Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, die Ungleichungen in der obigen Form zu schreiben und eine Minimumaufgabe zu wählen. Denn erstens läßt sich eine Bedingung der Form $ax + by \geqslant c$ durch Multiplikation mit -1 äquivalent in die gewünschte Gestalt umformen, zweitens ist eine Gleichung $ax + by = c$ äquivalent zur „Und"-Verbindung zweier Ungleichungen $ax + by \leqslant c$ und $-ax - by \leqslant -c$, und drittens ist eine Bedingung $px + qy \rightarrow$ Max! äquivalent zu $-px - qy \rightarrow$ Min!

Das lineare Ungleichungssystem läßt sich geometrisch interpretieren: Seine Erfüllungsmenge M ist entweder die leere Menge oder – als Durchschnitt endlich vieler Halbebenen – ein konvexes Vieleck im ersten Quadranten der x-y-Ebene, das sogenannte *Planungsvieleck.* Dieses Vieleck ist – im Falle $M \neq \emptyset$ – der Definitionsbereich der *Zielfunktion*

$$F : (x \mid y) \rightarrow z = px + qy; \quad (x \mid y) \in M,$$

deren Minimum gesucht ist. Der „Graph" von F, d.h. die Menge aller Raumpunkte $(x \mid y \mid z)$ mit $(x \mid y) \in M$ und $z = px + qy$, ist eine ebene Fläche im x-y-z-Raum; diese Fläche liegt „über" M, d.h. ihre Projektion in z-Richtung auf die x-y-Ebene ergibt das Planungsvieleck. Eine „Höhenlinie" G_a auf dem Graphen von F besteht aus allen Punkten $(x \mid y \mid z)$, welche dieselbe dritte Koordinate $z = a$ (a aus dem Wertebereich von F) besitzen; Höhenlinien können Punkte, Strecken oder Halbgeraden sein.

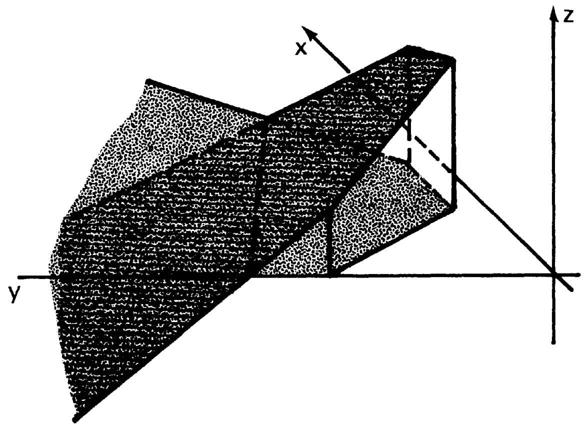

Abb. 6: Planungsvieleck und Graph der Zielfunktion einer (nicht lösbaren) LO-Aufgabe

Im Falle $M = \emptyset$ besitzt die gegebene LO-Aufgabe keine Lösung. Aber auch im Falle $M \neq \emptyset$ braucht die Aufgabe nicht lösbar zu sein, denn die Zielfunktion F braucht ja auf M gar kein Minimum anzunehmen, d.h. der Graph von F braucht keine tiefsten Punkte zu haben (wie das Beispiel in Abb. 6 zeigt). *Wenn* F überhaupt auf M ein Minimum annimmt, d.h. wenn der Graph von F tiefste Punkte besitzt (was z.B. bei beschränktem nicht-leeren Planungsvieleck stets der Fall ist), *dann* gibt es offenbar entweder genau einen tiefsten Punkt — der dann notwendigerweise über einer *Ecke* von M liegt —, oder es gibt eine ganze *Kante* von tiefsten Punkten — die dann über einer Kante von M liegen, worunter sich als Randpunkt auch mindestens eine Ecke von M befinden muß. Es gilt also:

Wenn eine LO-Aufgabe eine Lösung besitzt, dann ist mindestens eine Ecke des Planungsvielecks Lösung. (Hauptsatz des LO).

Unter einer „Lösung" einer LO-Aufgabe verstehen wir dabei also einen Punkt $(x_0 \mid y_0)$, der allen Bedingungen des Ungleichungssystems genügt und für den $px_0 + qy_0$ minimal ist unter allen „zulässigen" Punkten. Wenn eine Lösung existiert, so kann sie nach unseren Überlegungen also entweder eindeutig bestimmt sein (Lösungsecke), oder es gibt unendlich viele Lösungen (Lösungskante).

Dieser Satz legt ein *rechnerisches Lösungsverfahren* („Eckpunktverfahren") nahe, welches allerdings nur dann anwendbar ist, wenn man weiß, daß die LO-Aufgabe eine Lösung besitzt:

Man berechne sämtliche Ecken des Planungsvielecks; sodann berechne man die F*-Werte all dieser Eckpunkte; dann suche man das Minimum unter diesen Zahlen; jeder zugehörige Punkt ist Lösung der LO-Aufgabe.*

Die geometrische Interpretation der Lösungen als tiefste Punkte des Graphen der Zielfunktion F führt zu einem anderen Lösungsverfahren, nämlich dem in Abschnitt 2 angewandten: Man „startet" auf einer beliebigen Höhenlinie G_a und „steigt" quer zu den Höhenlinien, diese quasi als „Stufen" benutzend, in Richtung fallender a-Werte herab. Falls eine Lösung existiert, so muß dieses „Herabsteigen" auf einer Höhenlinie (d.h. einem Punkt oder einer Strecke oder einer Halbgeraden) mit minimalem a „enden". Die dieser Höhenlinie entsprechenden Punkte in M sind Lösungen. Wie bei Aufgabe 1 in Abschnitt 2 interpretieren wir diesen Prozeß der schrittweisen Annäherung an eine Lösung mit Hilfe der *Zielgeraden* g_a in der x-y-Ebene, d.h. der Geraden mit den Gleichungen $px + qy = a$ $(a \in \mathbb{R})$. Diese Geraden schneiden aus M genau die Projektionen der Höhenlinien heraus. Damit ergibt sich das schon bekannte *graphische Lösungsverfahren:*

Man zeichne das Planungsvieleck M; *ist* $M \neq \emptyset$, *so zeichne man eine beliebige Zielgerade; man verschiebe diese solange parallel, bis eine Ecke von* M *mit minimalem* a *erreicht ist; falls es einen solchen Eckpunkt gibt, so ist er Lösung der LO-Aufgabe; man berechne seine Koordinaten durch Schnitt der entsprechenden Randgeraden.*

Außer den beiden genannten gibt es noch weitere Lösungsverfahren für LO-Aufgaben mit zwei Variablen, so insbesondere für *Transportprobleme.* Wir können hierauf im Rahmen dieses Aufsatzes nicht näher eingehen (vgl. etwa [13]).

Eine wichtige Abart des LO soll noch erwähnt werden: Die *ganzzahlige Optimierung* [6]. Hierbei dürfen die Variablen nur ganzzahlige Werte annehmen (etwa im Fall von Stück-

6 Vgl. hierzu die Unterrichtsvorschläge von Beck [2].

zahlen). Statt M liegt dann also $M \cap \mathbb{N}_0^2$ zugrunde, d.h. es interessieren nur die in M liegenden Gitterpunkte. Dies kann bei rechnerischen Verfahren zu beträchtlichen Schwierigkeiten führen (insbesondere bei Verallgemeinerung auf mehr als 2 Variable). Beim zeichnerischen Verfahren genügt dagegen eine einfache Modifikation: Es werden nur solche Zielgeraden zugelassen, die durch mindestens einen Gitterpunkt von M gehen.

4. Kognitive Lernziele [7]

Wir geben im folgenden Lernziele zu einem Kurs über LO an, wie er etwa in der Erwachsenenbildung, in Fachschulen, in Fachoberschulen oder in Schulen der Sekundarstufe I durchgeführt werden kann [8]. Die Reihenfolge der Lernziele entspricht nicht ihrer Wichtigkeit, eher der ungefähren Reihenfolge ihres Auftretens in der Lernsequenz. Eine genauere Differenzierung und Operationalisierung muß für die und mit der jeweiligen Lerngruppe geleistet werden, so daß wir hier darauf verzichten. Alles bezieht sich auf 2 Variable, ohne daß dies jedesmal ausdrücklich gesagt würde.

Das erste Lernziel zielt auf das *Verständnis des Grundproblems* des LO ab:

1. A. *Wissen, daß LO-Probleme durch Bedingungen und Zielfunktion gegeben sind.*

   B. *Bei gegebenen (einfachen) Problemsituationen erkennen können, ob eine LO-Aufgabe vorliegt, und gegebenenfalls die Bedingungen und die Zielfunktion mit Hilfe von Variablen in formalisierter Darstellung angeben können.*

Das zweite und das dritte Lernziel betreffen die Voraussetzungen für eine verständige Lösung von LO-Aufgaben:

2. A. *Die Erfüllungsmenge eines gegebenen Systems linearer Ungleichungen graphisch darstellen können.*

   B. *Das Planungsvieleck zu einem gegebenen Problem bzgl. des Ungleichungssystems (formal) und bzgl. der Bedingungen (inhaltlich) interpretieren können.*

3. *Die (lineare) Zielfunktion eines gegebenen Problems kennen:*

   A. *Wissen, daß ihr Definitionsbereich das Planungsvieleck ist.*

   B. *Wissen und erläutern können, daß ihr Graph als eine ebene Fläche im Raum gedeutet werden kann, die über dem Planungsvieleck liegt.*

   C. *Wissen, daß die Zielfunktion auf parallelen Geraden jeweils konstant ist.*

   D. *Wissen, daß diese Geraden den Höhenlinien der ebenen Fläche im Raum entsprechen.*

Lernziel 3 ist *nicht* so weitgehend zu interpretieren, daß Funktionen zweier Variabler *thematisiert* werden müssen. Der Lernende soll jedoch den *Funktionscharakter der*

7 Vgl. [4], S. 16/17.

8 Ein solcher Kurs ist mehrfach vom Verfasser und von Kollegen durchgeführt worden; bzgl. einer Unterrichtseinheit in einer Techniker-Fachschule vgl. [9].

Zielfunktion erfassen, insofern jedem Punkt des Planungsvielecks genau eine reelle Zahl zugeordnet ist. Dieses Vordringen in den Raum — was unterrichtlich zum Bau von *räumlichen Modellen* führen kann (vgl. [8], S. 245, [4], S. 19 und [9]) — schult erstens die Raumanschauung, zweitens und vor allem aber schafft es erst die Grundlage für ein tiefergehendes Verständnis des graphischen Verfahrens und des Hauptsatzes.

4. A. *LO-Aufgaben (in einfachen Fällen) zeichnerisch und rechnerisch lösen können.*

   B. *Das graphische Lösungsverfahren kennen und begründen können.*

   C. *Wissen und Bedingungen dafür angeben können, daß eine LO-Aufgabe keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzen kann.*

Der graphische Lösungskalkül stellt ein Werkzeug dar, mit dem der Lernende selbständig LO-Aufgaben lösen kann. Doch soll ein stures Rezepteanwenden verhindert werden. Dazu muß *erstens* ein *Verständnis* für das graphische Verfahren entwickelt werden. Dies geschieht — wie eben schon ausgeführt — mit Hilfe der räumlichen Interpretation der Zielfunktion, durch welche der Lernende die Parallelverschiebung der Zielgeraden als „Wandern" quer zu den Höhenlinien verstehen und die Lösung damit „sehen" kann. Auch die in 4 C angesprochenen Fälle, daß keine oder keine eindeutige Lösung existiert, lassen sich bei räumlicher Interpretation verständlich machen.

Zweitens soll der Lernende einen kritischen Blick für die Verwendung angemessener mathematischer Werkzeuge entwickeln. Dazu gehört, daß gegebene LO-Aufgaben auch daraufhin untersucht werden, ob Lösungen nicht a priori — d.h. ohne Verwendung eines Verfahrens — erkennbar sind.

Obwohl mit dem Vordringen der Taschenrechner auch aufwendigere rechnerische Lösungsverfahren (insbesondere für mehr als 2 Variable) zugänglich und damit wohl auch zunehmend schulrelevant werden, steht das graphische Verfahren bei LO-Aufgaben mit 2 Variablen wohl weiterhin im Vordergrund, da es anschaulicher und immer noch einfacher handhabbar ist. Jedenfalls verbaut dieses Verfahren mit seiner „stufenweisen" (siehe Abschnitt 3) Annäherung an die Lösung nicht die Erweiterung zu den ähnlich „schrittweise" ablaufenden praxisrelevanten rechnerischen Verfahren für LO-Probleme mit vielen Variablen. Damit der Lernende offen bleibt gegenüber einem Ausbau zu diesen Verfahren (z.B. zum Simplexverfahren), sollten in einem Kurs zum LO mit 2 Variablen graphische *und* rechnerische Verfahren benutzt und ihre gemeinsamen Prinzipien betont werden.

Zum Lösungsgang eines LO-Problems gehört — wie in Beispiel 1 von Abschnitt 2 gezeigt — nicht nur die Mathematisierung und die mathematische Lösung, sondern auch die Rück-Interpretation der Lösung; auch eine kritische Diskussion über Problemstellung und gefundene Lösung (z.B. im Zusammenhang mit — sehr häufig in Schulbüchern vorkommenden — Gewinnmaximierungsproblemen) sollte mit eingeschlossen werden:

5. A. *Die mathematische Lösung von LO-Aufgaben am gegebenen außer-mathematischen Problem interpretieren und kritisch werten können.*

   B. *Die Auswirkungen von Änderungen der gegebenen Bedingungen bzw. der gegebenen Zielfunktion auf die gefundene Lösung erläutern können.*

Als Hintergrund für das Verständnis der verschiedenen Lösungsverfahren ist – wie schon erwähnt – der Hauptsatz des LO wichtig:

6. *Den Hauptsatz des LO kennen: Wissen und erläutern können, daß eine Lösung einer LO-Aufgabe (sofern eine existiert) stets unter den Ecken des Planungsvielecks gefunden werden kann.*

Schließlich sollten dem Lernenden auch die Vereinfachungen bewußt sein, unter denen er arbeitet:

7. A. *Wissen, daß und wie zweidimensionale Probleme nur vereinfachte Modelle von realen Problemsituationen sind.*

   B. *Bei unrealistischen Ergebnissen selbständig Änderungen des Modells vorschlagen können.*

Literatur

[1] **Athen, H./Griesel, H. (Hrsg.),** Mathematik heute 9. Hannover. ^{2}1976.

[2] **Beck, U.,** Elementares lineares Optimieren – Ein Beispiel für eine problemorientierte Unterrichtseinheit. (In: LU 4-1975, S. 15-22).

[3] **Bienk, H./Werner, H.,** Begründungen und Konstruktion eines Kurses zum linearen Optimieren im beruflichen Schulwesen. Wissenschaftliche Hausarbeit. Gesamthochschule Kassel. 1975.

[4] **Blum, W.,** Didaktische Fragen des linearen Optimierens in der Sekundarstufe I. (In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1975. Hannover. 1975. S. 15 - 19).

[5] **Burkhard, R.E.,** Lineare Optimierung im Schulunterricht. (In: Anwendungsorientierte Mathematik in der Sekundarstufe II (Hrsg.: Dörfler, W./Fischer, R.). Klagenfurt. 1977. S. 39 - 58).

[6] **Collatz, L./Wetterling, W.,** Optimierungsaufgaben. Berlin. ^{2}1971.

[7] **Dantzig, G.B.,** Lineare Programmierung und Erweiterungen. Berlin. 1966.

[8] **Fletcher, T.J. (Hrsg.),** Exemplarische Übungen zur modernen Mathematik. Freiburg. 1967.

[9] **Focke, W.,** Erstellung einer Unterrichtsreihe mit dem Thema „Lineares Optimieren" im beruflichen Schulwesen unter Berücksichtigung des Einsatzes von Arbeitsblättern, Informationsblättern, räumlichen Auschauungsmodellen und ihrer Erprobung in einer Technikerklasse. Zweite Staatsexamensarbeit. Kassel. 1976.

[10] **Ineichen, R.,** Elementare Beispiele zur linearen Programmierung und zur Spieltheorie. (In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 16 (1973), H. 9, S. 398 - 404).

[11] **Schick, K.,** Lineares Optimieren. Frankfurt. 1973.

[12] **Schick, K.,** Mathematische Optimierungsprobleme in der Kollegstufe. Dissertation PH Rheinland. 1974.

[13] **Schick, K./Schmitz, G.,** Wirtschaftsmathematik I – Optimierungsprobleme. Düsseldorf. 1974.