

Uniformisierbarkeit in Familien von abelschen t -Moduln höheren Ranges

Dissertation
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
am Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften
der Universität Kassel

vorgelegt von
Dipl.-Math. Oliver Bangert
geboren in Lauterbach

Institut für Mathematik
Universität Kassel
2011

Tag der Disputation

Mittwoch, der 26.10.2011

Erstgutachter

Prof. Dr. Hans-Georg Rück

Universität Kassel

Zweitgutachter

Prof. Dr. Florian Breuer

University of Stellenbosch, Südafrika

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Notation	9
1 Grundlagen	11
1.1 Drinfeldmoduln	11
1.2 t -Motive und t -Moduln	14
2 Tensorpotenzen des Carlitzmoduls	21
2.1 Der Modul der τ -Invarianten	22
2.2 Die Exponentialfunktion und ihr Kern	24
3 Isomorphieklassen	29
3.1 Drinfeldmoduln	29
3.2 Eine explizite Methode für spezielle t -Moduln	33
4 Familien von uniformisierbaren t-Moduln	39
4.1 Eine spezielle Familie und Rekursionen	39
4.2 Newtonpolygone	50
4.3 Hinreichende Kriterien	53
4.4 Eine uniformisierbare Teilfamilie	61
4.5 Notwendige Kriterien	67
4.6 Eine nicht uniformisierbare Teilfamilie	74
Anhang	81
Literaturverzeichnis	88

Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Frage, wie sich in einer Familie von abelschen t -Moduln die Teilfamilie der uniformisierbaren t -Moduln beschreiben lässt. Dabei sind abelsche t -Moduln die höherdimensionale Verallgemeinerung von Drinfeldmoduln. Drinfeldmoduln spielen in der Arithmetik von Funktionenkörpern eine ähnliche Rolle wie elliptische Kurven in der Arithmetik von Zahlkörpern und sind als Analogie zu elliptischen Kurven zu sehen. In diesem Sinne sind abelsche t -Moduln über Funktionenkörpern eine Analogie zu abelschen Varietäten über den komplexen Zahlen. Wir betrachten zunächst den klassischen Fall elliptischer Kurven über den komplexen Zahlen.

Sei Λ ein \mathbb{Z} -Gitter vom Rang zwei in den komplexen Zahlen \mathbb{C} . Der Quotient \mathbb{C}/Λ ist ein Torus. Der analytische Torus \mathbb{C}/Λ ist isomorph zu einem algebraischen Objekt, einer elliptischen Kurve, die sich durch polynomielle Gleichungen beschreiben lässt. Umgekehrt lässt sich jeder elliptischen Kurve ein analytischer Torus zuordnen. Wir erhalten so eine 1:1 Beziehung zwischen elliptischen Kurven als algebraischen Objekten auf der einen Seite und Tori als analytischen Objekten auf der anderen Seite [Sil09]. Wie sieht das in höheren Dimensionen aus?

Wir betrachten ein \mathbb{Z} -Gitter Λ vollen Ranges in \mathbb{C}^d mit $d > 1$. Nicht immer lässt sich dem analytischen Torus \mathbb{C}^d/Λ ein algebraisches Objekt zuordnen. Nur wenn das Gitter eine zusätzliche Bedingung erfüllt, gehört zum Torus \mathbb{C}^d/Λ ein algebraisches Objekt, nämlich eine abelsche Varietät. Umgekehrt erhält man zu jeder abelschen Varietät einen Torus [SD74]. In diesem Sinne gibt es mehr Tori als abelsche Varietäten.

Wir wollen zunächst ein zu einer elliptischen Kurve analoges Objekt für rationale Funktionenkörper untersuchen. Wir haben oben \mathbb{Z} -Gitter in \mathbb{C} betrachtet. Um die Analogie zu finden, müssen wir zunächst die passenden Ringe und Körper für \mathbb{Z} und \mathbb{C} im Funktionenkörperfall finden. Wir wiederholen kurz den Zusammenhang von \mathbb{Z} und \mathbb{C} . Zu den ganzen Zahlen können wir den Quotien-

tenkörper \mathbb{Q} bilden. Wir vervollständigen diesen bezüglich der ∞ -Stelle, nämlich dem Absolutbetrag, und erhalten so die reellen Zahlen \mathbb{R} . Von diesen bilden wir den algebraischen Abschluss und erhalten die komplexen Zahlen \mathbb{C} . Der Grad dieser Körpererweiterung ist zwei. Deshalb sind die komplexen Zahlen bezüglich des fortgesetzten Absolutbetrages vollständig.

Übertragen wir dies auf den Funktionenkörperfall, so entspricht den ganzen Zahlen der Ring $\mathbb{F}_q[t]$. Als Quotientenkörper von $\mathbb{F}_q[t]$ entspricht $K = \mathbb{F}_q(t)$ den rationalen Zahlen. Indem wir $\left| \frac{f(t)}{g(t)} \right| = q^{\deg g(t) - \deg f(t)}$ setzen, wählen wir die ∞ -Stelle des Funktionenkörpers aus und vervollständigen $\mathbb{F}_q(t)$ zum Körper der formalen Laurentreihen $K_\infty = \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right)$. Damit ist K_∞ in Analogie zu den reellen Zahlen zu sehen. Jetzt gehen wir zum algebraischen Abschluss \overline{K}_∞ über. Hier taucht ein wesentlicher Unterschied zum klassischen Fall auf, denn die Erweiterung $\overline{K}_\infty/K_\infty$ ist im Gegensatz zu der Erweiterung \mathbb{C}/\mathbb{R} nicht endlich. Auch ist \overline{K}_∞ nicht vollständig bezüglich des fortgesetzten Betrages. Außerdem können wir diskrete $\mathbb{F}_q[t]$ -Gitter beliebigen Ranges in \overline{K}_∞ finden, während im klassischen Fall nur die \mathbb{Z} -Ränge eins und zwei möglich sind. Wir vervollständigen \overline{K}_∞ zum Körper \mathbb{C}_∞ , der vollständig und algebraisch abgeschlossen ist. Der Körper \mathbb{C}_∞ ist als Analogon zu den komplexen Zahlen zu betrachten.

Ähnlich wie bei elliptischen Kurven betrachten wir jetzt ein $\mathbb{F}_q[t]$ -Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}_\infty$ und den analytischen Torus $\mathbb{C}_\infty/\Lambda$. Dieser Torus ist isomorph zu einem algebraischen Objekt, einem sogenannten Drinfeldmodul, der sich als Polynom über \mathbb{F}_q auffassen lässt. Umgekehrt gibt es zu jedem Drinfeldmodul ein Gitter Λ , so dass der Drinfeldmodul isomorph zu $\mathbb{C}_\infty/\Lambda$ ist. Wir erhalten wie bei elliptischen Kurven eine 1:1 Beziehung zwischen Drinfeldmoduln und analytischen Tori. Dies wurde zum ersten Mal von Vladimir G. Drinfeld im Jahr 1974 in seiner berühmten Arbeit [Dri74] gezeigt.

Während die Verallgemeinerung zu höherer Dimension im klassischen Fall auf der analytischen Seite über die Tori geschieht, betrachten wir im Funktionenkörperfall algebraische Objekte in höherer Dimension, sogenannte abelsche t -Moduln. Üblicherweise betrachtet man aus Gründen, auf die wir nicht näher eingehen, t -Moduln über dem Körper $L = \overline{K}_\infty$ und nicht über \mathbb{C}_∞ . Das erste Mal wurden t -Moduln von Greg W. Anderson im Jahr 1986 betrachtet und untersucht [And86]. Es stellt sich die Frage, ob es zu jedem abelschen t -Modul E ein $\mathbb{F}_q[t]$ -Gitter $\Lambda \in L^d$ gibt, so dass E isomorph zum analytischen Torus L^d/Λ ist. Anderson zeigte, dass dies nicht immer möglich ist, indem er ein Beispiel für einen nicht uniformisierbaren t -Modul von Rang vier und Dimension zwei

angab. Er nannte einen abelschen t -Modul uniformisierbar, falls er isomorph zu einem Torus ist. Anderson ordnete einem t -Modul ein duales Objekt zu, ein sogenanntes t -Motiv. Er zeigte, dass die Kategorie der t -Moduln anti-äquivalent zur Kategorie der t -Motive ist. Zudem zeigte er, dass die Uniformisierbarkeit eines t -Moduls äquivalent ist zur rigiden analytischen Trivialität des zugehörigen t -Motives.

Die Uniformisierbarkeit von t -Moduln ist nach wie vor nicht sehr gut verstanden. Eine interessante Frage ist, wie sich die Teilfamilie der uniformisierbaren t -Moduln innerhalb einer Familie von t -Moduln beschreiben lässt. Ein erstes Beispiel betrachtete Francis Gardeyn in seiner Doktorarbeit 2001 [Gar01]. Gebhardt Böckle und Urs Hartl untersuchten im Jahr 2007 in [BH07] die Uniformisierbarkeit von τ -Garben, einer Verallgemeinerung von t -Motiven. Sie zeigten, dass die Teilfamilie der uniformisierbaren t -Motive innerhalb einer τ -Garbe eine Berkovich offene Menge bildet. Sie veranschaulichten ihre Ergebnisse anhand einer Verallgemeinerung des Beispiels von Gardeyn, blieben aber im Fall Dimension und Rang zwei. Höherdimensionale t -Motive vom Rang zwei wurden von Konstantin Seiler in seiner Diplomarbeit [Sei08] untersucht. Er startet mit der Familie von Böckle und Hartl und verallgemeinert diese. Es gelingt ihm aber nicht, die uniformisierbare Teilfamilie zu charakterisieren. Er gibt lediglich hinreichende und notwendige Kriterien für die Uniformisierbarkeit an, einige Fälle bleiben unentscheidbar.

In dieser Arbeit betrachten wir die Familie der t -Moduln E , die durch

$$t = \theta + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau + \tau^2$$

mit $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{F}_q \left(\left(\frac{1}{t} \right) \right)}$ definiert werden. Die t -Moduln dieser Familie haben Rang vier und Dimension zwei. Diese Familie enthält das nicht uniformisierbare Beispiel von Anderson und die direkte Summe von Drinfeldmoduln. Deshalb enthält sie sowohl uniformisierbare als auch nicht uniformisierbare Teilfamilien.

Wir zeigen, dass die Uniformisierbarkeit von t -Moduln dieser Familie äquivalent ist zur Existenz von hinreichend vielen Nullfolgen $(y_n)_n \in \overline{\mathbb{F}_q \left(\left(\frac{1}{t} \right) \right)}^{\mathbb{N}_0}$, die einer konkreten, von a, b, c, d abhängigen Rekursionsgleichung genügen. Wir leiten über diese Charakterisierung notwendige und hinreichende Kriterien für die Uniformisierbarkeit eines t -Moduls E aus unserer Familie her. Mit Hilfe dieser Kriterien zeigen wir unter anderem die folgenden Aussagen:

1.) Wenn

$$\begin{aligned} 0 &\leq v(c) < \frac{1}{q+1}, \\ v(a) &\geq -\frac{q}{q+1}, \\ v(d) &\geq -\frac{q}{q+1} \text{ und} \\ v(b) &> -q \end{aligned}$$

gilt, dann ist E uniformisierbar (Satz 4.4.2).

2.) Wenn

$$\begin{aligned} v(a) &\geq -\frac{q^2+q}{q^2+1}, \\ v(d) &\geq -\frac{q^2+q}{q^2+1}, \\ -\frac{q}{q-1} &\geq v(c) > \frac{-q^2-v(a)-v(d)}{q-1} \text{ und} \\ b &= \theta c^{-\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

gilt, dann ist E nicht uniformisierbar (Satz 4.6.5).

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

Der Einfachheit halber sei für diese Erläuterung $L = \overline{\mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right)}$. Wir geben hier nur eine stark vereinfachte, oft unvollständige Darstellung der Objekte an, aus der der Leser eine grobe Idee über die Zusammenhänge erhalten soll. Für Details sei auf die entsprechenden Kapitel verwiesen.

Im **ersten Kapitel** führen wir die grundlegenden Begriffe und Definitionen ein. Wir definieren, was ein Drinfeldmodul φ ist, und gehen auf den Zusammenhang zu Gittern ein. Dabei spielt die Surjektivität der Exponentialfunktion, die durch die Funktionalgleichung $e(tx) = \varphi_t(e(x))$ charakterisiert wird, eine wichtige Rolle. Wir definieren t -Moduln und t -Motive als Verallgemeinerungen von Drinfeldmoduln und erläutern, wie sie zusammenhängen. Wir definieren zu einem abelschen t -Modul die Exponentialfunktion über eine Funktionalgleichung. Die Exponentialfunktion muss nicht surjektiv sein.

Anschließend definieren wir, wann ein t -Motiv M rigide analytisch trivial ist. Dazu definieren wir zunächst $L\langle t \rangle$ als den Ring der Potenzreihen, deren Koeffizienten eine Nullfolge bilden und in einer endlichen Erweiterung von K_∞

liegen. Wir betrachten im Modul $M \otimes L\langle t \rangle$ den $\mathbb{F}_q[t]$ -Modul der unter τ invarianten Elemente $M\langle t \rangle^\tau$. Nun heißt M rigide analytisch trivial, falls die Abbildung $\pi : M\langle t \rangle^\tau \otimes L\langle t \rangle \rightarrow M\langle t \rangle$ mit $\pi(m \otimes l) = m \cdot l$ ein Isomorphismus ist. Der wichtige Satz von Anderson, den wir zitieren, zeigt die Äquivalenz der Uniformisierbarkeit, einer Aussage über den Rang des Kernes der Exponentialfunktion und der rigiden analytischen Trivialität des zugehörigen t -Motives.

Im **zweiten Kapitel** untersuchen wir das Beispiel der Tensorpotenzen des Carlitzmoduls hinsichtlich der Exponentialfunktion und des Satzes von Anderson, um ein besseres Verständnis für die Objekte zu erlangen. Wir zeigen, wie wir die Koeffizienten der Exponentialabbildung berechnen können. Dann untersuchen wir ausführlich die rigide analytische Trivialität des zugehörigen Motives. Schließlich untersuchen wir den Kern der Exponentialfunktion.

Im **dritten Kapitel** betrachten wir Invariantenringe von Drinfeldmoduln und ihre Erzeugendensysteme. Dabei sind zwei Drinfeldmoduln genau dann isomorph, wenn ihre Invarianten übereinstimmen. Den Drinfeldfall verallgemeinern wir für spezielle Familien von t -Moduln. Wir geben allerdings keine Formel für die Familien von t -Moduln an, sondern zeigen, dass man ein Erzeugendensystem der Invarianten algorithmisch berechnen kann. Die Berechnung führen wir an einem Beispiel durch. Die Überlegungen dieses Kapitels rechtfertigen die Einschränkung auf einen Spezialfall in Kapitel vier.

Im **vierten Kapitel** betrachten wir die Familie der t -Moduln E , die durch

$$t = \theta + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau + \tau^2$$

gegeben sind. Diese haben Rang vier und Dimension zwei. Wir können uns mit den Ergebnissen aus Kapitel drei auf einen einfacheren Spezialfall zurückziehen. Von zentraler Bedeutung ist der Satz 4.1.2. Die Aussage ist eine Präzisierung der analytischen Bedingung aus dem Satz von Anderson. Der Satz zeigt, dass es genügt, den Rang des Moduls $M\langle t \rangle^\tau$ zu bestimmen, um zu entscheiden, ob der zugehörige t -Modul uniformisierbar ist.

Wir erarbeiten, was es bedeutet, dass ein Element in $M\langle t \rangle$ unter der Operation von τ invariant ist. Damit können wir uns darauf beschränken, genügend viele Potenzreihen in $L\langle t \rangle$, deren Koeffizienten eine konkrete rekursive polynomielle Gleichung erfüllen, zu finden. Wir betrachten zunächst die Lösungen dieser rekursiven Gleichung in $L[[t]]$ und stellen fest, dass hier immer genügend viele Potenzreihen existieren. Es bleibt lediglich zu prüfen, ob genügend viele der Lösungen in $L\langle t \rangle$ liegen. Da die Bedingung nur noch die Koeffizienten der

Potenzreihe betreffen, können wir sie auch als Bedingung an Folgen ausdrücken. Die Frage, die es zu beantworten gilt, stellt sich dann so dar (Lemma 4.1.6): Gibt es genügend viele Nullfolgen $(y_n)_n \in L^{\mathbb{N}_0}$ mit $P(y_{n-2}, y_{n-1}, y_n) = 0$? Dabei ist P ein polynomieller Ausdruck in $a, b, c, d, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$.

Unser Ansatz ist es, aus den Bewertungen von y_{n-1} und y_{n-2} die Bewertung von y_n mit Hilfe von Newtonpolygonen zu bestimmen. Die Idee ist, Bedingungen für die Bewertung von y_0 (und gegebenenfalls y_1) anzugeben, so dass mittels Induktion ein Abschätzung für die restlichen y_n , die die Rekursionsgleichung erfüllen, folgt. Wir finden so hinreichende und notwendige Kriterien an y_0 und y_1 und damit an die Koeffizienten a, b, c, d für $\lim y_n = 0$. Die Kriterien lassen sich auf die Newtonpolygone bezogen geometrisch veranschaulichen. In Spezialfällen ergeben die hinreichenden Kriterien das unter 1.) angegebene, die notwendigen Kriterien das unter 2.) angegebene Resultat.

Danksagung

Ich danke allen, die mich während der Entstehung dieser Arbeit unterstützt haben. Insbesondere bedanke ich mich bei Jennylee Müller, Thomas Geffers und meinem Vater Jürgen Strube, die einen großen Teil dieser Arbeit gelesen haben und mir mit Ihren Korrekturen, Ideen, Anregungen und auch sonst eine große Hilfe waren.

Ganz besonders danke ich Herrn Prof. Dr. Hans-Georg Rück für die hervorragende Betreuung während der Entstehung dieser Arbeit. Außerdem bedanke ich mich bei meiner Frau Almut Bangert, ohne deren Unterstützung eine Vervollendung dieser Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Notation

In dieser Arbeit benutzen wir die folgenden Notationen. Unter den natürlichen Zahlen verstehen wir $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Es sei $q \in \mathbb{N}$ eine Primzahlpotenz und \mathbb{F}_q der endliche Körper mit q Elementen. Wir betrachten eine projektive geometrisch zusammenhängende glatte Kurve C über \mathbb{F}_q und einen abgeschlossenen Punkt ∞ von $C(\mathbb{F}_q)$. Der Ring A sei der Ring der auf $C \setminus \{\infty\}$ regulären Funktionen und K sein Quotientenkörper. Der abgeschlossene Punkt ∞ liefert uns einen normalisierten nichtarchimedischen Absolutbetrag $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}$. Vervollständigen wir K bezüglich dieses Betrages, so erhalten wir einen Körper, den wir mit K_∞ bezeichnen wollen. Von diesem betrachten wir einen algebraischen Abschluss \overline{K}_∞ , auf den wir den Absolutbetrag fortsetzen. Bezüglich des fortgesetzten Absolutbetrages ist \overline{K}_∞ nicht abgeschlossen. Wir bezeichnen seine Vervollständigung mit \mathbb{C}_∞ .

Die zur Situation $A \subset K \subset K_\infty \subset \overline{K}_\infty \subset \mathbb{C}_\infty$ analoge Situation in der klassischen Theorie ist $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Meistens werden wir den Fall betrachten, dass C der eindimensionale projektive Raum ist. Dann ist $A = \mathbb{F}_q[t]$, der Polynomring in einer Unbestimmten t . Zudem gilt dann $K = \mathbb{F}_q(t)$, $K_\infty = \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ und $|t| = q$. Zu dem Absolutbetrag gehört eine Bewertung $v = v_\infty$ mit $|a| = q^{-v(a)}$ für $a \in K_\infty$, also $v(t) = -1$. Es sei $\mathbb{G}_{a,L}$ das additive algebraische Gruppenschema, definiert über dem Körper L . Wenn klar ist, welchen Körper wir betrachten, werden wir auch \mathbb{G}_a statt $\mathbb{G}_{a,L}$ schreiben. Es bezeichne \mathbb{A}^n den affinen Raum der Dimension n über L .

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel wollen wir die grundlegenden Begriffe wie Drinfeldmodul, t -Motiv und t -Modul einführen. Wir führen den Begriff der Uniformisierbarkeit eines t -Motives ein und zitieren einen Satz von Anderson, der verschiedene Charakterisierungen für die Uniformisierbarkeit liefert. Wir folgen zunächst im Wesentlichen [Gos96, Kapitel 4 und 5].

1.1 Drinfeldmoduln

Zunächst wollen wir die Definition eines Drinfeldmoduls angeben. Dazu sei L ein Erweiterungskörper von \mathbb{F}_q und $\iota : A \rightarrow L$ ein \mathbb{F}_q -Algebra-Homomorphismus. Wir nennen in diesem Fall L einen A -Körper und ι die Charakteristik von L . Weiter heißt L von generischer Charakteristik, falls $\ker(\iota) = 0$. Ansonsten heißt L von endlicher Charakteristik. Es bezeichne τ den q -Frobenius auf L und $L[\tau]$ den Schiefpolynomring mit Multiplikation $\tau \cdot l = l^q \cdot \tau$ für $l \in L$.

Definition 1.1.1. *Ein Drinfeldmodul über einem A -Körper L ist ein \mathbb{F}_q -Algebra-Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow L[\tau]$ mit*

1. $\varphi(A) \not\subseteq L$
2. Für alle $a \in A$ ist der konstante Term von $\varphi(a)$ als Polynom in τ gleich $\iota(a)$.

Sind φ und ψ Drinfeldmoduln, so nennen wir ein Polynom $P \in L[\tau]$ mit $P\varphi(a) = \psi(a)P$ für alle $a \in A$ einen Morphismus von φ nach ψ . Wir werden auch die Notation $\varphi_a := \varphi(a)$ benutzen.

Um die späteren Verallgemeinerungen besser zu verstehen, weisen wir darauf hin, dass der Schiefpolynomring $L[\tau]$ den Ring $\text{End}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{G}_{a,L})$ der \mathbb{F}_q -linearen Endomorphismen von $\mathbb{G}_{a,L}$ beschreibt. Dabei entspricht τ der Abbildung $x \mapsto x^q$ und τ^0 der Identität. Wir hätten einen Drinfeldmodul daher auch als \mathbb{F}_q -Algebra-Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{G}_{a,L})$ definieren können. Die zweite Bedingung obiger Definition ist äquivalent dazu, dass die von $\varphi(a)$ und $\iota(a)$ induzierten Morphismen auf $\text{Lie}(\mathbb{G}_{a,L})$ identisch sind. Dabei bezeichne $\text{Lie}(E)$ die Lie-Algebra zur algebraischen Gruppe E . Man zeigt leicht, dass es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt mit $\deg_\tau(\varphi(a)) = r \log |a|$ für alle $a \in A$. Dieses r nennen wir den Rang von φ . Zudem ist φ injektiv.

Ab dieser Stelle beschränken wir uns auf den Fall $C = \mathbb{P}^1/\mathbb{F}_q$ und $A = \mathbb{F}_q[t]$, außerdem sei $\iota : A \rightarrow L$ eine Einbettung. Wir behandeln also nur noch Drinfeldmoduln über einem Körper mit generischer Charakteristik.

Beispiel 1.1.2. 1. Ein Drinfeldmodul φ vom Rang r ist in diesem Fall eindeutig durch $\varphi_t = \iota(t)\tau^0 + a_1\tau + \dots + a_r\tau^r \in L[\tau]$ definiert.

2. Der durch $\varphi_t = \iota(t)\tau^0 + \tau$ definierte Drinfeldmodul heißt Carlitzmodul.

Es sei für den Rest dieses Abschnittes L ein vollständiger A -Körper mit $K_\infty \subseteq L \subseteq \mathbb{C}_\infty$. Beispiele für solche Körper sind etwa \mathbb{C}_∞ oder endliche Erweiterungen von K_∞ . Wir werden jetzt übersichtsweise den Zusammenhang von Drinfeldmoduln über L und L -Gittern erläutern. Details finden sich etwa in [Gos96, Kapitel 4]. Dieses werden wir im nächsten Abschnitt so weit wie möglich auf die sogenannten t -Motive und t -Moduln verallgemeinern. Es bezeichne L^{sep} den separablen Abschluss von L . Zunächst definieren wir, was wir unter einem Gitter verstehen wollen.

Definition 1.1.3. Unter einem L -Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}_\infty$ verstehen wir einen A -Untermodul von \mathbb{C}_∞ mit folgenden Eigenschaften

1. Λ ist als A -Modul endlich erzeugt,
2. Λ ist diskret in der Topologie von \mathbb{C}_∞ ,
3. Λ ist eine Teilmenge von L^{sep} und invariant unter der Operation von $\text{Gal}(L^{\text{sep}}/L)$.

Seien Λ und $\tilde{\Lambda}$ zwei L -Gitter vom selben Rang. Ein Morphismus von Λ nach $\tilde{\Lambda}$ ist ein Element $c \in L$ mit $c\Lambda \subseteq \tilde{\Lambda}$. Falls Λ und $\tilde{\Lambda}$ unterschiedlichen Rang haben, lassen wir nur $0 \in L$ als Morphismus zu.

Für ein L -Gitter Λ definieren wir die Exponentialfunktion als

$$e_\Lambda(x) = x \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right).$$

Da A diskret und L vollständig ist, konvergiert $e_\Lambda(x)$ für alle $x \in L$. Wir erhalten so eine \mathbb{F}_q -lineare Abbildung $e_\Lambda : L \rightarrow L$ mit Kern Λ . Eine solche Abbildung lässt sich als eine auf L konvergente Potenzreihe $e_\Lambda(x) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i \tau^i(x)$ mit $e_i \in L$ entwickeln und wird auch *ganze* Funktion genannt. Das Wichtigste ist jedoch, dass es ein $\varphi_\Lambda \in L[\tau]$ gibt, so dass die Funktionalgleichung

$$e_\Lambda(tx) = \varphi_\Lambda(e_\Lambda(x))$$

erfüllt ist. Dabei meinen wir mit $\varphi_\Lambda(e_\Lambda(x))$ nicht das Einsetzen von $e_\Lambda(x)$ für τ , sondern wir interpretieren τ als x^q und setzen dementsprechend $e_\Lambda(x)^q$ für τ ein. Anders ausgedrückt fassen wir φ_Λ als Funktion in x auf. Dieses φ_Λ definiert einen Drinfeldmodul vom gleichen Rang wie der Rang von Λ . Wir können also jedem Gitter Λ vom Rang r einen Drinfeldmodul vom Rang r zuordnen.

Nehmen wir an, wir hätten einen Drinfeldmodul $\varphi_t = \sum_{j=0}^r a_j \tau^j$ vom Rang r gegeben und suchen ein zugehöriges Gitter Λ . Wir machen für die Exponentialfunktion den Ansatz $e(x) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i \tau^i(x)$ mit $e_0 = 1$ und $e(tx) = \varphi_t(e(x))$. Dabei verstehen wir $\varphi_t(e(x))$ wie oben. Dann erhalten wir durch Koeffizientenvergleich die Bedingung

$$e_n = \frac{1}{t^{qr} - t} \sum_{i=0}^n a_i e_{n-i}^{q^i} \quad (1.1)$$

und erhalten so eine eindeutig definierte Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} e_i \tau^i(x)$ mit $e_i \in L$. Man kann mit Hilfe der Rekursionsgleichung (1.1) für die Koeffizienten e_i zeigen, dass $\lim_{i \rightarrow \infty} |e_i|^{1/q^i} = 0$. Somit konvergiert $e(x)$ für jedes $x \in L$ und liefert eine ganze Funktion $e : L \rightarrow L$. Nach unserem Ansatz ist e eine \mathbb{F}_q -lineare Funktion. Wegen der Funktionalgleichung ist der Kern von e ein A -Modul. Man kann zeigen, dass der Kern von e sogar ein L -Gitter vom Rang r in \mathbb{C}_∞ ist.

Wir haben gesehen, dass wir jedem Gitter eindeutig einen Drinfeldmodul zuordnen können und umgekehrt. Es gilt sogar der folgende Satz zur analytischen Uniformisierbarkeit von Drinfeldmoduln.

Satz 1.1.4. *Die Kategorie der Drinfeldmoduln vom Rang r über einem vollständigen Körper L mit $K_\infty \subseteq L \subseteq \mathbb{C}_\infty$ ist äquivalent zur Kategorie der L -Gitter vom Rang r .*

Beweis. [Gos96, Abschnitt 4.4]. □

Bemerkung 1.1.5. *Die Kategorie der elliptischen Kurven über den komplexen Zahlen ist äquivalent zur Kategorie der \mathbb{Z} -Gitter vom Rang 2 in den komplexen Zahlen. In dieser Hinsicht sind Drinfeldmoduln eines festen Ranges r eine Analogie zu elliptischen Kurven.*

1.2 t -Motive und t -Moduln

In diesem Abschnitt werden wir zunächst das zu einem Drinfeldmodul φ gehörige t -Motiv $M(\varphi)$ definieren. Dann werden wir höherdimensionale Verallgemeinerungen von Drinfeldmoduln, nämlich allgemeine t -Motive und t -Moduln definieren. Danach werden wir auf die Uniformisierbarkeit von t -Motiven eingehen und dazu einen Satz von Anderson zitieren. Es sei L stets ein vollkommener A -Körper mit $K \subseteq L \subseteq \mathbb{C}_\infty$.

Sei φ ein Drinfeldmodul. Wir betrachten $M := M(\varphi) := L[\tau]$. Auf M operiert A via ι in natürlicher Weise durch Skalarmultiplikation. Wir definieren eine weitere Operation von A auf $L[\tau]$ durch $a \cdot m := m\varphi(a)$. Da wir nur den Fall $A = \mathbb{F}_q[t]$ betrachten, sind diese Operationen bereits durch die Operation der Variable t beschrieben. Um die beiden Operationen von t auf M nicht zu verwechseln setzen wir $\theta := \iota(t)$ und $\mathbb{F}_q(\theta) = K \subseteq L$. In diesem Fall gilt $K_\infty = \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)$.

Mit den obigen Operationen wird $M(\varphi)$ zu einem $L[t, \tau]$ -Modul. Dabei sollen im Ring $L[t, \tau]$ folgende Rechenregeln gelten

$$\begin{aligned} t\tau &= \tau t \\ t\alpha &= \alpha t \text{ für alle } \alpha \in L \text{ und} \\ \tau\alpha &= \alpha^q\tau \text{ für alle } \alpha \in L. \end{aligned}$$

Wir nennen den $L[t, \tau]$ -Modul $M(\varphi)$ das zu φ gehörige t -Motiv. Die Eigenschaften von $M(\varphi)$ beschreibt das folgende Lemma.

Lemma 1.2.1. *Sei φ ein Drinfeldmodul vom Rang r über L und $M = M(\varphi)$. Dann gilt*

1. M wird als $L[\tau]$ -Modul frei erzeugt von τ^0 .
2. M wird als $L[t]$ -Modul frei erzeugt von $(\tau^0, \tau, \dots, \tau^{r-1})$.

3. τM ist ein $L[t, \tau]$ -Untermodul von M und $(t - \theta)M/\tau M = \{0\}$.

Beweis. Die Aussagen folgen aus den Definitionen. \square

Das folgende Lemma beschreibt den Zusammenhang von Drinfeldmoduln und $L[t, \tau]$ -Moduln.

Lemma 1.2.2. *Sei M ein $L[t, \tau]$ -Modul mit folgenden Eigenschaften*

1. M ist als $L[\tau]$ -Modul frei vom Rang 1.
2. M ist als $L[t]$ -Modul frei und endlich erzeugt vom Rang $r > 0$.
3. τM ist ein $L[t, \tau]$ -Untermodul von M und $(t - \theta)M/\tau M = \{0\}$.

Dann gibt es genau einen Drinfeldmodul φ vom Rang r mit $M \simeq M(\varphi)$.

Beweis. Sei m ein freier Erzeuger von M als $L[\tau]$ -Modul. Also lässt sich $t \cdot m$ schreiben als $\lambda \cdot m$ mit $\lambda \in L[\tau]$. Der Drinfeldmodul $\varphi_t = \lambda$ hat dann die gewünschte Eigenschaft. \square

Seien φ und ψ Drinfeldmoduln über L . Wir können jetzt über die zugehörigen t -Motive die direkte Summe $M(\varphi) \oplus M(\psi)$ und das Tensorprodukt $M(\varphi) \otimes_{L[t]} M(\psi)$ mit diagonaler τ -Operation betrachten. Diesen Objekten können wir keine Drinfeldmoduln zuordnen, sie sind aber Spezialfälle von sogenannten t -Motiven, die wir im Folgenden definieren. Wir benutzen die Notation $n \gg 0$, falls eine Aussage für hinreichend große natürliche Zahlen n gelten soll.

Definition 1.2.3. *Ein t -Motiv ist ein $L[t, \tau]$ -Modul M mit*

1. $(t - \theta)^n M/\tau M = \{0\}$ für $n \gg 0$.
2. M ist als $L[\tau]$ -Modul frei und endlich erzeugt.

Ein Morphismus von t -Motiven ist ein $L[t, \tau]$ -linearer Morphismus von $L[t, \tau]$ -Moduln. Ist M zudem endlich erzeugt über $L[t]$, so heißt M abelsch und ist frei über $L[t]$ [Gos96, Lemma 5.4.10]. Den Rang von M als $L[t]$ -Modul nennen wir den Rang von M . Die Dimension von M ist definiert als der Rang von M als $L[\tau]$ -Modul.

Bei dem zu einem Drinfeldmodul assoziierten t -Motiv galt $(t - \theta)^1 M/\tau M = \{0\}$. In obiger Definition lassen wir auch den Fall $(t - \theta)^m M/\tau M \neq \{0\}$ für

kleine $m \in \mathbb{N}$ zu. Dies ist notwendig, da sonst Tensorprodukte von Drinfeldmoduln keine t -Motive wären. Dies werden wir in Kapitel 2 am Beispiel der Tensorpotenzen des Carlitzmoduls sehen.

Das zu den t -Motiven duale Konzept (und damit den Drinfeldmoduln ähnlicher) sind die t -Moduln, die wir jetzt definieren.

Definition 1.2.4. *Ein t -Modul E/L ist eine algebraische Gruppe über L , die isomorph zu \mathbb{G}_a^d ist, zusammen mit einem \mathbb{F}_q -linearen Endomorphismus t über L mit*

$$(t - \theta)^n \text{Lie}(E) = 0 \text{ für } n \gg 0.$$

Ein Morphismus von t -Moduln ist ein Morphismus algebraischer Gruppen über L , der mit der Operation von t vertauscht. Die Zahl d nennen wir die Dimension von E .

Beispiel 1.2.5. 1. *Ein Drinfeldmodul ist ein t -Modul der Dimension 1.*

2. \mathbb{G}_a^d mit der einfachen Skalarmultiplikation t , also $t(x) = \theta \cdot x$ ist ein t -Modul. Für $d = 1$ ist dieser t -Modul aber kein Drinfeldmodul.

Bemerkung 1.2.6. *Sei E ein t -Modul über L mit \mathbb{F}_q -linearem Endomorphismus t . Da E isomorph zu \mathbb{G}_a^d ist, können wir t nach Wahl von Koordinaten eindeutig als Element von $M_{d \times d}(L)[\tau] \simeq M_{d \times d}(L[\tau])$ interpretieren. Wir erhalten so eine Matrixdarstellung*

$$t = G_0\tau^0 + G_1\tau + \dots G_s\tau^s$$

mit $G_0, \dots, G_s \in M_{d \times d}(L)$ und $G_0 - \theta$ nilpotent. Dabei fassen wir $\tau : L^d \rightarrow L^d$ als koeffizientenweises Potenzieren mit q auf und betten θ kanonisch in $M_{d \times d}(L)$ ein. Da wir τ^0 als die Identität verstehen, werden wir oft auch

$$t = G_0 + G_1\tau + \dots G_s\tau^s$$

schreiben. Umgekehrt liefern Matrizen $G_0, \dots, G_s \in M_{d \times d}(L)$ mit $G_0 - \theta$ nilpotent immer einen t -Modul via

$$t(x) = G_0x + G_1\tau(x) + \dots G_s\tau^s(x).$$

Diese Charakterisierung werden wir in expliziten Rechnungen oft benutzen.

Morphismen von t -Moduln lassen sich nach Wahl von Koordinaten ebenfalls als Elemente von $M_{d \times d}(L)[\tau]$ auffassen. Isomorphismen entsprechen den invertierbaren Elementen im Ring $M_{d \times d}(L)[\tau]$, entsprechen also Matrizen der $\text{Gl}_d(L)$.

Wir haben gesehen, dass wir einem Drinfeldmodul ein t -Motiv zuordnen können. Dies verallgemeinern wir jetzt auf t -Moduln. Für ein t -Modul E definieren wir das zugehörige t -Motiv als $M := M(E) := \text{Hom}_L^q(E, \mathbb{G}_a)$. Hierbei meint Hom_L^q die Gruppe der \mathbb{F}_q -linearen Morphismen algebraischer Gruppen über L . Die Gruppe M erhält die Struktur eines $L[t, \tau]$ -Moduls, indem wir die Komposition von Abbildungen betrachten. Für $m \in M, l \in L$ definieren wir also $l \cdot m := l \circ m, \tau \cdot m := \tau \circ m$ und $t \cdot m := m \circ t$. Ist ein Morphismus $\psi : E_1 \rightarrow E_2$ von t -Moduln gegeben, so ordnen wir ihm durch $M(\psi) : M(E_2) \rightarrow M(E_1), f \mapsto f \circ \psi$ einen Morphismus der zugehörigen t -Motive zu. Die Zuordnung $E \mapsto M(E)$ ist somit ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der t -Moduln in die Kategorie der t -Motive. Wir können jetzt den Rang eines t -Moduls E als den Rang von $M(E)$ als $L[t]$ -Modul definieren. Wir nennen einen t -Modul E abelsch, falls $M(E)$ abelsch ist. Zum Beispiel ist jeder Drinfeldmodul abelsch, der t -Modul aus Beispiel 1.2.5.2. ist nicht abelsch.

Der obige Funktor liefert sogar eine Anti-Äquivalenz der beiden Kategorien. Um das einzusehen geben wir im Folgenden an, wie wir einem t -Motiv einen t -Modul zuordnen können. Für die fehlenden Details verweisen wir auf [Gos96, Kapitel 5]. Sei also M ein t -Motiv. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $M = L[\tau]^d$ gilt. Dabei fassen wir $L[\tau]^d$ als Zeilenvektoren auf. Da M ein $L[t, \tau]$ -Modul ist, operiert t durch Multiplikation von rechts mit einer Matrix aus $M_{d \times d}(L[\tau])$. Diese Matrix macht durch Multiplikation von links L^d zu einem t -Modul, den wir mit $E(M)$ bezeichnen. Wir erhalten den folgenden Satz.

Satz 1.2.7. *Die Kategorie der t -Motive über L ist anti-äquivalent zur Kategorie der t -Moduln über L .*

Beweis. Die Idee haben wir bereits skizziert. Auf Details verzichten wir an dieser Stelle und verweisen stattdessen auf [Gos96, Theorem 5.4.11.]. \square

Drinfeldmoduln sind wie elliptische Kurven stets uniformisierbar in dem Sinne, dass die Kategorie äquivalent ist zur Kategorie der Gitter. Wir werden im Folgenden die Uniformisierbarkeit von abelschen t -Moduln definieren und auf verschiedene Weisen charakterisieren. Ab dieser Stelle betrachten wir nur noch t -Moduln und t -Motive über $L = \overline{K}_\infty$. Man beachte $K = \mathbb{F}_q(\theta)$ und $K_\infty = \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)$.

Definition 1.2.8. *Eine Abbildung $e : \overline{K}_\infty^d \rightarrow \overline{K}_\infty^d$ heißt ganz \mathbb{F}_q -linear, falls sie sich als eine Potenzreihe $e(x) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j \tau^j(x)$ mit $e_j \in M_{d \times d}(L)$ entwickeln*

lässt, so dass

1. die Koeffizienten aller Matrizen e_i in einer endlichen Erweiterung von K_∞ liegen,
2. $\lim_{i \rightarrow \infty} |e_i|^{1/q^i} = 0$.

Dabei bezeichne τ das koeffizientenweise Potenzieren mit q und für eine Matrix $a \in M_{d \times d}(L)$ sei $|a| = \sup_{i,j} |a_{ij}|$. Die Bedingungen führen dazu, dass $\sum_{j=0}^{\infty} e_j \tau^j(x)$ für alle $x \in \overline{K}_\infty^d$ gegen ein Element in \overline{K}_∞^d konvergiert.

Jetzt definieren wir die Exponentialfunktion zu einem t -Modul in der Analogie zur Exponentialfunktion eines Drinfeldmoduls. Zudem führen wir den Begriff der Uniformisierbarkeit ein.

Definition 1.2.9. Sei E ein abelscher t -Modul der Dimension d . Die Exponentialfunktion von E ist eine Abbildung $e : \text{Lie}(E) \rightarrow E$, die

1. die Funktionalgleichung $e(tx) = te(x)$ erfüllt und
2. als Funktion von L^d nach L^d ganz \mathbb{F}_q -linear ist und deren Potenzreihenentwicklung mit der $n \times n$ -Einheitsmatrix beginnt.

Ist e surjektiv, so heißt E uniformisierbar.

Bemerkung 1.2.10. Die Exponentialfunktion eines t -Moduls existiert und ist eindeutig. Dies sieht man mit Hilfe der Funktionalgleichung ein, Details dazu finden sich unter [Gos96, S.162] oder [And86, S.473]. Der Kern der Exponentialfunktion ist wegen der Funktionalgleichung ein L -Gitter. Ist der t -Modul $E = \mathbb{G}_a^d$ nach Wahl einer Basis durch $t = G_0\tau^0 + \dots + G_r\tau^r$ mit $G_i \in M_{d \times d}(L)$ gegeben, so ist die erste Bedingung obiger Definition äquivalent zu $e(G_0x) = te(x)$.

Die Exponentialfunktion eines Drinfeldmoduls ist immer surjektiv, somit sind Drinfeldmoduln uniformisierbar. Dies gilt für t -Moduln im Allgemeinen nicht mehr. Wir werden im Abschnitt 4.6 Beispiele für nicht uniformisierbare t -Motive kennenlernen.

Wir wollen jetzt verschiedene Kriterien für die Uniformisierbarkeit eines t -Moduls angeben. Dazu führen wir zunächst einige Begriffe ein.

Wir definieren den Ring $\overline{K}_\infty\langle t \rangle$ als die Menge der Potenzreihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} |a_i| = 0$, für die außerdem alle a_i in einer endlichen Erweiterung von K_∞ liegen. Also ist jede Potenzreihe aus $\overline{K}_\infty\langle t \rangle$ auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe von \overline{K}_∞ konvergent. Wir lassen τ auf $\overline{K}_\infty\langle t \rangle$ durch $\tau(\sum a_i t^i) =$

$\sum a_i^q t^i$ wirken. Wir benutzen auch die Schreibweise $(\sum a_i t^i)^{(n)} := \sum a_i^{q^n} t^i$ für das koeffizientenweises Potenzieren mit q^n , hier also $\tau(\sum a_i t^i) = (\sum a_i t^i)^{(1)}$. Diese Schreibweise werden wir später auch für andere Reihen oder auch Matrizen und Folgen benutzen, gemeint ist stets das koeffizientenweise Potenzieren mit der entsprechenden q -Potenz.

Sei M ein t -Motiv über L . Wir definieren

$$M\langle t \rangle := M \otimes_{\overline{K}_\infty[t]} \overline{K}_\infty\langle t \rangle.$$

Auf $M\langle t \rangle$ operiere τ diagonal, also $\tau(m \otimes \sum a_i t^i) = \tau(m) \otimes \sum a_i^q t^i$. Es bezeichne

$$M\langle t \rangle^\tau = \{m \in M\langle t \rangle \mid \tau(m) = m\}$$

die Menge der unter der Wirkung von τ invarianten Elemente von $M\langle t \rangle$. Die Menge $M\langle t \rangle^\tau$ ist ein A -Modul.

Definition 1.2.11. Sei E ein abelscher t -Modul und $M = M(E)$ das zugehörige Motiv. M heißt rigide analytisch trivial, falls der natürliche Homomorphismus

$$\begin{aligned} \pi : M\langle t \rangle^\tau \otimes_A \overline{K}_\infty\langle t \rangle &\rightarrow M\langle t \rangle \\ m \otimes \sum a_i t^i &\mapsto m \cdot \sum a_i t^i \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Der folgende Satz stellt den Zusammenhang zwischen der Uniformisierbarkeit eines t -Moduls und der rigiden analytischen Trivialität des zugehörigen t -Motivs her. Anstatt eines Beweises betrachten wir die verschiedenen Kriterien für die Uniformisierbarkeit in Kapitel 2 an einem Beispiel.

Satz 1.2.12. Die folgenden Eigenschaften eines abelschen t -Moduls E über \overline{K}_∞ sind äquivalent:

1. Der Rang des Kernes der Exponentialfunktion (als A -Modul) ist derselbe wie der Rang von E .
2. Die Exponentialfunktion von E ist surjektiv, das heißt E ist uniformisierbar.
3. Das zu E assoziierte t -Motiv ist rigide analytisch trivial.

Beweis. Der Beweis ist recht aufwendig und so zitieren wir [And86, Seite 475] oder [Gos96, Satz 5.9.14]. \square

Korollar 1.2.13. *Seien M_1 und M_2 zwei rigide analytisch triviale abelsche t -Motive. Dann sind $M_1 \otimes M_2$ und $M_1 \oplus M_2$ rigide analytisch trivial.*

Beweis. Beachtet man, dass τ auf $M_1 \otimes M_2$ und $M_1 \oplus M_2$ diagonal operiert, so folgt die Aussage direkt aus den Definitionen von rigide analytisch trivial und des Tensorproduktes, beziehungsweise der direkten Summe zweier t -Motive. \square

Kapitel 2

Tensorpotenzen des Carlitzmoduls

Aus dem wichtigen Satz 1.2.12 ergeben sich verschiedene Kriterien für die Uniformisierbarkeit von t -Motiven. Um die Exponentialfunktion und die verschiedenen Kriterien besser zu verstehen, untersuchen wir in diesem Kapitel die sogenannten Tensorpotenzen des Carlitzmoduls. Einige Anregungen dazu stammen aus [AT90] und [Tha04, 7.6]. Wir betrachten nur den Fall $L = \overline{K}_\infty = \overline{\mathbb{F}_q((\frac{1}{\theta}))}$. Da wir hier nichts Neues zeigen, sind wir an einigen Stellen etwas knapp.

Wir erinnern uns zunächst an den Carlitzmodul aus Beispiel 1.1.2, gegeben durch $\varphi_t = \theta\tau^0 + \tau$. Das zugehörige Motiv $C := L[\tau]$ hat Dimension 1. Wir untersuchen jetzt die Struktur von C als $L[t]$ -Modul. Wir lassen t auf τ^m operieren ($m \in \mathbb{N}$) und erhalten

$$t \cdot \tau^m = \tau^m(\theta\tau^0 + \tau) = \theta^{q^m}\tau^m + \tau^{m+1}.$$

Dies führt zu $\tau^{m+1} = (t - \theta^{q^m})\tau^m$. Durch mehrfaches Anwenden dieser Identität lässt sich jede Potenz von τ als $L[t]$ -Vielfaches von τ^0 darstellen. Somit hat C als $L[t]$ -Modul den freien Erzeuger τ^0 und Rang 1.

Sei $d \in \mathbb{N}$. Wir betrachten jetzt $C^{\otimes d} = C \otimes \dots \otimes C$, das d -fache Tensorprodukt des Motives zum Carlitzmodul. Man beachte, dass das Tensorprodukt über $L[t]$ gebildet wird. Es gilt das folgende Lemma:

Lemma 2.0.14. *Das t -Motiv $C^{\otimes d}$ ist als $L[t]$ -Modul frei erzeugt von $\alpha := \tau^0 \otimes \dots \otimes \tau^0$. Als $L[\tau]$ -Modul wird $C^{\otimes d}$ frei erzeugt von*

$$(b_1, \dots, b_d) := (\alpha, (t - \theta)\alpha, \dots, (t - \theta)^{d-1}\alpha).$$

Die Dimension von $C^{\otimes d}$ ist d und der Rang 1.

Beweis. In jeder Komponente des Tensorproduktes gilt $\tau^m = (t - \theta^{q^m})\tau^{m-1}$ und somit ist $C^{\otimes d}$ über $L[t]$ frei vom Rang eins mit Erzeuger α . Berechnen wir die Wirkung von τ auf α , so erhalten wir

$$\begin{aligned}\tau\alpha &= \tau \otimes \dots \otimes \tau = (t - \theta)\tau^0 \otimes \dots \otimes (t - \theta)\tau^0 \\ &= (t - \theta)^d(\tau^0 \otimes \dots \otimes \tau^0) = (t - \theta)^d\alpha.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass sich $(t - \theta)^d\alpha$ als Multiplikation mit τ ausdrücken lässt, was die zweite Behauptung zeigt. \square

Der zu $C^{\otimes d}$ gehörige t -Modul wird im folgenden Lemma beschrieben.

Lemma 2.0.15. *Der zu $C^{\otimes d}$ assoziierte t -Modul ist $E = \mathbb{G}_a^d$ mit dem \mathbb{F}_q -linearen Endomorphismus*

$$t = (\theta + N)\tau^0 + V\tau := \begin{pmatrix} \theta & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \theta & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \theta \end{pmatrix} \tau^0 + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tau.$$

Auf $\text{Lie}(E)$ wirkt $(t - \theta)$ wie die nilpotente Matrix N .

Beweis. Wir wählen für $C^{\otimes d}$ die $L[\tau]$ -Basis (b_1, \dots, b_d) . Es gilt

$$\begin{aligned}(t - \theta)b_i &= b_{i+1} \text{ für } i = 1, \dots, d-1 \text{ und} \\ (t - \theta)b_d &= \tau\alpha = \tau b_1.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}tb_i &= \theta b_i + b_{i+1} \text{ für } i = 1, \dots, d-1 \text{ und} \\ tb_d &= \theta b_d + \tau b_1.\end{aligned}$$

Interpretieren wir jetzt $C^{\otimes d} = L[\tau]^d$ via der Basis (b_1, \dots, b_d) als Zeilenvektoren, so operiert t auf diesen durch Rechtsmultiplikation mit der Matrix $(\theta + N)\tau^0 + V\tau$. \square

2.1 Der Modul der τ -Invarianten

$C^{\otimes d}$ ist ein abelsches t -Motiv und wird als Tensorprodukt von rigide analytisch trivialen t -Motiven nach Korollar 1.2.13 wieder rigide analytisch trivial sein.

Wir wollen dennoch in diesem Abschnitt einen Beweis dafür angeben, dass $C^{\otimes d}$ rigide analytisch trivial ist, um an einem Beispiel zu sehen, wie der Modul $M\langle t \rangle^\tau$ aussieht. Den Ring $L\langle t \rangle$ können wir auch als den Ring der auf dem Einheitskreis holomorphen Funktionen (im Sinne von [BGR84]) auffassen. Es gilt die folgende Version des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes. Ist $f \in L\langle t \rangle \setminus \{0\}$, dann hat f nur endlich viele Nullstellen x_1, \dots, x_ν im Einheitskreis. Es gibt eindeutige $\lambda \in L$ und $g \in L\langle t \rangle^\times$ mit

$$f = \lambda \prod_{i=1}^{\nu} (t - x_i)g.$$

Das wird etwa in [And86, Lemma 2.9] bewiesen. Jetzt können wir den folgenden Satz zeigen.

Satz 2.1.1. $C^{\otimes d}$ ist rigide analytisch trivial und $(C^{\otimes d}\langle t \rangle)^\tau$ ist ein freier Modul vom Rang 1 über $\mathbb{F}_q[t]$.

Beweis. Wir zeigen dies, indem wir ein erzeugendes Element für $(C^{\otimes d}\langle t \rangle)^\tau$ angeben. Wir erinnern uns daran, dass die Elemente von $L\langle t \rangle$ die Potenzreihen in der Variable t sind, deren Koeffizienten eine Nullfolge bilden und in einer endlichen Erweiterung von K_∞ liegen. Wir definieren

$$\omega(t) := {}^{q-1}\sqrt{-\frac{1}{\theta}} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\theta q^i}\right).$$

Dabei bezeichne ${}^{q-1}\sqrt{-\frac{1}{\theta}}$ eine fest gewählte $(q-1)$ -te Wurzel von $-\frac{1}{\theta}$ in L . Indem man $\omega(t)$ als Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ schreibt, sieht man $|a_i| = \frac{1}{q^i}$ und somit ist $\omega(t)$ ein Element von $\overline{K}_\infty\langle t \rangle$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} (t - \theta)\omega^{(1)}(t) &= (t - \theta) \left({}^{q-1}\sqrt{-\frac{1}{\theta}} \right)^q \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\theta q^{i+1}}\right) \\ &= (t - \theta) \left(-\frac{1}{\theta}\right) {}^{q-1}\sqrt{-\frac{1}{\theta}} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\theta q^i}\right) \\ &= \left(1 - \frac{t}{\theta q^0}\right) {}^{q-1}\sqrt{-\frac{1}{\theta}} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\theta q^i}\right) = \omega(t). \end{aligned}$$

Wir haben bereits gesehen, dass $C^{\otimes d}$ über $L[t]$ von einem Element α erzeugt wird. Also können wir ein beliebiges Element aus $C^{\otimes d}\langle t \rangle$ schreiben als $\alpha \otimes \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$. Es gilt

$$\begin{aligned} \tau(\alpha \otimes \omega(t)^d) &= \tau(\alpha) \otimes \tau\left(\omega(t)^d\right) = (t - \theta)^d \alpha \otimes (\omega^{(1)}(t))^d \\ &= \alpha \otimes ((t - \theta)\omega^{(1)}(t))^d = \alpha \otimes \omega(t)^d. \end{aligned}$$

Also ist $m := \alpha \otimes \omega(t)^d$ aus $(C^{\otimes d}\langle t \rangle)^\tau$. Auf der Kreisscheibe $|t| < |\theta| = q$ hat $\omega(t)$ keine Nullstellen, also ist $\omega(t)^d$ in $\overline{K}_\infty\langle t \rangle$ invertierbar. Das Bild von $(\alpha \otimes \omega(t)^d) \otimes 1$ unter dem Morphismus $\pi : (C^{\otimes d}\langle t \rangle)^\tau \otimes_A L\langle t \rangle \rightarrow C^{\otimes d}\langle t \rangle$ ist $\alpha \cdot \omega(t)^d$. Da α ein Erzeuger von $C^{\otimes d}\langle t \rangle$ und $\omega(t)^d$ invertierbar ist, ist π surjektiv. Somit ist $C^{\otimes d}$ rigide analytisch trivial, denn π ist injektiv.

Jetzt zeigen wir, dass $(C^{\otimes d}\langle t \rangle)^\tau$ frei über $\mathbb{F}_q[t]$ ist mit Erzeuger m . Für alle $f(t) \in \mathbb{F}_q[t]$ ist $f(t) \cdot m \in (C^{\otimes d}\langle t \rangle)^\tau$. Ist $\tilde{m} \in (C^{\otimes d}\langle t \rangle)^\tau$ gegeben, so gilt $\tilde{m} = \alpha \otimes \tilde{\omega}(t)$ für ein $\tilde{\omega}(t) \in L\langle t \rangle$ mit $\tau(\tilde{\omega}(t)) = (t - \theta)^d \tilde{\omega}^{(1)}(t) = \tilde{\omega}(t)$. Dann ist $g(t) := \frac{\tilde{\omega}(t)}{\omega(t)^d} \in L\langle t \rangle$. Es gilt aber

$$g^{(1)}(t) = \frac{\tilde{\omega}^{(1)}(t)}{\omega^{(1)}(t)^d} = \frac{(t - \theta)^d \tilde{\omega}^{(1)}(t)}{(t - \theta)^d \omega^{(1)}(t)^d} = \frac{\tilde{\omega}(t)}{\omega(t)^d} = g(t).$$

Somit liegen die Koeffizienten von $g(t)$ bereits in \mathbb{F}_q . Da die Koeffizienten von $g(t)$ gegen 0 konvergieren, liegt $g(t)$ bereits in $\mathbb{F}_q[t]$ und wir erhalten $\tilde{\omega}(t) = g(t)\omega(t)^d$. Da $L\langle t \rangle$ als Untertring des Ringes $L[[t]]$ ein Integritätsbereich ist, ist $g(t)$ eindeutig. \square

2.2 Die Exponentialfunktion und ihr Kern

Sei e die Exponentialfunktion von E . Unser Ziel ist zunächst die Rekursionsgleichung für die Koeffizienten der Taylorreihenentwicklung von e um 0 zu bestimmen. Dazu führen wir noch einige Bezeichnungen ein. Für Matrizen $M_1, M_2 \in M_{d \times d}(L)$ bezeichne $[M_1, M_2] := M_1 M_2 - M_2 M_1$ die Lie-Klammer im üblichen Sinne und $\text{ad}(M_1)^i$ die i -fache Hintereinanderausführung der adjungierten Darstellung von M_1 , also $\text{ad}(M_1)^0(M_2) := M_2$ und

$$\text{ad}(M_1)^{i+1}(M_2) := [M_1, \text{ad}(M_1)^i(M_2)] \text{ für } i \geq 0.$$

Wir suchen eine Potenzreihe $e(x) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \tau^i(x)$ mit $Q_i \in M_d(L)$, die nach der Definition der Exponentialfunktion die Gleichung $te(x) = e(tx)$ erfüllt, wobei t auf der linken Seite der Gleichung als $\theta + N + V\tau$ operiert und auf der rechten nur durch den linearen Teil, also $\theta + N$. Es muss also gelten

$$(\theta + N + V\tau) \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \tau^i = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \tau^i (\theta + N), \quad (2.1)$$

wobei die Multiplikation als Hintereinanderausführung von Abbildungen zu verstehen ist.

Aus der Gleichung (2.1) erhalten wir durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich für $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (\theta + N)Q_{i+1} + VQ_i^{(1)} &= Q_{i+1}(\theta^{q^{i+1}} + N) \\ \Leftrightarrow VQ_i^{(1)} + NQ_{i+1} - Q_{i+1}N &= (\theta^{q^{i+1}} - \theta)Q_{i+1} \\ \Leftrightarrow \frac{VQ_i^{(1)}}{\theta^{q^{i+1}} - \theta} + \frac{[N, Q_{i+1}]}{\theta^{q^{i+1}} - \theta} &= Q_{i+1} \\ \Leftrightarrow \frac{\text{ad}(N)^1(Q_{i+1})}{\theta^{q^{i+1}} - \theta} + \frac{\text{ad}(N)^0(VQ_i^{(1)})}{\theta^{q^{i+1}} - \theta} &= Q_{i+1}. \end{aligned}$$

Setzen wir auf der linken Seite $2d - 2$ mal $\frac{[N, Q_{i+1}]}{\theta^{q^{i+1}} - \theta} + \frac{VQ_i^{(1)}}{\theta^{q^{i+1}} - \theta}$ für Q_{i+1} ein, so erhalten wir

$$Q_{i+1} = \frac{\text{ad}(N)^{2d-1}(Q_{i+1})}{(\theta^{q^{i+1}} - \theta)^{2d-1}} + \sum_{j=0}^{2d-2} \frac{\text{ad}(N)^j(VQ_i^{(1)})}{(\theta^{q^{i+1}} - \theta)^j}.$$

Die Matrix N ist nilpotent, also ist $\text{ad}(N)^{2d-1}$ die Nullabbildung und wir erhalten die Rekursion

$$Q_{i+1} = \sum_{j=0}^{2d-2} \frac{\text{ad}(N)^j(VQ_i^{(1)})}{(\theta^{q^{i+1}} - \theta)^j}.$$

Der Startwert für obige Rekursion ist die $d \times d$ -Einheitsmatrix $E_d = Q_0$. Wir weisen darauf hin, dass der linke obere Koeffizient in der Matrix Q_i sich auf eine aus der Literatur bekannte Größe zurückführen lässt. Er ist D_i^{-d} . Dabei ist D_i definiert durch $D_0 = 1$ und $D_i = \prod_{j=0}^{i-1} (\theta^{q^i} - \theta^{q^j})$ für $i > 0$.

Beispiel 2.2.1. Wir berechnen beispielhaft, etwa mit Hilfe eines Computeralgebrasystems, die ersten Koeffizienten von $e(x)$ für den Fall $q = 2$ und $d = 2$:

$$\begin{aligned} e(x) &= Q_0\tau^0 + Q_1\tau^1 + Q_2\tau^2 + Q_3\tau^3 \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tau^0 + \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^4 + \theta^2} & 0 \\ \frac{1}{\theta^2 + \theta} & \frac{1}{\theta^4 + \theta^2} \end{pmatrix} \tau^1 + \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^{16} + \theta^{12} + \theta^{10} + \theta^6} & 0 \\ \frac{1}{\theta^{12} + \theta^9 + \theta^8 + \theta^5} & \frac{1}{\theta^{16} + \theta^{12} + \theta^{10} + \theta^6} \end{pmatrix} \tau^2 \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^{48} + \theta^{40} + \theta^{36} + \theta^{34} + \theta^{28} + \theta^{26} + \theta^{22} + \theta^{14}} & 0 \\ \frac{1}{\theta^{40} + \theta^{33} + \theta^{32} + \theta^{28} + \theta^{25} + \theta^{21} + \theta^{20} + \theta^{13}} & \frac{1}{\theta^{48} + \theta^{40} + \theta^{36} + \theta^{34} + \theta^{28} + \theta^{26} + \theta^{22} + \theta^{14}} \end{pmatrix} \tau^3 + \dots \end{aligned}$$

Es sei angemerkt, dass die einfache Struktur der Matrizen an dem Spezialfall $q = 2$ und $d = 2$ liegt. Im Allgemeinen sind weniger Nullen in den Matrizen zu finden. Auch die Einträge auf der Diagonalen können unterschiedlich sein.

Wir definieren analog zur Exponentialfunktion eine (zunächst formale) Potenzreihe $\log(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \tau^i(x)$, welche die Funktionalgleichung

$$\log(tx) = t \log(x)$$

erfüllen soll. Dabei wird t auf der linken Seite der Gleichung als $\theta + N + V\tau$ operieren und auf der rechten nur über den linearen Teil, also als $\theta + N$. Wir könnten uns diese Potenzreihe daher als eine Abbildung $\log : E \rightarrow \text{Lie}(E)$ vorstellen, aber $\log(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \tau^i$ wird nur für einen beschränkten Bereich in L^d konvergieren. Wir setzen P_0 als die Einheitsmatrix E_d . Für die übrigen Koeffizienten können wir auf ähnliche Weise wie für $e(x)$ mit Hilfe der Funktionalgleichung folgende Rekursion herleiten

$$P_{i+1} = - \sum_{j=0}^{2d-2} \frac{\text{ad}(N)^j(P_i E)}{(\theta^{q^{i+1}} - \theta)^{j+1}}.$$

Anhand dieser Rekursion kann man das folgende Lemma zeigen.

Lemma 2.2.2. *Es bezeichne U die Menge all derjenigen $x \in L^d$, deren Komponenten x_i die Ungleichung $|x_i| < |\theta|^{i-d+\frac{dq}{q-1}} = q^{i+\frac{d}{q-1}}$ erfüllen. Dann gilt für alle $x \in U$:*

1. $\log(x)$ konvergiert gegen ein Element in L^d .
2. $e(\log(x)) = x$.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [AT90, Prop. 2.4.3]. □

Wir wollen als nächstes den Kern Λ von $e : L^d \rightarrow L^d$ untersuchen. Dieser ist wegen der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ein $\mathbb{F}_q[t]$ -Modul. Zunächst müssen wir dafür noch einige Begriffe einführen.

Wir setzen jetzt

$$\Omega = \left\{ h(t) \in L(t) \mid h^{(1)}(t) = (t - \theta)^d h(t) \right\}.$$

Lemma 2.2.3. *Ω ist ein $\mathbb{F}_q[t]$ -Modul vom Rang 1 und wird frei erzeugt von*

$$w(t) = \left({}^{q-1}\sqrt{-\theta} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\theta^{q^i}} \right)^{-1} \right)^d.$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 2.1.1. □

Sei $h(t) \in \Omega$. Aus der Darstellung des Erzeugers von Ω sehen wir, dass $h(t)$ höchstens Pole der Ordnung kleiner oder gleich d hat. Als meromorphe Funktion hat $h(t)$ eine, in einer Umgebung von θ konvergente, eindeutige Laurentreihenentwicklung

$$h(t) = \sum_{i=-n}^{\infty} a_i (t - \theta)^i$$

mit $a_i \in L$. Wir definieren die Abbildung $\text{Res} : \Omega \rightarrow L^d$ durch

$$h(t) \mapsto \begin{pmatrix} a_{-1} \\ \vdots \\ a_{-d} \end{pmatrix}.$$

Über den Zusammenhang von Res , Ω und Λ gibt das folgende Lemma Auskunft.

Lemma 2.2.4. *Die Abbildung $\text{Res} : \Omega \rightarrow L^d$ ist injektiv und das Bild von Res ist Λ .*

Beweis. Wir folgen dem Beweis von [AT90, Prop. 2.5.5.]. Wir werden zu $h(t) \in \Omega$ zunächst einen Vektor $\tilde{h}(t)$ definieren, welcher als (-1) -ten Koeffizient in seiner Entwicklung nach $(t - \theta)$ den Eintrag $\text{Res}(h(t))$ hat. Diese Reihe lässt sich leichter untersuchen als $h(t)$.

Wir definieren zu $h(t) \in \Omega$ den Spaltenvektor

$$\tilde{h}(t) = \begin{pmatrix} (t - \theta)^0 h(t) \\ \vdots \\ (t - \theta)^{d-1} h(t) \end{pmatrix}.$$

Es sei $c_0 = 0$ und für $i = 1, 2, \dots$ sei c_i der Koeffizient vor t^{i-1} in $\tilde{h}(t)$. Da jeder Eintrag von $\tilde{h}(t)$ auf der Kreisscheibe $|t| \leq 1$ konvergiert, gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} |c_i| = 0$. Es gilt für $j = 1, \dots, d - 1$

$$t(t - \theta)^{j-1} h(t) = \theta(t - \theta)^{j-1} h(t) + (t - \theta)^j h(t).$$

Für $j = d$ gilt

$$\begin{aligned} t(t - \theta)^{d-1} h(t) &= (\theta + t - \theta)(t - \theta)^{d-1} h(t) \\ &= \theta(t - \theta)^{d-1} h(t) + (t - \theta)^d h(t) \\ &= \theta(t - \theta)^{d-1} h(t) + h^q(t). \end{aligned}$$

Deshalb erhalten wir $tc_{i+1} = (\theta + N)c_{i+1} + Vc_{i+1}^q = c_i$. Also erfüllt c_i für $i \gg 0$ die Konvergenzbedingung der Potenzreihe \log und $(\theta + N)^i \log(c_i)$ ist definiert für $i \gg 0$. Es gilt dann aber

$$\begin{aligned} (\theta + N)^i \log(c_i) &= \log((\theta + N + V\tau)(c_i)) \\ &= \log(t^i c_i) \\ &= \log(t^i (tc_{i+1})) \\ &= \log(t^{i+1} c_{i+1}). \end{aligned}$$

Demzufolge gibt es ein λ mit $(\theta + N)^i \log(c_i) = \lambda$ für alle i . Wir berechnen:

$$e((\theta + N)^{-i} \lambda) = e(\log(c_i)) = c_i$$

und erhalten so

$$\tilde{h}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e((\theta + N)^{-i-1} \lambda) t^i.$$

Somit ist der (-1) -te Koeffizient der Entwicklung von $\tilde{h}(t)$ nach $(t - \theta)$ gleich dem von

$$\sum_{i=0}^{\infty} (\theta + N)^{-i-1} \lambda = -\lambda(t - \theta)^{-1} - \sum_{j=1}^{d-1} N^j \lambda (t - \theta)^{-j-1}.$$

Also gilt $\text{Res}(h(t)) = -\lambda$. Damit erhalten wir $\lambda \in \Lambda$, da

$$e(\lambda) = e((\theta + N)^i \log(c_i)) = t^i e(\log(c_i)) = t^i c_i = c_0 = 0.$$

Folglich gilt $\text{Res}(\Omega) \subseteq \Lambda$.

Wegen der Darstellung $\tilde{h}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e((\theta + N)^{i-1} \lambda) t^i$ ist Res injektiv. Es bleibt zu zeigen, dass $\Lambda \subseteq \text{Res}(\Omega)$. Sei also $\lambda \in \Lambda$. Wir betrachten den Vektor $v = \sum_{i=0}^{\infty} e((\theta + N)^{i-1} \lambda) t^i$. Der erste Eintrag von v ist eine Potenzreihe $h(t)$ mit $v = \tilde{h}(t)$. Wir rechnen leicht $h(t) \in \Omega$ nach. \square

Daraus erhalten wir direkt den folgende Satz.

Satz 2.2.5. *Der Kern Λ der Exponentialfunktion von E hat als $\mathbb{F}_q[t]$ -Modul den Rang 1.*

Beweis. Nach Lemma 2.2.4 ist Λ isomorph zum $\mathbb{F}_q[t]$ -Modul Ω , welcher nach Lemma 2.2.3 ein $\mathbb{F}_q[t]$ -Modul vom Rang 1 ist. \square

Kapitel 3

Isomorphieklassen

Es sei für dieses Kapitel L ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathbb{F}_q(\theta) \subset L \subset \mathbb{C}_\infty$. In diesem Kapitel werden wir spezielle Familien von abelschen t -Moduln über L auf Isomorphie untersuchen. Dabei werden wir zeigen, wie man für diese spezielle Familie ein minimales Erzeugendensystem für den Invariantenring explizit berechnen kann. Dabei werden wir bekannte Algorithmen aus der Invariantentheorie von Ringen nutzen.

Wir erinnern kurz daran, dass ein Isomorphismus zweier t -Moduln E_1 und E_2 der Dimension d ein Isomorphismus der zugrunde liegenden algebraischen Gruppen ist, welcher verträglich ist mit den t -Operationen von E_1 und E_2 . Stellen wir also die t -Wirkung von E_1 nach Koordinatenwahl durch eine Matrix $t_1 \in M_{d \times d}(L)[\tau]$ und die t -Wirkung von E_2 durch eine Matrix $t_2 \in M_{d \times d}(L)[\tau]$ dar, so hat ein Homomorphismus bezüglich der entsprechenden Koordinaten eine Darstellungsmatrix $A \in M_{d \times d}[\tau]$ mit $A \cdot t_1 = t_2 \cdot A$. Dabei gilt $\tau \cdot A = A^{(1)}\tau$ im Ring $M_{d \times d}(L)[\tau]$. Die Isomorphismen sind die invertierbaren Elemente in $M_{d \times d}(L)[\tau]$, also Elemente der $GL_d(L)$.

3.1 Drinfeldmoduln

Wir betrachten in diesem Abschnitt Isomorphieklassen von Drinfeldmoduln. Zunächst betrachten wir beispielhaft die Isomorphieklassen von Drinfeldmoduln vom Rang 2 über L . Hier gilt das folgende aus der Literatur bekannte Lemma (zum Beispiel [BR09, Seite 1 und 2]). Den elementaren Beweis geben wir an, um ein besseren Eindruck über die Vorgehensweise zu bekommen.

Lemma 3.1.1. *Sei $\varphi_t = \theta + a\tau + \Delta\tau^2$ mit $\Delta \neq 0$ ein Drinfeldmodul vom Rang*

zwei. Wir definieren die j -Invariante von φ als

$$j(\varphi) := \frac{a^{q+1}}{\Delta}.$$

Zwei Drinfeldmoduln φ und $\tilde{\varphi}$ vom Rang 2 über L sind genau dann isomorph, wenn ihre j -Invarianten übereinstimmen.

Beweis. Sei $\varphi_t = \theta + a\tau + \Delta\tau^2$ und $\tilde{\varphi}_t = \theta + \tilde{a}\tau + \tilde{\Delta}\tau^2$. Sind φ und $\tilde{\varphi}$ isomorph, so gibt es ein $c \in L^\times$ mit $c\theta + ca\tau + c\Delta\tau^2 = \theta c + \tilde{a}\tau(c) + \tilde{\Delta}\tau^2(c)$. Da die Anwendung von τ gerade dem Potenzieren mit q entspricht, erhalten wir durch Koeffizientenvergleich $ca = \tilde{a}c^q$ und $c\Delta = \tilde{\Delta}c^{q^2}$. Dies liefert uns $a = c^{q-1}\tilde{a}$ und $\Delta = c^{q^2-1}\tilde{\Delta}$. Es gilt nun $j(\varphi) = \frac{a^{q+1}}{\Delta} = \frac{c^{q^2-1}\tilde{a}^{q+1}}{c^{q^2-1}\tilde{\Delta}} = j(\tilde{\varphi})$.

Gelte nun $j(\varphi) = j(\tilde{\varphi})$. Ist $a \neq 0$, so rechnen wir nach, dass $c = \left(\frac{a}{\tilde{a}}\right)^{\frac{1}{q-1}}$ einen Isomorphismus von φ nach $\tilde{\varphi}$ liefert. Falls $a = 0$ ist, liefert $c = \left(\frac{\Delta}{\tilde{\Delta}}\right)^{\frac{1}{q^2-1}}$ den gesuchten Isomorphismus. \square

Wir benutzen im Beweis, dass L algebraisch abgeschlossen ist, andernfalls wären die zwei Drinfeldmoduln unter Umständen erst nach algebraischer Erweiterung des Grundkörpers isomorph.

Bemerkung 3.1.2. Versuchen wir diesen Beweis auf t -Moduln zu übertragen, stoßen wir auf die zwei folgenden Probleme.

1. Wir nutzen im obigen Beweis aus, dass τ auf Elementen von L wie das Potenzieren mit q wirkt, insbesondere gilt $l^q \cdot l^{-1} = l^{q-1}$ für $l \in L$. Bei t -Moduln höherer Dimension wirkt τ aber durch Potenzieren der Koeffizienten der Matrizen mit q , ist also nicht dasselbe wie die q -fache Multiplikation einer Matrix mit sich selbst.
2. Wir nutzen im obigen Beweis die Kommutativität der Multiplikation im Ring $M_{1 \times 1}(L)$, die in höheren Dimensionen natürlich nicht mehr gegeben ist.

Schon für Drinfeldmoduln vom Rang größer zwei benötigt man mehr als eine Invariante, um die Isomorphieklassen zu beschreiben. Um die Aussage für Drinfeldmoduln höheren Ranges zu formulieren, geben wir folgende Definition an.

Definition 3.1.3. Es sei R ein Ring, auf dem eine Gruppe G durch $(\alpha, f) \mapsto f^\alpha$ operiert. Wir definieren den Invariantenring R^G von R unter der Operation von

G als

$$R^G := \{f \in R \mid f^\alpha = f \text{ für alle } \alpha \in G\}.$$

Jetzt können wir die Isomorphie von Drinfeldmoduln höheren Ranges untersuchen. Ein Drinfeldmodul φ vom Rang r ist gegeben durch

$$\varphi_t = \theta + a_1\tau + \dots + a_{r-1}\tau^{r-1} + \Delta\tau^r$$

mit $\Delta \neq 0$. Wir beschränken uns hier jedoch auf den Fall $\Delta = 1$, da die später untersuchten t -Moduln eine ähnliche Bedingung erfüllen. Durch Koeffizientenvergleich sehen wir, dass die Isomorphismen zwischen zwei solchen Drinfeldmoduln genau durch die Elemente von \mathbb{F}_q^\times beschrieben werden. Es gilt der folgende Satz.

Satz 3.1.4. *Seien durch*

$$\varphi_t = \theta + a_1\tau + \dots + a_{r-1}\tau^{r-1} + \tau^r$$

und

$$\tilde{\varphi}_t = \theta + \tilde{a}_1\tau + \dots + \tilde{a}_{r-1}\tau^{r-1} + \tau^r$$

zwei Drinfeldmoduln gegeben. Die Gruppe $G = \mathbb{F}_q^\times$ operiere auf $L[x_1, \dots, x_{r-1}]$ durch $(x_k, g) \mapsto g^{q^k-1}x_k$. Dann ist φ genau dann isomorph zu $\tilde{\varphi}$, wenn für alle $I \in L[x_1, \dots, x_{r-1}]^G$ gilt

$$I(a_1, \dots, a_{r-1}) = I(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{r-1}).$$

Man schreibt oft auch $I(\varphi)$ statt $I(a_1, \dots, a_{r-1})$. Es genügt natürlich, die Gleichung $I(\varphi) = I(\tilde{\varphi})$ für ein Erzeugendensystem von $L[x_1, \dots, x_{r-1}]^G$ zu testen.

Beweis. Dies folgt aus [BR09, Seite 1 und 2], ist aber auch der Fall $d = 1$ des Satzes 3.2.5, den wir später beweisen werden. \square

Wir nennen $L[x_1, \dots, x_{r-1}]^{\mathbb{F}_q^\times}$ auch den Invariantenring der Drinfeldmoduln vom Rang r . Um ein Erzeugendensystem für den Invariantenring der Drinfeldmoduln vom Rang r zu beschreiben, führen wir zunächst noch einen Begriff ein.

Definition 3.1.5. *Es sei (k_1, \dots, k_l) ein Multiindex mit $1 \leq k_1 < \dots < k_l \leq r - 1$. Weiter seien $\delta_1, \dots, \delta_l$ ganze Zahlen mit*

1. $q^r - 1$ teilt $\delta_1(q^{k_1} - 1) + \dots + \delta_l(q^{k_l} - 1)$,

2. $0 \leq \delta_i \leq (q^r - 1)/(q^{\text{ggT}(i,r)} - 1)$ für $1 \leq i \leq l$ und

3. $\text{ggT}(\delta_1, \dots, \delta_l) = 1$.

Dann heißen die Polynome

$$J_{k_1 \dots k_l}^{\delta_1 \dots \delta_l} := x_{k_1}^{\delta_1} \cdots x_{k_l}^{\delta_l} \in L[x_1, \dots, x_{r-1}]$$

Basis- J -Invarianten. Es bezeichne

$$\left\{ J_{k_1 \dots k_l}^{\delta_1 \dots \delta_l} \right\}$$

das System aller Basis- J -Invarianten. Ist φ ein Drinfeldmodul, gegeben durch $\varphi_t = \theta + a_1\tau + \dots + a_{r-1}\tau^{r-1} + \tau^r$, dann heißen die Elemente

$$J_{k_1 \dots k_l}^{\delta_1 \dots \delta_l}(\varphi) := a_{k_1}^{\delta_1} \cdots a_{k_l}^{\delta_l} \in L$$

Basis- J -Invarianten von φ .

Der folgende Satz beschreibt den Invariantenring der Drinfeldmoduln vom Rang r .

Satz 3.1.6. $L[x_1, \dots, x_r]^{\mathbb{F}_q^\times} = L[\{J_{k_1 \dots k_l}^{\delta_1 \dots \delta_l}\}]$.

Beweis. Das ist der Spezialfall $\Delta = 1$ von [Pot98, Theorem 3.1.]. □

Wir erhalten somit das folgende Korollar.

Korollar 3.1.7. Es seien φ und $\tilde{\varphi}$ wie in Satz 3.1.4. Dann ist φ isomorph zu $\tilde{\varphi}$ genau dann, wenn für alle Basis- J -Invarianten $J_{k_1 \dots k_l}^{\delta_1 \dots \delta_l}$ gilt

$$J_{k_1 \dots k_l}^{\delta_1 \dots \delta_l}(\varphi) = J_{k_1 \dots k_l}^{\delta_1 \dots \delta_l}(\tilde{\varphi}).$$

□

Bemerkung 3.1.8. In der Literatur werden in der Regel Drinfeldmoduln

$$\varphi_t = \theta + a_1\tau + \dots + a_{r-1}\tau^{r-1} + \Delta\tau^r$$

mit Δ beliebig betrachtet. Dementsprechend beinhalten die Basis- J -Invarianten dann auch den Koeffizienten Δ , ähnlich wie in Lemma 3.1.1. Wir verzichten hier bewusst darauf, da wir auch später bei t -Moduln nur den Fall $\Delta = 1$ betrachten werden.

3.2 Eine explizite Methode für spezielle t -Moduln

Wir betrachten jetzt keine allgemeinen t -Moduln, sondern nur solche t -Moduln $E \simeq \mathbb{G}_a^d$, die gegeben sind durch

$$t = G_0 + G_1\tau + \dots + G_{r-1}\tau^{r-1} + \Delta\tau^r$$

mit $G_i \in M_{d \times d}(L)$ und $\Delta \in \text{Gl}_d(L)$. Die Invertierbarkeit von Δ hat zur Folge, dass E abelsch vom Rang $r \cdot d$ ist. Wir wollen die Isomorphieklassen solcher t -Moduln untersuchen.

Wir erinnern uns daran, dass $B^{(r)}$ für eine Matrix $B \in M_{d \times d}$ definiert war als das koeffizientenweise Potenzieren der Matrix B mit q^r . Da L algebraisch abgeschlossen ist, gilt der folgende Satz als Spezialfall des Satzes von Lang und Steinberg.

Satz 3.2.1. *Die Abbildung $\text{Gl}_d(L) \rightarrow \text{Gl}_d(L)$, $B \mapsto B^{(r)}B^{-1}$ ist surjektiv für alle $r > 0$.*

Beweis. Die $\text{Gl}_d(L)$ ist eine zusammenhängende algebraische Gruppe über dem algebraisch abgeschlossenen Körper L . Die Frobeniusabbildung $B \mapsto B^{(r)}$ ist surjektiv und die Menge der Fixpunkte ist endlich. Damit ist die Aussage des Satzes gerade der Satz von Lang und Steinberg [Hur03, Thm. 4.6.3, Seite 211]. \square

Wir erhalten das folgende Korollar.

Korollar 3.2.2. *Sei E ein t -Modul über L gegeben durch*

$$t = G_0 + G_1\tau + \dots + G_{r-1}\tau^{r-1} + \Delta\tau^r$$

mit $G_i \in M_{d \times d}(L)$ und $\Delta \in \text{Gl}_d(L)$. Dann gibt es einen zu E isomorphen t -Modul \tilde{E} , dessen t -Wirkung beschrieben wird durch

$$\tilde{t} = \tilde{G}_0 + \dots + \tilde{G}_{r-1}\tau^{r-1} + \tau^r$$

mit geeigneten $\tilde{G}_i \in M_{d \times d}(L)$.

Beweis. Nach Satz 3.2.1 gibt es ein $B \in \text{Gl}_d(L)$ mit $B^{(r)}B^{-1} = \Delta^{-1}$. Wir definieren \tilde{E} durch $\tilde{t} = B^{-1} \cdot t \cdot B$. Dann ist durch B ein Isomorphismus von E und \tilde{E} gegeben und es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= B^{-1} \cdot t \cdot B = B^{-1}(G_0 + G_1\tau + \dots + \Delta\tau^r)B \\ &= B^{-1}G_0B + \dots + B^{-1}G_{r-1}B^{(r-1)}\tau^{r-1} + B^{-1}\Delta B^{(r)}\tau^r. \end{aligned}$$

Mit $B^{-1}\Delta B^{(r)} = B^{-1}\Delta(B^{(r)}B^{-1})B = B^{-1}\Delta\Delta^{-1}B = 1$ folgt die Behauptung. \square

Wir können uns also bei der Untersuchung der Isomorphieklassen von solchen t -Moduln, deren höchster Koeffizient Δ invertierbar ist, auf die Isomorphieklassen der t -Moduln mit höchstem Koeffizient $\Delta = 1$ zurückziehen. Über die Gestalt der Isomorphismen zwischen zwei t -Moduln mit $\Delta = 1$ gibt das folgende Lemma Auskunft.

Lemma 3.2.3. *Seien E und \tilde{E} zwei t -Moduln, gegeben durch $t = G_0 + \dots + G_{r-1}\tau^{r-1} + \tau^r$ und $\tilde{t} = \tilde{G}_0 + \dots + \tilde{G}_{r-1}\tau^{r-1} + \tau^r$. Sei weiter $B \in \text{Gl}_d(L)$ ein Isomorphismus von E und \tilde{E} . Dann ist B ein Element der $\text{Gl}_d(\mathbb{F}_{q^r})$.*

Beweis. Da B ein Isomorphismus ist, gilt $B^{-1} \cdot t \cdot B = \tilde{t}$. Vergleichen wir die Koeffizienten vor τ^r , so erhalten wir daraus $B^{-1}B^{(r)} = 1$ und somit $B^{(r)} = B$. \square

Wir schränken unsere t -Moduln für das weitere Vorgehen noch mehr ein. Wir betrachten nur noch t -Moduln $E = \mathbb{G}_a^d$ mit

$$t = \theta + G_1\tau + \dots + G_{r-1}\tau^{r-1} + \tau^r.$$

Zum Beispiel fallen die Tensorpotenzen des Carlitzmoduls aus Kapitel 2 nicht mehr in die von uns betrachtete Familie von t -Moduln. Ein solcher t -Modul der Dimension d vom Rang $r \cdot d$ ist gegeben durch die $(r-1) \cdot d^2$ Koeffizienten $g_{(k)ij}$ der Matrizen G_k ($1 \leq k \leq r-1$, $1 \leq i, j \leq d$).

Innerhalb dieser Familie von t -Moduln werden die Isomorphismen nach Lemma 3.2.3 durch Elemente der $\text{Gl}_d(\mathbb{F}_{q^r})$ gegeben. Die Gruppe $\text{Gl}_d(\mathbb{F}_{q^r})$ operiert somit auf den Koeffizienten $g_{(k)ij} \in \mathbb{A}^{(r-1)d^2}$. Die Bahnen unter dieser Operation sind gerade die Isomorphieklassen der t -Moduln obiger Form. Da diese Operation linear ist, erhalten wir eine Darstellung der Gruppe $\text{Gl}_d(\mathbb{F}_{q^r})$ auf dem affinen Raum $\mathbb{A}^{(r-1)d^2}$. Wir betrachten jetzt die allgemeinere Situation, dass eine Gruppe auf dem affinen Raum der Dimension n über L operiert. Wir beachten dazu auch die Ähnlichkeiten zu Satz 3.1.4 und Korollar 3.1.7.

Sei G eine Gruppe, die auf dem n -dimensionalen affinen Raum \mathbb{A}^n über L via $(\alpha, a) \mapsto a^\alpha$ operiert. Wir definieren für eine Funktion $f(x) \in L[x_1, \dots, x_n]$ aus dem Koordinatenring und $\alpha \in G$

$$f^\alpha(x) := f(x^{\alpha^{-1}}).$$

Dies liefert eine Operation auf dem Koordinatenring des \mathbb{A}^n , denn für $\alpha, \beta \in G$ und $f(x) \in L[x_1, \dots, x_n]$ gilt

$$f^{\alpha\beta}(x) = f(x^{(\alpha\beta)^{-1}}) = f(x^{\beta^{-1}\alpha^{-1}}) = f((x^{\beta^{-1}})^{\alpha^{-1}}) = f^\alpha(x^{\beta^{-1}}) = (f^\alpha)^\beta(x).$$

Sofern nicht anders erwähnt, betrachten wir immer diese Operation auf dem Koordinatenring. Es gilt das folgende Lemma.

Lemma 3.2.4. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und G eine endliche Gruppe mit einer Darstellung $G \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$, $(\alpha, a) \mapsto a^\alpha$ gegeben. Dann liegen zwei Elemente $a, b \in \mathbb{A}^n$ genau dann in derselben Bahn, wenn $f(a) = f(b)$ für alle $f(x) \in L[x_1, \dots, x_n]^G$ gilt.*

Beweis. Habe a dieselbe Bahn wie b . Dann gibt es ein Element $\alpha \in G$ mit $a = b^\alpha$, was gleichbedeutend zu $a^{\alpha^{-1}} = b$ ist. Es gilt dann für alle $f(x) \in L[x_1, \dots, x_n]^G$ die Gleichung

$$f(a) = f^\alpha(a) = f(a^{\alpha^{-1}}) = f(b).$$

Seien nun die Bahnen von a und b unterschiedlich. Wir müssen zeigen, dass es ein Element $f \in L[x_1, \dots, x_n]^G$ gibt mit $f(a) \neq f(b)$. Es sei $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$. Da die Bahnen von a und b unterschiedlich sind, gibt es für jedes $\alpha \in G$ einen Index i_α mit $a_{i_\alpha}^\alpha \neq b_{i_\alpha}$. Wir betrachten die Funktion

$$g(x) = - \left(\prod_{\alpha \in G} \frac{x_{i_\alpha} - a_{i_\alpha}^\alpha}{b_{i_\alpha} - a_{i_\alpha}^\alpha} \right) + 1 \in L[x_1, \dots, x_n].$$

Es gilt für alle $\beta \in G$

$$g^\beta(a) = - \left(\prod_{\alpha \in G \setminus \{\beta^{-1}\}} \frac{a_{i_\alpha}^{\beta^{-1}} - a_{i_\alpha}^\alpha}{b_{i_\alpha} - a_{i_\alpha}^\alpha} \right) \cdot \left(\frac{a_{i_{\beta^{-1}}}^{\beta^{-1}} - a_{i_{\beta^{-1}}}^{\beta^{-1}}}{b_{i_{\beta^{-1}}} - a_{i_{\beta^{-1}}}^{\beta^{-1}}} \right) + 1 = 0 + 1 = 1. \quad (3.1)$$

Außerdem gilt

$$g(b) = - \left(\prod_{\alpha \in G} \frac{b_{i_\alpha} - a_{i_\alpha}^\alpha}{b_{i_\alpha} - a_{i_\alpha}^\alpha} \right) + 1 = 0. \quad (3.2)$$

Wir definieren

$$f := \prod_{\beta \in G} g^\beta.$$

Da f ein Produkt über alle $\beta \in G$ ist, gilt $f \in L[x_1, \dots, x_n]^G$. Aus (3.1) folgt $f(a) = 1$ und wegen (3.2) gilt $f(b) = 0$. Somit hat f die geforderten Eigenschaften. Einen nicht ganz so elementaren, dafür aber geometrischen Beweis für dieses Lemma findet sich in [DK02, Abschnitt 2.3.1]. \square

Es sei jetzt $R = L[x_{(k)ij}, 1 \leq k \leq r-1, 1 \leq i, j \leq d]$ und $G = \text{Gl}_d(\mathbb{F}_{q^r})$. Das obige Lemma 3.2.4 liefert dann den folgenden Satz.

Satz 3.2.5. *Seien die t -Moduln E und \tilde{E} gegeben durch*

$$t = \theta + G_1\tau \dots + G_{r-1}\tau^{r-1} + \tau^r$$

und

$$\tilde{t} = \theta + \tilde{G}_1\tau \dots + \tilde{G}_{r-1}\tau^{r-1} + \tau^r$$

mit $G_k = (g_{(k)ij}) \in M_{d \times d}(L)$ und $\tilde{G}_k = (\tilde{g}_{(k)ij}) \in M_{d \times d}(L)$.

Dann ist E genau dann isomorph zu \tilde{E} , wenn $f(g_{(k)ij}) = f(\tilde{g}_{(k)ij})$ für alle $f \in R^G$.

Beweis. Es ist E isomorph zu \tilde{E} genau dann, wenn es eine Matrix $\alpha \in G$ gibt, so dass $G_k = \alpha \tilde{G}_k \alpha^{-1}$ für alle $1 \leq k \leq r-1$ gilt. Also genau dann, wenn der Vektor der Koeffizienten $g_{(k)ij}$ in derselben G -Bahn wie der Vektor der Koeffizienten $\tilde{g}_{(k)ij}$ liegt. \square

Wir können die Isomorphie solcher t -Moduln durch Einsetzen der Koeffizienten in ein Erzeugendensystem der Invarianten testen. Leider lässt sich für die Invariantenringe von t -Moduln nicht ohne weiteres eine allgemeine Form für ein Erzeugendensystem der Invarianten angeben, wie das bei Drinfeldmoduln der Fall war.

Da G endlich ist, ist der Invariantenring R^G als L -Algebra nach [DK02, Prop. 3.0.6] endlich erzeugt. Für festes r und d kann man den Invariantenring und ein Erzeugendensystem zum Beispiel mit dem Computeralgebrasystem Magma berechnen. Die Algorithmen dazu werden in [DK02] beschrieben und sind zum großen Teil in Magma implementiert. In der Praxis sind nach Erfahrung des Autors aufgrund der langen Laufzeit nur kleine Beispiele berechenbar, insbesondere wenn man ein minimales Erzeugendensystem berechnen will. Führt man diese Berechnungen für Drinfeldmoduln der Form $\theta + g_1\tau + \tau^2$, beziehungsweise $\theta + g_1\tau + g_2\tau^2 + \tau^3$ durch, so erhält man genau die Ergebnisse aus Satz 3.1.6.

Beispiel 3.2.6. *Wir betrachten den Fall Rang zwei, Dimension zwei und $q = 2^2$. Wir untersuchen die Familie der t -Moduln $E = \mathbb{G}_a^2$, die beschrieben sind durch*

$$t = \theta + A\tau + \tau^2$$

mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(L)$. Ein minimales Erzeugendensystem (als Algebra über L) des Invariantenrings $L[a, b, c, d]^{\mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_4)}$ aus 11 Elementen lässt sich mithilfe von Magma berechnen. Die Eingabe dieses Beispiels in Magma, sowie die Ergebnisse der Rechnung finden sich im Anhang. Das minimale Erzeugendensystem der Invarianten enthält zum Beispiel die Spur $a^3 + b^2c + bc^2 + d^3$ und die Determinante $a^3d^3 + a^2bcd^2 + ab^2c^2d + b^3c^3$ der Matrix $A \cdot A^{(1)}$. Dies ist nicht verwunderlich, denn ein Element g der Gruppe $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_4)$ wirkt auf $A \cdot A^{(1)}$ als

$$\left(A \cdot A^{(1)}\right)^g = \left(g^{-1}Ag^{(1)}\right) \cdot \left(g^{-1}Ag^{(1)}\right)^{(1)} = g^{-1}AA^{(1)}g,$$

also durch Konjugation. Die Invarianten von Matrizen unter Konjugation der Gl werden aber von den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms erzeugt. Ob es einen ähnlichen Zusammenhang für die anderen Invarianten gibt, ist nicht klar. Ein anderes Element des Erzeugendensystems der Invarianten ist zum Beispiel $a^9 + b^8c + bc^8 + d^9$. Die weiteren Elemente sind zum Teil sehr aufwendig darzustellen und finden sich deshalb im Anhang.

Kapitel 4

Familien von uniformisierbaren t -Moduln vom Rang 4

Es sei für dieses Kapitel $L = \overline{K}_\infty = \overline{\mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)}$. In diesem Kapitel werden wir eine Familie von t -Moduln des Ranges 4 über L auf Uniformisierbarkeit untersuchen. Im ersten Abschnitt führen wir eine neue Familie von t -Moduln ein. Diese haben Rang vier, während die Beispiele aus der Literatur höchstens vom Rang zwei sind. Im zweiten Abschnitt wiederholen wir, was Newtonpolygone sind und benutzen diese, um Aussagen über unsere Familie zu beweisen. Im dritten Abschnitt geben wir hinreichende Kriterien für die Uniformisierbarkeit von t -Moduln in unserer Familie an. Im vierten Abschnitt betrachten wir eine Teilfamilie von uniformisierbaren t -Moduln. Der fünfte Abschnitt behandelt notwendige Kriterien für die Uniformisierbarkeit innerhalb unserer Familie. Im sechsten Abschnitt behandeln wir ein Beispiel von Anderson und Coleman und eine Teilfamilie von nicht uniformisierbaren t -Moduln.

4.1 Eine spezielle Familie und Rekursionen

In diesem Abschnitt wollen wir die Familie von t -Moduln, die wir in diesem Kapitel untersuchen, einführen. Unsere Familie ist eine Verallgemeinerung des folgenden aus der Literatur bekannten Beispiels von Anderson und Coleman.

Beispiel 4.1.1. *Es sei $l \in L$ mit $|l| < 1$ und $\theta = l + l^{-1}$. Dann ist der t -Modul $E = \mathbb{G}_a^2$ mit t -Wirkung*

$$t_M = \theta + \begin{pmatrix} 0 & 1 - l^{q+1} \\ 1 - l^{q+1} & 0 \end{pmatrix} \tau + \begin{pmatrix} l^{1+q+q^2} & 0 \\ 0 & l^q \end{pmatrix} \tau^2$$

nicht uniformisierbar. Dies wird etwa in [Gos96, Beispiel 5.9.9.] gezeigt. Wir werden in Beispiel 4.6.1 später einen eigenen Beweis angeben.

Wir verallgemeinern das Beispiel zu t -Moduln der Form $E = \mathbb{G}_a^2$ mit

$$t = \theta + A\tau + \Delta\tau^2.$$

Dabei seien $A, \Delta \in M_{2 \times 2}(L)$ und Δ invertierbar. Wegen der Invertierbarkeit von Δ ist ein solcher t -Modul abelsch. Diese t -Moduln wollen wir auf Uniformisierbarkeit untersuchen. Wegen obigem Beispiel 4.1.1 gibt es in dieser Familie t -Moduln, die nicht uniformisierbar sind. Betrachten wir den Fall, dass A und Δ Diagonalmatrizen sind, so ist E direkte Summe von zwei Drinfeldmoduln, daher uniformisierbar. Es gibt innerhalb unserer Familie also sowohl uniformisierbare, als auch nicht uniformisierbare t -Moduln.

Wir haben im vorigen Kapitel in Korollar 3.2.2 gesehen, dass ein solcher t -Modul immer isomorph ist zu einem t -Modul mit

$$t = \theta + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau + \tau^2.$$

Da die Uniformisierbarkeit invariant unter Isomorphie ist, beschränken wir uns auf den Fall $\Delta = 1$. Ist $b = c = 0$, so ist der t -Modul direkte Summe zweier Drinfeldmoduln, also uniformisierbar. Wenden wir den Isomorphismus $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auf einen t -Modul obiger Form mit $\Delta = 1$ an, so werden b und c (und auch a und d) vertauscht.

Deshalb können wir uns auf den Fall $c \neq 0$ und $\Delta = 1$ beschränken. Nach dem Satz von Anderson 1.2.12 können wir die Uniformisierbarkeit von E untersuchen, indem wir untersuchen, ob das zugehörige t -Motiv $M := M(E)$ rigide analytisch trivial ist. Unser t -Modul hat Dimension zwei, also ist M als $L[\tau]$ -Modul zu $L[\tau]^2 = \{(f(\tau), g(\tau)) \mid f(\tau), g(\tau) \in L[\tau]\}$ isomorph. Ein freies Erzeugendensystem über $L[\tau]$ ist $((1, 0), (0, 1))$.

Wir untersuchen jetzt die Struktur von M als $L[t]$ -Modul. Die Operation von t auf einem Element $m \in M$ ist gerade die Hintereinanderausführung $m \circ t$, wird also beschrieben durch die Multiplikation von rechts mit t . Indem wir t auf $(1, 0)$, beziehungsweise $(0, 1)$ operieren lassen, erhalten wir folgende Relationen:

$$\begin{aligned} (\tau^2, 0) &= (t - \theta)(1, 0) - a(\tau, 0) - b(0, \tau) \\ (0, \tau^2) &= (t - \theta)(0, 1) - c(\tau, 0) - d(0, \tau). \end{aligned}$$

Ist die höchste auftauchende τ -Potenz eines Elementes in M größer als eins, so lässt sich der Maximalgrad durch diese Relationen um mindestens eins reduzieren. Ein freies Erzeugendensystem von M über $L[t]$ ist damit

$$((1, 0), (0, 1), (\tau, 0), (0, \tau))$$

und M hat Rang vier. Ordnen wir einem Element $m = w(1, 0) + x(0, 1) + y(\tau, 0) + z(0, \tau) \in M$ mit $w, x, y, z \in L[t]$ den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zu, so

lässt sich die Operation von τ darstellen als

$$\tau \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t - \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t - \theta \\ 1 & 0 & -a & -c \\ 0 & 1 & -b & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{(1)} \\ x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Dabei steht (1) für das koeffizientenweise Potenzieren mit q .

Um festzustellen, ob M rigide analytisch trivial ist, müssen wir untersuchen, ob die Abbildung $\pi : M\langle t \rangle^\tau \otimes_{\mathbb{F}_q[t]} L\langle t \rangle \rightarrow M\langle t \rangle$ ein Isomorphismus ist. Der Ring $L\langle t \rangle$ besteht dabei aus den Potenzreihen über L , deren Koeffizienten in einer endlichen Erweiterung von K_∞ liegen und gegen 0 konvergieren. Der folgende Satz zeigt, dass wir lediglich den Rang von $M\langle t \rangle^\tau$ bestimmen müssen, um zu zeigen, dass π ein Isomorphismus ist.

Satz 4.1.2. *Sei M ein t -Motiv vom Rang r über L . Dann ist M genau dann rigide analytisch trivial, wenn*

$$\text{Rang}_{\mathbb{F}_q[t]} M\langle t \rangle^\tau = r$$

gilt.

Beweis. Wir geben einen Beweis an, werden allerdings dazu einige andere Aussagen zitieren, die wir nicht beweisen. Die Idee für den Beweis stammt aus [BH07, Lemma 4.2]. Wir müssen nur zeigen, dass aus $\text{Rang}_{\mathbb{F}_q[t]} M\langle t \rangle^\tau = r$ folgt, dass M rigide analytisch trivial ist.

Wir wissen: M ist ein $L[t, \tau] = L[t][\tau]$ -Modul. Dabei gilt $\tau f(t) = f^{(1)}(t)$ für $f \in L[t]$. Betrachten wir den Ring $L\langle t, \tau \rangle := L\langle t \rangle[\tau]$, versehen mit $\tau f(t) = f^{(1)}(t)$ für $f \in L\langle t \rangle$ und der kanonischen Addition und Multiplikation, so wird

$M\langle t \rangle$ zu einem $L\langle t, \tau \rangle$ -Modul. Wir nennen einen $L\langle t, \tau \rangle$ -Modul N *trivial*, falls $\pi(N^\tau \otimes L\langle t \rangle) = N$ gilt. Man kann zeigen, dass jeder $L\langle t, \tau \rangle$ -Untermodul eines trivialen $L\langle t, \tau \rangle$ -Moduls trivial ist [And86, Lemma 2.10.4.]. Die Beweisidee ist jetzt mit Hilfe des Elementarteilersatzes und des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes zu zeigen, dass es ein Element $a \in \mathbb{F}_q[t]$ gibt, so dass $aM\langle t \rangle$ eine Teilmenge des Bildes von π ist. Wegen $(\text{Im } \pi)^\tau = M\langle t \rangle^\tau$ ist das Bild von π und damit auch $aM\langle t \rangle$ trivial.

Zunächst zitieren wir eine Version des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes und eine weitere Aussage über $L\langle t \rangle$. Man beachte dafür $L = \overline{K}_\infty$.

1. Ist $f \in L\langle t \rangle \setminus \{0\}$. Dann hat f nur endliche viele Nullstellen x_1, \dots, x_ν im Einheitskreis. Es gibt eindeutige $\lambda \in L$ und $g \in L\langle t \rangle^\times$ mit

$$f = \lambda \prod_{i=1}^{\nu} (t - x_i)g.$$

2. $L\langle t \rangle$ ist ein Hauptidealring.

Das sind gerade die Aussagen von [And86, Lemma 2.9.1. und Lemma 2.9.2.]. Jetzt können wir den Beweis führen. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi : M\langle t \rangle^\tau \otimes_{\mathbb{F}_q[t]} L\langle t \rangle &\rightarrow M\langle t \rangle \\ m \otimes f &\mapsto fm. \end{aligned}$$

Da die Injektivität direkt aus der Gleichheit der Ränge folgt, müssen wir zeigen, dass π surjektiv ist. Das Bild von π ist nach Voraussetzung ein $L\langle t, \tau \rangle$ -Untermodul von $M\langle t \rangle$ vom Rang r . Nach dem Elementarteilersatz gibt es eine $L\langle t \rangle$ -Basis m_1, \dots, m_r von $M\langle t \rangle$ und $a_1, \dots, a_r \in L\langle t \rangle$, so dass $a_1 m_1, \dots, a_r m_r$ eine $L\langle t \rangle$ -Basis des Bildes von π und eine $\mathbb{F}_q[t]$ -Basis von $M\langle t \rangle^\tau$ ist. Das r -fache äußere Produkt $\bigwedge^r M\langle t \rangle$ wird via diagonalen τ -Operation zu einem $L\langle t, \tau \rangle$ -Modul. Als $L\langle t \rangle$ -Modul wird $\bigwedge^r M\langle t \rangle$ frei erzeugt von $m_1 \wedge \dots \wedge m_r$. Es gilt

$$\pi \left(\bigwedge^r (M\langle t \rangle^\tau \otimes L\langle t \rangle) \right) = L\langle t \rangle \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_r m_1 \wedge \dots \wedge m_r.$$

Wegen $\tau(a_i m_i) = a_i m_i$ gilt

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \dots \cdot a_r m_1 \wedge \dots \wedge m_r &= a_1 m_1 \wedge \dots \wedge a_r m_r \\ &= \tau(a_1 m_1) \wedge \dots \wedge \tau(a_r m_r) \\ &= \tau(a_1 m_1 \wedge \dots \wedge a_r m_r) \\ &= \tau(a_1 \cdot \dots \cdot a_r m_1 \wedge \dots \wedge m_r). \end{aligned}$$

Da $\bigwedge^r M\langle t \rangle$ von $m_1 \wedge \dots \wedge m_r$ erzeugt wird und die a_i nicht trivial sind, gibt es ein $f \in L\langle t \rangle$ mit

$$\tau(a_1 \cdot \dots \cdot a_r m_1 \wedge \dots \wedge m_r) = f \cdot a_1^{(1)} \cdot \dots \cdot a_r^{(1)} m_1 \wedge \dots \wedge m_r.$$

Definieren wir $g := a_1 \cdot \dots \cdot a_r$, so gilt

$$g m_1 \wedge \dots \wedge m_r = g^{(1)} f m_1 \wedge \dots \wedge m_r,$$

also

$$g^{(1)} f = g.$$

Mit dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz folgt aus dieser Gleichung durch Vergleich der Anzahl der Nullstellen im Einheitskreis $f \in L\langle t \rangle^\times$. Vergleichen wir dann die Nullstellen von $g^{(1)} f$ und g , so stellen wir fest, dass $g \in \mathbb{F}_q[t]L\langle t \rangle^\times$ gelten muss. Also ist jedes $a_i \in \mathbb{F}_q[t]L\langle t \rangle^\times$. Es gibt damit ein nicht triviales $a \in \mathbb{F}_q[t]$, so dass $aM\langle t \rangle$ ein $L\langle t, \tau \rangle$ -Untermodul des Bildes von π ist. Da das Bild von π ein trivialer $L\langle t, \tau \rangle$ -Modul ist, ist auch $aM\langle t \rangle$ trivial. Jetzt können wir die Surjektivität zeigen.

Sei $m \in M\langle t \rangle$. Wegen $am \in aM\langle t \rangle$ gibt es $\tilde{m} \in M\langle t \rangle$ und $\lambda \in L\langle t \rangle \setminus \{0\}$ mit $a\tilde{m} \in aM\langle t \rangle^\tau$ und $\pi(a\tilde{m} \otimes \lambda) = am$. Es gilt

$$a\tau(\tilde{m}) = \tau(a\tilde{m}) = a\tilde{m},$$

also $\tau(\tilde{m}) = \tilde{m}$. Außerdem $\lambda a\tilde{m} = am$, also $\lambda\tilde{m} = m$. Damit erhalten wir

$$\pi(\tilde{m} \otimes \lambda) = \lambda\tilde{m} = m.$$

□

Wir werden zunächst den Modul $M[[t]] := M \otimes_{L[t]} L[[t]]$ und den $\mathbb{F}_q[[t]]$ -Untermodul $M[[t]]^\tau$ untersuchen, um später Kriterien anzugeben, wann Elemente aus $M[[t]]^\tau$ in $M\langle t \rangle^\tau$ liegen. Wir wählen $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(\tau, 0)$, $(0, \tau)$ als Basis für $M[[t]]$ und erhalten das folgende Lemma.

Lemma 4.1.3. *Über die Koordinatenabbildung*

$$\begin{array}{ccc} M[[t]] & & \rightarrow L[[t]]^4 \\ & & \left(\begin{array}{c} w \\ x \\ y \\ z \end{array} \right) \\ w(1, 0) + x(0, 1) + y(\tau, 0) + z(0, \tau) & \mapsto & \end{array}$$

lassen wir τ auf $L[[t]]^4$ operieren durch

$$\tau \left(\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t - \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t - \theta \\ 1 & 0 & -a & -c \\ 0 & 1 & -b & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{(1)} \\ x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten einen Isomorphismus von $\mathbb{F}_q[[t]]$ -Moduln

$$M[[t]]^\tau \simeq M[[t]]_1^\tau := \{m \in L[[t]]^4 \mid \tau(m) = m\}.$$

□

Wir formen nun den $\mathbb{F}_q[[t]]$ -Modul $M[[t]]_1^\tau$ weiter um. Die Gleichung $\tau(m) =$

$$m \text{ für } m = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in L[[t]]^4 \text{ ist äquivalent zu}$$

$$\begin{aligned} w &= (t - \theta)y^{(1)}, \\ x &= (t - \theta)z^{(1)}, \\ y &= w^{(1)} - ay^{(1)} - cz^{(1)} \quad \text{und} \\ z &= x^{(1)} - by^{(1)} - dz^{(1)}. \end{aligned}$$

Die grobe Idee ist jetzt, mit dreien der Gleichungen Variablen in der vierten Gleichung zu eliminieren. Wir setzen die erste Gleichung in die dritte und die zweite Gleichung in die vierte ein und erhalten

$$y = \left((t - \theta)y^{(1)} \right)^{(1)} - ay^{(1)} - cz^{(1)} = (t - \theta^q)y^{(2)} - ay^{(1)} - cz^{(1)}, \quad (4.2)$$

$$z = \left((t - \theta)z^{(1)} \right)^{(1)} - by^{(1)} - dz^{(1)} = (t - \theta^q)z^{(2)} - by^{(1)} - dz^{(1)}. \quad (4.3)$$

Wir identifizieren jetzt die Potenzreihe $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n$ mit der Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in L^{\mathbb{N}_0}$ und $z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n t^n$ mit der Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in L^{\mathbb{N}_0}$. Setzen wir außerdem $y_{-1} = z_{-1} = 0$, so übersetzen sich die Gleichungen (4.2) und (4.3) durch Koeffizientenvergleich für die Folgenglieder y_n und z_n in die Bedingungen

$$\begin{aligned} \theta^q y_n^{q^2} + ay_n^q + cz_n^q + y_n - y_{n-1}^{q^2} &= 0, \\ \theta^q z_n^{q^2} + by_n^q + dz_n^q + z_n - z_{n-1}^{q^2} &= 0. \end{aligned}$$

Wir führen zunächst noch eine Koordinatentransformation durch, indem wir y_n durch $\theta^{-\frac{1}{q-1}}y_n$ und z_n durch $\theta^{-\frac{1}{q-1}}z_n$ ersetzen und erhalten so die Gleichungen

$$\begin{aligned}\theta^{-\frac{q}{q-1}}y_n^{q^2} + a\theta^{-\frac{q}{q-1}}y_n^q + c\theta^{-\frac{q}{q-1}}z_n^q + \theta^{-\frac{1}{q-1}}y_n - \theta^{-\frac{q^2}{q-1}}y_{n-1}^{q^2} &= 0 \\ \theta^{-\frac{q}{q-1}}z_n^{q^2} + b\theta^{-\frac{q}{q-1}}y_n^q + d\theta^{-\frac{q}{q-1}}z_n^q + \theta^{-\frac{1}{q-1}}z_n - \theta^{-\frac{q^2}{q-1}}z_{n-1}^{q^2} &= 0.\end{aligned}$$

Wir multiplizieren mit $\theta^{\frac{q}{q-1}}$ und erhalten

$$y_n^{q^2} + ay_n^q + cz_n^q + \theta y_n - \theta^{-q}y_{n-1}^{q^2} = 0 \quad (4.4)$$

$$z_n^{q^2} + by_n^q + dz_n^q + \theta z_n - \theta^{-q}z_{n-1}^{q^2} = 0. \quad (4.5)$$

Bemerkung 4.1.4. Das bedeutet, wir suchen für $n = 0$ eine Lösung der Gleichung

$$\left(\theta + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \tau + \tau^2 \right) \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind gerade die sogenannten t -Teilungspunkte des t -Moduls $\tilde{E} = \mathbb{G}_a^2$ mit $\tilde{t} = \theta + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \tau + \tau^2$. Die Matrix vor τ ist gerade die Transponierte der Matrix des t -Moduls, den wir untersuchen. Ist $n > 0$, so müssen wir die Gleichung

$$\tilde{t}(y_n, z_n) = \left(\theta^{-q}y_{n-1}^{q^2}, \theta^{-q}z_{n-1}^{q^2} \right)$$

lösen. Wir müssen sozusagen in jedem Schritt, die (leicht abgeänderte) vorherige Lösung durch t teilen.

Wir betrachten die Gleichungen (4.4) und (4.5). Da wir $c \neq 0$ angenommen haben, lässt sich (4.4) nach z_n^q umstellen zu

$$z_n^q = -\frac{1}{c}y_n^{q^2} - \frac{a}{c}y_n^q - \frac{\theta}{c}y_n + \frac{\theta^{-q}}{c}y_{n-1}^{q^2}. \quad (4.6)$$

Wir potenzieren Gleichung (4.5) mit q und erhalten

$$0 = z_n^{q^3} + b^q y_n^{q^2} + d^q z_n^{q^2} + \theta^q z_n^q - \theta^{-q^2} z_{n-1}^{q^3}.$$

Hier ersetzen wir mit (4.6) den Term z_n^q und erhalten

$$\begin{aligned}
0 &= \left(-\frac{1}{c}y_n^{q^2} - \frac{a}{c}y_n^q - \frac{\theta}{c}y_n + \frac{\theta^{-q}}{c}y_{n-1}^{q^2} \right)^{q^2} \\
&\quad + d^q \left(-\frac{1}{c}y_n^{q^2} - \frac{a}{c}y_n^q - \frac{\theta}{c}y_n + \frac{\theta^{-q}}{c}y_{n-1}^{q^2} \right)^q \\
&\quad + b^q y_n^{q^2} + \theta^q \left(-\frac{1}{c}y_n^{q^2} - \frac{a}{c}y_n^q - \frac{\theta}{c}y_n + \frac{\theta^{-q}}{c}y_{n-1}^{q^2} \right) - \theta^{-q^2} z_{n-1}^{q^3} \\
&= -\frac{1}{c^{q^2}} y_n^{q^4} + \left(-\frac{a^{q^2}}{c^{q^2}} - \frac{d^q}{c^q} \right) y_n^{q^3} + \left(-\frac{\theta^{q^2}}{c^{q^2}} - \frac{d^q a^q}{c^q} + b^q - \frac{\theta^q}{c} \right) y_n^{q^2} \\
&\quad + \left(-\frac{d^q \theta^q}{c^q} - \frac{\theta^q a}{c} \right) y_n^q - \frac{\theta^{q+1}}{c} y_n + \frac{\theta^{-q^3}}{c^{q^2}} y_{n-1}^{q^4} + \frac{d^q \theta^{-q^2}}{c^q} y_{n-1}^{q^3} \\
&\quad + \frac{1}{c} y_{n-1}^{q^2} - \theta^{-q^2} z_{n-1}^{q^3}.
\end{aligned}$$

Jetzt nutzen wir (4.6) um $z_{n-1}^{q^3}$ zu ersetzen. Dabei setzen wir $y_{-2} = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{c^{q^2}} y_n^{q^4} + \left(-\frac{a^{q^2}}{c^{q^2}} - \frac{d^q}{c^q} \right) y_n^{q^3} + \left(-\frac{\theta^{q^2}}{c^{q^2}} - \frac{d^q a^q}{c^q} + b^q - \frac{\theta^q}{c} \right) y_n^{q^2} \\
&\quad + \left(-\frac{d^q \theta^q}{c^q} - \frac{\theta^q a}{c} \right) y_n^q - \frac{\theta^{q+1}}{c} y_n + \frac{\theta^{-q^3}}{c^{q^2}} y_{n-1}^{q^4} + \frac{d^q \theta^{-q^2}}{c^q} y_{n-1}^{q^3} \\
&\quad + \frac{1}{c} y_{n-1}^{q^2} + \frac{\theta^{-q^2}}{c^{q^2}} y_{n-1}^{q^4} + \frac{\theta^{-q^2} a^{q^2}}{c^{q^2}} y_{n-1}^{q^3} + \frac{1}{c^{q^2}} y_{n-1}^{q^2} - \frac{\theta^{-q^2-q^3}}{c^{q^2}} y_{n-2}^{q^4}.
\end{aligned}$$

Normieren der Gleichung durch Multiplikation mit $-c^{q^2}$ liefert die folgende Rekursionsbedingung an die Folge $(y_n)_n$

$$\begin{aligned}
0 &= y_n^{q^4} + \left(a^{q^2} + d^q c^{q^2-q} \right) y_n^{q^3} + \left(\theta^{q^2} + d^q a^q c^{q^2-q} - b^q c^{q^2} + \theta^q c^{q^2-1} \right) y_n^{q^2} \\
&\quad + \left(d^q \theta^q c^{q^2-q} + \theta^q a c^{q^2-1} \right) y_n^q + \theta^{q+1} c^{q^2-1} y_n + \left(-\theta^{-q^3} - \theta^{-q^2} \right) y_{n-1}^{q^4} \\
&\quad + \left(-d^q \theta^{-q^2} c^{q^2-q} - \theta^{-q^2} a^{q^2} \right) y_{n-1}^{q^3} + \left(-c^{q^2-1} - 1 \right) y_{n-1}^{q^2} + \theta^{-q^2-q^3} y_{n-2}^{q^4}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Diese Gleichung werden wir oft benutzen, deshalb führen wir folgende Notationen ein.

Definition 4.1.5. Für $a, b, c, d \in L$ setzen wir

$$\begin{aligned} A_0 &= \theta^{q+1} c^{q^2-1}, \\ A_1 &= d^q \theta^q c^{q^2-q} + \theta^q a c^{q^2-1}, \\ A_2 &= \theta^{q^2} + d^q a^q c^{q^2-q} - b^q c^{q^2} + \theta^q c^{q^2-1}, \\ A_3 &= a^{q^2} + d^q c^{q^2-q}, \\ A_4 &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(y_{n-1}, y_{n-2}) &= \left(-\theta^{-q^3} - \theta^{-q^2}\right) y_{n-1}^{q^4} + \left(-d^q \theta^{-q^2} c^{q^2-q} - \theta^{-q^2} a^{q^2}\right) y_{n-1}^{q^3} \\ &\quad + \left(-c^{q^2-1} - 1\right) y_{n-1}^{q^2} + \theta^{-q^2-q^3} y_{n-2}^{q^4}, \\ &= \left(-\theta^{-q^3} - \theta^{-q^2}\right) y_{n-1}^{q^4} - \theta^{-q^2} A_3 y_{n-1}^{q^3} \\ &\quad + \left(-c^{q^2-1} - 1\right) y_{n-1}^{q^2} + \theta^{-q^2-q^3} y_{n-2}^{q^4}, \end{aligned}$$

$$P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}) = A_4 y_n^{q^4} + A_3 y_n^{q^3} + A_2 y_n^{q^2} + A_1 y_n^q + A_0 y_n + B(y_{n-1}, y_{n-2}).$$

Die Gleichung (4.7) ist damit äquivalent zu $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}) = 0$. Wir definieren auf $L^{\mathbb{N}_0}$ den Operator t durch

$$t((y_n)_n) := (y_{n-1})_n.$$

Dabei setzen wir $y_{-1} = y_{-2} = 0$. Weiter sei

$$M[[t]]_2^\tau := \left\{ (y_n)_n \in L^{\mathbb{N}_0} \mid \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt } P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}) = 0 \right\}.$$

Durch die Operation von t wird $M[[t]]_2^\tau$ zu einem $\mathbb{F}_q[[t]]$ -Modul.

Es gilt das folgende Lemma, das unter anderem die obigen Überlegungen zusammenfasst.

Lemma 4.1.6. Die Abbildung

$$\phi: M[[t]]^\tau \rightarrow M[[t]]_2^\tau,$$

die ein Element $w(1, 0) + x(0, 1) + y(\tau, 0) + z(0, \tau) \in M[[t]]^\tau$ mit $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n$ abbildet auf $\left(\theta^{-\frac{1}{q-1}} y_n\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$, ist ein Isomorphismus von $\mathbb{F}_q[[t]]$ -Moduln.

Ist $(y_n)_n \in M[[t]]_2^\tau$, so gilt

$$\phi^{-1}((y_n)_n) = w(1, 0) + x(0, 1) + y(\tau, 0) + z(0, \tau)$$

mit

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=0}^{\infty} \theta^{\frac{1}{q-1}} y_n t^n, \\ z_n^q &= -\frac{1}{c} y_n^{q^2} - \frac{a}{c} y_n^q - \frac{\theta}{c} y_n + \frac{\theta^{-q}}{c} y_{n-1}^{q^2}, \\ z &= \sum_{i=0}^{\infty} \theta^{\frac{1}{q-1}} z_n t^n, \\ w &= (t - \theta)y^{(1)}, \\ x &= (t - \theta)z^{(1)}. \end{aligned}$$

Es sei angemerkt, dass z_n durch die Gleichung $z_n^q = -\frac{1}{c} y_n^{q^2} - \frac{a}{c} y_n^q - \frac{\theta}{c} y_n + \frac{\theta^{-q}}{c} y_{n-1}^{q^2}$ eindeutig festgelegt ist (dabei sei $y_{-1} = 0$).

Beweis. Nach obigen Rechnungen ist die Abbildung ϕ wohldefiniert. Die Multiplikation einer Potenzreihe aus $L[[t]]$ mit t ist auf den Folgengliedern einer Folge in $M[[t]]_2^\tau$ gerade der oben definierte Operator t , also ist ϕ ein $\mathbb{F}_q[[t]]$ -Modulhomomorphismus. Nachrechnen zeigt $\phi \circ \phi^{-1} = \text{id}$ und $\phi^{-1} \circ \phi = \text{id}$. \square

Das folgende Lemma werden wir später immer wieder implizit benutzen. Es besagt, dass die grundsätzliche Lösbarkeit der Gleichung $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}) = 0$ und damit das Finden von τ -Invarianten in $M[[t]]$ kein Problem für die Uniformisierbarkeit darstellt. Das Problem ist vielmehr das Finden von τ -Invarianten in $M\langle t \rangle$.

Lemma 4.1.7. *Es gibt zu gegebenen $y_{n-1} \in L$ und $y_{n-2} \in L$ genau q^4 verschiedene Lösungen $y_n \in L$ der Gleichung $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}) = 0$ in L .*

Beweis. Wir betrachten die Ableitung von $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$ nach der Variablen y_n . Da L die Charakteristik q hat, ist die Ableitung von P gerade $\theta^{q+1} c^{q^2-1} \neq 0$. Damit ist $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$ separabel. \square

Mit Lemma 4.1.7 und Lemma 4.1.6 erhalten wir:

Lemma 4.1.8. *Der Rang von $M[[t]]^\tau$ und $M[[t]]_2^\tau$ als $\mathbb{F}_q[[t]]$ -Moduln ist vier.*

Beweis. Für einen gegebenen Folgenanfang (y_0, \dots, y_{n-1}) gibt es genau q^4 mögliche Fortsetzungen y_n . Diese Fortsetzungen entsprechen via ϕ genau den möglichen Koeffizienten vor t^n in der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \theta^{\frac{1}{q-1}} y_n t^n \in M[[t]]_2^\tau$. \square

Als nächstes wollen wir $M\langle t \rangle^\tau$ berechnen. Dabei sind in $M\langle t \rangle^\tau$ gerade diejenigen Elemente von $M[[t]]^\tau$, deren Koeffizienten eine Nullfolge bilden und in einer endlichen Erweiterung von K_∞ liegen. Wir schränken jetzt den $\mathbb{F}_q[[t]]$ -Modulisomorphismus $\phi : M[[t]]^\tau \rightarrow M[[t]]_2^\tau$ aus Lemma 4.1.6 ein zu einem $\mathbb{F}_q[t]$ -Modulhomomorphismus

$$\phi : M\langle t \rangle^\tau \rightarrow M[[t]]_2^\tau.$$

Dieser Homomorphismus ist als Einschränkung eines injektiven Homomorphismus injektiv. Das folgende Lemma beschreibt das Bild dieses Homomorphismus.

Lemma 4.1.9. *Es gilt*

$$\phi : M\langle t \rangle^\tau \xrightarrow{\sim} M\langle t \rangle_2^\tau := \left\{ (y_n)_n \in M[[t]]_2^\tau \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = 0 \text{ und alle } y_n \text{ liegen in einer endlichen Erweiterung von } K_\infty \right\}.$$

Beweis. Sei $m = w(1, 0) + x(0, 1) + y(\tau, 0) + z(0, \tau) \in M\langle t \rangle^\tau$ mit $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n$. Dann ist $(y_n)_n$ eine Nullfolge und alle y_n liegen in einer endlichen Erweiterung von K_∞ . Das bedeutet $\phi(m) = \left(\theta^{-\frac{1}{q-1}} y_n \right)_n \in M\langle t \rangle_2^\tau$. Also ist $\phi(M\langle t \rangle^\tau) \subseteq M\langle t \rangle_2^\tau$.

Sei umgekehrt $(y_n)_n \in M\langle t \rangle_2^\tau$. Dann ist $(y_n)_n$ eine Nullfolge und alle y_n liegen in einer endlichen Erweiterung von K_∞ . Sei z_n für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert als die eindeutige Lösung der Gleichung

$$z_n^q = -\frac{1}{c} y_n^{q^2} - \frac{a}{c} y_n^q - \frac{\theta}{c} y_n + \frac{\theta^{-q}}{c} y_{n-1}^{q^2}.$$

Da $(y_n)_n$ eine Nullfolge ist, ist auch $(z_n)_n$ eine Nullfolge. Wir zeigen jetzt, dass alle z_n in einer endlichen Erweiterung von K_∞ liegen.

Seien die Folgenglieder $(y_n)_n$ Elemente des Körpers

$$K_\infty(\alpha_1, \dots, \alpha_i).$$

mit über K_∞ algebraischen Elementen $\alpha_1, \dots, \alpha_i$. Sei $\theta^{\frac{1}{q}}$ die eindeutige q -te Wurzel von θ und $\alpha_j^{\frac{1}{q}}$ die eindeutige q -te Wurzel von α_j ($j = 1, \dots, i$). Wegen $K_\infty = \mathbb{F}_q(\left(\frac{1}{\theta}\right))$ ist jede q -te Wurzel von Elementen aus $K_\infty(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ enthalten im Körper

$$K_\infty\left(\alpha_1^{\frac{1}{q}}, \dots, \alpha_i^{\frac{1}{q}}, \theta^{\frac{1}{q}}\right).$$

Insbesondere liegen alle z_n in dieser endlichen Erweiterung von K_∞ . Mit Lemma 4.1.6 sehen wir, dass $\phi^{-1}((y_n)_n)$ ein Element von $M\langle t \rangle^\tau$ ist. \square

Wir erhalten den folgenden Satz, mit dessen Hilfe wir in den folgenden Abschnitten die Uniformisierbarkeit untersuchen werden.

Satz 4.1.10. *Sei $E = \mathbb{G}_a^2$ ein t -Modul mit $t = \theta + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau + \tau^2$ mit $a, b, c, d \in L$ und $c \neq 0$. Dann ist E genau dann uniformisierbar, wenn*

$$\text{Rang}_{\mathbb{F}_q[t]} M\langle t \rangle_2^\tau = 4.$$

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Satz 4.1.2 und Lemma 4.1.9. \square

4.2 Newtonpolygone

Wir wollen Kriterien für die Uniformisierbarkeit innerhalb unserer Familie finden. Um eine Idee zu bekommen, wie diese Kriterien aussehen könnten, zitieren wir zunächst das folgende Beispiel.

Beispiel 4.2.1. *Seien $a, b, c, d \in L$ mit $ad - bc = \frac{1}{\theta^2}$ und $a + d = -\frac{2}{\theta}$. Sei weiter $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wir betrachten den t -Modul $E = \mathbb{G}_a^2$ mit $t = -B^{-1} + B^{-1}\tau$. Dann ist E uniformisierbar genau dann, wenn $|a|, |c|, |d| < 1$ oder E aus einem solchen durch Konjugation mit einem Element der $\text{Gl}_2(\mathbb{F}_q)$ entsteht. Dies wird in [BH07, Proposition 7.1.] gezeigt. In diesem Beispiel ist die Dimension und der Rang jeweils zwei. Dieses Beispiel wird in [Sei08] zu höherer Dimension verallgemeinert. Bei der Beispielserie in [Sei08] verbleiben jedoch einige Fälle, bei denen nicht klar ist, ob sie uniformisierbar sind.*

Kehren wir zurück zu unserer Familie von t -Moduln der Form $E = \mathbb{G}_a^2$ mit

$$t = \theta + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau + \tau^2.$$

Wir wollen Kriterien für die Koeffizienten $a, b, c, d \in L$ finden, so dass der Rang von

$$M\langle t \rangle_2^\tau = \left\{ (y_n)_n \in L^{\mathbb{N}_0} \mid P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = 0 \text{ und alle } y_n \text{ liegen in einer endlichen Erweiterung von } K_\infty \right\}$$

vier ist (oder eben kleiner). Dazu müssen wir entscheiden, ob $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ für eine Folge $(y_n)_n$ gilt. Es ist also notwendig, $|y_n|$ oder $v(y_n)$ zu bestimmen.

Ist $(y_n)_n \in M\langle t \rangle_2^T$, so ist y_n für gegebenes y_{n-1} und y_{n-2} eine Nullstelle des Polynoms $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$. Zur Erinnerung wiederholen wir kurz, was das Newtonpolygon eines Polynoms über einem bewerteten Körper ist und wie dieses mit den Nullstellen und ihren Bewertungen zusammenhängt. Wir folgen hier im wesentlichen [Neu07, S.150-153]. Es sei (N, v) ein bewerteter Körper. Wir denken beispielsweise an $N = L$ oder eine endliche Körpererweiterung von K_∞ .

Definition 4.2.2. Sei $f(y) = a_0 + a_1y + \dots + a_ny^n \in N[y]$ mit $a_n \neq 0$. Wir ordnen jedem Term a_i den Punkt $(i, v(a_i))$ zu. Das Newtonpolygon von $f(y)$ ist die untere konvexe Hülle der Punktmenge

$$\{(i, v(a_i)) \mid i \in \{1, \dots, n\} \text{ und } v(a_i) \neq \infty\}.$$

Das Newtonpolygon besteht aus einer Folge von Strecken mit monoton wachsenden Steigungen. Über die Bewertung der Nullstellen des Polynoms $f(y)$ gilt der folgende Satz.

Satz 4.2.3. Sei $f(y) = a_0 + a_1y + \dots + a_ny^n \in N[y]$ mit $a_n \neq 0$. Sei w eine Fortsetzung von v auf den Zerfällungskörper von N . Ist $\overline{(i, v(a_i))(j, v(a_j))}$ eine Strecke des Newtonpolygons von $f(y)$ mit der Steigung m , so besitzt $f(y)$ genau $j - i$ Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_{j-i}$ im Zerfällungskörper von N mit den Werten $w(\alpha_1) = \dots = w(\alpha_{j-i}) = -m$. Zudem ist $\prod_{r=1}^{j-i} (\alpha_r - y)$ ein Teiler von $f(y)$ über N . Insbesondere liefert eine Strecke S , deren Projektion auf die x -Achse die Länge 1 hat, eine Nullstelle von $f(y)$ in N , deren Bewertung die negative Steigung von S ist.

Beweis. [Neu07, S.151-S.153]. □

Kehren wir zurück zu unserem Problem. Wir wollen entscheiden, ob eine Folge $(y_n)_n$ aus $M[[t]]_2^T$ auch in $M\langle t \rangle_2^T$ enthalten ist. Dazu wollen wir die Bewertungen der Folgenglieder von $(y_n)_n \in M[[t]]_2^T$ bestimmen. Die Folgenglieder y_n sind dabei Nullstellen von

$$P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}) = A_4y_n^4 + A_3y_n^3 + A_2y_n^2 + A_1y_n + A_0y_n + B(y_{n-1}, y_{n-2}).$$

Für gegebene y_{n-1} und y_{n-2} ist $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$ ein Polynom in y_n . Wir ordnen einer Folge $(y_n)_n$ die Folge der Newtonpolygone von $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$ zu. Die möglichen Bewertungen von y_n können wir am Newtonpolygon von $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$ ablesen.

Betrachten wir die Koeffizienten von $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$ genauer, so sehen wir, dass lediglich der konstante Term $B(y_{n-1}, y_{n-2})$ von y_{n-1} und y_{n-2} abhängt. Im Polynom $P(y_0, 0, 0)$ ist der konstante Term gleich 0. Für das Newtonpolygon müssen wir in diesem Fall die untere konvexe Hülle der Punkte $(q^i, v(A_i))$ für $i = 0, \dots, 4$ bilden. Es sei m die Steigung der Strecke, die ganz links im Newtonpolygon von $P(y_0, 0, 0)$ liegt. Die Steigung m lässt sich durch die Koeffizienten A_i ausdrücken als

$$m = \min_{i=1,2,3,4} \left\{ \frac{v(A_0) - v(A_i)}{1 - q^i} \right\}.$$

Andererseits ist m auch die kleinste Steigung im Newtonpolygon von $P(y_0, 0, 0)$. Da die Bewertung der Nullstellen gerade die negativen Steigungen sind, gehören zur Steigung m diejenigen Nullstellen von $P(y_0, 0, 0)$ mit der größten Bewertung $-m$. Wollen wir das Newtonpolygon von $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$ bestimmen, so kommt bei der Bestimmung der konvexen Hülle lediglich der Punkt $(0, v(B(y_{n-1}, y_{n-2})))$ hinzu.

Wir wollen Kriterien dafür finden, dass eine Folge $(y_n)_n \in M[[t]]_2^r$ auch in $M\langle t \rangle_2^r$ liegt. Nehmen wir einmal an, dass $(y_n)_n$ ein Element von $M[[t]]_2^r$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ist. Dann muss es ein n_0 geben, so dass für alle $n > n_0$ gilt $v(y_n) > -m$. Die Bewertungen $v(y_n)$ gehören zu Steigungen im Newtonpolygon von $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$. Für $n > n_0$ muss es also mindestens eine Strecke mit Steigung kleiner m geben. Dies kann nur dann auftreten, wenn der einzige Unterschied des Newtonpolygons von $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$ zum Newtonpolygon von $P(y_0, 0, 0)$ das Anhängen einer Strecke über dem Intervall $[0, 1]$ ist. Dies veranschaulichen wir uns anhand der Abbildung 4.1.

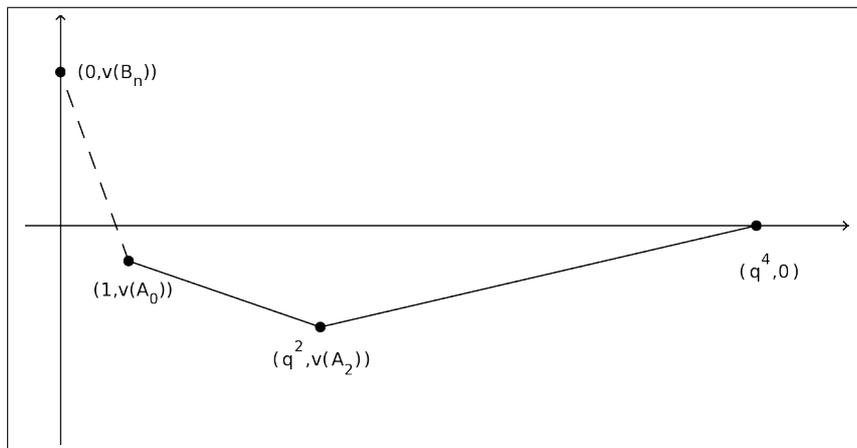


Abbildung 4.1: Newtonpolygone zu $P(y_0, 0, 0)$ und $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$ für große n im Fall $\lim y_n = 0$.

Für $n > n_0$ ist die Steigung der Strecke über dem Intervall $[0, 1]$ gerade $v(A_0) - v(B(y_{n-1}, y_{n-2}))$. Es gilt dann $v(y_n) = v(B(y_{n-1}, y_{n-2})) - v(A_0) > -m$. Die Idee beim Finden einer Folge $(y_n)_n \in M\langle t \rangle_2^\tau$ wird sein, sukzessive Lösungen von $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}) = 0$ zu wählen und - sobald es möglich ist - immer diejenige Lösung \tilde{y}_n zu wählen mit $v(\tilde{y}_n) > -m$. Wir können mit Hilfe der Newtonpolygone das folgende Lemma zeigen.

Lemma 4.2.4. *Sei $(y_n)_n \in M[[t]]_2^\tau$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Dann liegen alle y_n in einer endlichen algebraischen Erweiterung von K_∞ .*

Beweis. Die Koeffizienten a, b, c, d sind in L , liegen also in einer endlichen algebraischen Erweiterung von K_∞ . Nach obigen Überlegungen gibt es ein n_0 , so dass $v(y_n) > -m$ für alle $n > n_0$ gilt. Betrachten wir zunächst die y_n mit $n \leq n_0$. Diese erfüllen für gegebenes y_{n-1} und y_{n-2} die algebraische Gleichung $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}) = 0$. Definieren wir $N := K_\infty(a, b, c, d)$, so erhalten wir einen Körperturm

$$N \subseteq N(y_0) \subseteq N(y_0, y_1) \subseteq \dots \subseteq N(y_0, \dots, y_{n_0}).$$

Das bedeutet für $n \leq n_0$ liegt y_n in der über K_∞ endlichen Erweiterung $N(y_0, \dots, y_{n_0})$. Nach obigen Überlegungen gehört das Folgenglied y_{n_0+i} für $i \in \mathbb{N}$ zu der Strecke eines Newtonpolygons, deren Projektion auf die x -Achse die Länge 1 hat. Nach Satz 4.2.3 liegt auch y_{n_0+i} in $N(y_0, \dots, y_{n_0})$. \square

Wir erhalten als direkte Folgerung:

Satz 4.2.5. $M\langle t \rangle_2^\tau = \left\{ (y_n)_n \in M[[t]]_2^\tau \mid \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \right\}$. \square

4.3 Hinreichende Kriterien

In diesem Abschnitt werden wir hinreichende Kriterien für die Uniformisierbarkeit von t -Moduln in unserer Familie herleiten.

Sei $(y_n)_n \in M\langle t \rangle_2^\tau$. Dann gibt es ein n_0 , so dass $v(y_n) > -m$ für alle $n > n_0$ gilt. Sei $n > n_0$. Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, dass dann gilt $v(y_n) = v(B(y_{n-1}, y_{n-2})) - v(A_0)$. Dabei ist

$$\begin{aligned} B(y_{n-1}, y_{n-2}) &= \left(-\theta^{-q^3} - \theta^{-q^2} \right) y_{n-1}^{q^4} - \theta^{-q^2} A_3 y_{n-1}^{q^3} \\ &\quad + \left(-c^{q^2-1} - 1 \right) y_{n-1}^{q^2} + \theta^{-q^2-q^3} y_{n-2}^{q^4}. \end{aligned}$$

Wir weisen darauf hin, dass wir zu gegebenen y_{n-1} und y_{n-2} falls möglich immer diejenige Lösung y_n von $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$ betrachten, die

$$v(y_n) = v(B(y_{n-1}, y_{n-2})) - v(A_0) > -m$$

erfüllt. Wir sehen, dass in $B(y_{n-1}, y_{n-2})$ sowohl y_{n-1} als auch y_{n-2} eingehen. Wir werden die Kriterien mittels Induktion herleiten. Die Idee für den Induktionsschritt ist: Sind $v(y_{n-1})$ und $v(y_{n-2})$ größer als $-m$, so gibt es ein y_n , so dass $v(y_n)$ um einen festen Wert größer als $v(y_{n-1})$ und $v(y_{n-2})$ ist. Wir werden für den Induktionsschritt die Voraussetzung $v(c^{q^2-1} + 1) - q^2m \geq v(A_0) - m$ benötigen. Das folgende Lemma zeigt, dass diese Voraussetzung schon mit einem möglichen Induktionsanfang für diejenigen y_0 mit $v(y_0) = -m$ zusammenhängt.

Lemma 4.3.1. *Es gibt genau dann eine Folge $(y_n)_n \in M[[t]]_2^7$ mit $v(y_0) = -m$ und $v(y_1) > v(y_0)$, wenn*

$$v(c^{q^2-1} + 1) - q^2m \geq v(A_0) - m.$$

Um dieses Lemma zu beweisen, zeigen wir zunächst ein weiteres Lemma, das direkt aus der Definition von m folgt und auch für den Beweis des Induktionsschrittes benötigt wird.

Lemma 4.3.2. *Für $i = 1, 2, 3, 4$ gilt*

$$v(A_i) \geq (q^i - 1)m + v(A_0).$$

Für $i = 4$ folgt insbesondere $-q^4m \geq v(A_0) - m$.

Beweis. Es gilt

$$m = \min_{i=1,2,3,4} \left\{ \frac{v(A_0) - v(A_i)}{1 - q^i} \right\}.$$

Somit $(q^i - 1)m \leq v(A_i) - v(A_0)$. Wegen $v(A_4) = 0$ folgt $-q^4m \geq v(A_0) - m$. \square

Beweis von Lemma 4.3.1. Wir haben bereits gesehen, dass $v(y_1) > -m$ äquivalent ist zu

$$v(y_1) = v(B(y_0, 0)) - v(A_0) > -m.$$

Wir schätzen $v(B(y_0, 0))$ mit der verschärften Dreiecksungleichung ab und erhalten

$$\begin{aligned} v(B(y_0, 0)) \geq \min \{ & q^2 + q^4v(y_0), \\ & q^2 + q^3v(y_0) + v(A_3), \\ & v(c^{q^2-1} + 1) + q^2v(y_0) \}. \end{aligned}$$

Wenn einer der drei Terme der kleinste ist, so wird das Minimum angenommen.

Es gilt mit Lemma 4.3.2

$$q^2 + q^4 v(y_0) = q^2 - q^4 m \geq q^2 + v(A_0) - m > v(A_0) - m$$

und

$$q^2 + q^3 v(y_0) + v(A_3) \geq q^2 - q^3 m + (q^3 - 1)m + v(A_0) > v(A_0) - m.$$

Somit ist $v(B(y_0, 0)) > v(A_0) - m$ genau dann erfüllt, wenn $v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 m \geq v(A_0) - m$. \square

Wir beweisen jetzt zunächst den Induktionsschritt.

Lemma 4.3.3. *Es sei n eine natürliche Zahl mit $n > 2$ und es gelte*

$$v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 m > v(A_0) - m.$$

Seien zudem $y_{n-1}, y_{n-2} \in L^\times$ mit

$$\begin{aligned} v(y_{n-2}) &\geq -m + \varepsilon, \\ v(y_{n-1}) &\geq -m + q^2 \varepsilon \end{aligned}$$

für ein $\varepsilon > 0$. Dann gibt es genau eine Nullstelle y_n von $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$ mit

$$v(y_n) \geq -m + q^4 \varepsilon.$$

Beweis. Wir schätzen mit der verschärften Dreiecksungleichung ab

$$\begin{aligned} v(B(y_{n-1}, y_{n-2})) &\geq \min \left\{ q^2 + q^4 v(y_{n-1}), \right. \\ &\quad q^2 + q^3 v(y_{n-1}) + v(A_3), \\ &\quad v(c^{q^2-1} + 1) + q^2 v(y_{n-1}), \\ &\quad \left. q^2 + q^3 + q^4 v(y_{n-2}) \right\}. \end{aligned}$$

Es gilt $v(y_{n-1}) \geq -m + q^2 \varepsilon$ und $v(y_{n-2}) \geq -m + \varepsilon$. Damit folgt

$$\begin{aligned} v(B(y_{n-1}, y_{n-2})) &\geq \min \left\{ q^2 - q^4 m + q^6 \varepsilon, \right. \\ &\quad q^2 - q^3 m + v(A_3) + q^5 \varepsilon, \\ &\quad v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 m + q^4 \varepsilon, \\ &\quad \left. q^2 + q^3 - q^4 m + q^4 \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Wir nutzen jetzt Lemma 4.3.2, nämlich $-q^4m \geq v(A_0) - m$ und $v(A_3) \geq (q^3 - 1)m + v(A_0)$.

$$v(B(y_{n-1}, y_{n-2})) \geq \min \left\{ \begin{aligned} &q^2 - m + v(A_0) + q^6\varepsilon, \\ &q^2 - m + v(A_0) + q^5\varepsilon, \\ &v(c^{q^2-1} + 1) - q^2m + q^4\varepsilon, \\ &q^2 + q^3 - m + v(A_0) + q^4\varepsilon \end{aligned} \right\}.$$

Jetzt nutzen wir unsere Voraussetzung $v(c^{q^2-1} + 1) - q^2m \geq v(A_0) - m$ und erhalten

$$v(B(y_{n-1}, y_{n-2})) \geq \min \left\{ \begin{aligned} &q^2 - m + v(A_0) + q^6\varepsilon, \\ &q^2 - m + v(A_0) + q^5\varepsilon, \\ &-m + v(A_0) + q^4\varepsilon, \\ &q^2 + q^3 - m + v(A_0) + q^4\varepsilon \end{aligned} \right\}.$$

Damit folgt

$$v(B(y_{n-1}, y_{n-2})) \geq -m + v(A_0) + q^4\varepsilon.$$

Verlängern wir die Strecke im Newtonpolygon von $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$ der Steigung m zu einer Geraden, so schneidet diese die y -Achse bei $v(A_0) - m$. Wegen

$$v(B(y_{n-1}, y_{n-2})) \geq v(A_0) - m + q^4\varepsilon$$

hat das Newtonpolygon von $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$ über $[0, 1]$ eine Strecke mit Steigung $v(A_0) - v(B(y_{n-1}, y_{n-2}))$. Zu dieser Strecke gehört genau eine Nullstelle y_n von $P(y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$ mit Bewertung $v(B(y_{n-1}, y_{n-2})) - v(A_0) \geq -m + q^4\varepsilon$. \square

Wir erhalten das folgende Korollar.

Korollar 4.3.4. *Sei $n_0 > 2$ eine natürliche Zahl und*

$$v(c^{q^2-1} + 1) - q^2m > v(A_0) - m.$$

Sei zudem (y_0, \dots, y_{n_0-1}) der Anfang einer Folge in $M[[t]]_2^{\tau}$ mit

$$v(y_{n_0-2}), v(y_{n_0-1}) > -m$$

und $y_{n_0-2} \neq 0$. Dann lässt sich (y_0, \dots, y_{n_0-1}) fortsetzen zu einer Folge

$$(y_n)_n = (y_0, \dots, y_{n_0-1}, \dots) \in M\langle t \rangle_2^{\tau}.$$

Beweis. Wir wählen

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{v(y_{n_0-1}) + m}{q^2}, v(y_{n_0-2}) + m \right\},$$

denn dann gilt $v(y_{n_0-1}) \geq -m + q^2\varepsilon$ und $v(y_{n_0-2}) \geq -m + \varepsilon$. Dann folgt mit Lemma 4.3.3 $v(y_{n_0}) \geq v(A_0) - m + q^4\varepsilon$ und induktiv für alle $n \geq n_0 - 2$

$$v(y_n) \geq v(A_0) - m + q^{2(n-n_0)+4}\varepsilon.$$

Somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(A_0) - m + q^{2(n-n_0)+4}\varepsilon = \infty.$$

□

Jetzt kommen wir zum Induktionsanfang für unser Kriterium. Wir bezeichnen die Steigung, die ganz rechts im Newtonpolygon von $P(y_0, 0, 0)$ liegt, als \mathcal{M} . Diese lässt sich durch die A_i ausdrücken als

$$\mathcal{M} = \max_{i=0, \dots, 3} \left\{ \frac{-v(A_i)}{q^4 - q^i} \right\}$$

und ist die größte der auftretenden Steigungen. Aus der Definition von \mathcal{M} folgt direkt:

Lemma 4.3.5. *Es gilt*

$$-q^i \mathcal{M} + v(A_i) \geq -q^4 \mathcal{M}$$

Beweis. Nach Definition von \mathcal{M} gilt $\mathcal{M} \geq \frac{-v(A_i)}{q^4 - q^i}$. Damit $q^4 \mathcal{M} - q^i \mathcal{M} \geq -v(A_i)$ und $-q^i \mathcal{M} + v(A_i) \geq -q^4 \mathcal{M}$. □

Zur Strecke mit Steigung \mathcal{M} korrespondieren die Nullstellen mit der kleinsten Bewertung. Also gilt immer $v(y_0) \geq -\mathcal{M}$. Die Idee ist, dass es für die Nullstellen y_0 mit den kleinsten Bewertungen am schwierigsten zu zeigen ist, dass es eine Folge $(y_n)_n \in M[[t]]_2^{\mathbb{Z}}$ mit $\lim v(y_n) = \infty$ gibt. Wir betrachten also y_0 mit $P(y_0, 0, 0) = 0$ und $v(y_0) = -\mathcal{M}$. Wir wollen ein Kriterium angeben, so dass es ein y_1 gibt mit $v(y_1) > -m$ und $P(y_1, y_0, 0) = 0$. Dazu betrachten wir

$$B(y_0, 0) = \left(-\theta^{-q^3} - \theta^{-q^2} \right) y_0^{q^4} - \theta^{-q^2} A_3 y_0^{q^3} + \left(-c^{q^2-1} - 1 \right) y_0^{q^2}.$$

Wir schätzen mit der verschärften Dreiecksungleichung ab

$$\begin{aligned} v(B(y_0, 0)) &\geq \min \{q^2 + q^4 v(y_0), \\ &\quad q^2 + q^3 v(y_0) + v(A_3), \\ &\quad v(c^{q^2-1} + 1) + q^2 v(y_0)\} \\ &= \min \{q^2 - q^4 \mathcal{M}, \\ &\quad q^2 - q^3 \mathcal{M} + v(A_3), \\ &\quad v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 \mathcal{M}\}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3.5 gilt $-q^3 \mathcal{M} + v(A_3) \geq -q^4 \mathcal{M}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} v(B(y_0, 0)) &\geq \min \{q^2 - q^4 \mathcal{M}, \\ &\quad q^2 - q^4 \mathcal{M}, \\ &\quad v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 \mathcal{M}\}. \end{aligned}$$

Wir wollen, dass $v(y_1) > -m$, also $v(B(y_0, 0)) > -m + v(A_0)$. Hinreichend dafür sind nach obiger Überlegung die folgenden zwei Bedingungen

- 1) $q^2 - q^4 \mathcal{M} > v(A_0) - m$,
- 2) $v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 \mathcal{M} > v(A_0) - m$.

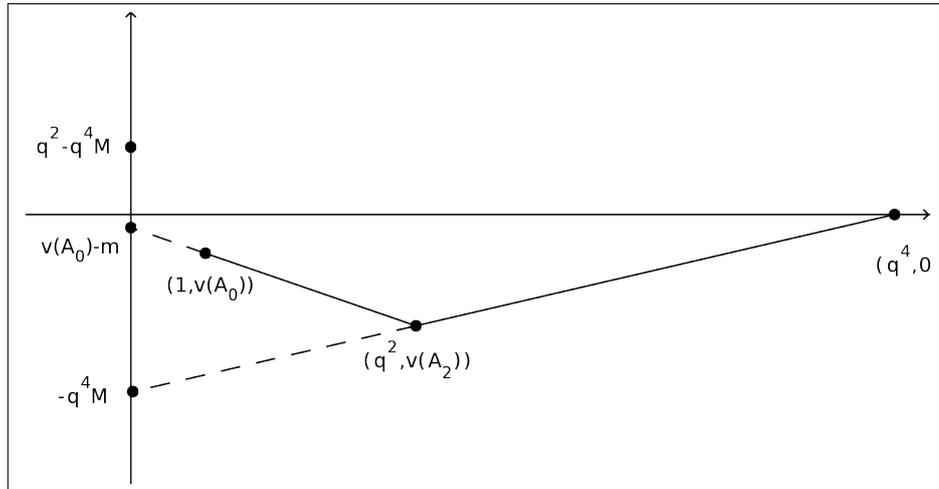
In der folgenden Bemerkung wird Bedingung 1) geometrisch interpretiert.

Bemerkung 4.3.6. *Wir betrachten das Newtonpolygon von $P(y_0, 0, 0)$. Verlängern wir die Strecke mit der Steigung \mathcal{M} zu einer Geraden, so schneidet diese die y -Achse bei $-q^4 \mathcal{M}$. Verlängern wir hingegen die Strecke mit der Steigung m zu einer Geraden, so schneidet diese die Achse bei $v(A_0) - m$. Somit gilt immer $v(A_0) - m \geq -q^4 \mathcal{M}$. Die Aussage von Bedingung 1) ist, dass diese beiden Werte sich um weniger als q^2 unterscheiden. Wir veranschaulichen uns diese Situation mit Abbildung 4.2 (auf der folgenden Seite).*

Für den Induktionsschritt brauchen wir die Bedingung $v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 m > v(A_0) - m$. Diese folgt aber wegen $-m \geq -\mathcal{M}$ aus Bedingung 2). Damit erhalten wir wegen Lemma 4.3.1 bereits, dass für $v(y_0) = -m$ und $P(y_0, 0, 0) = 0$ auch die Existenz von y_1 mit $v(y_1) > -m$ folgt. Allgemeiner erhalten wir:

Lemma 4.3.7. *Gilt*

$$\begin{aligned} q^2 - q^4 \mathcal{M} &> v(A_0) - m \text{ und} \\ v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 \mathcal{M} &> v(A_0) - m, \end{aligned}$$

Abbildung 4.2: Newtonpolygon zu $P(y_0, 0, 0)$, so dass Bedingung 1) gilt.

so gibt es für jede Nullstelle y_0 von $P(y_0, 0, 0)$ ein $y_1 \in L$ mit $v(y_1) > -m$ und $P(y_1, y_0, 0) = 0$.

Beweis. Wir schätzen $v(B(y_0, 0))$ mit der verschärften Dreiecksungleichung, $v(y_0) \geq -\mathcal{M}$ und $v(A_3) \geq -q^4\mathcal{M} + q^3\mathcal{M}$ (Lemma 4.3.5) ab

$$\begin{aligned}
v(B(y_0, 0)) &\geq \min \{ q^2 + q^4 v(y_0), \\
&\quad q^2 + q^3 v(y_0) + v(A_3), \\
&\quad v(c^{q^2-1} + 1) + q^2 v(y_0) \} \\
&\geq \min \{ q^2 - q^4 \mathcal{M}, \\
&\quad q^2 - q^3 \mathcal{M} - q^4 \mathcal{M} + q^3 \mathcal{M}, \\
&\quad v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 \mathcal{M} \}. \\
&> v(A_0) - m.
\end{aligned}$$

□

Um unsere Induktion anzusetzen, benötigen wir aber zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder, deren Bewertung größer $-m$ ist. Doch glücklicherweise gilt das folgende Lemma.

Lemma 4.3.8. *Es gelte*

$$\begin{aligned}
q^2 - q^4 \mathcal{M} &> v(A_0) - m \text{ und} \\
v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 \mathcal{M} &> v(A_0) - m.
\end{aligned}$$

Weiter seien $y_0, y_1 \in L$ mit $P(y_0, 0, 0) = 0$, $P(y_1, y_0, 0) = 0$ und $v(y_1) > -m$.
Dann gibt es ein y_2 mit $P(y_2, y_1, y_0) = 0$ und $v(y_2) > -m$.

Beweis. Wir schätzen ab

$$\begin{aligned} v(B(y_1, y_0)) \geq \min \{ & q^2 + q^4 v(y_1), \\ & q^2 + q^3 v(y_1) + v(A_3), \\ & v(c^{q^2-1} + 1) + q^2 v(y_1), \\ & q^2 + q^3 + q^4 v(y_0) \}. \end{aligned}$$

Es gilt $v(y_0) \geq -\mathcal{M}$ und $v(y_1) > -m \geq -\mathcal{M}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} v(B(y_1, y_0)) \geq \min \{ & q^2 - q^4 \mathcal{M}, \\ & q^2 - q^3 \mathcal{M} + v(A_3), \\ & v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 \mathcal{M}, \\ & q^2 + q^3 - q^4 \mathcal{M} \} \end{aligned}$$

Jeder einzelne Term ist größer als $v(A_0) - m$, somit gilt

$$v(B(y_1, y_0)) > v(A_0) - m.$$

□

Wir erhalten jetzt den folgenden Satz.

Satz 4.3.9. Sei $E = \mathbb{G}_a^2$ ein t -Modul mit $t = \theta + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau + \tau^2$ mit $a, b, c, d \in L$ und $c \neq 0$. Es gelte außerdem

$$\begin{aligned} q^2 - q^4 \mathcal{M} &> v(A_0) - m \text{ und} \\ v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 \mathcal{M} &> v(A_0) - m. \end{aligned}$$

Dann ist E uniformisierbar.

Beweis. Sei y_0 eine nicht triviale Nullstelle von $P(y_0, 0, 0)$. Dann gibt es nach Lemma 4.3.7 ein y_1 und nach Lemma 4.3.8 gibt es ein y_2 , so dass (y_0, y_1, y_2) der Anfang einer Folge in $M[[t]]_2^\tau$ ist mit $v(y_1) > -m$ und $v(y_2) > -m$. Nach Lemma 4.3.4 lässt sich (y_0, y_1, y_2) zu einer Folge $(y_n)_n \in M\langle t \rangle_2^\tau$ fortsetzen. Da dies für jeden der $q^4 - 1$ möglichen Startwerte y_0 geht, ist der Rang von $M\langle t \rangle^\tau$ mit Satz 4.1.2 vier. □

Bemerkung 4.3.10. *Die Bedingungen*

- 1) $q^2 - q^4 \mathcal{M} > v(A_0) - m,$
- 2) $v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 \mathcal{M} > v(A_0) - m$

sind sicherlich für gegebene a, b, c, d einfach zu berechnen. Aber es gilt auch

$$m = \min_{i=1,2,3,4} \left\{ \frac{v(A_0) - v(A_i)}{1 - q^i} \right\}.$$

Somit ist 1) äquivalent zu

$$q^2 - q^4 \mathcal{M} > v(A_0) - \frac{v(A_0) - v(A_i)}{1 - q^i} \text{ für } i = 1, 2, 3, 4.$$

Wegen $\mathcal{M} = \max_{j=0,1,2,3} \left\{ \frac{v(A_j)}{q^j - q^4} \right\}$ ist 1) dann sogar äquivalent zu

$$q^2 - q^4 \frac{v(A_j)}{q^j - q^4} > v(A_0) - \frac{v(A_0) - v(A_i)}{1 - q^i} \text{ für } (i = 1, 2, 3, 4; j = 0, 1, 2, 3).$$

Da die A_i polynomielle Ausdrücke in den Variablen a, b, c, d sind, ist jede dieser 16 Bedingungen von einfacher Form. Für $i = 1$ und $j = 3$ erhalten wir etwa

$$q^2 - q^4 \frac{v(A_3)}{q^3 - q^4} > v(A_0) - \frac{v(A_0) - v(A_1)}{1 - q} = \frac{qv(A_0) - v(A_1)}{q - 1}.$$

Wir setzen für A_0, A_1, A_3 ein und erhalten

$$q^2 + q \frac{v(a^{q^2} + d^q c^{q^2-q})}{q - 1} > \frac{-q^2 - q + (q^3 - q)v(c) + q - v(ac^{q^2-1} + d^q c^{q^2-q})}{q - 1}$$

oder äquivalent

$$q^3 + q \frac{v(a^{q^2} + d^q c^{q^2-q})}{q - 1} > (q^3 - q)v(c) - v(ac^{q^2-1} + d^q c^{q^2-q}).$$

Ebenso lässt sich Bedingung 2) umformen zu 16 einzelnen sehr einfachen Bedingungen. Man erhält so insgesamt 32 einzelne Bedingungen, die alle erfüllt sein müssen, damit die Voraussetzungen für Satz 4.3.9 erfüllt sind.

4.4 Eine uniformisierbare Teilfamilie

In diesem Abschnitt wenden wir Satz 4.3.9 zunächst auf eine einfache Teilfamilie unserer t -Moduln an und verallgemeinern dann die gefundene uniformisierbare Teilfamilie.

Wir betrachten den Fall $v(c) \geq 0$ und $a = b = d = 0$. In diesem Fall ist $v(c^{q^2-1} + 1) \geq 0$, weshalb die Bedingung $v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 m > v(A_0) - m$ leichter zu zeigen ist. Die Koeffizienten A_i sehen in diesem Fall wie folgt aus:

$$\begin{aligned} A_0 &= \theta^{q+1} c^{q^2-1}, \\ A_1 &= d^q \theta^q c^{q^2-q} + \theta^q a c^{q^2-1} = 0, \\ A_2 &= \theta^{q^2} + d^q a^q c^{q^2-q} - b^q c^{q^2} + \theta^q c^{q^2-1} = \theta^{q^2} + \theta^q c^{q^2-1}, \\ A_3 &= a^{q^2} + d^q c^{q^2-q} = 0, \\ A_4 &= 1. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Bewertungen der Koeffizienten A_i . Es gilt

$$v(A_0) = -q - 1 + (q^2 - 1)v(c).$$

Aus $v(c) \geq 0$ folgt

$$-q^2 < -q + (q^2 - 1)v(c) = v(\theta^q c^{q^2-1})$$

und somit $v(A_2) = -q^2$.

Das Newtonpolygon von $P(y_0, 0, 0)$ ist also die untere konvexe Hülle der Punkte

$$\begin{aligned} P_1 &= (1, -q - 1 + (q^2 - 1)v(c)), \\ P_2 &= (q^2, -q^2), \\ P_3 &= (q^4, 0). \end{aligned}$$

Das Newtonpolygon kann damit aus einer oder zwei Strecken bestehen. Die Strecke $\overline{P_1 P_3}$ hat die Steigung $\frac{-v(A_0)}{q^4-1}$. Bei q^2 hat sie den Wert

$$\begin{aligned} -(q^4 - q^2) \frac{-v(A_0)}{q^4 - 1} &= q^2 \frac{-q - 1 + (q^2 - 1)v(c)}{q^2 + 1} \\ &> \frac{-q^3 - q^2}{q^2 + 1} \\ &> \frac{-q^4 - q^2}{q^2 + 1} = -q^2. \end{aligned}$$

Die Strecke $\overline{P_1 P_2}$ verläuft also oberhalb des Punktes P_2 . Damit hat das Newtonpolygon die zwei unterschiedlichen Steigungen m und \mathcal{M} . Wir berechnen

$$\begin{aligned} m &= \frac{-q^2 - v(A_0)}{q^2 - 1} = \frac{-q^2 + q + 1}{q^2 - 1} - v(c) \text{ und} \\ \mathcal{M} &= \frac{-q^2}{q^2 - q^4} = \frac{1}{q^2 - 1}. \end{aligned}$$

Wir überprüfen die Kriterien von Satz 4.3.9, nämlich

- 1) $q^2 - q^4 \mathcal{M} > v(A_0) - m,$
- 2) $v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 \mathcal{M} > v(A_0) - m.$

Wir prüfen zunächst nach, wann Kriterium 2) erfüllt ist.

$$\begin{aligned} v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 \frac{1}{q^2-1} &> -q-1 + (q^2-1)v(c) + v(c) + \frac{q^2-q-1}{q^2-1} \\ \Leftrightarrow v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 \frac{1}{q^2-1} &> \frac{(-q-1)(q^2-1) + q^2-q-1}{q^2-1} + q^2 v(c) \\ \Leftrightarrow v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 \frac{1}{q^2-1} &> \frac{-q^3}{q^2-1} + q^2 v(c) \\ \Leftrightarrow \frac{v(c^{q^2-1} + 1)}{q^2} + \frac{1}{q+1} &> v(c). \end{aligned}$$

Kriterium 1) bedeutet

$$q^2 - q^4 \frac{1}{q^2-1} > -q-1 + (q^2-1)v(c) + v(c) + \frac{q^2-q-1}{q^2-1}.$$

Aber es gilt

$$q^2 - q^4 \frac{1}{q^2-1} = \frac{q^4 - q^2 - q^4}{q^2-1} = \frac{-q^2}{q^2-1}$$

und damit ist Kriterium 1) äquivalent zu

$$\frac{1}{q+1} > v(c).$$

Gilt Kriterium 1), so gilt auch Kriterium 2). Falls $v(c^{q^2-1} + 1) = 0$ gilt, was zum Beispiel der Fall ist, wenn $v(c) > 0$, so sind die beiden Kriterien sogar identisch. Wir fassen unserer Rechnungen in dem folgenden Lemma zusammen.

Lemma 4.4.1. *Sei $E = \mathbb{G}_a^2$ ein t -Modul mit $t = \theta + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \tau + \tau^2$ mit $c \in L$ und $0 \leq v(c) < \frac{1}{q+1}$. Dann ist E uniformisierbar. \square*

Wir wollen jetzt die Bedingung $a = b = d = 0$ derart abschwächen, dass obige Folgerungen richtig bleiben. Diese Bedingung geht nur bei der Berechnung der Werte $v(A_1), v(A_2), v(A_3)$ ein. Damit unsere Überlegungen richtig bleiben, muss die Gestalt des Newtonpolygons erhalten bleiben. Explizit muss folgendes gelten, damit die Rechnungen richtig bleiben:

- (i) $v(A_2) = -q^2,$

(ii) Der Punkt $(q, v(A_1))$ liegt nicht unter der Strecke $\overline{P_1P_2}$,

(iii) Der Punkt $(q^3, v(A_3))$ liegt nicht unter der Strecke $\overline{P_2P_3}$.

Wir beginnen mit der Bedingung (i). Es gilt

$$A_2 = \theta^{q^2} + d^q a^q c^{q^2-q} - b^q c^{q^2} + \theta^q c^{q^2-1}.$$

Hinreichend für $v(A_2) = -q^2$ sind die Bedingung $v(d^q a^q c^{q^2-q}) > -q^2$ und $v(b^q c^{q^2}) > -q^2$. Dies ist äquivalent zu

$$v(d) + v(a) + (q-1)v(c) > -q \quad \text{und}$$

$$v(b) + qv(c) > -q.$$

Wegen $v(c) \geq 0$ sind hinreichende Bedingungen dafür

$$v(d) + v(a) > -q \quad \text{und}$$

$$v(b) > -q.$$

Jetzt betrachten wir die Bedingung (ii). Der Punkt $(q, v(A_1))$ soll oberhalb der Strecke $\overline{P_1P_2}$ liegen. Die Strecke $\overline{P_1P_2}$ hat die Steigung m und verlängert sich zur Geraden $g(x) = m(x - q^2) - q^2$. Somit ist Bedingung (ii) äquivalent zu

$$v(A_1) \geq m(q - q^2) - q^2.$$

Mit $A_1 = d^q \theta^q c^{q^2-q} + \theta^q a c^{q^2-1}$ können wir als hinreichende Bedingungen für (ii)

$$-q + qv(d) + (q^2 - q)v(c) \geq m(q - q^2) - q^2 \quad \text{und}$$

$$-q + v(a) + (q^2 - 1)v(c) \geq m(q - q^2) - q^2$$

wählen. Wir formen diese mittels einer kleinen Rechnung äquivalent um zu

$$v(d) \geq \frac{-q}{q+1} \quad \text{und}$$

$$v(a) + (q-1)v(c) \geq \frac{-q^2}{q+1}.$$

Hinreichend dafür ist

$$v(d) \geq \frac{-q}{q+1} \quad \text{und}$$

$$v(a) \geq \frac{-q^2}{q+1}.$$

Kommen wir nun zu Bedingung (iii). Der Punkt $(q^3, v(A_3))$ soll oberhalb der Strecke $\overline{P_2P_3}$ liegen. Mit ähnlichen Überlegungen wie bei Bedingung (ii) erhalten wir, dass dies äquivalent ist zu

$$v(A_3) \geq \frac{q^3 - q^4}{q^2 - 1}.$$

Mit $A_3 = a^{q^2} + d^q c^{q^2 - q}$ und einer kleinen Rechnung sind die Bedingungen

$$\begin{aligned} v(a) &\geq -\frac{q}{q+1} \text{ und} \\ v(d) &\geq -\frac{q^2}{q+1} \end{aligned}$$

hinreichend für (iii).

Wir listen alle Bedingungen, die zusammen hinreichend sind, auf:

$$\begin{aligned} v(d) + v(a) &> -q \\ v(b) &> -q \\ v(d) &\geq \frac{-q}{q+1}, \\ v(a) &\geq \frac{-q^2}{q+1}, \\ v(a) &\geq \frac{-q}{q+1}, \\ v(d) &\geq \frac{-q^2}{q+1} \end{aligned}$$

Wegen $-\frac{q}{q+1} > \frac{-q^2}{q+1}$ können wir die Bedingungen $v(a), v(d) \geq \frac{-q^2}{q+1}$ weglassen. Außerdem gilt mit $v(a) \geq -\frac{q}{q+1}$ und $v(d) \geq -\frac{q}{q+1}$

$$v(a) + v(d) \geq \frac{-q}{q+1} + \frac{-q}{q+1} = \frac{-2q}{q+1} > -q.$$

Also können wir auch die Bedingung $v(d) + v(a) > -q$ weglassen. Insgesamt erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 4.4.2. Sei $E = \mathbb{G}_a^2$ ein t -Modul mit $t = \theta + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau + \tau^2$ und $a, b, c, d \in L$ und $c \neq 0$. Wenn

$$\begin{aligned} 0 &\leq v(c) < \frac{1}{q+1}, \\ v(a) &\geq -\frac{q}{q+1}, \\ v(d) &\geq -\frac{q}{q+1} \text{ und} \\ v(b) &> -q \end{aligned}$$

gilt, dann ist E uniformisierbar. \square

Jetzt betrachten wir den Fall $0 > v(c) > -\frac{q}{q+1}$ und $a = b = d = 0$. Eine kleine Rechnung zeigt, dass $v(c) > -\frac{q}{q+1}$ äquivalent ist zu $v(A_2 - \theta^{q^2}) > -q^2$, also hinreichend für $v(A_2) = -q^2$. Das Newtonpolygon kann aus einer oder zwei Strecken bestehen. Die Strecke $\overline{P_1P_3}$ hat die Steigung $\frac{-v(A_0)}{q^4-1}$. Bei q^2 nimmt sie den Wert

$$\frac{v(A_0)}{1-q^4}(q^2 - q^4) = \frac{q^2 v(A_0)}{q^2 + 1}$$

an. Das Newtonpolygon hat genau dann zwei verschiedene Steigungen, wenn

$$\frac{q^2 v(A_0)}{q^2 + 1} > -q^2.$$

Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} -q - 1 + (q^2 - 1)v(c) &\geq -q^2 - 1. \\ \Leftrightarrow v(c) &\geq \frac{-q^2 + q}{q^2 - 1} = \frac{-q}{q + 1}. \end{aligned}$$

Also hat das Newtonpolygon zwei verschiedene Steigungen. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{1}{q^2 - 1} \quad \text{und} \\ m &= -v(c) + \frac{-q^2 + q + 1}{q^2 - 1}. \end{aligned}$$

Die Kriterien für die Uniformisierbarkeit waren nach Satz 4.3.9

$$\begin{aligned} q^2 - q^4 \mathcal{M} &> v(A_0) - m \quad \text{und} \\ v(c^{q^2-1} + 1) - q^2 \mathcal{M} &> v(A_0) - m. \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass das erste Kriterium äquivalent ist zu

$$v(c) < \frac{1}{q + 1}$$

und das zweite Kriterium äquivalent zu

$$v(c) < \frac{q^2}{q + 1}.$$

Das ist aber für $v(c) < 0$ erfüllt und wir erhalten zusammen mit 4.4.1 den folgenden Satz.

Satz 4.4.3. Sei $E = \mathbb{G}_a^2$ ein t -Modul mit $t = \theta + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \tau + \tau^2$ mit $c \in L^\times$ und $\frac{1}{q+1} > v(c) > \frac{-q}{q+1}$, so ist E uniformisierbar. \square

Bemerkung 4.4.4. Versucht man im Fall $a = b = d = 0$ und $v(c) \geq \frac{1}{q+1}$ oder $v(c) < \frac{-q}{q+1}$ unsere Kriterien für Uniformisierbarkeit anzuwenden, so führt dies nicht zum Erfolg. Der Fall $v(c) = \frac{-q}{q+1}$ führt zu weiteren Fallunterscheidungen, da man $v(A_2)$ nicht bestimmen kann. Auch die Kriterien aus dem Abschnitt 4.5 führen hier zu keinem Erfolg. Es wäre also eine nähere Untersuchung nötig. Starten wir mit $y_0 = \mathcal{M}$, so gilt bei den meisten dieser Fälle

$$v(y_1) = v(c^{q^2-1} + 1) - q^2\mathcal{M}$$

und $-m \geq v(y_1) > -\mathcal{M}$. Wir vermuten, dass dann in der Regel

$$v(y_2) = \frac{v(B(y_1, y_0)) - v(A_2)}{-q^2} = \frac{v(c^{q^2-1} + 1) + q^2v(y_1) - v(A_2)}{-q^2}$$

gilt und man mit ähnlichen Methoden wie in Abschnitt 4.5 eine Aussage über $v(y_n)$ (bei geeigneter Wahl von y_n) treffen kann. Dann könnte man entscheiden, ob $v(y_n)$ schliesslich größer $-m$ oder kleiner $-\mathcal{M}$ wird und wir dann wieder einen Induktionsanfang für unsere Kriterien erhalten.

4.5 Notwendige Kriterien

In diesem Abschnitt wollen wir einfache Bedingungen an $a, b, c, d \in L$ angeben, unter denen ein t -Modul $E = \mathbb{G}_a^2$ mit $t = \theta + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau + \tau^2$ nicht uniformisierbar ist. Dafür müssen wir zeigen, dass der Rang von $M\langle t \rangle_2^{\mathbb{F}_2}$ kleiner 4 ist. Wegen Satz 4.1.2 sehen wir mittels Abzählen das folgende Lemma ein:

Lemma 4.5.1. Gibt es ein y_0 mit $P(y_0, 0, 0) = 0$, das sich nicht zu einer Folge $(y_0, y_1, \dots) \in M\langle t \rangle_2^{\mathbb{F}_2}$ fortsetzen lässt, so ist E nicht uniformisierbar. \square

In $M\langle t \rangle_2^{\mathbb{F}_2}$ sind diejenigen Folgen $(y_n)_n \in M[[t]]_2^{\mathbb{F}_2}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} v(y_n) = \infty$. Wir wollen einen Startwert y_0 finden, der sich nicht zu einer Nullfolge fortsetzen lässt. Jeder Startwert y_0 lässt sich nach Lemma 4.1.8 zu einer Folge in $M[[t]]_2^{\mathbb{F}_2}$ fortsetzen. Wir wollen, dass $v(y_n)$ nicht beliebig groß wird. Es ist vermutlich eine gute Idee, den Startwert y_0 so zu wählen, dass $v(y_0)$ möglichst klein ist.

Wir betrachten also eine Nullstelle y_0 von $P(y_0, 0, 0)$ mit $v(y_0) = -\mathcal{M}$. Unser Kriterium wird sein, dass $v(y_1)$ nicht größer ist als $-\mathcal{M}$. Ist das der Fall und wir verlängern die Strecke mit der Steigung \mathcal{M} zu einer Geraden, so darf der Punkt $(0, v(B(y_0, 0)))$ nicht oberhalb dieser Geraden liegen. Wir wollen also, dass $v(B(y_0, 0)) \leq -q^4\mathcal{M}$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} v(B(y_0, 0)) &\geq \min \{q^2 + q^4v(y_0), \\ &\quad q^2 + q^3v(y_0) + v(A_3), \\ &\quad v(c^{q^2-1} + 1) + q^2v(y_0)\} \\ &= \min \{q^2 - q^4\mathcal{M}, \\ &\quad q^2 - q^3\mathcal{M} + v(A_3), \\ &\quad v(c^{q^2-1} + 1) - q^2\mathcal{M}\} \\ &\geq \min \{q^2 - q^4\mathcal{M}, \\ &\quad q^2 - q^4\mathcal{M}, \\ &\quad v(c^{q^2-1} + 1) - q^2\mathcal{M}\}. \end{aligned}$$

Es gilt $q^2 - q^4\mathcal{M} > -q^4\mathcal{M}$. Damit $v(B(y_0, 0)) \leq -q^4\mathcal{M}$ gilt, muss also

$$v(c^{q^2-1} + 1) - q^2\mathcal{M} \leq -q^4\mathcal{M}$$

gelten. Äquivalent dazu, aber oft in Rechnungen besser zu gebrauchen ist

$$v(c^{q^2-1} + 1) \leq -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}.$$

Wir werden einsehen, dass dies bereits hinreichend für $\text{Rang } M\langle t \rangle_2^7 < 4$ ist. Wir werden sogar eine explizite Formel für $v(y_n)$ angeben können, die wir mit Induktion und y_0 und y_1 als Induktionsanfang zeigen werden.

Falls $v(y_1) \leq -\mathcal{M}$ gilt, berechnet sich $v(y_1)$ als die negative Steigung der Strecke $\overline{(0, v(B(y_0, 0))), (q^4, 0)}$, also

$$v(y_1) = \frac{v(B(y_0, 0))}{q^4} = \frac{v(c^{q^2-1} + 1)}{q^4} - \frac{\mathcal{M}}{q^2} \leq -\mathcal{M}.$$

Um eine Idee zu bekommen, wie $v(y_n)$ aussieht, können wir jetzt $v(y_2)$ und $v(y_3)$ berechnen. Dazu schätzt man $v(B(y_1, y_0))$ beziehungsweise $v(B(y_2, y_1))$ mit der verschärften Dreiecksungleichung ab und zeigt, dass das jeweilige Minimum angenommen wird als

$$\begin{aligned} v(B(y_1, y_0)) &= v(c^{q^2-1} + 1) + q^2v(y_1) \text{ und} \\ v(B(y_2, y_1)) &= v(c^{q^2-1} + 1) + q^2v(y_2). \end{aligned}$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} v(y_2) &= \frac{q^2 + 1}{q^6} v(c^{q^2-1} + 1) - \frac{\mathcal{M}}{q^4}, \\ v(y_3) &= \frac{q^4 + q^2 + 1}{q^8} v(c^{q^2-1} + 1) - \frac{\mathcal{M}}{q^4}, \\ v(y_2) &\leq -\mathcal{M} \text{ und} \\ v(y_3) &\leq -\mathcal{M}. \end{aligned}$$

Wir verzichten an dieser Stelle darauf, die etwas aufwendigen Rechnungen anzugeben, da die Aussagen ein Spezialfall des Lemmas 4.5.4 sind. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{q^2 + 1}{q^6} &= \frac{q^4 - 1}{q^6(q^2 - 1)} \quad \text{und} \\ \frac{q^4 + q^2 + 1}{q^8} &= \frac{q^6 - 1}{q^8(q^2 - 1)} \end{aligned}$$

vermuten wir, dass allgemein für alle $n \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} v(B(y_{n-1}, y_{n-2})) &= v(c^{q^2-1} + 1) + q^2 v(y_{n-1}), \\ v(y_n) &= \frac{q^{2n} - 1}{q^{2n+2}(q^2 - 1)} v(c^{q^2-1} + 1) - \frac{\mathcal{M}}{q^{2n}} \quad \text{und} \\ v(y_n) &\leq -\mathcal{M}. \end{aligned}$$

Natürlich nur unter der Voraussetzung

$$v(c^{q^2-1} + 1) \leq -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}.$$

Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, definieren wir

$$\psi(n) := \frac{q^{2n} - 1}{q^{2n+2}(q^2 - 1)} v(c^{q^2-1} + 1) - \frac{\mathcal{M}}{q^{2n}}.$$

Wie wir unter bestimmten Voraussetzungen $v(B(y_n, y_{n-1}))$ berechnen können, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 4.5.2. *Es sei $v(c^{q^2-1} + 1) \leq -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}$ und $n \in \mathbb{N}$. Außerdem seien $y_{n-1}, y_n \in L$ mit*

$$\begin{aligned} v(y_{n-1}) &= \psi(n-1) \text{ und} \\ v(y_n) &= \psi(n). \end{aligned}$$

Dann gilt $v(B(y_n, y_{n-1})) = v(c^{q^2-1} + 1) + q^2 v(y_n)$.

Beweis. Wir schätzen mit der verschärften Dreiecksungleichung ab

$$v(B(y_n, y_{n-1})) \geq \min \left\{ \begin{aligned} &q^2 + q^4 v(y_n), \\ &q^2 + q^3 v(y_n) + v(A_3), \\ &v(c^{q^2-1} + 1) + q^2 v(y_n), \\ &q^2 + q^3 + q^4 v(y_{n-1}) \end{aligned} \right\}.$$

Wir zeigen jetzt

$$(a) \quad q^2 + q^4 v(y_n) > v(c^{q^2-1} + 1) + q^2 v(y_n),$$

$$(b) \quad q^2 + q^3 v(y_n) + v(A_3) > v(c^{q^2-1} + 1) + q^2 v(y_n) \text{ und}$$

$$(c) \quad q^2 + q^3 + q^4 v(y_{n-1}) > v(c^{q^2-1} + 1) + q^2 v(y_n).$$

Wenn wir das gezeigt haben, ist $v(c^{q^2-1} + 1) + q^2 v(y_n)$ der kleinste der vier Werte und wird als Minimum angenommen. Mit einer Rechnung erhalten wir

$$v(c^{q^2-1} + 1) + q^2 v(y_n) = \frac{q^{2n+2} - 1}{q^{2n}(q^2 - 1)} v(c^{q^2-1} + 1) - \frac{\mathcal{M}}{q^{2n-2}}.$$

(a): Wir wissen $v(y_n) = \psi(n)$. Damit müssen wir zeigen

$$\begin{aligned} &q^2 + q^4 \left(\frac{q^{2n} - 1}{q^{2n+2}(q^2 - 1)} v(c^{q^2-1} + 1) - \frac{\mathcal{M}}{q^{2n}} \right) \\ &> \frac{q^{2n+2} - 1}{q^{2n}(q^2 - 1)} v(c^{q^2-1} + 1) - \frac{\mathcal{M}}{q^{2n-2}} \end{aligned}$$

Wir multiplizieren mit q^{2n} und formen um zu

$$\begin{aligned} &q^{2n+2} - q^4 \mathcal{M} + q^2 \mathcal{M} \\ &> \left(-q^2 \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} + \frac{q^{2n+2} - 1}{q^2 - 1} \right) v(c^{q^2-1} + 1) \\ &= \frac{-q^{2n+2} + q^2 + q^{2n+2} - 1}{q^2 - 1} v(c^{q^2-1} + 1) = v(c^{q^2-1} + 1), \end{aligned}$$

was aus $v(c^{q^2-1} + 1) \leq -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}$ folgt. Damit ist (a) gezeigt.

(b): Nach Lemma 4.3.5 gilt $v(A_3) \geq -(q^4 - q^3)\mathcal{M}$. Es genügt also

$$q^2 + q^3 v(y_n) - (q^4 - q^3)\mathcal{M} > v(c^{q^2-1} + 1) + q^2 v(y_n)$$

zu zeigen. Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & q^2 + q^3 \left(\frac{q^{2n} - 1}{q^{2n+2}(q^2 - 1)} v(c^{q^2-1} + 1) - \frac{\mathcal{M}}{q^{2n}} \right) - (q^4 - q^3)\mathcal{M} \\ & > \frac{q^{2n+2} - 1}{q^{2n}(q^2 - 1)} v(c^{q^2-1} + 1) - \frac{\mathcal{M}}{q^{2n-2}}. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren mit q^{2n} und formen um zu

$$\begin{aligned} & q^{2n+2} - q^3 \mathcal{M} - (q^{2n+4} - q^{2n+3})\mathcal{M} + q^2 \mathcal{M} \\ & > \frac{q^{2n+2} - 1 - q^{2n+1} + q}{q^2 - 1} v(c^{q^2-1} + 1) \\ \Leftrightarrow & q^{2n+2} - q^2(q^{2n+2} - q^{2n+1} + q - 1)\mathcal{M} \\ & > \frac{q^{2n+2} - q^{2n+1} + q - 1}{q^2 - 1} v(c^{q^2-1} + 1) \\ \Leftrightarrow & \frac{q^{2n+2}(q^2 - 1)}{q^{2n+2} - q^{2n+1} + q - 1} - q^2(q^2 - 1)\mathcal{M} \\ & > v(c^{q^2-1} + 1), \end{aligned}$$

was wieder aus $v(c^{q^2-1} + 1) \leq -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}$ folgt.

(c): Wir müssen zeigen

$$\begin{aligned} & q^2 + q^3 + q^4 \left(\frac{q^{2n-2} - 1}{q^{2n}(q^2 - 1)} v(c^{q^2-1} + 1) - \frac{\mathcal{M}}{q^{2n-2}} \right) \\ & > \frac{q^{2n+2} - 1}{q^{2n}(q^2 - 1)} v(c^{q^2-1} + 1) - \frac{\mathcal{M}}{q^{2n-2}}. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren mit q^{2n} und formen um zu

$$\begin{aligned} & q^{2n+2} + q^{2n+3} - q^6 \mathcal{M} + q^2 \mathcal{M} \\ & > \frac{-q^{2n+2} + q^4 + q^{2n+2} - 1}{q^2 - 1} v(c^{q^2-1} + 1) \\ \Leftrightarrow & q^{2n+2} + q^{2n+3} - q^2(q^2 + 1)(q^2 - 1)\mathcal{M} > (q^2 + 1)v(c^{q^2-1} + 1) \\ \Leftrightarrow & \frac{q^{2n+2} + q^{2n+3}}{q^2 + 1} - q^2(q^2 - 1)\mathcal{M} > v(c^{q^2-1} + 1), \end{aligned}$$

was (c) zeigt und den Beweis abschliesst. \square

Der Induktionsschritt für unser Kriterium ist das folgende Lemma.

Lemma 4.5.3. *Es sei $v(c^{q^2-1} + 1) \leq -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}$ und $n \in \mathbb{N}$. Außerdem seien $y_{n-1}, y_n \in L$ mit*

$$\begin{aligned} v(y_{n-1}) &= \psi(n-1) \text{ und} \\ v(y_n) &= \psi(n) \leq -\mathcal{M}. \end{aligned}$$

Ist y_{n+1} eine Nullstelle von $P(y_{n+1}, y_n, y_{n-1})$, dann gilt $v(y_{n+1}) \leq -\mathcal{M}$ und $v(y_{n+1}) = \psi(n+1)$.

Beweis. Nach Lemma 4.5.2 ist $v(B(y_n, y_{n-1})) = v(c^{q^2-1} + 1) + q^2v(y_n)$. Wir schätzen mit $\psi(n) \leq -\mathcal{M}$ ab

$$v(c^{q^2-1} + 1) + q^2v(y_n) \leq v(c^{q^2-1} + 1) - q^2\mathcal{M}.$$

Mit $v(c^{q^2-1} + 1) \leq -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}$ erhalten wir dann

$$v(B(y_n, y_{n-1})) \leq -q^4\mathcal{M}.$$

Somit ist $v(y_n)$ die negative Steigung der Strecke $\overline{(0, v(B(y_n, y_{n-1}))), (q^4, 0)}$, also

$$\begin{aligned} v(y_n) &= \frac{v(B(y_n, y_{n-1}))}{q^4} \\ &= \frac{v(c^{q^2-1} + 1) + q^2v(y_n)}{q^4} \\ &= \frac{1}{q^4} \left(\frac{q^{2n+2} - 1}{q^{2n}(q^2 - 1)} v(c^{q^2-1} + 1) - \frac{\mathcal{M}}{q^{2n-2}} \right) \\ &= \psi(n+1). \end{aligned}$$

Die Aussage $v(y_{n+1}) \leq -\mathcal{M}$ folgt aus $v(B(y_n, y_{n-1})) \leq -q^4\mathcal{M}$. \square

Wir erhalten jetzt das folgende Lemma.

Lemma 4.5.4. *Es sei $v(c^{q^2-1} + 1) \leq -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}$. Ist $(y_n)_n \in M[[t]]_2^{\neq}$ mit $v(y_0) = -\mathcal{M}$, dann ist $(y_n)_n \notin M\langle t \rangle_2^{\neq}$. Genauer gilt dann:*

1. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $v(y_n) = \psi(n) \leq -\mathcal{M}$.
2. $(v(y_n))_n$ ist eine monoton fallende Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} v(y_n) = \frac{v(c^{q^2-1} + 1)}{q^2(q^2 - 1)}$.
3. Falls sogar $v(c^{q^2-1} + 1) = -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}$, so gilt $v(y_n) = -\mathcal{M}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Wir haben gesehen, dass $v(c^{q^2-1} + 1) \leq -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}$ zur Folge hat, dass $v(y_1) \leq -\mathcal{M}$ ist. Es gilt $v(y_0) = \psi(0)$ und $v(y_1) = \psi(1)$. Mit Induktion und Lemma 4.5.3 folgt die erste Aussage. Für die zweite Aussage rechnen wir

$$\begin{aligned} v(y_n) &= \psi(n) \\ &= \frac{q^{2n} - 1}{q^{2n+2}(q^2 - 1)} v(c^{q^2-1} + 1) - \frac{\mathcal{M}}{q^{2n}} \\ &= \frac{v(c^{q^2-1} + 1)}{q^2(q^2 - 1)} - \frac{v(c^{q^2-1} + 1) + q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}}{q^{2n+2}(q^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Wir sehen $\lim_{n \rightarrow \infty} v(y_n) = \frac{v(c^{q^2-1} + 1)}{q^2(q^2 - 1)}$ und wegen $v(c^{q^2-1} + 1) + q^2(q^2 - 1)\mathcal{M} \leq 0$ ist $(v(y_n))_n$ monoton fallend.

Für die dritte Aussage rechnen wir

$$\begin{aligned} v(y_n) &= \psi(n) \\ &= \frac{v(c^{q^2-1} + 1)}{q^2(q^2 - 1)} - \frac{v(c^{q^2-1} + 1) + q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}}{q^{2n+2}(q^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Aber $v(c^{q^2-1} + 1) + q^2(q^2 - 1)\mathcal{M} = 0$ ist Voraussetzung für die dritte Aussage.

Also

$$v(y_n) = \frac{v(c^{q^2-1} + 1)}{q^2(q^2 - 1)} = \frac{-q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}}{q^2(q^2 - 1)} = -\mathcal{M}. \quad \square$$

Der folgende Satz gibt ein notwendiges Kriterium für die Uniformisierbarkeit innerhalb unserer Familie an.

Satz 4.5.5. Sei $E = \mathbb{G}_a^2$ ein t -Modul mit $t = \theta + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau + \tau^2$ mit $a, b, c, d \in L$ und $c \neq 0$. Es gelte

$$v(c^{q^2-1} + 1) \leq -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}.$$

Dann ist E nicht uniformisierbar.

Beweis. Wegen Lemma 4.5.4 gibt es für jedes y_0 mit $v(y_0) = -\mathcal{M}$ keine Folge $(y_0, y_1, \dots) \in M\langle t \rangle_2^{\tau}$. Was nach Lemma 4.5.1 zur Folge hat, dass E nicht uniformisierbar ist. \square

Als erste Anwendung erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 4.5.6. Sei $E = \mathbb{G}_a^2$ ein t -Modul mit $t = \theta + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau + \tau^2$ mit $a, b, c, d \in L$ und $c \neq 0$. Im Newtonpolygon von $P(y_0, 0, 0)$ gebe es nur eine Steigung. Dann ist E genau dann uniformisierbar, wenn

$$v(c^{q^2-1} + 1) > -q^2(q^2 - 1)m.$$

Beweis. Wir bemerken $m = \mathcal{M}$. Falls $v(c^{q^2-1} + 1) \leq -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}$, so ist E nach Satz 4.5.5 nicht uniformisierbar. Unsere Kriterien für die Uniformisierbarkeit waren nach Satz 4.3.9

$$\begin{aligned} q^2 - q^4\mathcal{M} &> v(A_0) - m \text{ und} \\ v(c^{q^2-1} + 1) - q^2\mathcal{M} &> v(A_0) - m. \end{aligned}$$

Da das Newtonpolygon nur eine Gerade hat, ist aber $v(A_0) - m = -q^4 m = -q^4 \mathcal{M}$. Somit vereinfacht sich das Kriterium für die Uniformisierbarkeit zu

$$v(c^{q^2-1} + 1) > -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M} = -q^2(q^2 - 1)m.$$

□

4.6 Eine nicht uniformisierbare Teilfamilie

In diesem Abschnitt betrachten wir das Beispiel von Anderson und Coleman und zeigen mit unserem Kriterium 4.5.5, dass keine Uniformisierbarkeit vorliegt. Dann betrachten wir eine Beispielsreihe von nicht uniformisierbaren t -Moduln, die diesem Beispiel ähnelt.

Wir betrachten das Beispiel von Anderson und Coleman.

Beispiel 4.6.1. *Es sei $l \in L$ mit $|l| < 1$ und $\theta = l + l^{-1}$. Dann ist der t -Modul $M = \mathbb{G}_a^2$ mit t -Wirkung*

$$t_M = \theta + \begin{pmatrix} 0 & 1 - l^{q+1} \\ 1 - l^{q+1} & 0 \end{pmatrix} \tau + \begin{pmatrix} l^{1+q+q^2} & 0 \\ 0 & l^q \end{pmatrix} \tau^2$$

nicht uniformisierbar.

Beweis. Wir beginnen, indem wir die Matrix vor τ^2 normieren. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} l^{-\frac{1+q+q^2}{q^2-1}} & 0 \\ 0 & l^{-\frac{q}{q^2-1}} \end{pmatrix},$$

wobei wir eine beliebige $q^2 - 1$ -te Wurzel von l wählen. Der t -Modul $\tilde{M} = \mathbb{G}_a^2$ mit t -Wirkung $t_{\tilde{M}} = A^{-1}t_M A$ ist isomorph zu M . Wir berechnen

$$\begin{aligned} t_{\tilde{M}} &= \theta + A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 - l^{q+1} \\ 1 - l^{q+1} & 0 \end{pmatrix} A^{(1)} \tau + A^{-1} \begin{pmatrix} l^{1+q+q^2} & 0 \\ 0 & l^q \end{pmatrix} A^{(2)} \tau^2 \\ &= \theta + \begin{pmatrix} l^{\frac{1+q+q^2}{q^2-1}} & 0 \\ 0 & l^{\frac{q}{q^2-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 - l^{q+1} \\ 1 - l^{q+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l^{-\frac{1+q+q^2}{q^2-1}q} & 0 \\ 0 & l^{-\frac{q}{q^2-1}q} \end{pmatrix} \tau \\ &\quad + \begin{pmatrix} l^{1+q+q^2} & 0 \\ 0 & l^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l^{\frac{1+q+q^2}{q^2-1}} & 0 \\ 0 & l^{\frac{q}{q^2-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l^{-\frac{1+q+q^2}{q^2-1}q^2} & 0 \\ 0 & l^{-\frac{q}{q^2-1}q^2} \end{pmatrix} \tau^2 \\ &= \theta + \begin{pmatrix} 0 & l^{\frac{1}{q-1}} - l^{\frac{q^2}{q-1}} \\ l^{-\frac{q^2}{q-1}} - l^{-\frac{1}{q-1}} & 0 \end{pmatrix} \tau + \tau^2. \end{aligned}$$

Es ist also $a = d = 0$, $b = l^{\frac{1}{q-1}} - l^{\frac{q^2}{q-1}}$ und $c = l^{-\frac{q^2}{q-1}} - l^{-\frac{1}{q-1}}$. Wir machen zunächst einige Vorüberlegungen. Es gilt $v(\theta) = -1$. Da $\theta = l + l^{-1}$, folgt $-1 = v(\theta) \geq \min\{v(l), v(l^{-1})\}$. Es ist $|l| < 1$, also $|l^{-1}| > 1$. Somit ist $v(l) > 0$ und $v(l^{-1}) < 0$ und das Minimum in $-1 \geq \min\{v(l), v(l^{-1})\}$ wird angenommen, was zu $v(l^{-1}) = -1$ führt. Damit erhalten wir $v(l) = -v(l^{-1}) = 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} v(b) &\geq \min \left\{ v \left(l^{\frac{1}{q-1}} \right), v \left(l^{\frac{q^2}{q-1}} \right) \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{1}{q-1} v(l), \frac{q^2}{q-1} v(l) \right\}. \end{aligned}$$

Das Minimum wird also angenommen und wir erhalten

$$v(b) = \frac{1}{q-1}.$$

Ebenso berechnen wir

$$v(c) = \min \left\{ v \left(l^{-\frac{q^2}{q-1}} \right), v \left(l^{-\frac{1}{q-1}} \right) \right\} = -\frac{q^2}{q-1}.$$

Wir betrachten das Polynom

$$P(y_0, 0, 0) = y_0^{q^4} + \left(\theta^{q^2} - b^q c^{q^2} + \theta^q c^{q^2-1} \right) y_0^{q^2} + \theta^{q+1} c^{q^2-1} y_0.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} v(A_1) &= v(A_3) = \infty, \\ v(A_0) &= v \left(\theta^{q+1} c^{q^2-1} \right) = -q - 1 + (q^2 - 1) \frac{-q^2}{q-1} = -q^3 - q^2 - q - 1. \end{aligned}$$

Etwas schwieriger ist es die Bewertung von A_2 zu berechnen, da $-b^q c^{q^2}$ und $\theta^q c^{q^2-1}$ beide die Bewertung $-q^3 - q^2 - q$ haben. Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} cb^q - \theta^q &= \left(l^{-\frac{q^2}{q-1}} - l^{-\frac{1}{q-1}} \right) \left(l^{\frac{q}{q-1}} - l^{\frac{q^3}{q-1}} \right) - (l + l^{-1})^q \\ &= l^{\frac{-q^2+q}{q-1}} - l^{\frac{q-1}{q-1}} - l^{\frac{q^3-q^2}{q-1}} + l^{\frac{q^3-1}{q-1}} - l^q - l^{-q} \\ &= -l - l^{q^2} + l^{q^2+q+1} - l^q. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $v(cb^q - \theta^q) = v(l) = 1$ und

$$v \left(-c^{q^2} b^q + \theta^q c^{q^2-1} \right) = 1 + (q^2 - 1)v(c) = -q^3 - q^2 + 1 < v \left(\theta^{q^2} \right).$$

Also gilt

$$v(A_2) = v \left(\theta^{q^2} - b^q c^{q^2} + \theta^q c^{q^2-1} \right) = -q^3 - q^2 + 1.$$

Das Newtonpolygon von $P(y_0, 0, 0)$ ist also die obere konvexe Hülle der Punkte

$$\begin{aligned} &(0, \infty) \\ &(1, -q^3 - q^2 - q - 1) \\ &(q^2, -q^3 - q^2 + 1) \\ &(q^4, 0). \end{aligned}$$

Die Gerade, die den Punkt $(1, -q^3 - q^2 - q - 1)$ und $(q^4, 0)$ verbindet, hat die Gleichung $g(x) = \frac{1}{q-1}x - \frac{q^4}{q-1}$. Somit liegt der Punkt $(q^2, -q^3 - q^2 + 1)$ oberhalb dieser Geraden und das Newtonpolygon wird durch den Abschnitt dieser Geraden zwischen 1 und q^4 gegeben. Also gilt

$$v(y_0) = -\frac{1}{q-1},$$

falls y_0 nicht trivial ist. Da es nur eine Steigung gibt, haben wir

$$\mathcal{M} = m = \frac{1}{q-1}.$$

Für das Kriterium aus Satz 4.5.5 müssen wir

$$v(c^{q^2-1} + 1) \leq -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}$$

testen. Wegen $v(c) < 0$ ist $v(c^{q^2-1} + 1) = (q^2 - 1)v(c) = \frac{-q^2(q^2-1)}{q-1}$. Das Kriterium ist also

$$\frac{-q^2(q^2 - 1)}{q - 1} \leq -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}.$$

Wegen $\mathcal{M} = \frac{1}{q-1}$ ist das Kriterium erfüllt und E ist nicht uniformisierbar. \square

Bemerkung 4.6.2. *Unter den Voraussetzungen des obigen Beispiels gilt*

1. Ist $(y_n)_n \in M[[t]]_2^\tau$ mit $y_0 \neq 0$, so gilt $v(y_n) = -\frac{1}{q-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
2. $M\langle t \rangle^\tau = \{0\}$.

Beweis. Im Beweis von obigem Beispiel 4.6.1 haben wir berechnet

$$\begin{aligned} v(c^{q^2-1} + 1) &= \frac{-q^2(q^2 - 1)}{q - 1}, \\ \mathcal{M} &= \frac{1}{q - 1}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $v(c^{q^2-1} + 1) = -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}$ und mit Lemma 4.5.4 folgt die Behauptung. \square

Wir weisen an dieser Stelle darauf hin, dass man für den Fall $a = b = d = 0$ keine Beispiele finden kann, in denen unser Kriterium

$$v(c^{q^2-1} + 1) \leq -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}$$

für nicht uniformisierbar greift. Auf einen Beweis verzichten wir an dieser Stelle. Man muss lediglich alle möglichen Fälle wie in Abschnitt 4.4 behandeln und auf das Kriterium untersuchen.

Wir betrachten jetzt eine Beispielerie, die dem obige Beispiel 4.6.1 ähnelt. Wir betrachten den Fall $a = d = 0$ und $v(c) < 0$, da dann $v(c^{q^2-1} + 1)$ potentiell kleiner ist, als wenn wir $v(c) > 0$ wählen. Wir wollen, dass es nur eine Steigung im Newtonpolygon gibt. Dann ist $M = m = \frac{v(A_0)}{1-q^4}$. Somit ist $v(c^{q^2-1} + 1) \leq -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} v(c) &\leq -q^2\mathcal{M} = -q^2 \frac{v(A_0)}{1-q^4} \\ \Leftrightarrow (q^4 - 1)v(c) &\leq -q^3 - q^2 + (q^4 - q^2)v(c) \\ \Leftrightarrow v(c) &\leq \frac{-q^3 - q^2}{q^2 - 1} = -\frac{q^2}{q-1}. \end{aligned}$$

Wir wollen $v(A_2)$ besser kontrollieren können. Dafür wählen wir ein beliebiges c , das dieser Abschätzung genügt und wählen $b = \theta c^{-\frac{1}{q}}$. Dann ist

$$b^q c^{q^2} = \theta^q c^{q^2-1}$$

und $A_2 = \theta^q$, also $v(A_2) = -q^2$. Dass das Newtonpolygon nur eine Steigung hat, ist in diesem Fall äquivalent zu

$$\begin{aligned} v(A_2) &\geq (q^2 - q^4) \frac{v(A_0)}{1-q^4} \\ \Leftrightarrow -q^2 &\geq \frac{q^2}{q^2+1} v(A_0) \\ \Leftrightarrow -1 &\geq \frac{-q-1 + (q^2-1)v(c)}{q^2+1} \\ \Leftrightarrow -q^2-1 &\geq -q-1 + (q^2-1)v(c) \\ \Leftrightarrow -q(q-1) &\geq (q^2-1)v(c) \\ \Leftrightarrow -\frac{q}{q+1} &\geq v(c), \end{aligned}$$

was aus $v(c) \leq -\frac{q^2}{q-1}$ folgt. Wir haben das folgende Lemma gezeigt.

Lemma 4.6.3. Sei $E = \mathbb{G}_a^2$ ein t -Modul mit $t = \theta + \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \tau + \tau^2$ mit $c \in L^\times$, $v(c) \leq -\frac{q^2}{q-1}$ und $b = \theta c^{-\frac{1}{q}}$. Dann ist E nicht uniformisierbar. \square

Wir erhalten das folgende Beispiel, das eine etwas einfacherer Gestalt als Beispiel 4.6.1 hat.

Beispiel 4.6.4. Der t -Modul $E = \mathbb{G}_a^2$ mit $t = \theta + \begin{pmatrix} 0 & \theta^{1-q} \\ \theta^{q^2} & 0 \end{pmatrix} \tau + \tau^2$ ist nicht uniformisierbar. \square

Das Beispiel zeigt außerdem, dass der Fall $v(c^{q^2-1} + 1) < -q^2(q^2 - 1)\mathcal{M}$, den wir im Abschnitt 4.5 betrachtet haben, auftreten kann.

Jetzt verallgemeinern wir die Beispielerie aus Lemma 4.6.3 nach demselben Prinzip wie in Abschnitt 4.4. Wir stellen uns die Frage, was wir in obigen Rechnungen außer $b^q c^{q^2} = \theta^q c^{q^2-1}$ und $v(c) \leq -\frac{q^2}{q-1}$ benutzt haben. Das waren die folgenden Aussagen

(i) $v(A_2) = -q^2$.

(ii) Der Punkt $(q, v(A_1))$ liegt oberhalb der Strecke des Newtonpolygons.

(iii) Der Punkt $(q^3, v(A_3))$ liegt oberhalb der Strecke des Newtonpolygons.

Da wir die Bedingung $b^q c^{q^2} = \theta^q c^{q^2-1}$ nicht ändern werden, ist für (i) folgendes hinreichend:

$$\begin{aligned} v(d^q a^q c^{q^2-q}) &> -q^2 \\ \Leftrightarrow v(d) + v(a) + (q-1)v(c) &> -q. \end{aligned}$$

Hinreichend für (ii) ist

$$\begin{aligned} v(d^q \theta^q c^{q^2-q}) &\geq \frac{-v(A_0)(q-q^4)}{q^4-1} \text{ und} \\ v(\theta^q a c^{q^2-1}) &\geq \frac{-v(A_0)(q-q^4)}{q^4-1}. \end{aligned}$$

Nach einigen Umformungen ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} v(d) &\geq \frac{-q + (q^2 - q)v(c)}{q^2 + 1} \text{ und} \\ v(a) &\geq \frac{-q^2 + (q-1)v(c)}{q^2 + 1}. \end{aligned}$$

Wegen $v(c) \leq -\frac{q^2}{q-1}$ ist dafür hinreichend

$$v(d) \geq -\frac{q^2 + q}{q^2 + 1} \text{ und} \quad (4.8)$$

$$v(a) \geq -\frac{q^2 + q}{q^2 + 1}. \quad (4.9)$$

Betrachten wir Bedingung (iii). Hinreichend ist

$$v(a^{q^2}) \geq \frac{-v(A_0)(q^3 - q^4)}{q^4 - 1} \text{ und}$$

$$v(d^q c^{q^2 - q}) \geq \frac{-v(A_0)(q^3 - q^4)}{q^4 - 1}.$$

Wir formen in einigen Rechenschritten um zu

$$v(a) \geq \frac{-q + (q^2 - q)v(c)}{q^2 + 1} \text{ und}$$

$$v(d) \geq \frac{-q^2 + (q - 1)v(c)}{q^2 + 1},$$

wofür die Bedingungen (4.9) und (4.8) aus (ii) schon hinreichend sind. Da wir die Bedingung aus (i) nicht mehr weiter vereinfachen können, erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 4.6.5. Sei $E = \mathbb{G}_a^2$ ein t -Modul mit $t = \theta + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau + \tau^2$ und $a, b, c, d \in L$.

Wenn

$$v(a) \geq -\frac{q^2 + q}{q^2 + 1},$$

$$v(d) \geq -\frac{q^2 + q}{q^2 + 1},$$

$$-\frac{q}{q-1} \geq v(c) > \frac{-q^2 - v(a) - v(d)}{q-1} \text{ und}$$

$$b = \theta c^{-\frac{1}{q}},$$

gilt, dann ist E nicht uniformisierbar. □

Anhang

In diesem Abschnitt erläutern wir die Berechnungen, die für die Ergebnisse in Beispiel 3.2.6 durchgeführt wurden. Zudem geben wir alle Ergebnisse der Rechnung an. Wir betrachten den Körper \mathbb{F}_4 . Er wird erzeugt über \mathbb{F}_2 durch eine Nullstelle w des Polynoms $X^2 + X + 1$. Wir untersuchen die Familie der t -Moduln $E = \mathbb{G}_a^2$ mit $t = \theta + A\tau + \tau^2$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ein Element $g \in \text{Gl}_2(\mathbb{F}_4)$ operiert auf A durch $g^{-1}Ag^{(1)}$. Dies liefert uns eine Darstellung der $\text{Gl}_2(\mathbb{F}_4)$ auf dem \mathbb{A}_4 . Es genügt, die Darstellung auf den Erzeugern der Gruppe anzugeben. Die $\text{Gl}_2(\mathbb{F}_4)$ wird erzeugt von den Elementen $g = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Wir berechnen

$$A^g = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} wa & w^2b \\ w^2c & d \end{pmatrix},$$

$$A^h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} c+d & c \\ a+b+c+d & a+c \end{pmatrix}.$$

Dies liefert die Darstellung

$$g = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese beiden Matrizen erzeugen die Untergruppe der $\text{Gl}_4(\mathbb{F}_4)$, die zu $\text{Gl}_2(\mathbb{F}_4)$ gehört und die auf dem \mathbb{A}^4 operiert. Jetzt können wir mit Magma ein minimales Erzeugendensystem der Invarianten durch folgende Eingabe berechnen:

```

K<w>:=GF(4);
g:=[[w,0,0,0],[0,w^2,0,0],[0,0,w^2,0],[0,0,0,1]];
h:=[[0,0,1,1],[0,0,1,0],[1,1,1,1],[1,0,1,0]];
G:=sub<GL(4,K)|g,h>;
R:=InvariantRing(G);
R2<a,b,c,d>:=PolynomialRing(R);
// Weist den Variablen in R die Bezeichnungen a,b,c und d zu.
Invarianten:=FundamentalInvariants(R);
// Berechnet ein minimales Erzeugendensystem des Invarianten-
// ringes und speichert es in "Invarianten"

```

Zur genaueren Erläuterung der verwendeten Befehle verweisen wir auf [JC06]. Mittels der Eingabe `Invarianten`; würde Magma jetzt die Liste des minimalen Erzeugendensystems der Invarianten ausgeben. Wir bezeichnen die nach Absolutgrad sortierten minimalen von Magma berechneten Erzeuger des Invariantenringes mit \mathbf{I}_i , für $i = 1, \dots, 11$. Magma liefert folgendes Ergebnis:

$$\mathbf{I}_1 = a^3 + b^2c + bc^2 + d^3,$$

$$\mathbf{I}_2 = a^4bd + a^4cd + a^3b^2c + a^3bc^2 + wa^3d^3 + a^2b^2d^2 + w^2a^2bcd^2 + a^2c^2d^2 + ab^4d + w^2ab^2c^2d + abd^4 + ac^4d + acd^4 + b^5c + b^4c^2 + wb^3c^3 + b^2c^4 + b^2cd^3 + bc^5 + bc^2d^3,$$

$$\mathbf{I}_3 = a^3d^3 + a^2bcd^2 + ab^2c^2d + b^3c^3$$

$$\mathbf{I}_4 = a^9 + b^8c + bc^8 + d^9$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_5 = & a^7bd + a^7cd + wa^6b^2c + wa^6bc^2 + w^2a^6d^3 + a^5b^2d^2 + wa^5bcd^2 + a^5c^2d^2 + a^4b^4d + \\ & a^4b^3cd + a^4b^2c^2d + a^4bc^3d + a^4c^4d + a^3b^5c + w^2a^3b^4c^2 + w^2a^3b^3c^3 + w^2a^3b^2c^4 + \\ & w^2a^3b^2cd^3 + a^3bc^5 + w^2a^3bc^2d^3 + w^2a^3d^6 + wa^2b^4cd^2 + w^2a^2b^3c^2d^2 + w^2a^2b^2c^3d^2 + \\ & a^2b^2d^5 + wa^2bc^4d^2 + wa^2bcd^5 + a^2c^2d^5 + ab^6cd + ab^5c^2d + wab^4c^3d + ab^4d^4 + \\ & wab^3c^4d + ab^3cd^4 + ab^2c^5d + ab^2c^2d^4 + abc^6d + abc^3d^4 + abd^7 + ac^4d^4 + acd^7 + \\ & w^2b^8c + b^7c^2 + b^5c^4 + b^5cd^3 + b^4c^5 + w^2b^4c^2d^3 + w^2b^3c^3d^3 + b^2c^7 + w^2b^2c^4d^3 + \\ & wb^2cd^6 + w^2bc^8 + bc^5d^3 + wbc^2d^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_6 = & a^{10}bd + w^2a^{10}cd + a^9b^3 + w^2a^9b^2c + a^9bc^2 + a^9c^3 + a^8bcd^2 + wa^8c^2d^2 + \\
& a^7b^3cd + w^2a^7b^2c^2d + a^7bc^3d + wa^7c^4d + wa^7cd^4 + a^6b^6 + a^6b^4c^2 + a^6b^3c^3 + a^6b^3d^3 + \\
& w^2a^6b^2c^4 + w^2a^6b^2cd^3 + wa^6bc^5 + w^2a^6bc^2d^3 + a^6c^6 + a^6c^3d^3 + wa^6d^6 + a^5b^5d^2 + \\
& wa^5b^4cd^2 + a^5b^3c^2d^2 + a^5b^2c^3d^2 + a^5b^2d^5 + w^2a^5bcd^5 + a^5c^5d^2 + a^5c^2d^5 + a^4b^5c^2d + \\
& wa^4b^4c^3d + wa^4b^3c^4d + a^4b^3cd^4 + w^2a^4b^2c^5d + w^2a^4b^2c^2d^4 + a^4bc^3d^4 + wa^4bd^7 + \\
& a^3b^9 + wa^3b^8c + a^3b^7c^2 + w^2a^3b^6c^3 + a^3b^6d^3 + a^3b^5cd^3 + wa^3b^4c^5 + a^3b^4c^2d^3 + \\
& w^2a^3b^3c^6 + a^3b^3c^3d^3 + a^3b^3d^6 + a^3b^2c^7 + a^3b^2c^4d^3 + w^2a^3b^2cd^6 + wa^3bc^8 + a^3bc^5d^3 + \\
& w^2a^3bc^2d^6 + a^3c^9 + a^3c^6d^3 + a^3c^3d^6 + a^2b^7cd^2 + w^2a^2b^6c^2d^2 + w^2a^2b^5c^3d^2 + a^2b^5d^5 + \\
& w^2a^2b^4c^4d^2 + w^2a^2b^3c^5d^2 + a^2b^3c^2d^5 + w^2a^2b^2c^6d^2 + a^2b^2c^3d^5 + wa^2b^2d^8 + a^2bc^7d^2 + \\
& wa^2bc^4d^5 + a^2bcd^8 + a^2c^5d^5 + ab^{10}d + ab^9cd + wab^8c^2d + ab^7c^3d + ab^6c^4d + w^2ab^5c^5d + \\
& w^2ab^5c^2d^4 + ab^4c^6d + wab^4c^3d^4 + wab^4d^7 + ab^3c^7d + wab^3c^4d^4 + ab^3cd^7 + wab^2c^8d + \\
& ab^2c^5d^4 + w^2ab^2c^2d^7 + abc^9d + abc^3d^7 + w^2abd^{10} + ac^{10}d + acd^{10} + b^{12} + b^{11}c + \\
& w^2b^{10}c^2 + b^9c^3 + b^9d^3 + wb^8cd^3 + w^2b^7c^5 + b^7c^2d^3 + wb^6c^6 + w^2b^6c^3d^3 + b^6d^6 + \\
& w^2b^5c^7 + wb^5c^4d^3 + wb^5cd^6 + w^2b^4c^2d^6 + b^3c^9 + w^2b^3c^6d^3 + b^3c^3d^6 + b^3d^9 + w^2b^2c^{10} + \\
& b^2c^7d^3 + b^2c^4d^6 + b^2cd^9 + bc^{11} + wbc^8d^3 + w^2bc^2d^9 + c^{12} + c^9d^3 + c^6d^6 + c^3d^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_7 = & a^{10}bd + wa^{10}cd + w^2a^9b^3 + w^2a^9bc^2 + w^2a^9c^3 + wa^9d^3 + w^2a^8b^2d^2 + \\
& wa^8bcd^2 + wa^7b^4d + w^2a^7b^3cd + w^2a^7b^2c^2d + w^2a^7bc^3d + wa^7bd^4 + a^7c^4d + \\
& a^7cd^4 + w^2a^6b^6 + wa^6b^5c + a^6b^3c^3 + w^2a^6b^3d^3 + w^2a^6b^2c^4 + a^6b^2cd^3 + a^6bc^5 + \\
& a^6bc^2d^3 + w^2a^6c^6 + w^2a^6c^3d^3 + w^2a^6d^6 + w^2a^5b^5d^2 + w^2a^5b^3c^2d^2 + w^2a^5b^2c^3d^2 + \\
& w^2a^5b^2d^5 + w^2a^5bc^4d^2 + w^2a^5c^5d^2 + w^2a^5c^2d^5 + a^4b^5c^2d + wa^4b^4c^3d + a^4b^4d^4 + \\
& wa^4b^3c^4d + w^2a^4b^3cd^4 + wa^4b^2c^5d + a^4b^2c^2d^4 + w^2a^4bc^3d^4 + a^4bd^7 + a^4c^4d^4 + \\
& wa^4cd^7 + w^2a^3b^9 + a^3b^8c + w^2a^3b^7c^2 + a^3b^6c^3 + w^2a^3b^6d^3 + wa^3b^5c^4 + w^2a^3b^5cd^3 + \\
& a^3b^4c^5 + a^3b^4c^2d^3 + a^3b^3c^6 + w^2a^3b^3c^3d^3 + w^2a^3b^3d^6 + w^2a^3b^2c^7 + a^3b^2c^4d^3 + \\
& a^3b^2cd^6 + a^3bc^8 + w^2a^3bc^5d^3 + a^3bc^2d^6 + w^2a^3c^9 + w^2a^3c^6d^3 + w^2a^3c^3d^6 + wa^3d^9 + \\
& a^2b^8d^2 + w^2a^2b^7cd^2 + a^2b^6c^2d^2 + w^2a^2b^5c^3d^2 + w^2a^2b^5d^5 + a^2b^4c^4d^2 + w^2a^2b^4cd^5 + \\
& w^2a^2b^3c^5d^2 + w^2a^2b^3c^2d^5 + a^2b^2c^6d^2 + w^2a^2b^2c^3d^5 + w^2a^2bc^7d^2 + wa^2bcd^8 + \\
& a^2c^8d^2 + w^2a^2c^5d^5 + w^2a^2c^2d^8 + w^2ab^{10}d + w^2ab^9cd + w^2ab^7c^3d + ab^6c^4d + \\
& wab^5c^2d^4 + ab^4c^6d + wab^4c^3d^4 + ab^4d^7 + w^2ab^3c^7d + wab^3c^4d^4 + w^2ab^3cd^7 + \\
& ab^2c^5d^4 + w^2ab^2c^2d^7 + w^2abc^9d + w^2abc^3d^7 + wabd^{10} + w^2ac^{10}d + wac^4d^7 + \\
& acd^{10} + w^2b^{12} + w^2b^{11}c + w^2b^{10}c^2 + wb^9c^3 + w^2b^9d^3 + wb^8c^4 + b^8cd^3 + w^2b^7c^5 + \\
& w^2b^7c^2d^3 + w^2b^6c^6 + b^6c^3d^3 + w^2b^6d^6 + w^2b^5c^7 + b^5c^4d^3 + b^5cd^6 + wb^4c^8 + wb^4c^5d^3 + \\
& w^2b^4c^2d^6 + wb^3c^9 + b^3c^6d^3 + b^3c^3d^6 + w^2b^3d^9 + w^2b^2c^{10} + w^2b^2c^7d^3 + w^2b^2cd^9 + \\
& w^2bc^{11} + bc^8d^3 + wbc^5d^6 + w^2c^{12} + w^2c^9d^3 + w^2c^6d^6 + w^2c^3d^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_8 = & a^9b^3 + a^9c^3 + a^7b^4d + a^7b^3cd + a^7bc^3d + a^7c^4d + a^6b^6 + a^6b^5c + a^6b^4c^2 + a^6b^3c^3 + \\
& a^6b^3d^3 + a^6b^2c^4 + a^6bc^5 + a^6c^6 + a^6c^3d^3 + a^5b^5d^2 + a^5b^3c^2d^2 + a^5b^2c^3d^2 + a^5c^5d^2 + \\
& a^4b^4c^3d + a^4b^3c^4d + a^3b^9 + a^3b^7c^2 + a^3b^6d^3 + a^3b^5cd^3 + a^3b^4c^2d^3 + a^3b^3c^3d^3 + \\
& a^3b^3d^6 + a^3b^2c^7 + a^3b^2c^4d^3 + a^3bc^5d^3 + a^3c^9 + a^3c^6d^3 + a^3c^3d^6 + a^2b^8d^2 + a^2b^7cd^2 + \\
& a^2b^5d^5 + a^2b^3c^2d^5 + a^2b^2c^3d^5 + a^2bc^7d^2 + a^2c^8d^2 + a^2c^5d^5 + ab^{10}d + ab^9cd + ab^8c^2d + \\
& ab^7c^3d + ab^4c^3d^4 + ab^4d^7 + ab^3c^7d + ab^3c^4d^4 + ab^3cd^7 + ab^2c^8d + abc^9d + abc^3d^7 + \\
& ac^{10}d + ac^4d^7 + b^{12} + b^{11}c + b^9d^3 + b^8c^4 + b^7c^5 + b^7c^2d^3 + b^6d^6 + b^5c^7 + b^5cd^6 + b^4c^8 + \\
& b^4c^2d^6 + b^3c^3d^6 + b^3d^9 + b^2c^7d^3 + b^2c^4d^6 + bc^{11} + bc^5d^6 + c^{12} + c^9d^3 + c^6d^6 + c^3d^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_9 = & a^{15} + wa^{13}bd + a^{13}cd + w^2a^{12}b^3 + wa^{12}b^2c + w^2a^{12}c^3 + a^{12}d^3 + a^{11}bcd^2 + \\
& w^2a^{11}c^2d^2 + a^{10}b^4d + w^2a^{10}b^3cd + w^2a^{10}bd^4 + wa^{10}c^4d + w^2a^{10}cd^4 + w^2a^9b^6 + \\
& wa^9b^5c + w^2a^9b^3c^3 + a^9b^2c^4 + a^9bc^5 + w^2a^9bc^2d^3 + w^2a^9c^6 + wa^9d^6 + w^2a^8b^5d^2 + \\
& w^2a^8b^3c^2d^2 + w^2a^8b^2d^5 + a^8bc^4d^2 + wa^8bcd^5 + w^2a^8c^5d^2 + w^2a^7b^6cd + wa^7b^4c^3d + \\
& wa^7b^3c^4d + w^2a^7b^3cd^4 + a^7b^2c^2d^4 + w^2a^7bd^7 + w^2a^7c^4d^4 + w^2a^7cd^7 + w^2a^6b^9 + \\
& wa^6b^8c + w^2a^6b^7c^2 + a^6b^5c^4 + w^2a^6b^5cd^3 + a^6b^4c^5 + a^6b^4c^2d^3 + wa^6b^3c^3d^3 + \\
& wa^6b^2c^4d^3 + w^2a^6bc^8 + w^2a^6c^9 + wa^6d^9 + a^5b^8d^2 + w^2a^5b^6c^2d^2 + a^5b^5c^3d^2 + \\
& wa^5b^3c^5d^2 + w^2a^5b^3c^2d^5 + w^2a^5b^2c^3d^5 + wa^5bcd^8 + a^5c^8d^2 + w^2a^5c^2d^8 + w^2a^4b^{10}d + \\
& a^4b^9cd + w^2a^4b^8c^2d + w^2a^4b^7c^3d + wa^4b^6c^4d + w^2a^4b^6cd^4 + w^2a^4b^5c^2d^4 + a^4b^4c^6d + \\
& w^2a^4b^4c^3d^4 + w^2a^4b^4d^7 + w^2a^4b^3c^4d^4 + wa^4b^2c^8d + w^2a^4b^2c^5d^4 + a^4b^2c^2d^7 + \\
& a^4bc^9d + w^2a^4bc^6d^4 + w^2a^4bc^3d^7 + w^2a^4bd^{10} + w^2a^4c^{10}d + w^2a^4cd^{10} + w^2a^3b^{12} + \\
& w^2a^3b^{10}c^2 + wa^3b^9c^3 + w^2a^3b^8c^4 + wa^3b^8cd^3 + a^3b^7c^5 + w^2a^3b^6c^6 + wa^3b^6c^3d^3 + \\
& wa^3b^5c^7 + a^3b^5c^4d^3 + wa^3b^4c^8 + a^3b^4c^5d^3 + wa^3b^4c^2d^6 + wa^3b^3c^9 + wa^3b^3c^6d^3 + \\
& wa^3b^3c^3d^6 + w^2a^3b^2c^{10} + a^3b^2c^4d^6 + w^2a^3b^2cd^9 + wa^3bc^8d^3 + w^2a^3bc^5d^6 + w^2a^3c^{12} + \\
& a^3d^{12} + w^2a^2b^{10}cd^2 + a^2b^9c^2d^2 + w^2a^2b^8c^3d^2 + a^2b^8d^5 + wa^2b^7c^4d^2 + wa^2b^6c^5d^2 + \\
& wa^2b^5c^6d^2 + wa^2b^5c^3d^5 + w^2a^2b^5d^8 + wa^2b^4c^7d^2 + a^2b^4cd^8 + w^2a^2b^3c^8d^2 + a^2b^3c^5d^5 + \\
& a^2b^2c^9d^2 + w^2a^2b^2c^6d^5 + w^2a^2b^2c^3d^8 + w^2a^2b^2d^{11} + w^2a^2bc^{10}d^2 + a^2bcd^{11} + a^2c^8d^5 + \\
& w^2a^2c^5d^8 + ab^{12}cd + w^2ab^{10}d^4 + w^2ab^9c^4d + ab^9cd^4 + wa^8c^2d^4 + ab^7c^6d + ab^6c^7d + \\
& ab^6c^4d^4 + w^2ab^4c^9d + wab^4c^6d^4 + wab^4c^3d^7 + wab^4d^{10} + w^2ab^3c^7d^4 + wab^3c^4d^7 + \\
& w^2ab^2c^8d^4 + abc^{12}d + abc^9d^4 + w^2abc^6d^7 + w^2abc^3d^{10} + abd^{13} + w^2ac^{10}d^4 + ac^4d^{10} + \\
& wacd^{13} + w^2b^{14}c + wb^{13}c^2 + w^2b^{12}c^3 + w^2b^{12}d^3 + wb^{10}c^5 + w^2b^{10}c^2d^3 + wb^9c^3d^3 + \\
& w^2b^9d^6 + wb^8c^7 + wb^8c^4d^3 + w^2b^8cd^6 + wb^7c^8 + wb^7c^5d^3 + w^2b^6c^6d^3 + w^2b^6d^9 + \\
& wb^5c^{10} + b^5c^7d^3 + b^5c^4d^6 + b^5cd^9 + w^2b^4c^8d^3 + b^4c^5d^6 + b^4c^2d^9 + w^2b^3c^{12} + wb^3c^9d^3 + \\
& w^2b^3c^3d^9 + w^2b^3d^{12} + wb^2c^{13} + w^2b^2c^{10}d^3 + w^2b^2c^7d^6 + w^2bc^{14} + wbc^8d^6 + wbc^5d^9 + \\
& wbc^2d^{12} + w^2c^{12}d^3 + w^2c^9d^6 + w^2c^6d^9 + w^2c^3d^{12} + d^{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{10} = & a^{13}cd + a^{12}b^2c + a^{11}c^2d^2 + a^{10}bc^3d + a^{10}c^4d + a^9b^4c^2 + a^9b^2c^4 + a^9bc^5 + \\
& a^9bc^2d^3 + a^8b^4cd^2 + a^8b^2c^3d^2 + a^8bc^4d^2 + a^8c^2d^5 + a^7b^4c^3d + a^7b^3c^4d + a^7b^2c^2d^4 + \\
& a^7bc^6d + a^7bc^3d^4 + a^7bd^7 + a^7c^4d^4 + a^7cd^7 + a^6b^8c + a^6b^5c^4 + a^6b^4c^5 + a^6b^4c^2d^3 + \\
& a^6b^3c^3d^3 + a^6b^2c^7 + a^6b^2cd^6 + a^6bc^8 + a^6bc^5d^3 + a^6bc^2d^6 + a^5b^5c^3d^2 + a^5b^3c^2d^5 + \\
& a^5b^2c^6d^2 + a^5b^2c^3d^5 + a^5b^2d^8 + a^4b^8c^2d + a^4b^6c^4d + a^4b^4c^3d^4 + a^4b^4d^7 + a^4b^3c^7d + \\
& a^4b^3c^4d^4 + a^4b^3cd^7 + a^4b^2c^8d + a^4b^2c^2d^7 + a^3b^8c^4 + a^3b^7c^5 + a^3b^6c^3d^3 + a^3b^5cd^6 + \\
& a^3b^4c^8 + a^3b^3c^6d^3 + a^3b^3c^3d^6 + a^3b^2c^4d^6 + a^3b^2cd^9 + a^2b^7c^4d^2 + a^2b^6c^2d^5 + a^2b^4c^7d^2 + \\
& a^2b^4cd^8 + a^2b^3c^5d^5 + a^2b^3c^2d^8 + a^2b^2d^{11} + a^2bc^4d^8 + ab^8c^2d^4 + ab^7c^3d^4 + ab^6cd^7 + \\
& ab^4c^6d^4 + ab^4c^3d^7 + ab^4d^{10} + ab^3c^4d^7 + ab^3cd^{10} + ab^2c^8d^4 + abd^{13} + b^8c^4d^3 + b^8cd^6 + \\
& b^7c^2d^6 + b^5c^7d^3 + b^5c^4d^6 + b^5cd^9 + b^4c^8d^3 + b^4c^5d^6 + b^4c^2d^9 + b^2c^4d^9 + bc^8d^6 + bc^2d^{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{11} = & a^{18} + w^2a^{16}bd + wa^{15}b^2c + w^2a^{15}bc^2 + a^{15}c^3 + a^{14}bcd^2 + a^{13}b^4d + a^{13}bd^4 + \\
& w^2a^{13}c^4d + a^{13}cd^4 + a^{12}b^5c + wa^{12}b^4c^2 + w^2a^{12}b^3c^3 + wa^{12}b^3d^3 + w^2a^{12}b^2c^4 + \\
& w^2a^{12}bc^5 + a^{12}bc^2d^3 + a^{12}c^6 + w^2a^{12}c^3d^3 + w^2a^{12}d^6 + a^{11}b^4cd^2 + a^{11}b^3c^2d^2 + \\
& a^{11}b^2c^3d^2 + a^{11}b^2d^5 + a^{11}bc^4d^2 + wa^{11}bcd^5 + a^{11}c^5d^2 + wa^{11}c^2d^5 + wa^{10}b^5c^2d + \\
& a^{10}b^4c^3d + w^2a^{10}b^4d^4 + a^{10}b^3c^4d + wa^{10}b^3cd^4 + w^2a^{10}b^2c^5d + w^2a^{10}b^2c^2d^4 + \\
& a^{10}bc^6d + a^{10}bc^3d^4 + w^2a^{10}bd^7 + w^2a^{10}c^4d^4 + a^9b^8c + w^2a^9b^6c^3 + wa^9b^6d^3 + \\
& w^2a^9b^5c^4 + wa^9b^4c^5 + w^2a^9b^3c^6 + wa^9b^3c^3d^3 + w^2a^9b^3d^6 + a^9b^2c^7 + wa^9b^2cd^6 + \\
& w^2a^9bc^8 + a^9bc^2d^6 + a^9c^9 + w^2a^9c^6d^3 + w^2a^9c^3d^6 + a^9d^9 + w^2a^8b^8d^2 + wa^8b^7cd^2 + \\
& a^8b^6c^2d^2 + wa^8b^5c^3d^2 + wa^8b^5d^5 + a^8b^4c^4d^2 + wa^8b^3c^5d^2 + w^2a^8b^3c^2d^5 + wa^8b^2d^8 + \\
& w^2a^8bc^7d^2 + a^8c^8d^2 + w^2a^8c^5d^5 + wa^8c^2d^8 + a^7b^8c^2d + a^7b^6c^4d + w^2a^7b^6cd^4 + \\
& w^2a^7b^4c^6d + wa^7b^4c^3d^4 + w^2a^7b^4d^7 + a^7b^2c^8d + a^7b^2c^2d^7 + w^2a^7bc^6d^4 + a^7c^{10}d + \\
& w^2a^7c^4d^7 + w^2a^7cd^{10} + wa^6b^{10}c^2 + w^2a^6b^9c^3 + wa^6b^9d^3 + wa^6b^8c^4 + a^6b^8cd^3 + \\
& wa^6b^7c^5 + w^2a^6b^6c^6 + w^2a^6b^6c^3d^3 + w^2a^6b^6d^6 + wa^6b^5c^4d^3 + w^2a^6b^4c^8 + w^2a^6b^4c^2d^6 + \\
& w^2a^6b^3c^9 + w^2a^6b^3c^6d^3 + wa^6b^3c^3d^6 + w^2a^6b^3d^9 + w^2a^6b^2c^{10} + w^2a^6b^2c^4d^6 + \\
& a^6b^2cd^9 + a^6bc^{11} + a^6bc^8d^3 + wa^6bc^2d^9 + a^6c^{12} + w^2a^6c^9d^3 + w^2a^6c^6d^6 + w^2a^6c^3d^9 + \\
& w^2a^6d^{12} + wa^5b^{10}cd^2 + a^5b^9c^2d^2 + w^2a^5b^8d^5 + a^5b^6c^5d^2 + w^2a^5b^6c^2d^5 + w^2a^5b^5c^6d^2 + \\
& w^2a^5b^5d^8 + w^2a^5b^2c^6d^5 + w^2a^5b^2c^3d^8 + wa^5b^2d^{11} + w^2a^5bc^{10}d^2 + wa^5bcd^{11} + \\
& w^2a^5c^8d^5 + wa^5c^5d^8 + a^5c^2d^{11} + wa^4b^{11}c^2d + w^2a^4b^{10}c^3d + wa^4b^{10}d^4 + wa^4b^9c^4d + \\
& wa^4b^8c^5d + wa^4b^8c^2d^4 + wa^4b^7c^6d + w^2a^4b^6cd^7 + w^2a^4b^5c^8d + wa^4b^4c^9d + w^2a^4b^4d^{10} + \\
& w^2a^4b^3c^{10}d + wa^4b^3c^4d^7 + a^4b^3cd^{10} + w^2a^4b^2c^{11}d + wa^4b^2c^8d^4 + w^2a^4b^2c^2d^{10} + \\
& a^4bc^{12}d + w^2a^4bc^6d^7 + wa^4bc^3d^{10} + a^4bd^{13} + wa^4c^{10}d^4 + w^2a^4c^4d^{10} + a^4cd^{13} + \\
& wa^3b^{12}d^3 + a^3b^{11}c^4 + a^3b^{10}c^5 + a^3b^{10}c^2d^3 + wa^3b^9c^6 + wa^3b^9c^3d^3 + w^2a^3b^9d^6 + \\
& w^2a^3b^8c^7 + wa^3b^8c^4d^3 + a^3b^8cd^6 + w^2a^3b^6c^9 + wa^3b^6c^6d^3 + w^2a^3b^6c^3d^6 + w^2a^3b^6d^9 + \\
& wa^3b^4c^8d^3 + wa^3b^4c^5d^6 + a^3b^3c^{12} + wa^3b^3c^9d^3 + w^2a^3b^3c^6d^6 + wa^3b^3c^3d^9 + w^2a^3b^3d^{12} + \\
& a^3b^2c^{10}d^3 + a^3b^2cd^{12} + a^3bc^8d^6 + wa^3c^{12}d^3 + wa^3c^9d^6 + wa^3c^6d^9 + wa^3c^3d^{12} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& wa^2b^{13}cd^2 + wa^2b^{12}c^2d^2 + a^2b^{11}c^3d^2 + a^2b^{10}c^4d^2 + w^2a^2b^{10}cd^5 + wa^2b^9c^5d^2 + \\
& w^2a^2b^8c^6d^2 + a^2b^8d^8 + a^2b^7c^7d^2 + w^2a^2b^7cd^8 + w^2a^2b^6c^8d^2 + w^2a^2b^6c^5d^5 + wa^2b^5c^9d^2 + \\
& a^2b^5c^6d^5 + wa^2b^5c^3d^8 + a^2b^5d^{11} + a^2b^4c^{10}d^2 + a^2b^4c^4d^8 + a^2b^4cd^{11} + a^2b^3c^{11}d^2 + \\
& wa^2b^3c^5d^8 + a^2b^3c^2d^{11} + wa^2b^2c^{12}d^2 + a^2b^2c^9d^5 + a^2b^2c^6d^8 + a^2b^2c^3d^{11} + wa^2bc^{13}d^2 + \\
& wa^2bc^{10}d^5 + wa^2bc^7d^8 + a^2bc^4d^{11} + a^2bcd^{14} + w^2a^2c^8d^8 + wab^{16}d + wab^{14}c^2d + \\
& ab^{12}c^4d + ab^{12}cd^4 + wab^{11}c^5d + w^2ab^{11}c^2d^4 + w^2ab^{10}c^3d^4 + ab^{10}d^7 + wab^9c^4d^4 + \\
& w^2ab^8c^5d^4 + ab^8c^2d^7 + wab^6c^7d^4 + w^2ab^6c^4d^7 + ab^6cd^{10} + wab^5c^{11}d + wab^5c^8d^4 + \\
& w^2ab^5c^2d^{10} + ab^4c^{12}d + wab^4c^9d^4 + ab^4c^6d^7 + ab^4c^3d^{10} + w^2ab^4d^{13} + w^2ab^3c^{10}d^4 + \\
& ab^3c^4d^{10} + wab^2c^{14}d + wab^2c^{11}d^4 + ab^2c^8d^7 + wab^2c^5d^{10} + wac^{16}d + ac^4d^{13} + \\
& w^2acd^{16} + wb^{17}c + b^{16}c^2 + wb^{15}c^3 + wb^{14}c^4 + wb^{12}c^6 + b^{12}c^3d^3 + b^{12}d^6 + wb^{11}c^7 + \\
& b^{11}cd^6 + wb^{10}c^8 + w^2b^{10}c^2d^6 + b^9c^9 + w^2b^9c^6d^3 + w^2b^9c^3d^6 + b^9d^9 + wb^8c^{10} + \\
& w^2b^8c^4d^6 + w^2b^8cd^9 + wb^7c^{11} + w^2b^7c^8d^3 + b^7c^2d^9 + wb^6c^{12} + wb^6c^9d^3 + w^2b^6c^6d^6 + \\
& w^2b^6c^3d^9 + b^6d^{12} + b^5c^{10}d^3 + wb^5c^7d^6 + wb^5c^4d^9 + w^2b^5cd^{12} + wb^4c^{14} + b^4c^{11}d^3 + \\
& wb^4c^8d^6 + w^2b^4c^5d^9 + w^2b^4c^2d^{12} + wb^3c^{15} + w^2b^3c^9d^6 + w^2b^3c^6d^9 + w^2b^3c^3d^{12} + \\
& b^3d^{15} + b^2c^{16} + wb^2c^{10}d^6 + wb^2c^4d^{12} + w^2b^2cd^{15} + wbc^{17} + bc^8d^9 + bc^5d^{12} + wbc^2d^{15} + \\
& d^{18}
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [And86] Anderson, Greg W.: *t-Motives*, Duke Math. J., **Bd. 53**, 457–502 (1986).
- [AT90] Anderson, Greg W. und Thakur, Dinesh S.: *Tensor Powers of the Carlitz Module and Zeta Values*, The Annals of Mathematics, **Bd. 132** (1), 159–191 (1990).
- [BGR84] Bosch, S.; Güntzer, U. und Remmert, R.: *Non-Archimedean Analysis*, Bd. 261 von *Grundlehren der math. Wissenschaften*, Springer, Berlin Heidelberg New York (1984).
- [BH07] Böckle, Gebhardt und Hartl, Urs: *Uniformizable families of t-motives*, Trans. Amer. Math. Soc., **Bd. 359** (8), 3933–3972 (2007).
- [BR09] Breuer, Florian und Rück, Hans-Georg: *Drinfeld modular polynomials in higher rank*, J. Number Theory, **Bd. 129** (1), 59–83 (2009).
- [DK02] Derksen, Harm und Kemper, Gregor: *Computational Invariant Theory*, Bd. 130 von *Encyclopaedia of Math. Sci.*, Springer, Berlin Heidelberg New York (2002).
- [Dri74] Drinfel'd, V. G.: *Elliptic modules*, Mat. Sb. (N.S.), **Bd. 94(136)**, 594–627, 656 (1974).
- [Gar01] Gardeyn, Francis: *t-motives and Galois representations*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI (2001), Thesis (Dr.)–Universität Gent (Belgium).
- [Gos96] Goss, David: *Basic Structures of Function Field Arithmetic*, Bd. 35 von *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Springer, Berlin Heidelberg New York (1996).

- [Hur03] Hurt, Norman E.: *Many Rational Points Coding Theory and Algebraic Geometry*, Bd. 564 von *Mathematics and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2003).
- [JC06] J.J. Cannon, Wieb Bosma (Hg.): *Handbook of Magma Functions*, zweite Aufl. (2006), <http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/>.
- [Neu07] Neukirch, Jürgen: *Algebraische Zahlentheorie*, Springer-Lehrbuch Masterclass, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2007).
- [Pot98] Potemine, Igor Yu.: *Minimal terminal \mathbf{Q} -factorial models of Drinfeld coarse moduli schemes*, Math. Phys. Anal. Geom., **Bd. 1** (2), 171–191 (1998).
- [SD74] Swinnerton-Dyer, H. P. F.: *Analytic theory of abelian varieties*, Cambridge University Press, London (1974), London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 14.
- [Sei08] Seiler, Konstantin: *Analytische Trivialität einer Familie von τ -Moduln* (2008), Diplomarbeit am Mathematischen Institut der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg.
- [Sil09] Silverman, Joseph H.: *The arithmetic of elliptic curves*, Bd. 106 von *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, Dordrecht, zweite Aufl. (2009).
- [Tha04] Thakur, Dinesh S.: *Function field arithmetic*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ (2004).

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt und andere als die in der Dissertation angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Kein Teil dieser Arbeit ist in einem anderen Promotions- oder Habilitationsverfahren verwendet worden.

Kassel, im April 2010

Oliver Bangert