

**Institut
für
Mechanik**

Berichte des Instituts für Mechanik (Bericht 3/2015)

Robert Schmoll

**Co-Simulation und Solverkopplung
Analyse komplexer multiphysikalischer Systeme**

kassel
university



press

Berichte des Instituts für Mechanik

Bericht 3/2015

Robert Schmoll

Co-Simulation und Solverkopplung

Analyse komplexer multiphysikalischer Systeme

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Maschinenbau der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) angenommen.

Erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Bernhard Schweizer, Technische Universität Darmstadt

Zweiter Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Olaf Wünsch, Universität Kassel

Tag der mündlichen Prüfung:

23. Juli 2015

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2015

ISBN 978-3-86219-592-3

© 2015, kassel university press GmbH, Kassel

www.uni-kassel.de/upress

Umschlaggestaltung: Helena Friesen

Druck und Verarbeitung: Print Management Logistics Solutions, Kassel

Printed in Germany

Vorwort

Dissertationen bzw. deren Vorworte beginnen anscheinend in der Regel mit der Formulierung:

„Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter ...“.

In meinem Fall wären dies das Fachgebiet Mehrkörpersysteme und später organisatorisch das Fachgebiet Strömungsmechanik beide waren bzw. sind am Fachbereich für Maschinenbau der Universität Kassel zu finden.

Es folgen diverse Danksagungen, lassen Sie mich diese auflisten.

Mein Dank gilt:

- Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernhard Schweizer, Fachgebiet Strukturtechnik, TU Darmstadt, ehem. Fachgebiet Mehrkörpersysteme, Universität Kassel, für die Betreuung und Begutachtung dieser Arbeit.
- Herrn Prof. Dr.-Ing. Olaf Wunsch, Fachgebiet Strömungsmechanik, Universität Kassel, für meine organisatorische Übernahme an sein Fachgebiet und die Begutachtung dieser Arbeit.
- Herrn Prof. Dr.-Ing. Andreas Kroll und Herrn Dr. rer. nat. Hanns-Jakob Sommer, für die Bereitschaft in der Prüfungskommission mitzuwirken.
- Herrn Prof. Dr.-Ing. Jens Weber, ehem. MTU Friedrichshafen, als Initiator und 1. Obmann des FVV-Projektes Hochdruckpumpe.
- Herrn Dr.-Ing. Claudio Longo, Continental Mechanical Components, als 2. Obmann des FVV-Projektes Hochdruckpumpe.
- Der Firma Continental Mechanical Components, Roding, für die Bereitstellung der Hochdruckpumpendaten.
- Dem Ford Forschungszentrum Aachen für die Durchführung von Messungen an der Hochdruckpumpe.
- Der Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen e.V. in Frankfurt, der Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschungsvereinigungen e.V. und dem Bundesministerium für Wirtschaft und Technologie, sowie dem Steuerzahler, für die Betreuung bzw. die finanzielle Förderung des Projektes Hochdruckpumpe.
- Herrn Dr.-Ing. Christian Simonidis, ABB Forschungszentrum Ladenburg, für die sehr gute Zusammenarbeit.
- Dem ABB Forschungszentrum Ladenburg für interessante Modelle und Kopplungsaufgaben.
- Den ehem. Kollegen des Fachgebietes Mehrkörpersysteme, insbes. Herrn Martin Busch, für die Starthilfe bezüglich der gekoppelten Simulation.
- Herrn Dipl.-Ing. Bruno Bülow, der im Rahmen seiner Diplomarbeit 2 eine erste Implementierung der Makroschrittweitensteuerung vorgenommen hat.
- Den Kollegen am Fachgebiet Strukturtechnik der TU Darmstadt, insbes. den Herren Daixing Lu, Gerrit Nowald und Tobias Meyer für das Korrekturlesen.
- Herrn M.Sc. Gerrit Nowald außerdem für die Zusammenarbeit an der dynamisch-statischen Solverkopplung und für das Erstellen der Submodelle des Rotors und des Gleitlagers.
- Den Kollegen des Institutes für Mechanik der Universität Kassel, für die freundliche Aufnahme und die gute Gesellschaft beim Mittagessen.
- Und natürlich der lieben Carla für die Zeichensetzung, meiner liebsten Anne, meinem Sohn Oskar und meinen Eltern für alles andere.

Zusammenfassung

In dieser Dissertation werden zwei Arten von gekoppelter Simulation anhand einfacher Testmodelle untersucht und auf komplexe, multiphysikalische Systeme angewandt. Dazu werden die Gesamtsysteme in monodisziplinäre Subsysteme aufgeteilt. Die Modellierung der Subsysteme erfolgt mithilfe kommerzieller Programme. Für die Simulation werden die in den Programmen integrierten Gleichungslöser eingesetzt. In den komplexen Anwendungen wird in dieser Arbeit immer ein Mehrkörpersystem (MKS) mit einem oder mehreren Modellen aus einer anderen Disziplin gekoppelt. Hierbei hat das MKS-Modell grundsätzlich Kräfte und Momente als Eingangsvariablen und kinematische Größen (Weg und Geschwindigkeit) als Ausgangsvariablen.

Der erste Typ der gekoppelten Simulation, hier als Co-Simulation bezeichnet, verbindet zwei oder mehr dynamische Subsysteme. Hierfür werden vier verschiedene Co-Simulationsverfahren erläutert und anhand eines Co-Simulationstestmodells (Zweimassenschwinger) analysiert. Mithilfe der Co-Simulation werden ein Common-Rail-Einspritzsystem, eine *Thomson* Spule, ein *Recloser* und ein Fallturm simuliert.

Der zweite Typ der gekoppelten Simulation, hier als Solverkopplung bezeichnet, verbindet ein dynamisches mit einem oder mehreren statischen Subsystemen. Als Testmodell für drei unterschiedliche Verfahren der dynamisch-statischen Solverkopplung dient ein Einmassenschwinger mit nichtlinearen Feder- und Dämpferelementen. Die Anwendung ist hierbei ein Rotor mit einem hydrodynamischen Gleitlager.

Abstract

This thesis analyses two types of coupled simulation, which are investigated by test models and then applied to complex multi-physical systems. To achieve this, an overall-system is split into multiple mono-disciplinary subsystems. These subsystems are then modelled by commercial software tools. To simulate the submodels, the incorporated commercial solvers are used and connected by coupling techniques. In this thesis one multi-body system (MBS) is always coupled with one or more models from other disciplines. On principle, the MBS-model always has forces and torques as input variables and kinematic quantities (position and velocity) as output variables.

The first type of coupled simulation - here called co-simulation - combines two or more dynamic subsystems. Four methods of this coupling are discussed and analyzed, using a co-simulation test model (two-mass-oscillator). The co-simulation methods are used to simulate a common-rail injection system, a *Thomson* coil, a recloser and a drop tower.

The second type of coupled simulation - here called solver coupling - is the coupling between one dynamic and one or more static subsystems. A single-mass-oscillator with nonlinear spring-damper forces serves as a test model for three different methods of dynamic-static solver coupling. The resulting application for the dynamic-static solver coupling is a rotor with one hydrodynamic bearing.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
Zusammenfassung und Abstract	6
1. Einleitung	11
1.1. Motivation	11
1.2. Einordnung der Kopplungsverfahren	11
1.3. Ziele dieser Arbeit	13
I. Co-Simulation	15
2. Theorie der Co-Simulation	15
2.1. Einleitung	15
2.2. Testmodell: <i>Zweimassenschwinger</i>	16
2.3. Kopplungstopologien	18
2.3.1. Kraft-Weg Kopplung	18
2.3.2. Weg-Weg Kopplung	20
2.3.3. Kraft-Kraft Kopplung	20
2.3.4. <i>Constraint</i> Kopplung	20
2.4. Co-Simulationsverfahren	21
2.4.1. Ablauf des Datenaustausches	21
2.4.1.1. Ablauf des <i>Gauß-Seidel</i> Typs	22
2.4.1.2. Ablauf des <i>Jacobi</i> Typs	23
2.4.2. Wahl der Makroschrittweite	23
2.4.2.1. Feste Makroschrittweite	24
2.4.2.2. <i>Gauß-Seidel</i> Typ im Master/Slave Modus	24
2.4.2.3. <i>Jacobi</i> Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung	24
2.4.3. Approximation der Koppelgrößen	26
2.4.4. Anlaufrechnung	27
2.4.5. Einschränkungen kommerzieller Solver	27
2.5. Bewertungskriterien für die Co-Simulationsverfahren	28
2.5.1. Numerische Stabilität	29
2.5.2. Bewertung des numerischen Fehlers	29
2.5.2.1. Referenzlösung	29
2.5.2.2. Fehlermaß	30
2.5.2.3. Variablen für die Berechnung des numerischen Fehlers	31
2.5.2.4. Anlaufrechnung	31
2.5.3. Bewertung der numerischen Effizienz	32
2.6. Analyse der Co-Simulationsverfahren	32
2.6.1. Analyse der numerischen Stabilität der Co-Simulationsverfahren	32

2.6.2.	Numerische Fehleranalyse der Co-Simulationsverfahren	33
2.6.2.1.	Idealfall mit analytisch berechneten Anfangswerten	33
2.6.2.2.	Einfluss der Anlaufrechnung	38
2.6.2.3.	Einfluss der Subsystemsolver	40
2.6.2.4.	Fazit für die numerische Fehleranalyse	41
2.6.3.	Analyse der numerischen Effizienz der Co-Simulationsverfahren	42
2.6.3.1.	Rechenzeiten bei der Co-Simulation des Zweimassenschwingers	42
2.6.3.2.	Fazit für die Analyse der numerischen Effizienz	44
2.6.3.3.	Rechenzeiten komplexer, multiphysikalischer Modelle	45
3.	Co-Simulation komplexer multiphysikalischer Systeme	47
3.1.	MKS - Hydraulik	47
3.1.1.	Gleichungen des MKS-Submodells	47
3.1.2.	Gleichungen des hydraulischen Submodells	48
3.1.3.	Testmodell: <i>Zweimassenschwinger</i>	48
3.1.4.	Anwendung: Hochdruckpumpe (Common-Rail-Einspritzsystem)	49
3.1.4.1.	Common-Rail-Einspritzsystem	49
3.1.4.2.	MKS-Subsystem der Hochdruckpumpe	50
3.1.4.3.	Hydraulisches Subsystem der Hochdruckpumpe	51
3.1.4.4.	Kopplung der Hochdruckpumpensubsysteme	52
3.1.4.5.	Simulationsergebnisse der Hochdruckpumpe	53
3.1.4.6.	Konvergenz der Co-Simulationsergebnisse der Hochdruckpumpe	57
3.1.4.7.	Fazit für die Co-Simulation der Hochdruckpumpe	61
3.2.	MKS - Elektrodynamik	63
3.2.1.	Gleichungen des elektrodynamischen Submodells	63
3.2.2.	Testmodell: <i>Zweimassenschwinger</i>	65
3.2.3.	Anwendung: <i>Thomson</i> Spule	66
3.2.3.1.	Aufbau und Funktionsprinzip der <i>Thomson</i> Spule	66
3.2.3.2.	Subsysteme und Kopplung der <i>Thomson</i> Spule	67
3.2.3.3.	Konvergenz der Co-Simulationsergebnisse der <i>Thomson</i> Spule	68
3.2.3.4.	Simulationsergebnisse der <i>Thomson</i> Spule	69
3.2.3.5.	Fazit für die Co-Simulation der <i>Thomson</i> Spule	70
3.2.4.	Anwendung: <i>Recloser</i>	71
3.2.4.1.	Aufbau und Funktionsprinzip des <i>Reclosers</i>	71
3.2.4.2.	Subsysteme und Kopplung des <i>Reclosers</i>	72
3.2.4.3.	Konvergenz der Co-Simulationsergebnisse des <i>Reclosers</i>	73
3.2.4.4.	Co-Simulationsergebnisse des <i>Reclosers</i>	75
3.2.4.5.	Fazit für die Co-Simulation des <i>Reclosers</i>	78
3.3.	MKS - FE-Strukturdynamik	79
3.3.1.	Nichtlineare, dynamische FE-Gleichungen	79
3.3.2.	Topologien für die Kopplung von MKS und FE-Strukturdynamik	79
3.3.2.1.	Kraftrandbedingungen	79
3.3.2.2.	Verschiebungsrundbedingungen	80

3.3.3.	Testmodell: <i>Einmassenschwinger - eindimensionaler FE-Dehnstab</i>	82
3.3.3.1.	Parameter	82
3.3.3.2.	Zeitverlauf	83
3.3.3.3.	Konvergenz der Co-Simulationsergebnisse	83
3.3.3.4.	Rechenzeiten	84
3.3.4.	Anwendung: Fallturm	85
3.3.4.1.	Aufbau und Funktion des Fallturms	85
3.3.4.2.	Subsysteme und Kopplung des Fallturms	86
3.3.4.3.	Co-Simulationsergebnisse des Fallturms	87
3.3.4.4.	Fazit für die Co-Simulation des Fallturms	88
3.3.5.	Anwendung: <i>Recloser</i>	88
3.3.5.1.	Subsysteme und Kopplung des <i>Reclosers</i>	89
3.3.5.2.	Co-Simulationsergebnisse des <i>Reclosers</i>	90
3.3.5.3.	Fazit für die Co-Simulation des <i>Reclosers</i>	91
II.	Solverkopplung	92
4.	Theorie der dynamisch-statischen Solverkopplung	92
4.1.	Kopplungstopologie für die dynamisch-statische Solverkopplung	92
4.2.	Kopplungsverfahren für die dynamisch-statische Solverkopplung	92
4.2.1.	Lösung des dynamischen Subsystems	93
4.2.2.	Lösung des statischen Subsystems	95
4.2.3.	Kopplungsverfahren	95
4.2.3.1.	Voll-implizite Kopplung	96
4.2.3.2.	Semi-implizite Kopplung	96
4.3.	Testmodell: <i>nichtlinearer Einmassenschwinger</i>	97
4.4.	Analyse der dynamisch-statischen Solverkopplungsverfahren	99
4.4.1.	Numerische Fehleranalyse der Solverkopplungsverfahren	99
4.4.2.	Analyse der numerischen Effizienz der Solverkopplungsverfahren	100
4.4.3.	Fazit für die Analyse der Solverkopplungsverfahren	102
5.	Solverkopplung komplexer multiphysikalischer Systeme	104
5.1.	MKS - FEM (quasi-statisch), Anwendung: Rotor mit Gleitlager	104
5.1.1.	MKS-Subsystem: Rotor	104
5.1.2.	FEM-Subsystem: Gleitlager	105
5.1.3.	Kopplung des Rotors mit dem Gleitlager	106
5.1.4.	Vergleich der Solverkopplungsverfahren am Modell des Rotors mit Gleitlager	107
5.1.5.	Fazit für die Solverkopplung des Rotors mit Gleitlager	111
Fazit		112
6.	Ergebnisse und Diskussion	112
6.1.	Co-Simulation	112

6.2. Dynamisch-statische Solverkopplung	113
6.3. Fazit	114
Anhang	115
A. Schnittstellen und Beispiele	115
A.1. Verfügbare Schnittstellen	115
A.2. Beispiele für gekoppelte Modelle	116
B. Veröffentlichungen zu dieser Arbeit	118
C. Software	119
C.1. Explizite <i>Runge-Kutta</i> Verfahren	119
C.2. Adams	121
C.3. <i>DSHplus</i>	122
C.4. Comsol	122
C.5. Abaqus	123
D. Implementierung	125
D.1. Implementierung der Co-Simulation	125
D.2. Implementierung der dynamisch-statischen Solverkopplung	127
Literatur	129
Glossar	143
Abkürzungsverzeichnis	143
Formelzeichen	144

1. Einleitung

1.1. Motivation

Die Simulation ist ein bewährtes Werkzeug, um technische Systeme entwickeln, analysieren und verbessern zu können. Unter Simulation wird in dieser Arbeit die numerische Lösung von mathematischen Gleichungen verstanden. Diese Gleichungen werden auf Grundlage des zu betrachtenden Systems mittels Modellbildung gewonnen. Weit verbreitet ist zum einen die Simulation monophysikalischer Detailmodelle einzelner Baugruppen und zum anderen die Simulation reduzierter Modelle eines Gesamtsystems. Bei monophysikalischen Detailmodellen ist oft zu klären, wie die Eingangsgrößen an den Modellgrenzen zu approximieren sind und inwieweit eine dynamische Interaktion mit angrenzenden Baugruppen vernachlässigbar ist. Bei reduzierten Modellen eines Gesamtsystems hingegen ist zu klären, welche Effekte relevant sind und welche Modelltiefe zur Beantwortung der Fragestellung erforderlich ist.

Steigende Rechnerleistungen ermöglichen auch komplexe Gesamtsysteme mit hoher Modelltiefe zu simulieren. Hierbei ist insbesondere auch das Zusammenspiel einzelner Baugruppen von Interesse. Da bei den Anwendern der Simulation oft Detailmodelle der Baugruppen vorhanden sind oder von verschiedenen Spezialisten erstellt werden, liegt es nahe, diese miteinander zu koppeln. Nun existieren für die Modellbildung und Simulation allerdings viele verschiedene Softwarepakete. Diese Programme sind oft auf weitgehend monodisziplinäre Fragestellungen spezialisiert und zeichnen sich durch komfortable Benutzerschnittstellen, Bauteilbibliotheken, spezialisierte Gleichungsformulierungen und optimierte Lösungsverfahren aus.

Um nun Detailmodelle untereinander im Sinne einer modularen Modellbildung zu einem in der Regel multiphysikalischen Gesamtmodell zu verbinden, bietet sich eine gekoppelte Simulation (Co-Simulation bzw. Solverkopplung) an. Hierbei werden weiterhin die etablierten Spezialprogramme mit ihrem vollen Funktionsumfang eingesetzt und die Submodelle werden mit den jeweils optimierten Lösungsverfahren simuliert.

1.2. Einordnung der Kopplungsverfahren

Viele Arbeiten ordnen die unterschiedlichen Arten der gekoppelten Simulation ein [Dro04, VKV04, GKL06, BAHD07, SBC⁺07, Val09, Arn09, GGC09, Bou09, Völ10, Fri11, Bus12]. In der hier verwendeten Einordnung der Kopplungsverfahren, siehe Tabelle 1.1, wird davon ausgegangen, dass mathematisch äquivalente Modellgleichungen zu lösen sind. Der Unterschied in den Verfahren liegt in der Herangehensweise der Gleichungserstellung (geschlossene oder verteilte Modellbildung) und den Lösungsverfahren (geschlossene oder verteilte Simulation).

Alternativ hierzu werden in der Praxis der Modellerstellung oft Submodelle bzw. Ein- und Ausgänge der Systeme durch Näherungen ersetzt. Dies können Kennfelder, reduzierte (linearisierte) Ersatzmodelle oder ähnliches sein [LDHS01, VKV04, Val09, SEW⁺12a].

Betrachtet man die Einordnung der Kopplungsverfahren aus Tabelle 1.1, handelt es sich bei der „klassischen“ Simulation nicht um eine Kopplung, da nur eine Modellierungsumgebung und ein Gleichungslöser zum Einsatz kommen. Um hiermit komplexe, multiphysikalische Systeme geschlossen simulieren zu können, muss eine geeignete Modellierungsumgebung und darin eine geeignete Modellbeschreibung verwendet werden. Hierfür ist als Beispiel Modelica als multidiszi-

	Ein Gleichungslöser (geschlossene Simulation)	Mehrere Gleichungslöser (verteilte Simulation, schwache Kopplung)
Eine Modellierungs- umgebung (geschlossene Modellbildung)	„Klassische“ Simulation, keine Kopplung, ein i. Allg. multiphysikalisches Gesamtmodell	Modellseparation, z.B. zur Parallelisierung der Rechnung oder zum Abtrennen steifer Gleichungsteile (<i>Multirate</i> -Verfahren)
Mehrere Modellierungs- umgebungen (verteilte Modellbildung)	Modellkopplung (starke Kopplung, Modelleexport und -import, <i>function-call</i>)	Co-Simulation (Integratorkopplung, <i>solver coupling</i> , <i>Multirate/Multimethod</i> -Verfahren)

Tabelle 1.1: Einordnung der Verfahren für die gekoppelte Simulation, vgl. [GKL06].

plinäre Modellierungssprache zu nennen [FE98]. Das Ergebnis der Modellbildung ist dann ein i. Allg. multiphysikalisches Gesamtmodell, welches mit einem einzelnen Gleichungslöser simuliert werden kann.

Werden einzelne Modellteile in unterschiedlichen Modellierungsumgebungen erstellt, so ist es oft möglich, diese Modelle zu exportieren, in einem einzelnen Programm zu importieren und dann geschlossen mit einem Gleichungslöser zu simulieren. Man nennt dies Modellkopplung [LDHS01, GKL06, BAHD07, Fri11] oder starke Kopplung (*strong* oder *tight coupling*) [VKV04, SBC⁺07, Val09, Bus12]. Der Modelleexport kann auf Basis eines Gleichungs- oder Codeexportes durchgeführt werden, wobei dies symbolische Gleichungen, Quelltext oder auch kompilierter Code (Funktionsaufruf, *function-call*) sein kann [LDHS01, Arn09, Val09, Bus12, Rüd12]. Werden hingegen die diskretisierten Gleichungen, also Modell und Lösungsverfahren exportiert [LDHS01, BAHD07, Arn09, Bus12], handelt es sich in der hier verwendeten Einordnung um eine Co-Simulation.

Falls an der Simulation mehrere Gleichungslöser beteiligt sind, handelt es sich um eine sogenannte schwache Kopplung (*weak coupling*) [Val09, GGC09, Fri11, Bus12, BWZH13a, BWZH13b]. Im Gegensatz zu der geschlossenen Lösung sind dabei Verfahren notwendig, bei denen die Koppelgrößen approximiert werden (\rightarrow 2.4.3) und die Koppelgleichungen damit nur zu festgelegten Kommunikationszeitpunkten (Makrozeitpunkten) erfüllt sind. Auch müssen die beteiligten Gleichungslöser zeitlich synchronisiert werden (\rightarrow 2.4.1).

Wird nur eine, oft monodisziplinäre, Modellierungsumgebung eingesetzt, um die Modellgleichungen zu erstellen und werden diese dann für die Simulation auf mehrere Gleichungslöser aufgeteilt, kann dies als Modellseparation bezeichnet werden [GKL06]. Ein solches Vorgehen dient dazu, die Gleichungslösung zu parallelisieren [FU09, VM11], oder steife Gleichungsanteile ([ESF98, HW10]) abzutrennen. Werden steife Gleichungsanteile abgetrennt und gesondert gelöst, ergibt sich der Vorteil, dass nicht mehr das Gesamtsystem, sondern nur die steifen Gleichungsanteile mit einer kleinen Schrittweite des Zeitintegrationsverfahrens gelöst werden müssen. Diese Vorgehensweise führt auf die sogenannten *Multirate*-Verfahren [Gom81, GW84, Ske89, GR94, GKR01, OV04, VEGMM05, SHV07, Arn07, SM11b, GNLG11].

Bei der Co-Simulation, auch Integrator-, Simulator- oder Solverkopplung (engl. *solver coupling*) genannt, wird sowohl mit mehreren Modellierungsumgebungen, als auch mit mehreren Gleichungslösern gearbeitet. Hierbei können sowohl unterschiedliche Subsystemschrittweiten, als auch verschiedene Gleichungslöser (z.B. explizit/implizit, ...) zum Einsatz kommen (*Multirate*- und *Multimethod*-Verfahren). Eine Co-Simulation dieser Art wird häufig bei multiphysikalischen Systemen oder bei der Verwendung verschiedener Modellarten (z.B. MKS/FEM) eingesetzt. Die Subsysteme werden normalerweise so gewählt, dass sie monodisziplinär sind und mit einer geeigneten Modellierungsumgebung erstellt und mit deren optimierten Gleichungslösern simuliert werden können. Der Einsatz von Co-Simulationen ist weit verbreitet [WCSW97a, WCSW97b, KS00b, Gu01, KSS02, Kno02, Dro03, GA04, CMN⁺05, PBAH06, ZLF⁺06, APRP08, GGM10, FSU10, FLE10, Fri11, GNLG11, SS11, BZWB12, SEW⁺12a, SSS⁺13, BWZH13b, SSSS13, AHK14].

Bei der Co-Simulation müssen nicht zwingend Softwaregleichungslöser eingesetzt werden. Es besteht eine Verwandtschaft zu *Hardware in the Loop (HiL)* bzw. *Software in the Loop (SiL)* Methoden, welche allerdings Echtzeitanforderungen erfüllen müssen [LDHS01, Dro04, Bou09, JHM10, Jus11, SBTZ13, ZKT14].

Eine Liste mit verfügbaren Schnittstellen und Beispielen für gekoppelte Modelle und Co-Simulationen ist im Anhang A zu finden.

Ist von Co-Simulation die Rede, so ist in der Regel die Kopplung von zwei (mehreren) dynamischen Subsystemen gemeint. Diese werden mithilfe von zwei (mehreren) gekoppelten Zeitintegrationsverfahren (dynamischen Solvern) gelöst. Es ist allerdings auch möglich, ein dynamisches Subsystem mit einem oder mehreren statischen Subsystemen zu koppeln. Da in dieser Arbeit beide Kopplungsarten behandelt werden, wird für die Kopplung von dynamischen Subsystemen der Begriff „Co-Simulation“ verwendet (→ Teil I), wohingegen die dynamisch-statische Kopplung allgemeiner als „Solverkopplung“ bezeichnet wird (→ Teil II). Die dynamisch-statische Solverkopplung kann auch als Auswertung einer komplexen, i. Allg. vektoriiellen, externen Funktion angesehen werden.

Welche Co-Simulationsverfahren es gibt und wie diese einzuordnen sind, wird in Kapitel 2 beschrieben. Ablauf und Verfahren für die dynamisch-statische Solverkopplung werden in Kapitel 4 behandelt.

1.3. Ziele dieser Arbeit

In dieser Arbeit sollen komplexe, multiphysikalische Systeme, d.h. konkrete, aus der industriellen Entwicklung stammende Modelle, gekoppelt werden. Da die Submodelle von unterschiedlichen Fachleuten getrennt voneinander erstellt werden sollen bzw. zum großen Teil bereits vorhanden sind, sind die zu verwendenden Programme festgelegt (→ Anhang C). Da es sich um kommerzielle Programme handelt, müssen für eine Kopplung die dort vorgesehenen Zugriffsmöglichkeiten (*user routines*, externe Funktionen) genutzt werden. Die daraus entstehenden Einschränkungen für die Co-Simulation (keine Makroschrittwiederholung, nur explizite Kopplungsmethoden, keine *Constraint* Kopplung) werden in Abschnitt 2.4.5 aufgelistet.

Bei den bearbeiteten Modellen tritt in dieser Arbeit nur der häufige Sonderfall von zwei Subsystemen bzw. eine Anordnung in Baumstruktur auf. Effekte, welche bei Kopplungsstrukturen mit Schleifen auftreten [ACS13] werden daher nicht untersucht. Auch werden keine Betrachtungen zu

Echtzeitanforderungen angestellt. Da immer ein Mehrkörper-Modell (MKS) mit Modellen anderer Disziplinen gekoppelt wird, sind die Koppelgrößen, welche zwischen den Submodellen kommuniziert werden, konzentrierte Variablen. Im Gegensatz zu der Kopplung von Feldgrößen, wie sie z.B. bei einer Fluid/Struktur Kopplung auftreten würden, ist daher die Anzahl der Koppelgrößen vergleichsweise gering (< 100).

Bei der Co-Simulation mit den hier eingesetzten expliziten Verfahren (\rightarrow 2.4) kann es vorkommen, dass auch dann, wenn physikalisch stabile Subsysteme mit numerisch stabilen Zeitintegrationsverfahren (Subsystemsolvern) gekoppelt werden, die gekoppelte Lösung numerisch instabil wird (\rightarrow 2.5.1). Ebenso wird durch die Kopplung ein zusätzlicher numerischer Verfahrens- und Rundungsfehler in die Lösung eingebracht (\rightarrow 2.5.2).

Daher soll untersucht werden, inwiefern die Verfahrensparameter der Co-Simulation (z.B. Makroschrittweite und Polynomgrad der Approximation, \rightarrow 2.4) auf die numerische Stabilität und die Genauigkeit der gekoppelten Lösung Einfluss haben. Neben Stabilität und Fehler muss auch die Effizienz der Kopplungsverfahren betrachtet werden (\rightarrow 2.5.3). Hierbei müssen zum einen ein zusätzlicher numerischer Aufwand durch die Approximation und die Kommunikation (TCP/IP) der Koppelgrößen und zum anderen erhöhte Rechenzeiten durch Einschränkungen der Subsystemsolver (Mikroschrittweite \leq Makroschrittweite, \rightarrow 2.6.3.3) betrachtet werden.

Auch die Subsysteme haben auf die numerische Stabilität und den Fehler der Kopplung Einfluss. Werden beispielsweise schnell veränderliche oder sogar unstetige Koppelgrößen verwendet, so kann dies zu einem großen numerischen Fehler oder zur numerischen Instabilität der Kopplung führen.

Neben diesen numerischen Aspekten gilt es auch die Simulationsergebnisse der gekoppelten Modelle zu untersuchen. Insbesondere sollen dynamische Effekte bei der Interaktion zwischen den Submodellen aufgezeigt werden.

Dieser Arbeit vorangehende Veröffentlichungen, bei denen der Verfasser Autor, Co-Autor oder Diplomarbeitbetreuer war, sind in Anhang B zu finden.

Teil I.

Co-Simulation

2. Theorie der Co-Simulation

In diesem Kapitel wird nach einer Einleitung (Abschnitt 2.1) ein Testmodell zur Analyse der Co-Simulationsverfahren definiert, siehe Abschnitt 2.2. Bei der Zerlegung des Gesamtsystems in Subsysteme können verschiedene Topologien entstehen, welche in Abschnitt 2.3 vorgestellt werden. Die Co-Simulationsverfahren, siehe Abschnitt 2.4, unterscheiden sich dann im Ablauf (\rightarrow 2.4.1), der Wahl der Makroschrittweite (\rightarrow 2.4.2) und der Approximation der Koppelgrößen (\rightarrow 2.4.3). Um die Verfahren zu bewerten, werden in Abschnitt 2.5 Kriterien definiert. Die Analyse der Verfahren erfolgt dann in Abschnitt 2.6.

2.1. Einleitung

Unter Co-Simulation versteht man die Kopplung von mindestens zwei numerischen Zeitintegrationsverfahren (dynamischen Solvern). Hierzu werden dynamische Systeme in mindestens zwei Subsysteme zerlegt bzw. diese bereits getrennt modelliert, siehe Abbildung 2.1.

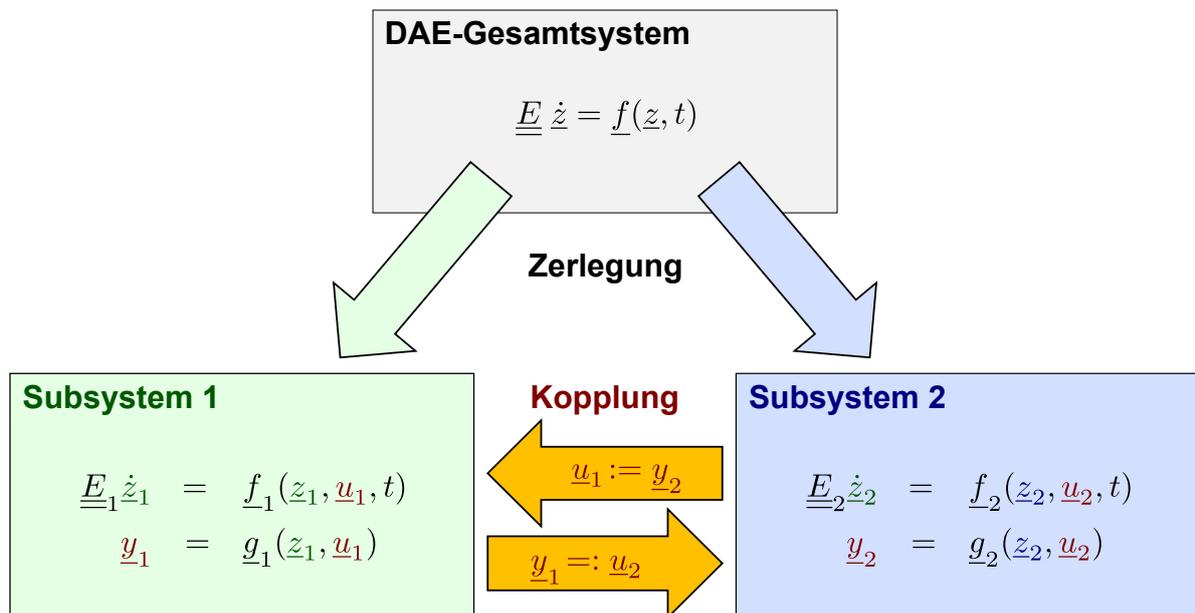


Abbildung 2.1: Zerlegung des Gesamtsystems in Subsysteme, vgl. [BS10c, BS11b, Bus12].

Es sind: $\underline{E}, \underline{E}_1, \underline{E}_2$ reelle Matrizen (ggf. singularär), z, z_1, z_2 Systemzustände, $\underline{f}, \underline{f}_1, \underline{f}_2$ vektorielle Funktionen (i. Allg. nichtlinear), $\underline{g}_1, \underline{g}_2$ Ausgangsgleichungen, $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ Systemeingänge, $\underline{y}_1, \underline{y}_2$ Systemausgänge und t ist die Zeit.

Es wird angenommen, dass sich das Gesamtsystem mittels differential-algebraischer Gleichungen erster Ordnung (engl. differential algebraic equations, DAE) beschreiben lässt¹ [MC96, Nol09,

¹Handelt es sich um partielle Differentialgleichungen (engl. partial differential equations, PDE), so müssen diese zunächst im Ort diskretisiert werden [Bus12]. Gleichungssysteme höherer Ordnung können in ein System 1. Ordnung überführt werden [SK09].

Sch10a, BZBP13]. Die aufgeteilten Subsystemgleichungen sind über Ein- und Ausgänge miteinander gekoppelt. Bei der Lösung der Subsystemgleichungen müssen daher die Koppelgrößen (Ein- und Ausgangsvariablen) ausgetauscht und die Subsystemsolver zeitlich synchronisiert werden (\rightarrow 2.4.1). Die zwischen den beiden Subsystemen bestehende Kopplungsschleife wird durch eine geeignete Approximation der Koppelgrößen (\rightarrow 2.4.3) während eines Makroschrittes aufgelöst.

2.2. Testmodell: *Zweimassenschwinger*

Zur Analyse der Co-Simulationsverfahren wird ein linearer Zweimassenschwinger als Testmodell verwendet, siehe Abbildung 2.2. Dieser Zweimassenschwinger kann als Erweiterung der *Dahlquist'schen* Testgleichung ($\dot{z} = \lambda z$, $z(0) = 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$) für die Co-Simulation angesehen werden [Fri11, BS10a, BS10c, BS11c, Bus12, SLL14]. Die Parameter und Anfangswerte des Zweimassenschwingers wurden festgelegt und nicht variiert, siehe Tabelle 2.1. Parametervariationen und die Auswirkungen auf die Ergebnisse der Co-Simulation können [BS10a, BS10c, BS11c, Bus12] entnommen werden. Aufgrund dieser Arbeiten können auch numerische Stabilitätsgrenzen für den Zweimassenschwinger angegeben werden.

Vorteil des Testmodells *Zweimassenschwinger* ist, dass eine analytische Lösung, für die linearen Differentialgleichungen des Gesamtsystems, bekannt ist. Damit ist es möglich, eine globale und lokale Referenzlösung zu berechnen und den lokalen und globalen numerischen Fehler der Co-Simulation zu bestimmen, siehe hierzu Abschnitt 2.5.2.

Der Zweimassenschwinger wird in einigen Arbeiten als Testmodell eingeführt [GGC09, BS10a, BS10c, FSU10, GNLG11, Fri11, SM11b, BS11c, BS11b, Bus12, SL14b, SLL14]. Die Wahl eines mechanischen Testmodells schließt andere physikalischen Disziplinen nicht aus, da analoge Systeme, welche auf dieselben Gleichungen führen, gefunden werden können [Val09, Nol09].

Weitere Test- und Benchmark-Modelle für die gekoppelte Simulation sind: Doppelpendel [KS00b, KS00a, VM11], 1/4 Fahrzeugmodell [Kno02, Val09, SAC12, ACS13], Mehrmassenschwinger [IN11] und Pendel mit Einmassenschwinger [Arn07, Arn09, AAB⁺09], sowie Stromabnehmer und Oberleitung (pantograph/catenary problem) [VA99, AS00, AG01, APRP08, AAB⁺09, Arn10].

Anmerkung: In dieser Arbeit wird das Testmodell *Zweimassenschwinger* nicht verwendet um theoretische Untersuchungen durchzuführen, sondern um die Verfahren und die Implementierung der Co-Simulationsschnittstelle mit verschiedenen Kombinationen von kommerziellen Solvern zu testen.

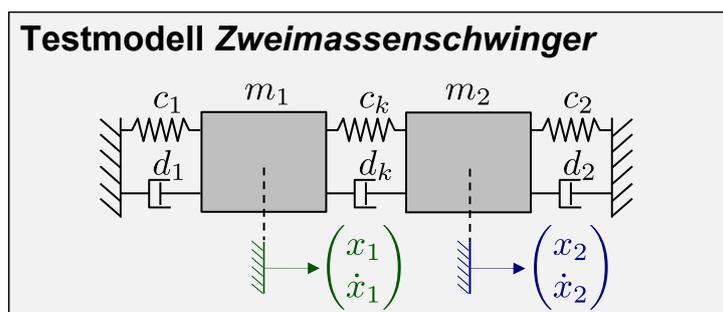


Abbildung 2.2: Testmodell *Zweimassenschwinger* [GGC09, BS10c, Fri11, Bus12].

Masse [kg]	Federsteifigkeit [N/m]	Dämpfungskonstante [Ns/m]
$m_1 = 1$	$c_1 = 10^4$	$d_1 = 2$
$m_2 = 1$	$c_2 = 10^5$	$d_2 = 6.3246$
–	$c_k = 10^6$	$d_k = 14.1421$

Position [m]	Geschwindigkeit [m/s]
$x_{10} = 1$	$\dot{x}_{10} = 0$
$x_{20} = 2$	$\dot{x}_{20} = 0$

Tabelle 2.1: Parameter und Anfangswerte des Zweimassenschwingers

Gleichungen des Testmodells *Zweimassenschwinger*

Die zwei linearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung des Zweimassenschwingers lauten wie folgt:

$$\ddot{x}_1 = - \frac{c_1 + c_k}{m_1} x_1 - \frac{d_1 + d_k}{m_1} \dot{x}_1 + \frac{c_k}{m_1} x_2 + \frac{d_k}{m_1} \dot{x}_2 \quad (2.1)$$

$$\ddot{x}_2 = + \frac{c_k}{m_2} x_1 + \frac{d_k}{m_2} \dot{x}_1 - \frac{c_2 + c_k}{m_2} x_2 - \frac{d_2 + d_k}{m_2} \dot{x}_2 \quad (2.2)$$

Nach Einführung von Zustandsgrößen

$$z_{11} = x_1, \quad z_{12} = \dot{x}_1, \quad z_{21} = x_2, \quad z_{22} = \dot{x}_2 \quad (2.3)$$

können die Gleichungen (2.1) und (2.2) in vier Gleichungen 1. Ordnung überführt werden:

$$\dot{z}_{11} = z_{12} \quad (2.4)$$

$$\dot{z}_{12} = - \frac{c_1 + c_k}{m_1} z_{11} - \frac{d_1 + d_k}{m_1} z_{12} + \frac{c_k}{m_1} z_{21} + \frac{d_k}{m_1} z_{22} \quad (2.5)$$

$$\dot{z}_{21} = z_{22} \quad (2.6)$$

$$\dot{z}_{22} = \frac{c_k}{m_2} z_{11} + \frac{d_k}{m_2} z_{12} - \frac{c_2 + c_k}{m_2} z_{21} - \frac{d_2 + d_k}{m_2} z_{22} \quad (2.7)$$

In Matrixschreibweise ergibt sich folgendes Differentialgleichungssystem:

$$(2.4), (2.5), (2.6), (2.7) \quad \Leftrightarrow: \quad \dot{\underline{z}} = \underline{A} \cdot \underline{z} \quad (2.8)$$

Die später genutzten Koppelgrößen (Kraft-Weg Kopplung) können aus den Zuständen berechnet werden:

$$y_{k1} = z_{11} = x_1 \quad (2.9)$$

$$y_{k2} = z_{12} = \dot{x}_1 = v_1 \quad (2.10)$$

$$y_{k3} = - c_k z_{11} - d_k z_{12} + c_k z_{21} + d_k z_{22} = F_k \quad (2.11)$$

$$(2.9), (2.10), (2.11) \quad \Leftrightarrow: \quad \underline{y}_k = \underline{C} \cdot \underline{z} \quad (2.12)$$

Es ist möglich, die analytische Lösung über das Matrixexponential zu berechnen:

$$\underline{z}(t) = \exp[\underline{A}(t - t_0)] \cdot \underline{z}_0 \quad (2.13)$$

$$\underline{y}_k(t) = \underline{C} \cdot \underline{z}(t) \quad (2.14)$$

Als Zeitverlauf der Koppelgrößen für das Testmodell *Zweimassenschwinger* ergibt sich mit den Parametern aus Tabelle 2.1 der Verlauf in Abbildung 2.3.

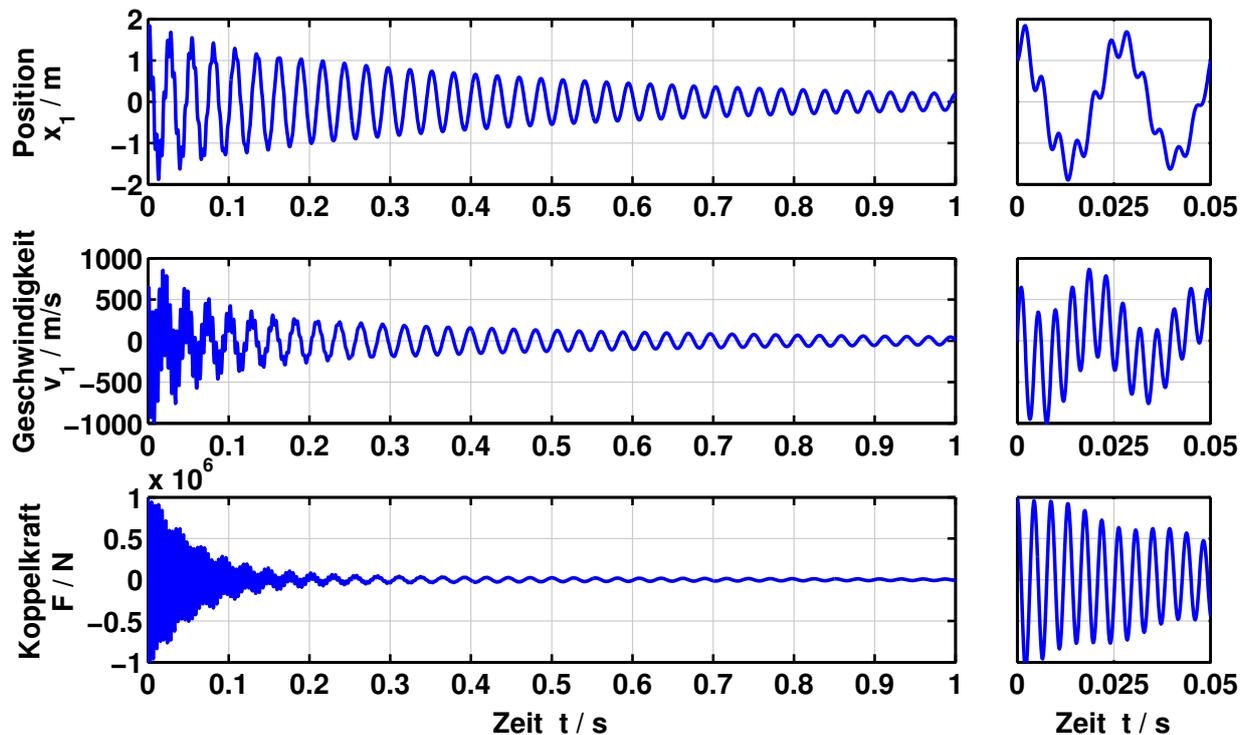


Abbildung 2.3: Zeitverlauf der Koppelgrößen für das Testmodell *Zweimassenschwinger*. Links: Kompletter Verlauf bis $t = 1$ s. Rechts: Detaillierter Verlauf bis $t = 0.05$ s.

2.3. Kopplungstopologien

Die Kopplungstopologien, also die Art der Zerlegung des Gesamtmodells in Submodelle, können in zwei Klassen unterteilt werden: Die Kopplung durch eingeprägte Kräfte (*applied-force coupling*) und die Kopplung durch Reaktionskräfte (bzw. Zwangskräfte, *constraint coupling*) [KS00b, Arn07, Bus12]. Anhand des Testmodells *Zweimassenschwinger* werden in den folgenden Unterkapiteln die Zerlegungsarten Kraft-Weg, Weg-Weg und Kraft-Kraft Kopplung über eingeprägte Kräfte skizziert. Um den Unterschied deutlich zu machen, wird in Abschnitt 2.3.4 die hier nicht näher betrachtete *Constraint* Kopplung, also die Kopplung durch Reaktionskräfte (bzw. Zwangskräfte), dargestellt.

2.3.1. Kraft-Weg Kopplung

Bei der Kraft-Weg Kopplung des Zweimassenschwingers [BS10c, Bus12, SL14b, SLL14], siehe Abb. 2.4, werden die Koppelfeder c_k und der Koppeldämpfer d_k dem Subsystem 2 zugeschlagen. Das Subsystem 2 erhält dann Weg x_1 und Geschwindigkeit \dot{x}_1 der Masse m_1 aus Subsystem 1 als Eingangsvektor \underline{u}_2 . Über das lineare Kraftgesetz $F_k = c_k(x_2 - x_1) + d_k(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$ wird in Subsystem 2

die Koppelkraft F_k berechnet. Diese dient als Eingang u_1 für das Subsystem 1.²

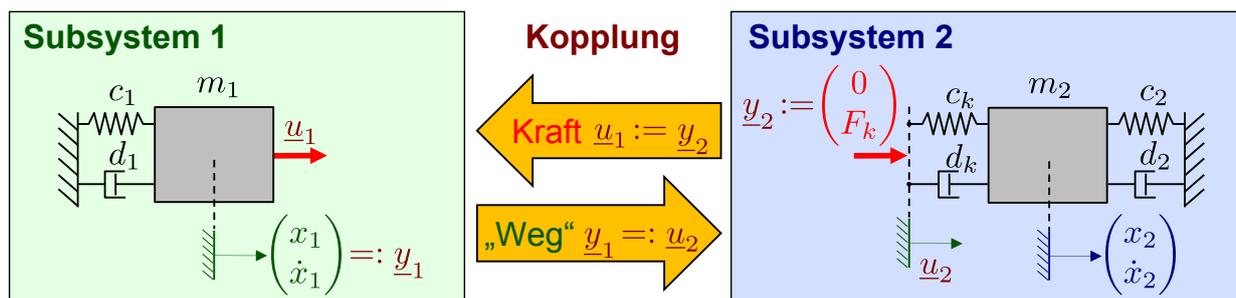


Abbildung 2.4: Kraft-Weg Kopplung [BS10c, Bus12].

Der Vorteil dieser Zerlegung ist, dass das Kraftgesetz nur in Subsystem 2 bekannt sein muss. Im Allgemeinen ist das Kraftgesetz, insbesondere bei multiphysikalischen Modellen, komplex und nichtlinear. In diesem Fall ist eine Duplizierung oder Herausnahme dieses Kraftgesetzes, wie bei der Weg-Weg (Abb. 2.5) oder Kraft-Kraft Kopplung (Abb. 2.6), nicht ohne weiteres möglich.

Aufteilung des Zweimassenschwingers in zwei Subsysteme (Kraft-Weg Kopplung)

Subsystem 1:

$$\dot{z}_{11} = z_{12} \quad (2.15)$$

$$\dot{z}_{12} = -\frac{c_1}{m_1} z_{11} - \frac{d_1}{m_1} z_{12} + \frac{1}{m_1} u_{12} \quad (2.16)$$

$$(2.15), (2.16) \Leftrightarrow \dot{\underline{z}}_1 = \underline{A}_1 \cdot \underline{z}_1 + \underline{B}_1 \cdot \underline{u}_1 \quad (2.17)$$

$$y_{11} = z_{11} =: u_{21} \quad (2.18)$$

$$y_{12} = z_{12} =: u_{22} \quad (2.19)$$

$$(2.18), (2.19) \Leftrightarrow \underline{y}_1 = \underline{C}_1 \cdot \underline{z}_1 + \underline{D}_1 \cdot \underline{u}_1 \quad (2.20)$$

Subsystem 2:

$$\dot{z}_{21} = z_{22} \quad (2.21)$$

$$\dot{z}_{22} = -\frac{c_2 + c_k}{m_2} z_{21} - \frac{d_2 + d_k}{m_2} z_{22} + \frac{c_k}{m_2} u_{21} + \frac{d_k}{m_2} u_{22} \quad (2.22)$$

$$(2.21), (2.22) \Leftrightarrow \dot{\underline{z}}_2 = \underline{A}_2 \cdot \underline{z}_2 + \underline{B}_2 \cdot \underline{u}_2 \quad (2.23)$$

$$y_{21} = 0 =: u_{11} \quad (2.24)$$

$$y_{22} = c_k z_{21} + d_k z_{22} - c_k u_{21} - d_k u_{22} =: u_{12} \quad (2.25)$$

$$(2.24), (2.25) \Leftrightarrow \underline{y}_2 = \underline{C}_2 \cdot \underline{z}_2 + \underline{D}_2 \cdot \underline{u}_2 \quad (2.26)$$

²Die Kraft-Weg Kopplung ist nicht symmetrisch, allerdings sind die Bezeichnungen und Gleichungen von Subsystem 1 und 2 natürlich austauschbar.

Anhand der Gleichungen (2.18) und (2.19) ist zu sehen, dass in Gleichung (2.20) $\underline{D}_1 \equiv 0$ gilt. Anders gesagt, es existiert kein Durchgriff in der Ausgangsgleichung von Subsystem 1 (2.20) und damit keine algebraische Schleife in den Subsystemausgängen. Dies führt nach [KS00b] dazu, dass die Kraft-Weg Kopplung auch ohne iterative Kopplungsverfahren nullstabil ist, siehe Abschnitt 2.5.1.

2.3.2. Weg-Weg Kopplung

Bei der Weg-Weg Kopplung des Zweimassenschwingers [BS10c, Bus12, SL14b, SLL14], siehe Abb. 2.5, werden die Koppelfeder c_k und der Koppeldämpfer d_k dupliziert und in Subsystem 1 und 2 eingesetzt. Damit sind die Koppelgrößen dieser symmetrischen Zerlegungsart in beiden Subsystemen der Weg und die Geschwindigkeit der Masse m_1 bzw. m_2 .

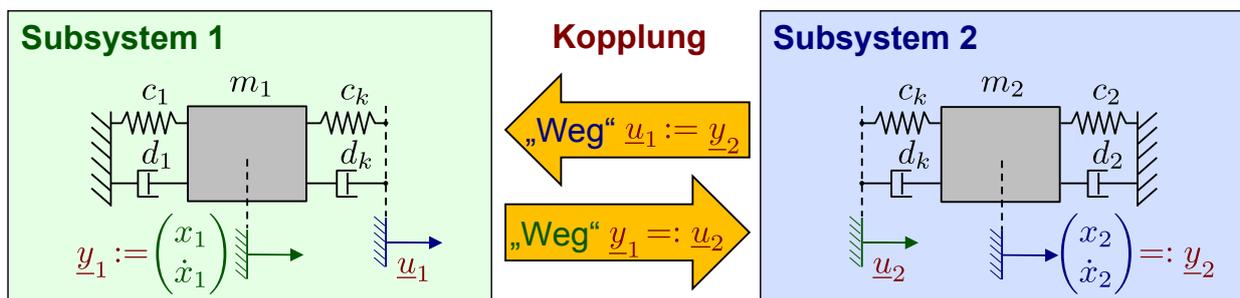


Abbildung 2.5: Weg-Weg Kopplung [BS10c, Bus12].

2.3.3. Kraft-Kraft Kopplung

Wird die algebraische Gleichung der Koppelkraft des Zweimassenschwingers $F_k = c_k(x_2 - x_1) + d_k(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$ weder in Subsystem 1 noch in Subsystem 2, sondern in der Koppelroutine gelöst, so ergibt sich eine Kraft-Kraft Kopplung [FU09, FSU10, Fri11, SL14b, SLL14], siehe Abb. 2.6. Bei dieser symmetrischen Kopplungstopologie haben beide Subsysteme Weg und Geschwindigkeit als Ausgänge und die entsprechende Koppelkraft als Eingang.

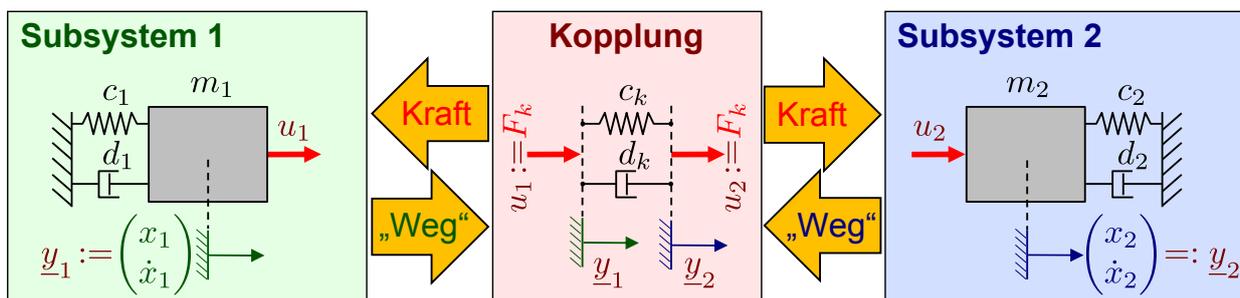


Abbildung 2.6: Kraft-Kraft Kopplung [FU09, FSU10, Fri11].

2.3.4. Constraint Kopplung

Bei der *Constraint* Kopplung wird nicht über eingeprengte Kräfte, sondern über Reaktionskräfte (Zwangskräfte) gekoppelt. Konkret ist dies der Fall, wenn als Kopplung eine algebraische Zwangsbedingung und *Lagrange* Multiplikatoren verwendet werden [Arn07, Arn10, SL14a, SL14c], siehe

Abb. 2.7. Dies führt unter Umständen zum Verlust der Nullstabilität expliziter (nicht-iterativer) Co-Simulationsverfahren [KS00b].

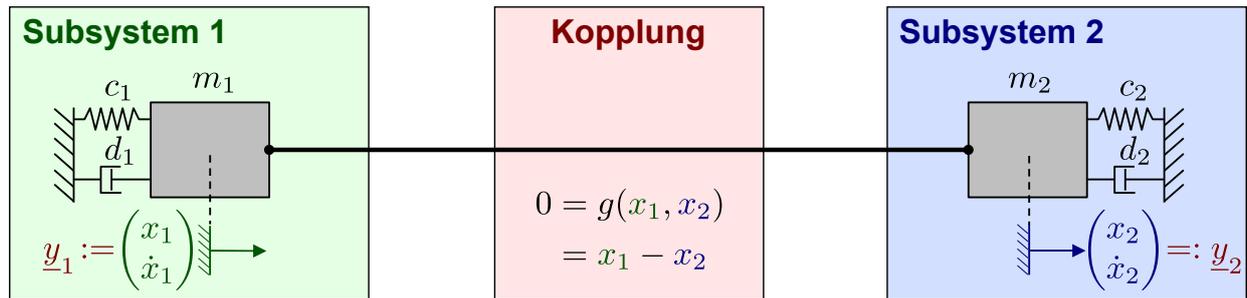


Abbildung 2.7: Constraint Kopplung [SL14a, SL14c].

2.4. Co-Simulationsverfahren

Unter Co-Simulationsverfahren werden hier Algorithmen verstanden, mit denen die zeitliche Synchronisation der Subsystemsolver (Abschnitt 2.4.1 und 2.4.2) und die Approximation der Koppelgrößen (Abschnitt 2.4.3) durchgeführt werden.

2.4.1. Ablauf des Datenaustausches

Bei einer Co-Simulation müssen die Zeitschritte der beteiligten Subsystemsolver synchronisiert werden. Hierzu sind verschiedene Abfolgen der Berechnung der Subsystemlösungen möglich. Zunächst können diese in iterative und nicht iterative Verfahren unterteilt werden [BZWB12].

Bei iterativen Verfahren werden Makroschritte wiederholt, um die Lösungen der Subsystemsolver mit aktualisierten Eingangsgrößen neu zu berechnen [KS00b, KS00a, CMN⁺05]. Dies erfordert, dass die Subsystemsolver in der Zeit zurückspringen können. Aus diesem Grund sind derzeit für die Verwendung mit kommerziellen Solvern iterative Verfahren meist nicht einsetzbar [BZWB12]. Diese Verfahren werden auch als implizit oder semi-implizit bezeichnet.

Die expliziten Verfahren können in parallelen (direkten) oder seriellen (alternierenden, sequenziellen) Ablauf eingeteilt werden [BZWB12]. Der parallele Datenaustausch wird oft auch als *Jacobi* Typ [Arn07, Bus12] oder *Conventional Parallel Staggered (CPS) procedure* [FL00] bezeichnet. Der serielle Datenaustausch wird als *Gauß-Seidel* Typ [Arn07, Bus12] oder *Conventional Serial Staggered (CSS) procedure* [LF98, FPF99, FL00] bezeichnet. Siehe Tabelle 2.2.

parallel (direkt)	seriell (alternierend)	iterativ	
explizit (keine Makroschrittwiederholung notwendig)		implizit (Makroschrittwiederholung notwendig)	semi-implizit
<i>Jacobi</i> Typ (Abb. 2.9 und 2.11) [Arn07, Bus12, SLL14]	<i>Gauß-Seidel</i> Typ (Abb. 2.8 und 2.10) [Arn07, Bus12]	<i>waveform relaxation</i> , dynamische Iteration [LRSV82, MN87, AG01, Ebe08, SLL14]	[NES05, SL14a, SL14c, SL14b]
<i>Conventional Parallel Staggered (CPS) procedure</i> [FL00]	<i>Conventional Serial Staggered (CSS) procedure</i> [FL00]		

Tabelle 2.2: Ablauf des Datenaustausches von Co-Simulationsverfahren, vgl. [Val09, BZWB12].

2.4.1.1. Ablauf des *Gauß-Seidel* Typs

Bei dem seriellen *Gauß-Seidel* Typ wird die Zeitintegration der Subsysteme nacheinander ausgeführt. Abbildung 2.8 stellt den Ablauf eines Makroschrittes von T_n nach T_{n+1} schematisch dar.

Bei dem Makrozeitpunkt T_n beginnt der Solver von Subsystem 1 mit der Zeitintegration. Die für die Berechnung der Mikroschritte von Subsystem 1 benötigten Eingangsgrößen \underline{u}_1 werden aus bereits kommunizierten Werten der Ausgangsgrößen von Subsystem 2 \underline{y}_2 extrapoliert; dies ergibt $\tilde{\underline{u}}_1$. (In der Abbildung wird beispielhaft eine lineare Extrapolation der Werte von $\underline{y}_2(T_{n-1})$ und $\underline{y}_2(T_n)$ verwendet.) Ist der Subsystemsolver 1 am Makrozeitpunkt T_{n+1} angelangt, werden die berechneten Ausgangsgrößen $\underline{y}_1(T_{n+1})$ an Subsystem 2 kommuniziert. Die Zeitintegration von Subsystem 2 beginnt nun am Makrozeitpunkt T_n . Die Berechnung der Mikroschritte von Subsystem 2 erfolgt mit interpolierten Eingangsgrößen von \underline{u}_2 . (In der Abbildung beispielsweise lineare Interpolation zwischen $\underline{y}_1(T_n)$ und $\underline{y}_1(T_{n+1})$ ergibt $\tilde{\underline{u}}_2$.) Hat nun Subsystemsolver 2 den Makrozeitpunkt T_{n+1} erreicht, werden die berechneten Ausgangsgrößen $\underline{y}_2(T_{n+1})$ an Subsystem 1 kommuniziert und ein neuer Makroschritt beginnt.

Hierbei stellt sich die Frage, welches Subsystem die erste Zeitintegration ausführt. Bei der *slowest-first* Methode wird das System mit den langsamer veränderlichen Systemzuständen (größeren Zeitkonstanten) und damit mit den größeren Schrittweiten als erstes gelöst, siehe Abbildung 2.8. Im Gegensatz dazu zieht bei der *fastest-first* Methode der Solver des Systems mit den schneller veränderlichen Systemzuständen vor [GW84, Bus07, GGC09, SM11b]. Bei der Kopplung komplexer Systeme mit veränderlicher Dynamik (z.B. Unstetigkeiten bei mechanischen Kontakten) und Zeitintegration mit variabler Mikroschrittweite kann oft keine feste Zuordnung von „fast“ und „slow“ getroffen werden. Ebenso können bei *Multimethod* Co-Simulationen implizite wie auch explizite Solver gleichzeitig zum Einsatz kommen. Während die Wahl der Schrittweite bei expliziten Verfahren oft aus Gründen der numerischen Stabilität erfolgt und von der Systemdynamik abhängt, ist dies bei den impliziten Solvern nicht zwingend der Fall [HW10, SWP12].

2.4.1.2. Ablauf des Jacobi Typs

Bei dem parallelen *Jacobi* Typ werden die Subsystem Solver in jedem Makroschritt gleichzeitig gestartet. Abbildung 2.9 stellt den Ablauf eines Makroschrittes von T_n nach T_{n+1} schematisch dar.

Zunächst werden hierbei die Koppelgrößen $y_1(T_n)$ und $y_2(T_n)$ kommuniziert. Dann beginnen beide Subsysteme gleichzeitig die Zeitintegration. Hierzu werden für beide Subsysteme die Eingangsgrößen u_1 und u_2 extrapoliert. (In der Abbildung beispielsweise lineare Extrapolation von $y_1(T_{n-1})$ und $y_1(T_n)$ ergibt \tilde{u}_2 mit $i = 1, 2$ und $j = 2, 1$.) Haben beide Subsystem Solver den Makrozeitpunkt T_{n+1} erreicht, werden die berechneten Ausgangsgrößen $y_1(T_{n+1})$ und $y_2(T_{n+1})$ kommuniziert und ein neuer Makroschritt beginnt.

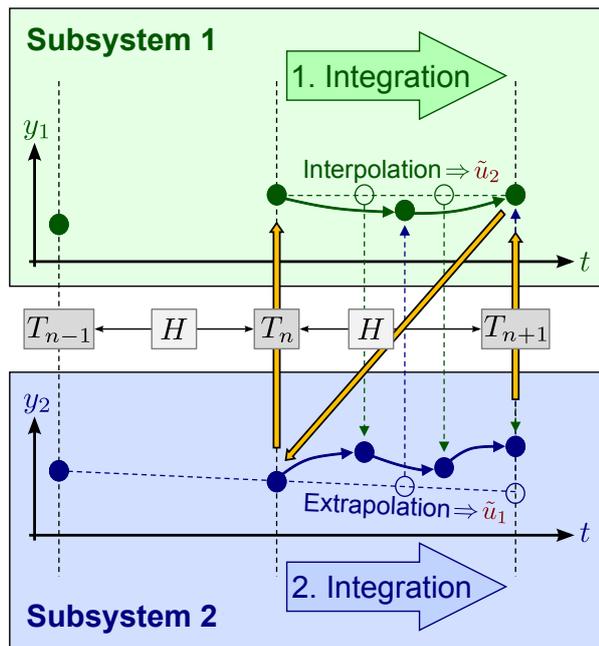


Abbildung 2.8: Gauß-Seidel Typ mit fester Makroschrittweite, *slowest-first* Methode, vgl. [FL00, Val09, BS10c, Bus12].

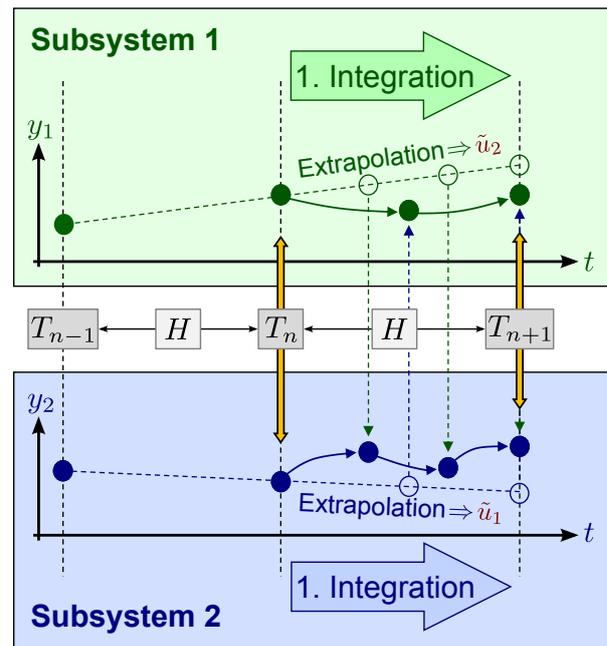


Abbildung 2.9: Jacobi Typ mit fester Makroschrittweite, vgl. [FL00, Val09, BS10c, Bus12].

2.4.2. Wahl der Makroschrittweite

Wie auch bei konventionellen Zeitintegrationsverfahren ist die Schrittweite ein wesentlicher Einflussparameter für die Co-Simulation. Aufgrund folgender Rahmenbedingungen muss die Makroschrittweite geeignet gewählt werden:

- Die Co-Simulation muss numerisch stabil sein (\rightarrow 2.5.1 und 2.6.1).
- Der zusätzlich durch die Co-Simulation verursachte Verfahrensfehler muss „klein genug“ sein (\rightarrow 2.5.2 und 2.6.2).
- Die Makroschrittweite muss größer als die Mikroschrittweiten sein ($H \geq \max(h_1, h_2)$) (\rightarrow 2.6.2).
- Die Makroschrittweite darf nicht so klein gewählt werden, dass die Co-Simulation ineffizient wird (\rightarrow 2.5.3 und 2.6.3).

Die Makroschrittweite wird in dieser Arbeit entweder fest, an eine der Mikroschrittweiten gekoppelt (Master/Slave Modus) oder variabel (Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung) gewählt. Eine weitere Möglichkeit der Makroschrittweitensteuerung auf Basis der *Richardson*-Extrapolation wird in [SAC12, ACS13] vorgestellt.

2.4.2.1. Feste Makroschrittweite $H = konst.$

Zunächst ist es möglich die Makroschrittweite H konstant zu wählen. Hierbei kann es problematisch sein, einen geeigneten Wert für die Makroschrittweite festzulegen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn sich die Verläufe der Koppelgrößen während der Simulationszeit stark ändern und implizite Subsystemsolver mit variabler (Mikro-)Schrittweite eingesetzt werden. Bei den hier verwendeten expliziten Co-Simulationsverfahren kann es vorkommen, dass aus Gründen der numerischen Stabilität eine vergleichsweise kleine Makroschrittweite gewählt werden muss, was auch eine Verkleinerung der Mikroschrittweiten nach sich ziehen kann. Insbesondere bei impliziten Subsystemsolvern kann dies dann zu deutlich erhöhten Rechenzeiten führen. Da die Wahl der Makroschrittweite direkten Einfluss auf den Verfahrensfehler der Co-Simulation hat, ist eine Überprüfung auf konvergente Co-Simulationsergebnisse unumgänglich.

Trotz der Einschränkungen, konnte bei den Co-Simulationen, der im Rahmen dieser Arbeit analysierten komplexen Modelle (siehe Abschnitt 3), immer eine geeignete Makroschrittweite gefunden werden.

2.4.2.2. An eine der Mikroschrittweiten gekoppelte Makroschrittweite: *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus

Bei dem *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus wird die Schrittweite von Subsystemsolver 1 (Master) als Makroschrittweite verwendet, siehe Abbildung 2.10. Dementsprechend macht der Master-Solver zunächst genau einen Zeitschritt und dann rechnet der Slave-Solver bis dieser Zeitpunkt erreicht ist. Da der Master-Solver nur einen Mikroschritt rechnet und der Slave-Solver nachzieht, muss der Master immer mit einer größeren Mikroschrittweite als der Slave rechnen.

2.4.2.3. Variable Makroschrittweite: *Jacobi* Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung

Im Gegensatz zum *Gauß-Seidel* Typ ist bei dem *Jacobi* Typ keine einfache Schrittweitensteuerung über einen Master/Slave Modus möglich, da die Solver parallel aufgerufen werden.

Bei dem in [BS11b, Bus12] vorgestellten Prädiktor/Korrektor Verfahren zur Makroschrittweitensteuerung, siehe Abbildung 2.11, wird zunächst eine Anfangsmakroschrittweite H_{init} gewählt. Der Makroschritt wird über den parallelen *Jacobi* Typ ausgeführt und am Ende die Differenz der extrapolierten mit den berechneten Koppelgrößen gebildet (e_1, e_2 in Abbildung 2.11). Mit einer Fehlernorm liefert dies einen Fehlerschätzer, welcher zur Makroschrittweitensteuerung verwendet werden kann, siehe unten.

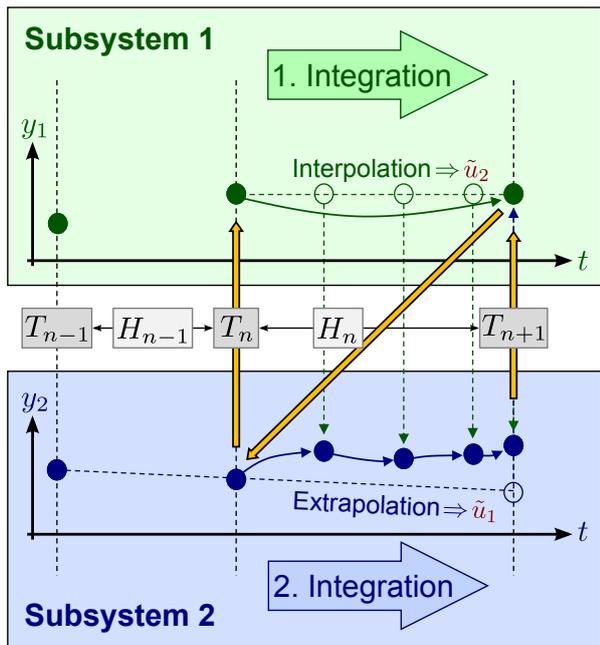


Abbildung 2.10: *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus, vgl. [FL00, Val09, BS10c, Bus12].

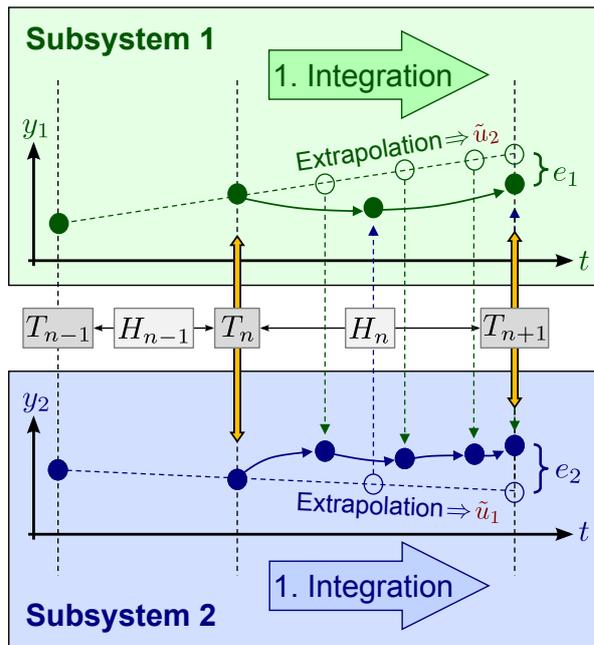


Abbildung 2.11: *Jacobi* Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittwertensteuerung, vgl. [BS11b, Bus12].

Makroschrittwertensteuerung

Bei der Implementierung einer Schrittwertensteuerung wird nicht die Differenz, also der absolute Fehler zwischen berechneten und extrapolierten Koppelgrößen gebildet, sondern eine geeignete Fehlernorm verwendet. Der geschätzte Fehler $\hat{\varepsilon}$ ergibt sich beispielsweise nach Gleichung (2.29); ρ ist hierbei die Gewichtung zwischen absolutem und relativem Fehler. [Eic92, ESF98, HNW08]

$$\text{Berechnete Koppelgrößen: } \underline{y}(T_n) = (y_1(T_n), \dots, y_{N_y}(T_n))^T \tag{2.27}$$

$$\text{Extrapolierte Koppelgrößen: } \underline{\tilde{y}}(T_n) = (\tilde{y}_1(T_n), \dots, \tilde{y}_{N_y}(T_n))^T \tag{2.28}$$

$$\text{Geschätzter Fehler } \hat{\varepsilon}(T_n) = \sqrt{\frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} \left(\frac{y_i(T_n) - \tilde{y}_i(T_n)}{1 + \rho \cdot \max(|y_i(T_n)|, |\tilde{y}_i(T_n)|)} \right)^2} \tag{2.29}$$

Für den nächsten Makroschritt H_{n+1} wird die Schrittweite aus der alten Makroschrittweite H_n , einer benutzerdefinierten Toleranz TOL und dem geschätzten Fehler berechnet, siehe Gleichung (2.30) oder (2.31) [GLS88].

$$\text{I-Regler: } \tilde{H}(T_{n+1}) = H(T_n) \cdot \left(\frac{TOL}{\hat{\varepsilon}(T_n)} \right)^{\frac{1}{p+1}} \tag{2.30}$$

$$\text{PI-Regler: } \tilde{H}(T_{n+1}) = H(T_n) \cdot \left(\frac{TOL}{\hat{\varepsilon}(T_n)} \right)^{\frac{\alpha}{p+1}} \cdot \left(\frac{\hat{\varepsilon}(T_{n-1})}{TOL} \right)^{\frac{\beta}{p+1}} \tag{2.31}$$

α und β sind benutzerdefinierte Parameter, welche auf $\alpha = 0.7$ und $\beta = 0.4$ festgelegt wurden. p ist der Polynomgrad der Extrapolation, siehe Abschnitt 2.4.3.

In der praktischen Anwendung werden häufig noch folgende Einschränkungen realisiert [BS11b]:

$$H(T_{n+1}) = \min \left\{ H_{max}, q_{max} \cdot H(T_n), \max \left\{ H_{min}, q_{min} \cdot H(T_n), q \cdot \tilde{H}(T_{n+1}) \right\} \right\}, \quad (2.32)$$

H_{max} : Maximale Makroschrittweite,

H_{min} : Minimale Makroschrittweite,

$q_{max} \in [1, \infty[$: Maximale Makroschrittweiten-Vergrößerung,

$q_{min} \in]0, 1]$: Maximale Makroschrittweiten-Verkleinerung,

$q \in]0, 1]$: Sicherheitsfaktor.

2.4.3. Approximation der Koppelgrößen

Zwischen zwei Makrozeitpunkten müssen bei allen Co-Simulationsverfahren die Koppelgrößen approximiert, also extra- bzw. interpoliert werden. Hierzu wurden folgende Verfahren vorgestellt:

- Polynominterpolation mit *Lagrange* Polynomen [BSMM01], verwendet p Stützstellen um Grad $p-1$ zu erreichen, siehe Abbildung 2.12 [Kno02, Bus07, Fri11, BS11c, BZWB12].
- *Hermite*-Interpolation [BSMM01], verwendet Stützstellen und deren Ableitungen [Fri11, BS11c].
- Verallgemeinerte Methoden [Fri11].
- Glättung der Koppelgrößen [OV04, GNLG11].
- Verstetigung der Koppelgrößen [Kno02, Bus07].
- Linearisiertes Ersatzmodell [RP02].
- Approximation durch Hinzunahme der Mikroschritte [BZWB12].
- Verbesserte Energieerhaltung durch eine Kompensation [BWZH13b].

In dieser Arbeit werden ausschließlich *Lagrange* Polynome eingesetzt. Abbildung 2.12 zeigt *Lagrange* Polynome vom Grad $p = 0, 1, 2, 3$ (konstant, linear, quadratisch und kubisch). Ausgehend

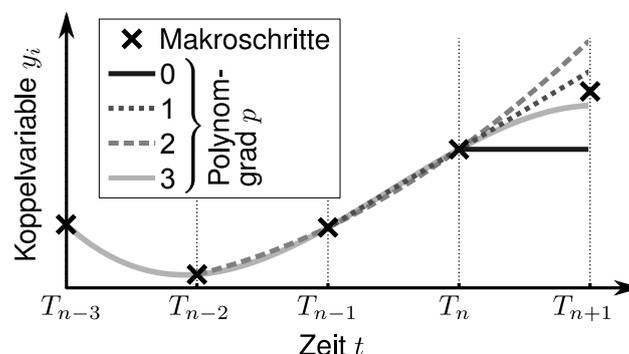


Abbildung 2.12: Extrapolation einer Koppelvariable y_i aus Makroschritten mittels *Lagrange* Polynomen vom Grad $p = 0, 1, 2, 3$.

vom Makrozeitpunkt T_n wird jeweils ein Polynom vom Grad p durch die Stützstellen $y_i(T_n)$ bis $y_i(T_{n-p})$ gelegt, mit dem Ziel, Werte $y_i(t)$ für den Makroschritt von T_n nach T_{n+1} zu extrapolieren. Bei dem Makroschritt T_{n+1} wurde zusätzlich der Wert $y_i(T_{n+1})$ eingezeichnet, welcher im

Allgemeinen nicht auf einem der extrapolierten Werte liegt. Hierbei wird klar, dass zu Beginn des nächsten Makroschrittes die Koppelgrößen unstetig sind, da das neu berechnete Extrapolationspolynom diesen Wert als Stützstelle benutzt.

2.4.4. Anlaufrechnung

Bei der Approximation der Koppelgrößen mittels *Lagrange* Polynomen werden für Polynomgrade $p > 0$ Stützstellen an vergangenen Makrozeitpunkten $y_i(T_{n-1})$ bis $y_i(T_{n-p})$ benötigt. Diese sind zu Beginn der Co-Simulation nicht verfügbar, weshalb eine Anlaufrechnung notwendig ist.

Bei Mehrschrittverfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen (z.B. BDF-Verfahren) ist ebenfalls eine Anlaufrechnung notwendig. Hierbei sind folgende Verfahren gebräuchlich:

- Verwendung von Einschrittverfahren (z.B. implizite *Runge-Kutta* Verfahren) mit gleicher Ordnung wie das eigentliche Mehrschrittverfahren (z.B. BDF-Verfahren) [HNW08, But08].
- Einsatz einer Ordnungssteuerung, welche bei Ordnung 1 mit sehr kleinen Schrittweiten beginnt und diese dann schrittweise hochsetzt [HNW08, But08, SWP12].

Beide Varianten sind bei der Co-Simulation schlecht einsetzbar. Eine höhere Ordnung von Beginn an könnte beispielsweise mit *Hermite* Polynomen [BS11c, Fri11] erreicht werden. Dies erfordert allerdings Zeitableitungen der Koppelgrößen, welche bei komplexen Modellen und kommerziellen Solvern nicht unbedingt zur Verfügung stehen. Die Wahl sehr kleiner Makroschrittweiten zu Beginn ist durch die Einschränkung, dass die Makroschrittweite größer sein muss als die Mikroschrittweiten ($H \geq \max(h_1, h_2)$) im Allgemeinen nicht möglich. (Im folgenden Abschnitt 2.4.5 wird erläutert, dass bei kommerziellen Solvern oft kein Einfluss auf die Mikroschrittweiten genommen werden kann.)

Aus diesem Grund werden in Abschnitt 2.6.2 für die idealisierte Untersuchung der Konvergenz am Testmodell analytisch berechnete Anfangswerte verwendet. Dies ist bei komplexen Modellen nicht möglich. Daher werden in dieser Arbeit zwei Typen von Anlaufrechnung eingesetzt:

- Eine „triviale“ Anlaufrechnung, bei der bei gleichbleibender Makroschrittweite H der Grad der Polynome von $p = 0$ in jedem Makroschritt hochgesetzt wird, bis der gewünschte Polynomgrad erreicht ist ($H_1: p = 0, H_2: p = 1, \dots$). Für die Auswirkung auf die Konvergenz siehe Abbildung 2.19 in Abschnitt 2.6.2.
- Da der *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus die minimal mögliche Makroschrittweite $H = h_1 \geq h_2$ wählt, weist dieses den kleinstmöglichen Fehler auf (\rightarrow 2.6.2). Daher kann dieses Verfahren für die anderen Co-Simulationsverfahren (z.B. den parallelen *Jacobi* Typ) als Anlaufrechnung eingesetzt werden. Die Auswirkung auf die Konvergenz wird in Abschnitt 2.6.2 (\rightarrow Abb. 2.21) diskutiert.

2.4.5. Einschränkungen kommerzieller Solver

Bei Verwendung kommerzieller Subsystemsolver für die Co-Simulation ergeben sich einige Einschränkungen:

- Wie bereits erwähnt, fehlt normalerweise die Möglichkeit, den kompletten Zustand der Subsystemsolver an einem Makrozeitpunkt zu speichern und zu diesem zurückzukehren. Hiermit könnten ggf. Makroschritte wiederholt werden, z.B. für iterative Kopplungsverfahren oder eine Makroschrittweitensteuerung. Da dies in kommerziellen Tools meist nicht vorgesehen ist, bleibt nur die Möglichkeit explizite Co-Simulationsverfahren einzusetzen.
- Bei impliziten Solvern, welche als Prädiktor/Korrektor Verfahren implementiert sind, ist es oftmals nicht möglich, die auskorrigierten Werte der Koppelvariablen abzufragen. Daher wird in diesem Fall mit dem Wert aus dem vorletzten Korrektorschritt gerechnet.
- Bei Subsystemsolvern mit variabler Schrittweite kommt es vor, dass Schritte verworfen und mit kleinerer Schrittweite wiederholt werden. Dieses Verhalten muss in der Co-Simulationsschnittstelle erkannt und abgefangen werden, so dass nicht die fehlerhaften Werte der Koppelvariablen aus dem verworfenen Schritt an den Co-Simulationspartner gesendet werden.
- Es ist oft nicht vorgesehen die Mikroschritte auf feste Werte, z.B. die Makrozeitpunkte, zu steuern, siehe unten.

Diese wünschenswerten Funktionalitäten sind in der Schnittstellenspezifikation *Functional Mock-Up Interface (FMI) for Model Exchange and Co-Simulation v2.0* definiert [SAC12, Mod14]. Dies könnte in Zukunft die Möglichkeit eröffnen, Co-Simulationsmethoden mit erweitertem Funktionsumfang und besseren Eigenschaften, auch mit kommerziellen Solvern, zu verwenden.

Keine Steuerung der Mikroschritte

Auch bei der Implementierung expliziter Koppelalgorithmen, welche keine Makroschrittwiederholung benötigen, müssten die beteiligten Subsystemsolver auf die Kommunikationszeitpunkte (Makrozeitpunkte) gesteuert werden. Dies ist mit kommerziellen Solvern meist nicht möglich. In [PKB08] wird daher ein asymmetrisches Verfahren vorgestellt, welches mit den von den jeweiligen Subsystemsolvern berechneten Mikrozeitschritten arbeitet.

Es ist ebenfalls möglich die Subsystemsolver über den Makrozeitpunkt hinaus rechnen zu lassen und dann die Koppelgrößen an dem Makrozeitpunkt durch Interpolation zu berechnen [Bus07, Bül11]. Dieses Vorgehen wurde hier eingesetzt. Unter der Voraussetzung, dass die Makroschrittweite deutlich größer ist als die Mikroschrittweiten, ist der Interpolationsfehler gering. An den Konvergenzplots (→ 2.6.2) für das Testmodell (→ 2.2) ist zu sehen, dass dieses Vorgehen auch für den Fall, dass die Makroschrittweite in die Nähe der Mikroschrittweiten kommt kein Ansteigen des Fehlers (Ordnungsverlust) verursacht. Voraussetzung hierfür ist, dass die Interpolation der Koppelgrößen auf die Makrozeitpunkte mit der gleichen Ordnung erfolgt wie die Approximation der Koppelgrößen zwischen den Makrozeitpunkten (→ 2.4.3).

2.5. Bewertungskriterien für die Co-Simulationsverfahren

Die vorgestellten und eingesetzten Co-Simulationsverfahren sollen verglichen und bewertet werden. Die dazu notwendigen Kriterien sind die numerische Stabilität (→ 2.5.1), der numerische Verfahrensfehler (→ 2.5.2) und die numerische Effizienz (→ 2.5.3).

2.5.1. Numerische Stabilität

Insbesondere bei der Co-Simulation mit expliziten Verfahren kann es vorkommen, dass trotz physikalisch und numerisch stabiler Subsysteme die gekoppelte Simulation numerisch instabil wird [KS00b, AG01, Arn10, BS10c, Fri11, Bus12]. In diesem Fall wächst die Lösung der Co-Simulation über alle Maßen, obwohl eine monolithische Gesamtlösung abklingen würde. Dieser Effekt tritt auch bei global stabilen (A-stabilen) impliziten Subsystemsolvern auf [SM11b]. Für den praktischen Einsatz von Co-Simulationsverfahren ist die numerische Stabilität die notwendige Voraussetzung.

Für die Co-Simulation wird, analog zu Mehrschrittverfahren, die Nullstabilität definiert [KS00b]. Demnach ist ein Verfahren genau dann nullstabil, wenn es für gegen Null strebende Makroschrittweiten $H \rightarrow 0$ konvergiert [BS10c, Bus12]. Für die vorgestellten, nicht iterativen, expliziten Verfahren ist dies der Fall, wenn die Kopplung durch eingeprägte Kräfte (\rightarrow 2.3) erfolgt und damit kein Durchgriff in allen Ausgangsgleichungen (\rightarrow Abb. 2.1) vorliegt [KS00b, Arn07]. Die hier eingesetzten Verfahren sind mit der verwendeten Kraft-Weg Kopplung (sowie auch mit der Weg-Weg oder Kraft-Kraft Kopplung) nullstabil [BS10c, Fri11, Bus12].

Für ein gegebenes Testmodell (\rightarrow 2.2) kann die numerische Stabilität für endliche Makroschrittweiten $H > 0$ nachgewiesen und Stabilitätsgrenzen angegeben werden [BS10c, Bus12]. Für die folgenden numerischen Tests (\rightarrow 2.6.1) ist die fehlende numerische Stabilität an einem deutlichen Anstieg des globalen Fehlers (\rightarrow 2.5.2) zu erkennen.

2.5.2. Bewertung des numerischen Fehlers

Im Vergleich zu einer monolithischen Lösung eines Gesamtmodells entstehen bei der Co-Simulation mit mehreren Submodellen zusätzliche Fehler. Da die Co-Simulation der numerischen Zeitintegration der Subsysteme nachgelagert bzw. übergeordnet ist, sollen für einen Co-Simulationsverfahrensvergleich nur diese zusätzlichen Fehler untersucht werden. Es ist zu beachten, dass die Fehler der Subsystemsolver auch in der Co-Simulationslösung enthalten sind. Daher werden bei der Fehleranalyse (\rightarrow 2.6.2) die Subsystemsolvereinstellungen variiert und die Auswirkungen auf den Gesamtfehler betrachtet. Falls möglich (z.B. für das Testmodell) kann auch das Gesamtsystem (ohne Kopplung) mit einem der Subsystemsolver gelöst und der Fehler für eine monolithische Lösung angegeben werden. Für das lineare Testmodell wäre es ebenfalls möglich, während der Co-Simulation die Subsystemgleichungen mittels analytischer Formeln zu lösen. Dies wurde hier im Hinblick auf komplexe Modelle nicht durchgeführt.

Die numerischen Fehler der Co-Simulation können in Verfahrensfehler und Rundungsfehler eingeteilt werden [HS06, DR08, SK09]. Der Verfahrensfehler resultiert aus dem verwendeten Co-Simulationsverfahren und dessen Parametern (\rightarrow 2.4). Der Rundungsfehler entsteht durch die begrenzte Darstellungsgenauigkeit von Fließkommazahlen (in unserem Fall: *double precision*, 8 Byte, Maschinengenauigkeit $\epsilon_{ps} \approx 2.22 \cdot 10^{-16}$) und die Durchführung von Rechenoperationen [HS06, DR08, SK09].

2.5.2.1. Referenzlösung

Um den numerischen Fehler der Co-Simulationslösung untersuchen zu können, wird eine Referenzlösung benötigt. Für das lineare Testmodell ist hierfür die analytische Lösung verfügbar

(\rightarrow 2.2, Gl. (2.13) - (2.14)). Bei komplexen Co-Simulationsmodellen ist diese üblicherweise nicht verfügbar. In diesem Fall kann eine numerische Referenzlösung mit wesentlich besseren Subsystemsolver- und Co-Simulationseinstellungen verwendet werden. Dann muss allerdings die Konvergenz dieser numerischen Referenzlösung überprüft und sichergestellt werden.

Die **globale Referenzlösung** $y_{n_{glo}}^*$, $n = 0, \dots, N$ ergibt sich, wenn ausgehend von dem Startzeitpunkt t_0 mit den Anfangswerten y_0 bis zum Endzeitpunkt t_N der (Co-)Simulation gerechnet wird, siehe Abbildung 2.13.

Die **lokale Referenzlösung** $y_{n_{lok}}^*$, $n = 0, \dots, N$ ergibt sich, wenn jeweils ausgehend vom Zeitpunkt t_{n-1} mit den zuvor numerisch berechneten Werten y_{n-1} als Anfangswerte gerechnet wird, siehe Abbildung 2.13. Alternativ kann zum Berechnen eines lokalen Fehlers auch die numerische Lösung in jedem Schritt auf den analytisch berechneten Anfangswerten aufsetzen. Dies ist in der Umsetzung aber kompliziert und der Unterschied ist gemäß [DR08, Abschnitt 11.5.1] „unwesentlich“. Falls (z.B. bei komplexen Modellen) keine analytische Lösung und kein einfacher Zugriff auf alle Systemzustände verfügbar ist, ist eine lokale Referenzlösung praktisch nicht zu berechnen.

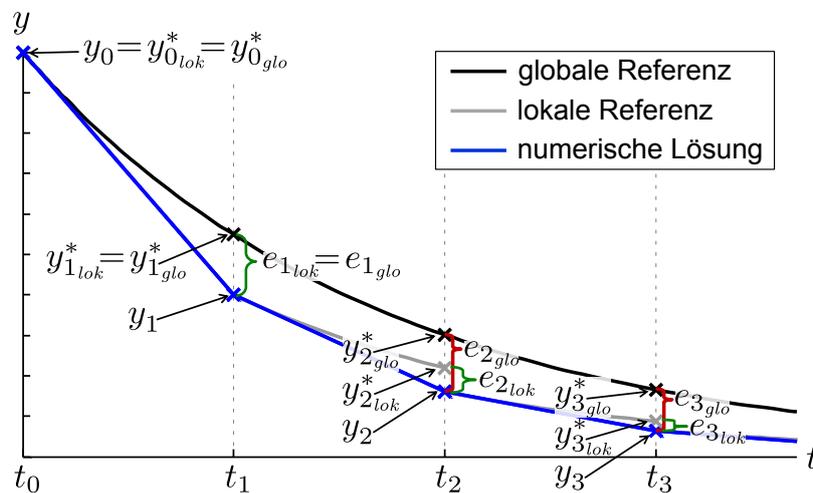


Abbildung 2.13: Lokaler und globaler Fehler.

2.5.2.2. Fehlermaß

Ist eine (globale und/oder lokale) Referenzlösung verfügbar, kann ein (globaler und/oder lokaler) Fehler $e_n = y_n^* - y_n$, $n = 0, \dots, N$ berechnet werden, siehe Abbildung 2.13.

Um ein skalares Fehlermaß zu erhalten, muss eine Fehlernorm über die $n = 1, \dots, N$ Werte gebildet werden. Der Einsatz einer Norm über den absoluten Fehler $\|(e_n)_{n=1, \dots, N}\|$ ist dimensionsabhängig. Eine Norm über den relativen Fehler $\|(e_n/y_n^*)_{n=1, \dots, N}\|$ ist im Nulldurchgang des Signals $y_n^* = 0$ singulär.

Daher wird in dieser Arbeit der **Normalized Root Mean Square Error (NRMSE)** [ZI08] eingesetzt. Normiert wird der Fehler dadurch, dass der häufig verwendete *Root Mean Square Error* durch die Standardabweichung dividiert wird [ZI08]. Der NRMSE wird hierbei für jede Variable y_{in} erst über die $n = 1, \dots, N$ Werte berechnet, Gl. (2.33), und dann der Gesamtfehler der $i = 1, \dots, N_y$ Variablen gebildet, Gl. (2.34). Damit erlaubt der NRMSE den Vergleich des Fehlers der einzelnen Variablen untereinander. Für das Testmodell kann z.B. der Fehler in den Positionen mit dem Fehler in den Geschwindigkeiten verglichen werden.

Eine weitere Möglichkeit ist der **Weighted Root Mean Square Error (WRMSE)** [HNW08, Bus12]. Hierbei wird eine Gewichtung zwischen relativem und absolutem Fehler mittels einem Parameter ϱ vorgenommen. Soweit nicht anders angegeben, wird $\varrho = 1$ gewählt. Der WRMSE wird erst über die $i = 1, \dots, N_y$ Variablen berechnet, Gl. (2.35), und dann über die $n = 1, \dots, N$ Werte gebildet, Gl. (2.36). Dies erlaubt den WRMSE zu jedem Zeitpunkt t_n „online“ zu berechnen. Damit kann er zur Makroschrittweitensteuerung (\rightarrow 2.4.2) oder auch zum Darstellen des Fehlerverlaufs genutzt werden.

$$\text{Numerische Lösung:} \quad \underline{y}_n = (y_{1n}, \dots, y_{in}, \dots, y_{N_y n})^T$$

$$\text{Referenzlösung:} \quad \underline{y}_n^* = (y_{1n}^*, \dots, y_{in}^*, \dots, y_{N_y n}^*)^T$$

$$\text{Anzahl der Variablen:} \quad i = 1, \dots, N_y$$

$$\text{Anzahl der Werte:} \quad n = 1, \dots, N$$

$$\text{NRMSE:} \quad \varepsilon_i = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (y_{in}^* - y_{in})^2}{\sum_{n=1}^N (y_{in}^* - \bar{y}_i^*)^2}}, \quad \bar{y}_i^* := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_{in}^* \quad (2.33)$$

$$\text{NRMSE} = \|\underline{\varepsilon}\|_2 = \sqrt{\underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\varepsilon}}, \quad \underline{\varepsilon} := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_{N_y})^T \quad (2.34)$$

$$\text{WRMSE:} \quad \tilde{\varepsilon}_n = \sqrt{\frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} \left(\frac{y_{in}^* - y_{in}}{1 + \varrho \max(|y_{in}^*|, |y_{in}|)} \right)^2} \quad (2.35)$$

$$\text{WRMSE} = \|\tilde{\underline{\varepsilon}}\|_2 = \sqrt{\tilde{\underline{\varepsilon}}^T \cdot \tilde{\underline{\varepsilon}}}, \quad \tilde{\underline{\varepsilon}} := (\tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_n, \dots, \tilde{\varepsilon}_N)^T \quad (2.36)$$

2.5.2.3. Variablen für die Berechnung des numerischen Fehlers

Es stellt sich die Frage, welche Variablen in die Berechnung des Fehlers der Co-Simulation eingehen. Zunächst ist es möglich den Fehler der **Systemzustände**, z.B. Positionen und Geschwindigkeiten der Massen im Testmodell *Zweimassenschwinger* (\rightarrow 2.2 Gl. (2.3)), zu berechnen. Da diese bei komplexen Modellen allerdings recht zahlreich sein können und nicht ohne Weiteres zugänglich sind, wird der Fehler über die **Koppelgrößen** (\rightarrow 2.2 Gl. (2.12)) berechnet.

2.5.2.4. Anlaufrechnung

Um den Effekt einer Anlaufrechnung im lokalen Fehler auszublenden, können die ersten Werte bei der Fehlerberechnung unberücksichtigt bleiben. Dies ermöglicht die Begutachtung des lokalen Fehlers ohne die meist dominierenden Einflüsse der Anlaufrechnung. In dem globalen Fehler ist der Einfluss der Anlaufrechnung aufgrund der Fehlerfortpflanzung immer vorhanden.

2.5.3. Bewertung der numerischen Effizienz

Zur Bewertung der numerischen Effizienz werden hier folgende Zeitmessungen verwendet:

- **Rechenzeit (CPU-Zeit):** Zeit, in welcher der oder die Prozessor(en) (CPU) an der Co-Simulation aktiv rechnet bzw. rechnen.
- **Dauer (Wall-Clock Time):** Zeit die von Start bis Ende der Co-Simulation vergeht.

Durch den Einsatz mehrerer Prozessoren (mehrere Rechner und/oder Mehrkern-CPU) und paralleler Verfahren kann die Dauer wesentlich kleiner als die Rechenzeit ausfallen. Im Gegensatz dazu ist es durch Wartezeiten und CPU-Auslastung durch andere Prozesse auch möglich, dass die Dauer größer ist als die Summe der Rechenzeiten der an der Co-Simulation beteiligten Prozesse.

2.6. Analyse der Co-Simulationsverfahren

Mit der vorgenommenen Analyse der eingesetzten Co-Simulationsverfahren soll in erste Linie aufgezeigt werden, inwiefern die theoretisch ermittelten Verfahrenseigenschaften [Fri11, Bus12] in einer konkreten Implementierung auf die Praxis übertragen werden können. Es soll die Frage beantwortet werden, welche Anforderungen an Subsystemsolver und Kopplungsverfahren (inkl. Schrittweiten, Anlaufrechnung usw.) gestellt werden müssen, um verlässliche Co-Simulationen komplexer Modelle durchführen zu können.

Die hier untersuchten Einflussgrößen auf die numerische Stabilität, den Verfahrensfehler und die Effizienz einer Co-Simulation sind folgende:

- Ablauf des Datenaustausches, Kopplungsschema (z.B. *Jacobi* Verfahren, *Gauß-Seidel* Verfahren, ...) (→ 2.4.1)
- Wahl der Makroschrittweite H (→ 2.4.2)
- Approximation der Koppelgrößen (z.B. Grad p der *Lagrange* Polynome) (→ 2.4.3)
- Anlaufrechnung (→ 2.4.4)
- Subsystemsolver (Ordnung, Mikroschrittweiten)

Hier **nicht** variiert und untersucht wurden:

- Testmodell: *Zweimassenschwinger* (→ 2.2)
- Testmodellparameter und Anfangswerte (→ Tab. 2.1)
- Kopplungstopologie: Kraft-Weg Kopplung (→ 2.3.1)

2.6.1. Analyse der numerischen Stabilität der Co-Simulationsverfahren

Da bei dem Testmodell *Zweimassenschwinger* 8 Parameter ($m_1, m_2, c_1, c_2, c_k, d_1, d_2, d_k$) variiert werden können, ist die Darstellung von Stabilitätsgebieten, wie sie bei klassischen Zeitintegrationsverfahren üblich sind [Dah85, But08, HW10, SWP12], nicht möglich.

Für das Testmodell *Zweimassenschwinger* und verschiedene Co-Simulationsverfahren wurden bereits analytische Stabilitätsbetrachtungen mit ausführlichen Parameterstudien durchgeführt [BS10a, BS11c, Bus12, SLL14]. Da in dieser Arbeit komplexe Modelle gekoppelt werden, wird auf eine weitere Parametervariation für den Zweimassenschwinger verzichtet. Allerdings werden für die Parameter aus Tabelle 2.1 die gemäß [Bus12] analytisch berechneten Stabilitätsgrenzen in den folgenden Konvergenzplots als vertikal gestrichelte Linien angegeben.

2.6.2. Numerische Fehleranalyse der Co-Simulationsverfahren

Wie bereits erwähnt, wird in diesem Abschnitt ausschließlich das Testmodell *Zweimassenschwinger* mit festgelegten Parametern und Anfangswerten in Verbindung mit einem Kraft-Weg Koppelungsansatz untersucht.

Als Subsystemsolver wird, soweit nicht anders angegeben, ein explizites *Runge-Kutta* Verfahren der Ordnung 5 (ODE5) von *Dormand* und *Prince* [DP80] mit festen Mikroschrittweiten $h_1 = h_2 = 10^{-6}$ s eingesetzt. Ein Konvergenzplot dieses Verfahrens für das Gesamtmodell des Zweimassenschwingers ist im Anhang (→ C.1) zu finden.

Es werden Konvergenzplots für folgende Variationen dargestellt und untersucht:

- Vergleich der Co-Simulationsverfahren: Idealfall mit analytisch berechneten Anfangswerten (→ 2.6.2.1)
 - *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite (→ Abb. 2.14)
 - *Gauß-Seidel* Typ mit fester Makroschrittweite (→ Abb. 2.15)
 - *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus (→ Abb. 2.16)
 - *Jacobi* Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung (→ Abb. 2.17)
- Einfluss der Anlaufrechnung auf das Konvergenzverhalten der Co-Simulation (→ 2.6.2.2)
 - *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite: Triviale Anlaufrechnung ($H_1: p = 0, H_2: p = 1, \dots$) (→ Abb. 2.19)
 - *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus: Triviale Anlaufrechnung ($H_1: p = 0, H_2: p = 1, \dots$) (→ Abb. 2.20)
 - *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite: *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus als Anlaufrechnung (→ Abb. 2.21)
- Einfluss der Subsystemsolver auf das Konvergenzverhalten der Co-Simulation (*Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite) (→ 2.6.2.3)
 - Ordnung, Fehler (→ Abb. 2.22)
 - Mikroschrittweite (→ Abb. 2.23)

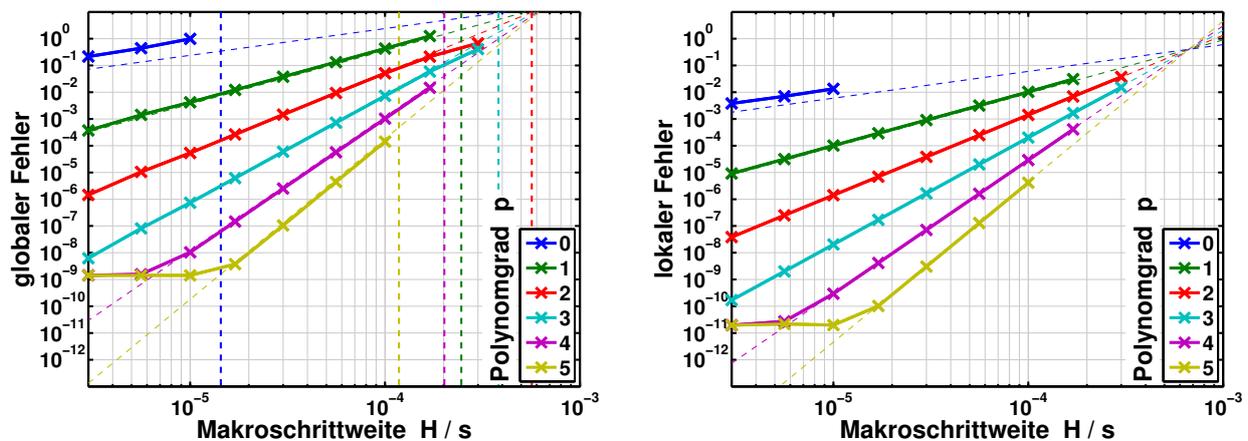
2.6.2.1. Idealfall mit analytisch berechneten Anfangswerten

In diesem Abschnitt sollen die numerischen Tests mit theoretischen Ergebnissen [Arn07, Arn09, Fri11, Bus12, SLL14] abgeglichen werden. Um hierfür den Fehler der Anlaufrechnung (→ 2.4.4) auszuklammern, werden analytisch berechnete Anfangswerte eingesetzt.

Jacobi und Gauß-Seidel Typ mit fester Makroschrittweite

Abbildung 2.14 und 2.15 zeigen den globalen (a) und lokalen (b) Fehler des *Jacobi* Typs und des *Gauß-Seidel* Typs, jeweils mit fester Makroschrittweite. Es ist folgendes dargestellt:

- Horizontale Achse, logarithmisch skaliert: Makroschrittweite H in Sekunden.
- Vertikale Achse, logarithmisch skaliert: Globaler bzw. lokaler Fehler (*Normalized Root Mean Square Error*, NRMSE, \rightarrow 2.5.2), welcher über die Koppelgrößen berechnet wurde.
- Parameter: Polynomgrad p der Inter-/Extrapolation (siehe Legende).
- Vertikale, gestrichelte, farbige Linien: Makroschrittweiten H , ab denen die Co-Simulation gemäß Theorie instabil wird (\rightarrow 2.6.1).
- Schräge, dünn gestrichelte, farbige Linien: Hilfslinien zur Bestimmung der Ordnung, welche proportional zu H^{p+1} verlaufen.
- Farbige Markierungen \times : Fehler der durchgeführten Co-Simulationen, fehlende Markierungen sind instabile Simulationen, welche entweder abgebrochen wurden oder einen globalen Fehler $\gg 1$ ergeben haben. Die durchgezogenen, farbigen Linien sind eine lineare Verbindung der Markierungen \times zur Veranschaulichung des Verlaufs.



(a) Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

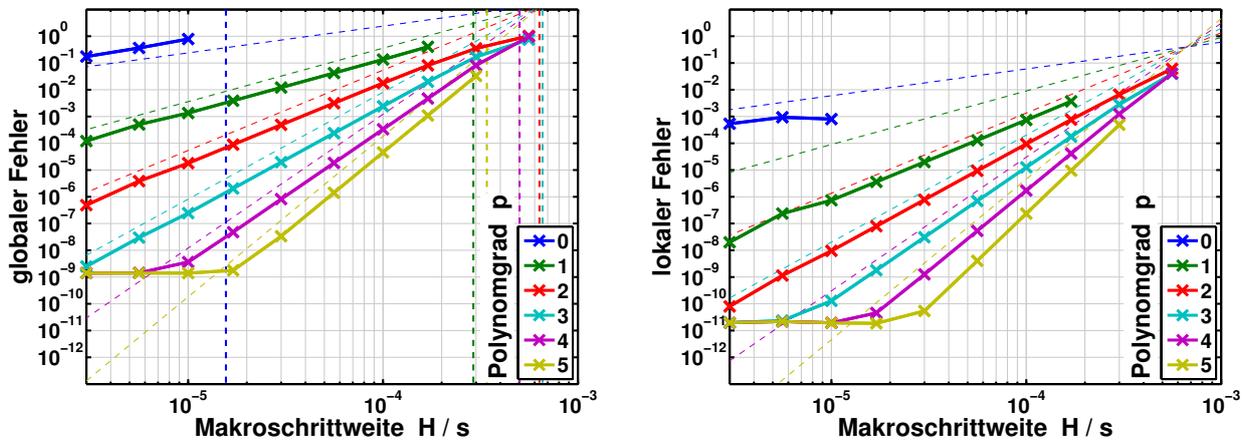
(b) Lokaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

Abbildung 2.14: Konvergenzplot für den *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite und analytisch berechneten Anfangswerten. Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-6}$ s.

Für den **Jacobi Typ mit fester Makroschrittweite** ist nun in Abbildung 2.14 folgendes zu beobachten:

- Die theoretisch ermittelten Stabilitätsgrenzen werden erreicht und bestätigt.
- Der globale Fehler der Co-Simulationen hat die Ordnung $\mathcal{O}(H^{p+1})$.
- Der lokale Fehler der Co-Simulationen hat ebenfalls die Ordnung $\mathcal{O}(H^{p+1})$.
- Für kleine Makroschrittweiten H (sichtbar nur bei hohem Polynomgrad $p \geq 4$) knickt der globale Fehler auf ca. 10^{-9} und der lokale Fehler auf ca. 10^{-11} ab. Hier dominiert der Fehler der Subsystemsolver [Arn07, Arn09]. Dies ist daran zu erkennen, dass die monolithische

Lösung mit dem Solver ODE5 und $h = 10^{-6}$ s global bzw. lokal einen ähnlichen Fehler ergibt, siehe Anhang (\rightarrow C.1). Ebenso wird dies in der Simulation mit verringerter Subsystemsolverordnung (ODE2) bestätigt (\rightarrow Abb. 2.22).



(a) Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

(b) Lokaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

Abbildung 2.15: Konvergenzplot für den *Gauß-Seidel* Typ mit fester Makroschrittweite und analytisch berechneten Anfangswerten. Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-6}$ s.

Für den ***Gauß-Seidel* Typ mit fester Makroschrittweite** ist in Abbildung 2.15 folgendes zu beobachten:

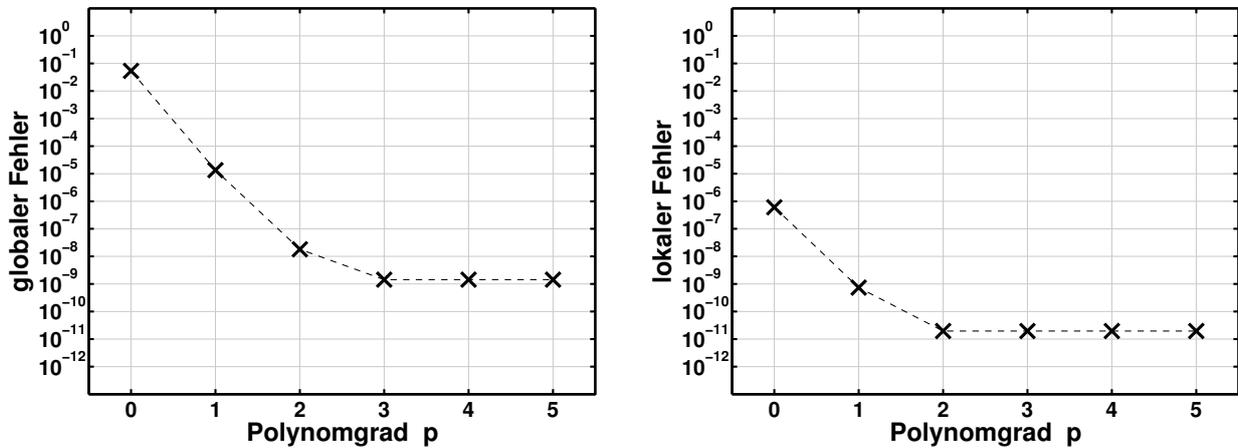
- Die theoretisch ermittelten Stabilitätsgrenzen werden erreicht und bestätigt. Im Gegensatz zu dem *Jacobi* Typ sind die stabilen Makroschrittweiten größer (höhere numerische Stabilität).
- Der globale Fehler der Co-Simulationen hat die Ordnung $\mathcal{O}(H^{p+1})$.
- Der lokale Fehler hat die Ordnung $\mathcal{O}(H^{p+2})$. Allerdings ist die Fehlerordnung von der Integrationsreihenfolge der Subsysteme abhängig, da sowohl der *Gauß-Seidel* Typ als auch die Kraft-Weg Kopplung asymmetrisch sind, gibt es 2 Varianten [Bus12].
- Für kleine Makroschrittweiten H (sichtbar nur bei hohem Polynomgrad $p \geq 4$ bzw. $p \geq 3$) knickt der globale Fehler auf ca. 10^{-9} und der lokale Fehler auf ca. 10^{-11} ab, Begründung siehe oben.
- Im Vergleich zum *Jacobi* Typ ist bei dem *Gauß-Seidel* Typ der globale Fehler bei allen Co-Simulationen (zumindest für $p > 0$) ca. um Faktor 3 kleiner.³

***Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus**

Abbildung 2.16 zeigt den globalen (a) und lokalen (b) Fehler des *Gauß-Seidel* Typs im Master/Slave Modus. Auf der horizontalen Achse ist der Polynomgrad p aufgetragen. Dieser kann nur ganzzahlige Werte annehmen.

³Die Hilfslinien zur Bestimmung der Ordnung sind bei allen Konvergenzplots, in denen der Fehler über der Makroschrittweite aufgetragen ist, identisch.

Es ist zu sehen, dass die erreichten Fehler dem entsprechen, was der *Gauß-Seidel* Typ bei fester Makroschrittweite $H = 10^{-6}$ s (\rightarrow Abb. 2.15) erreichen würde. Im Vergleich zu den anderen hier untersuchten Verfahren liefert der *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus damit praktisch immer den kleinstmöglichen Fehler.



(a) Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

(b) Lokaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

Abbildung 2.16: Konvergenzplot für den *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus und analytisch berechnete Anfangswerte. Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-6}$ s.

Jacobi Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung

In Abbildung 2.17 (a) und (b) ist für den *Jacobi* Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung [BS11b, Bus12] folgendes dargestellt:

- Horizontale Achse, logarithmisch skaliert: Benutzer definierte Toleranz TOL .
- Vertikale Achse, logarithmisch skaliert: Globaler bzw. lokaler Fehler (*Normalized Root Mean Square Error*, NRMSE, \rightarrow 2.5.2), welcher über die Koppelgrößen berechnet wurde.
- Parameter: Polynomgrad p der Extrapolation (siehe Legende).
- Schräge, gestrichelte Hilfslinie: Toleranz (1. Winkelhalbierende, Steigung 1).
- Farbige Markierungen \times : Fehler der durchgeführten Co-Simulationen, fehlende Markierungen (bei $TOL = 10^{-1}$ und $p = 0, 1$) sind instabile Simulationen mit einem globalen Fehler $\gg 1$. Die durchgezogenen, farbigen Linien sind eine lineare Verbindung der Markierungen \times zur Veranschaulichung des Verlaufs.

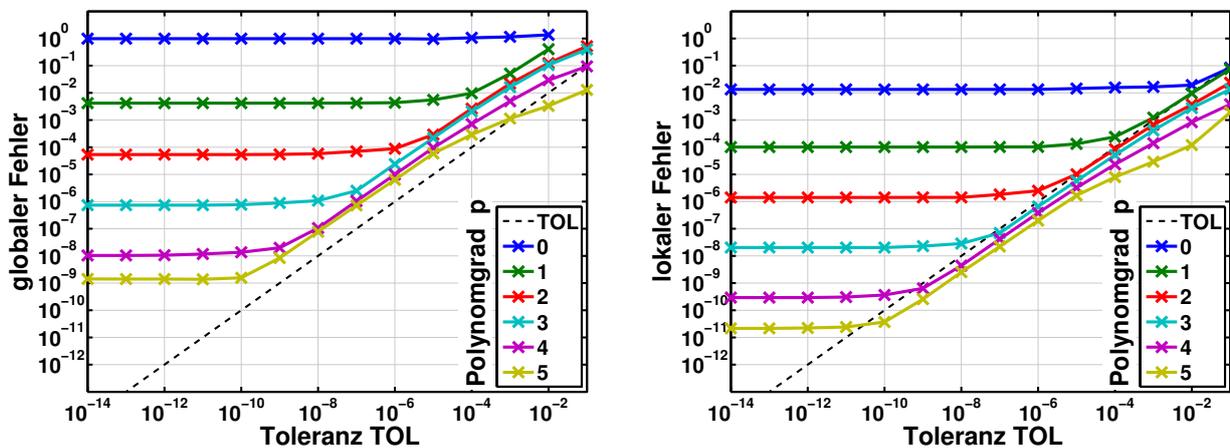
In Abbildung 2.18 ist abweichend von Abbildung 2.17 folgendes dargestellt:

- Vertikale Achse, logarithmisch skaliert: mittlere Makroschrittweite in Sekunden.
- Horizontale, gestrichelte, farbige Hilfslinien: Analytisch ermittelte Stabilitätsgrenzen.

Für den **Jacobi Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung** ist in den Abbildungen 2.17 und 2.18 folgendes zu beobachten:

- Für Polynomgrade $p \geq 1$ erreicht der lokale Fehler sehr gut die Toleranz (Markierungen \times liegen im Bereich der gestrichelten Hilfslinie).

- Sobald die mittlere Makroschrittweite in die Nähe der minimalen Makroschrittweite $H_{min} = 10^{-5}s$ kommt, wird die Toleranz überschritten und der Fehler bleibt gleich.
- Alle Co-Simulationen mit $TOL \leq 10^{-2}$ sind stabil.
- Die Makroschrittweitensteuerung stabilisiert die Co-Simulation. Dies ist insbesondere bei hohem Polynomgrad $p \geq 3$ zu sehen. Dort überschreitet die (mittlere) Makroschrittweite die Stabilitätsgrenzen nur minimal. Anhand des globalen Fehlers ist zu sehen, dass die Co-Simulationen trotzdem stabil sind. Am lokalen Fehler wiederum ist in diesem Fall ein unterschreiten der Toleranz TOL zu beobachten.
- Für Polynomgrad $p = 0$ ist die gewählte minimale Makroschrittweite $H_{min} = 10^{-5}s$ zu groß. Denn bereits bei der Toleranz $TOL = 10^{-2}$ wird eine mittlere Makroschrittweite von kaum über $10^{-5}s$ erreicht, was auf einen globalen Fehler von ca. 10^0 führt und damit zwar eine stabile aber unbrauchbare Lösung ergibt.



(a) Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

(b) Lokaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

Abbildung 2.17: Konvergenzplot für den *Jacobi* Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung und analytisch berechneten Anfangswerten und $H_{min} = 10^{-5}s$. Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-6}s$.

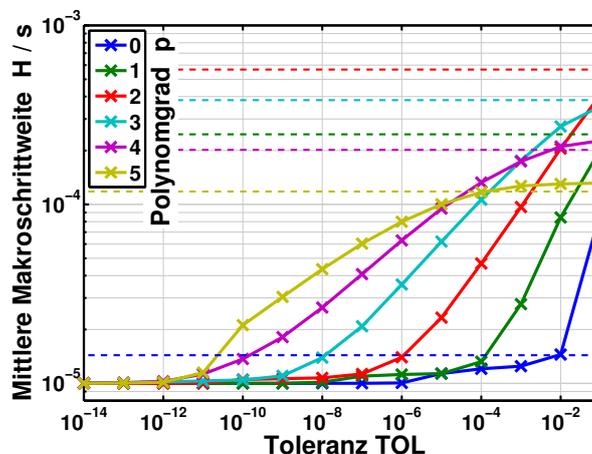


Abbildung 2.18: Mittlere Makroschrittweite für den *Jacobi* Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung und analytisch berechneten Anfangswerten und $H_{min} = 10^{-5}s$. Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-6}s$.

Fazit für den Vergleich der Co-Simulationsverfahren im Idealfall

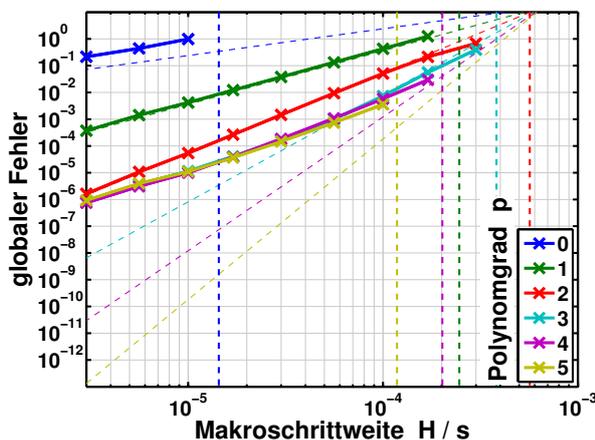
Es ist festzustellen, dass alle implementierten Verfahren im Idealfall, d.h. mit analytisch berechneten Anfangswerten, das erwartete Konvergenz- und Stabilitätsverhalten [Arn07, Arn09, Bus12, Fri11] zeigen. Nun stellt sich die Frage, wie sich Anlaufrechnung und Subsystemsolver auf die Konvergenz der Co-Simulationsergebnisse auswirken.

2.6.2.2. Einfluss der Anlaufrechnung auf das Konvergenzverhalten der Co-Simulation

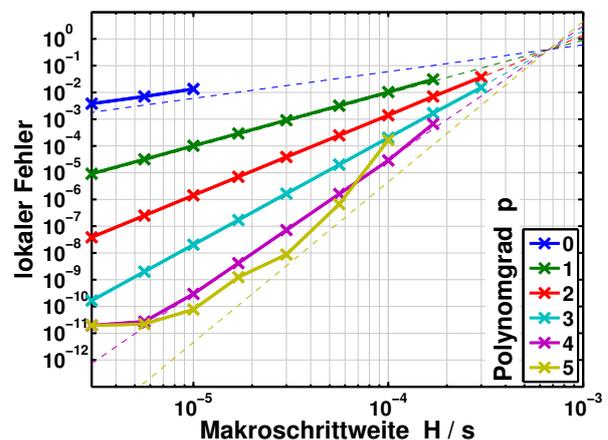
Jacobi Typ mit fester Makroschrittweite und trivialer Anlaufrechnung

Abbildung 2.19 zeigt den Konvergenzplot für den *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite und trivialer Anlaufrechnung ($H_1: p = 0, H_2: p = 1, \dots$). Der Aufbau der Graphen ist identisch mit Abb. 2.14. Folgendes ist in Abbildung 2.19 zu beobachten:

- Im lokalen Fehler (b) ist, unter der Voraussetzung, dass die ersten 20 Makroschritte bei der Fehlerberechnung ignoriert werden, kaum eine Veränderung im Vergleich zum Idealfall (\rightarrow Abb. 2.14) zu sehen. Nur bei dem Polynomgrad $p = 5$ ist ein Anstieg des Fehlers zu beobachten.
- Im globalen Fehler (a) hingegen ist ab dem Polynomgrad $p \geq 3$ eine deutliche Abweichung vom idealen Konvergenzverhalten zu sehen. Es tritt eine Art „Ordnungsreduktion“ auf, welcher sich durch den Anfangsfehler aufgrund der trivialen Anlaufrechnung erklären lässt. Anmerkung: Dieser Effekt ist abhängig von der Wahl der Anfangswerte des Zweimassenschwingers.



(a) Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.



(b) Lokaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen ohne Berücksichtigung der ersten 20 Makroschritte.

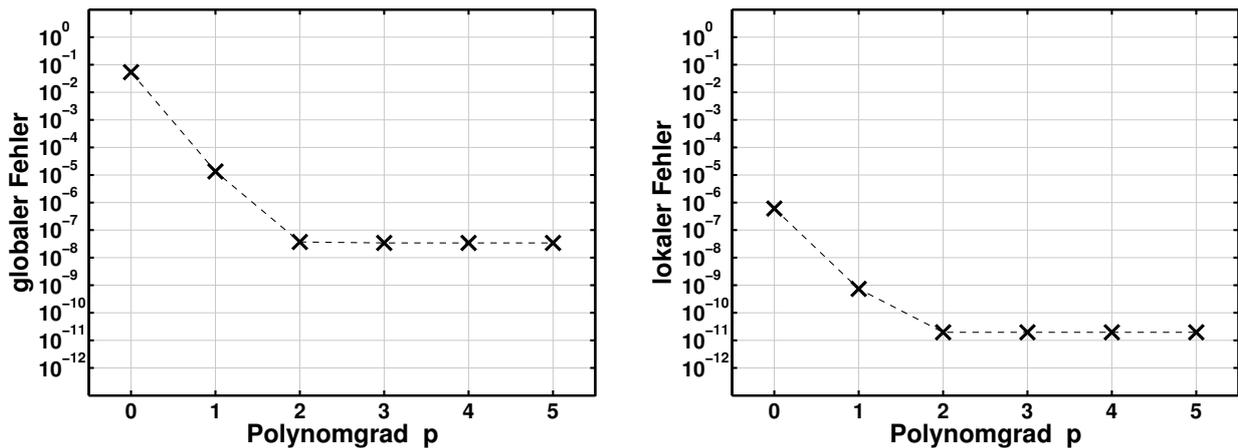
Abbildung 2.19: Konvergenzplot für den *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite und mit trivialer Anlaufrechnung ($H_1: p = 0, H_2: p = 1, \dots$). Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-6}$ s.

Gauß-Seidel Typ im Master/Slave Modus mit trivialer Anlaufrechnung

Da der *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus von den hier eingesetzten Verfahren den geringsten numerischen Fehler ergibt, wird für diesen Fall nun das Verhalten mit trivialer Anlaufrechnung betrachtet.

Abbildung 2.20 zeigt zwar im Vergleich zum Idealfall (\rightarrow Abb. 2.16) einen Anstieg des globalen Fehlers für Polynomgrade $p \geq 2$ (von ca. 10^{-9} auf ca. $3 \cdot 10^{-8}$). Dieser Anstieg ist aber verglichen mit dem Anstieg des Fehlers des *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite sehr gering.

Anmerkung: In diesem Fall hängt der Anstieg von der Anfangsschrittweite des Master-Solvers ab.



(a) Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

(b) Lokaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen ohne Berücksichtigung der ersten 20 Makroschritte.

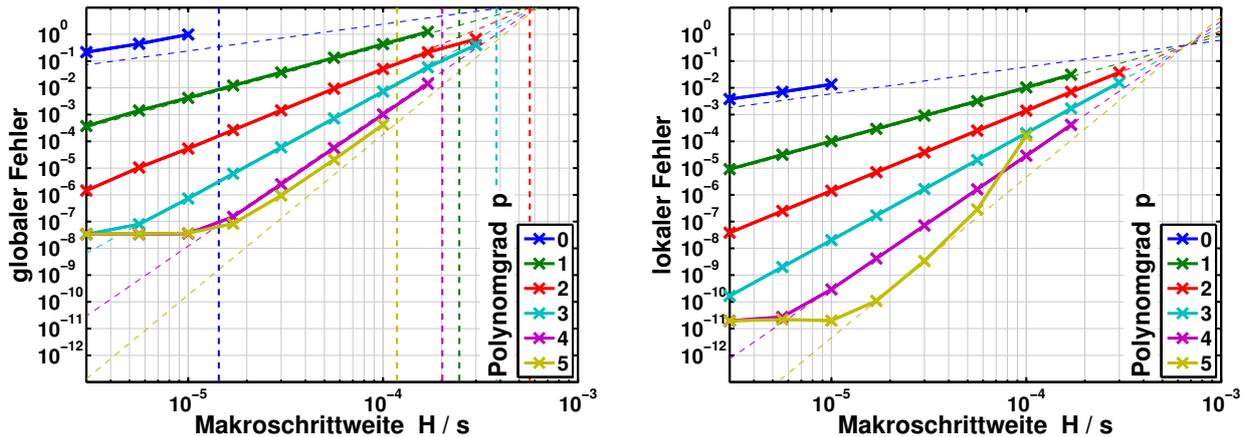
Abbildung 2.20: Konvergenzplot für den *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus mit trivialer Anlaufrechnung ($H_1: p = 0$, $H_2: p = 1$, ...). Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-6}$ s.

Jacobi Typ mit Gauß-Seidel Typ im Master/Slave Modus als Anlaufrechnung

Dies führt zu der Idee, den *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus als Anlaufrechnung, z.B. für den *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite, einzusetzen (\rightarrow 2.4.4).

Abbildung 2.21 zeigt nun den entsprechenden Konvergenzplot. Der Vergleich mit dem Idealfall (\rightarrow Abb. 2.14) zeigt eine „Ordnungsreduktion“ für $p = 5$ und einen Anstieg des minimal erreichten globalen Fehlers auf ca. $3 \cdot 10^{-8}$ (den Fehler der Anlaufrechnung). Aber im Vergleich mit der trivialen Anlaufrechnung (\rightarrow Abb. 2.19) zeigt sich mit der „*Gauß-Seidel* Master/Slave“ Anlaufrechnung ein deutlich geringerer Einfluss auf den globalen Fehler.

Wenn also der parallele *Jacobi* Typ eingesetzt werden soll, ist es sinnvoll den *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus als Anlaufrechnung zu nutzen, um den Anfangsfehler zu minimieren und damit den globalen Fehler wesentlich zu verbessern.



(a) Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

(b) Lokaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen ohne Berücksichtigung der ersten 20 Makroschritte.

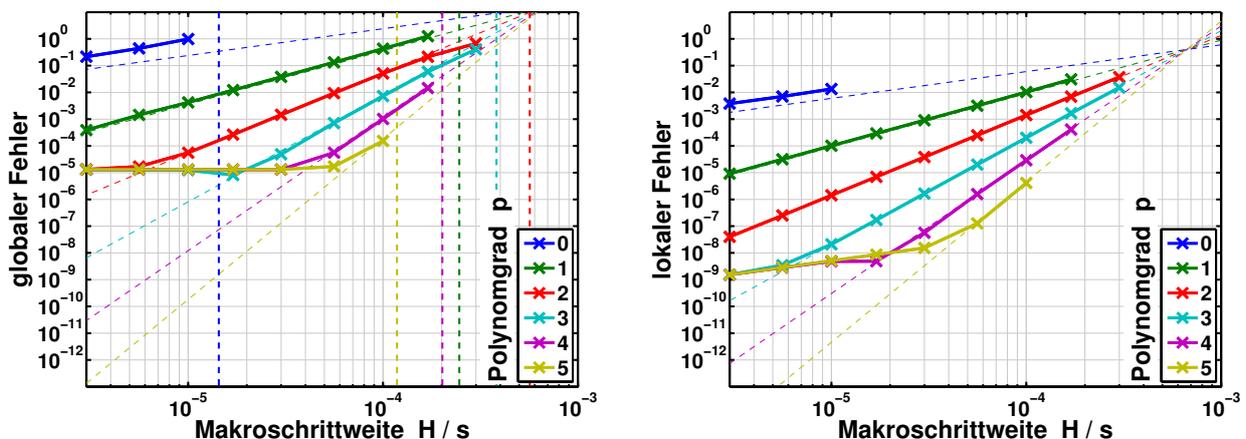
Abbildung 2.21: Konvergenzplot für den *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite und *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus als Anlaufrechnung. Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-6}s$.

2.6.2.3. Einfluss der Subsystemsolver auf das Konvergenzverhalten der Co-Simulation

Fehler bzw. Ordnung der Subsystemsolver

Wie bereits erwähnt, ist der numerische Fehler der Co-Simulation durch den Fehler der Subsystemsolver nach unten beschränkt. Um dies zu verdeutlichen, wurde in Abbildung 2.22 im Vergleich zu den vorherigen Co-Simulationen die Ordnung der Subsystemsolver von 5 auf 2 reduziert. Die Mikroschrittweiten von $h_1 = h_2 = 10^{-6}s$ wurden bei behalten. Dies führt dazu, dass der Fehler der Subsystemsolver bedingt durch die niedrigere Ordnung bei gleichen Mikroschrittweiten deutlich ansteigt, siehe Konvergenzplot für die Subsystemsolver im Anhang (\rightarrow Abb. C.1).

Der Vergleich zu Abbildung 2.14, welche mit ODE5 Subsystemsolvern erstellt wurde, zeigt, dass die untere Schranke des globalen Fehlers von ca. 10^{-9} (ODE5) auf ca. 10^{-5} (ODE2) angehoben wird.



(a) Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

(b) Lokaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

Abbildung 2.22: Konvergenzplot für den *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite und analytisch berechneten Anfangswerten. Subsystemsolver: ODE2 mit $h_1 = h_2 = 10^{-6}s$.

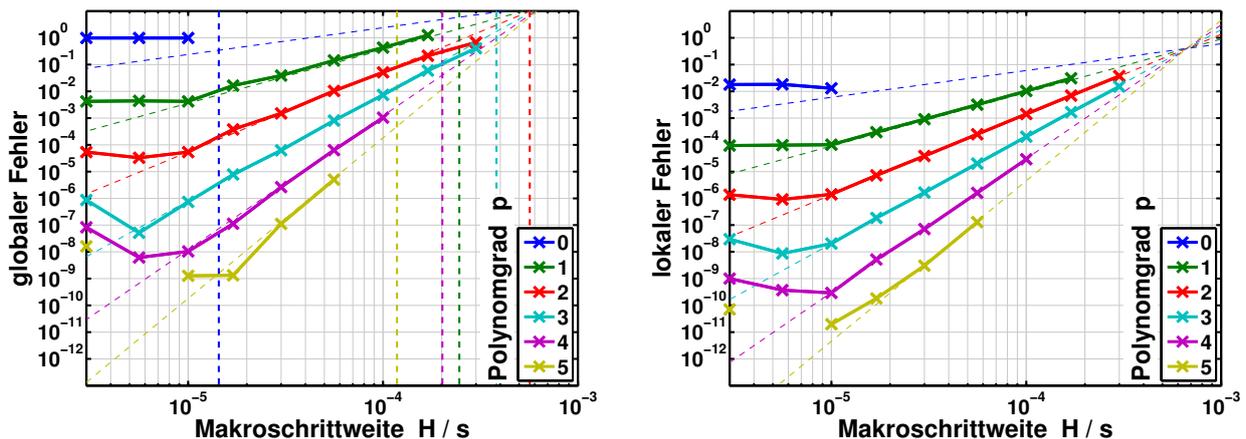
Mikroschrittweiten

Da im Fall kommerzieller Solver oft variable Schrittweiten eingesetzt werden, kann es vorkommen, dass eine der Mikroschrittweiten größer wird als die Makroschrittweite. Was in diesem Fall passiert, hängt von der Implementierung der Co-Simulation ab. In der im Rahmen dieser Arbeit implementierten Schnittstelle wird in einer internen Schleife solange weiter extrapoliert, bis die Makroschritte die Mikroschritte eingeholt haben. Diese Implementierung soll zu einem gutmütigen Verhalten führen. Allerdings sollte der Anwender normalerweise durch Wahl einer maximalen Mikroschrittweite h_{max} , welche kleiner ist als die Makroschrittweite H diese Situation verhindern.

Um trotzdem zu sehen, was in diesem Fall passiert, wird die Mikroschrittweite von $h_1 = h_2 = 10^{-6}$ s auf $h_1 = h_2 = 10^{-5}$ s vergrößert. Der Konvergenzplot in Abbildung 2.23 wurde aber mit Makroschrittweiten bis $H = 3 \cdot 10^{-6}$ s berechnet. Damit ist bei allen Co-Simulationen mit $H < 10^{-5}$ s die Makroschrittweite kleiner als die Mikroschrittweiten h_1 und h_2 .

Abbildung 2.23 zeigt, dass für $H \leq 10^{-5}$ s und $p < 3$ der Fehler nahezu konstant bleibt, dies stellt ein ideales Verhalten in dieser Situation dar. Bei $p = 3$ und 4 steigt der Fehler für $H = 3 \cdot 10^{-6}$ s leicht an. Bei $p = 5$ und $H = 5.6 \cdot 10^{-6}$ s ist die Co-Simulation instabil (fehlende \times Markierung).

Insgesamt ist allerdings ein weitgehend robustes Verhalten der Implementierung in dieser Situation zu beobachten.



(a) Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

(b) Lokaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

Abbildung 2.23: Konvergenzplot für den *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite und analytisch berechneten Anfangswerten. Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-5}$ s.

2.6.2.4. Fazit für die numerische Fehleranalyse der Co-Simulationsverfahren

- Der *Gauß-Seidel* Typ hat im Vergleich zum *Jacobi* Typ ein etwas besseres Stabilitätsverhalten, siehe Stabilitätsgrenzen in Abb. 2.14 (a) und 2.15 (a), sowie [Bus12].
- Der globale Fehler des *Gauß-Seidel* Typs ist im Vergleich zum *Jacobi* Typ etwas kleiner, siehe Abb. 2.14 (a) und 2.15 (a).
- Der lokale Fehler des *Gauß-Seidel* Typs hat (unter bestimmten Umständen) die Ordnung $p+2$, also eine Ordnung höher als der lokale Fehler des *Jacobi* Typs, vergleiche Abb. 2.14 (b) und 2.15 (b), sowie [Bus12].

- Der *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus liefert den kleinst möglichen Fehler der untersuchten Verfahren (→ Abb. 2.16). Auch die triviale Anlaufrechnung lässt den globalen Fehler dieses Verfahrens nicht stark ansteigen (→ Abb. 2.20). Anmerkung: Falls die Anfangsschrittweite h_{init} eines kommerziellen Master-Subsystemsolvers klein gewählt wird, kann damit die triviale Anlaufrechnung der Co-Simulation des *Gauß-Seidel* Typs im Master/Slave Modus verbessert werden.
- Es sollte immer $h_{1/2} \leq H$ erfüllt sein. Dies kann bei variabler Mikroschrittweite meist nur über $h_{1/2,max} \leq H$ garantiert werden. Bei dem *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus sollte $h_{1,min} \geq h_{2,max}$ sein. Dies stellt eine deutliche Einschränkung für die Mikroschrittweiten dar.
- Der *Jacobi* Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung liefert numerisch stabile Co-Simulationen. Der Fehler ist bedingt durch die minimale Makroschrittweite H_{min} nach unten begrenzt. Da $h_{1/2,max} \leq H_{min}$ sein sollte, führt dies ebenfalls zu einer starken Einschränkung der Mikro- und Makroschrittweiten.
- Der Fehler der Co-Simulation ist durch den Fehler der Subsystemsolver nach unten begrenzt.

2.6.3. Analyse der numerischen Effizienz der Co-Simulationsverfahren

Die Messungen der Dauer (Wall-Clock Time) und der CPU-Zeiten wurden für die Co-Simulationen des Testmodells *Zweimassenschwinger* (Gleichungen, Parameter, Anfangswerte und Zeitverlauf, → 2.2) in Kraft-Weg Kopplung (→ 2.3.1) durchgeführt, d.h. bei den Co-Simulationen aus Abschnitt 2.6.2 wurden die Rechenzeiten erfasst. Dabei wurden Hardware, Betriebssystem und - soweit möglich - nebenläufige Prozesse nicht geändert.

Einen wesentlichen Einfluss auf die numerische Effizienz der gesamten Co-Simulation haben die Subsystemsolver. Hier wurde ein selbst implementiertes, explizites *Runge-Kutta* Verfahren der Ordnung 5 (ODE5) (→ C.1) eingesetzt. Wie sich die Rechenzeiten bei Verwendung kommerzieller Solver verhalten, wird am Ende dieses Abschnittes diskutiert.

Ebenso hängen die Rechenzeiten stark von der Implementierung der Schnittstelle ab. Neben der Speicherverwaltung und vielen Verzweigungen (`if` bzw. `case` Abfragen) hat die Kommunikation (über TCP/IP) und die Inter-/Extrapolation der Koppelgrößen Einfluss auf die Rechenzeit.

2.6.3.1. Rechenzeiten bei der Co-Simulation des Testmodells *Zweimassenschwinger*

Es wurden die Rechenzeitmessungen folgender Varianten untersucht:

- *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite.
Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-6}$ s. (→ Abb. 2.24)
- *Gauß-Seidel* Typ mit fester Makroschrittweite.
Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-6}$ s. (→ Abb. 2.25)
- *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite.
Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-5}$ s. (→ Abb. 2.26)

- *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus.
Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-6}$ s. (→ Abb. 2.27)

In den Abbildungen 2.24, 2.25, 2.26 und 2.27 ist folgendes dargestellt:

- Abb. 2.24, 2.25, 2.26: Horizontale Achse, logarithmisch skaliert: Makroschrittweite H in Sekunden.
Abb. 2.27: Horizontale Achse: Polynomgrad p der Extra-/Interpolation.
- Vertikale Achse, logarithmisch skaliert: Gemessene Rechenzeiten in Sekunden.
(Achtung: Abb. 2.26 und 2.27 haben angepasste Achsen!)
- Abb. 2.24, 2.25, 2.26: Parameter: Polynomgrad p der Extra-/Interpolation (siehe Legende).
- Markierungen \times und durchgezogene Linien: Dauer (Wall-Clock Time) der Co-Simulationen.
- Markierungen $+$ und gestrichelte Linien: Summe aller CPU-Zeiten der Co-Simulationen (Subsystemsolver 1 inkl. Kopplung + Subsystemsolver 2 inkl. Kopplung).
- Anmerkung: Da alle instabilen Co-Simulationen bis zum Ende durchgelaufen sind und explizite Solver mit festen Mikroschrittweiten verwendet wurden, können hier trotz instabiler Ergebnisse sinnvolle Rechenzeiten ermittelt werden.

Die Abbildungen 2.24, 2.25, 2.26 und 2.27 lassen nun folgende Beobachtungen zu:

- Bei allen Co-Simulationstypen steigen die CPU-Zeit und die Dauer mit dem Polynomgrad p an. Dies ist gut in Abbildung 2.27 zu sehen.
- Mit kleiner werdender Makroschrittweite H steigen die CPU-Zeit und die Dauer überproportional an.
- Bei gleicher Makroschrittweite H und gleichem Polynomgrad p liegt die Dauer einer Co-Simulation mit dem *Jacobi* Typ immer unter der des *Gauß-Seidel* Typs.
- Bei dem parallelen *Jacobi* Typ liegt die Dauer stets unter der Summe der CPU-Zeiten. Genauer gesagt ist die Dauer das Maximum der einzelnen CPU-Zeiten (nicht zu sehen). Selbst bei dem Zweimassenschwinger in Kraft-Weg Kopplung erfordern die Subsystemgleichungen 1 (2.15) - (2.19) weniger Rechenoperationen als die Gleichungen von Subsystem 2 (2.21) - (2.25). Daher sind die Rechenzeiten der Subsysteme nicht gleich und damit die Dauer nicht um Faktor 2 kleiner, was den theoretischen Idealfall darstellt.
- Bei dem seriellen *Gauß-Seidel* Typ mit $H > 3 \cdot 10^{-5}$ s entspricht die Dauer in etwa der Summe der CPU-Zeiten. Für $H \leq 3 \cdot 10^{-5}$ s und den Master/Slave Modus ist die Dauer geringer als die Summe der CPU-Zeiten, was sich durch minimale Parallelisierung, z.B. der TCP/IP Kommunikation, welche mit abnehmender Makroschrittweite häufiger vorkommt, erklären lässt.

- Der Vergleich von Abbildung 2.24 und 2.26 zeigt, dass bei Vergrößerung der Mikroschrittweiten von $h_1 = h_2 = 10^{-6}$ s auf 10^{-5} s für große Makroschrittweiten $H > 10^{-4}$ s die Rechenzeiten nahezu um Faktor 10 kleiner werden. Für kleine Makroschrittweiten $H < 10^{-4}$ s hingegen sinkt der Verkleinerungsfaktor auf unter 2.
- Der *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus benötigt die größte Rechenzeit.

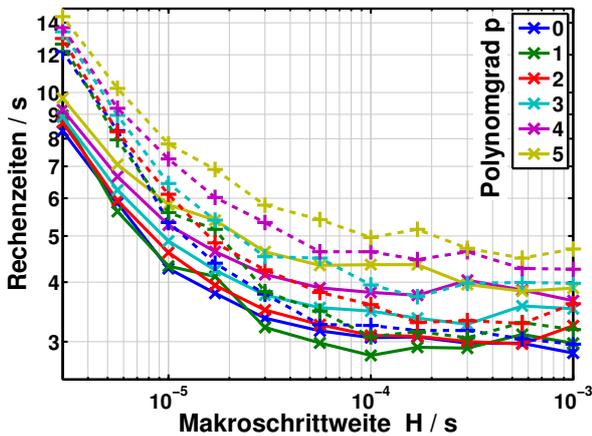


Abbildung 2.24:
Jacobi Typ mit fester Makroschrittweite.
Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-6}$ s.

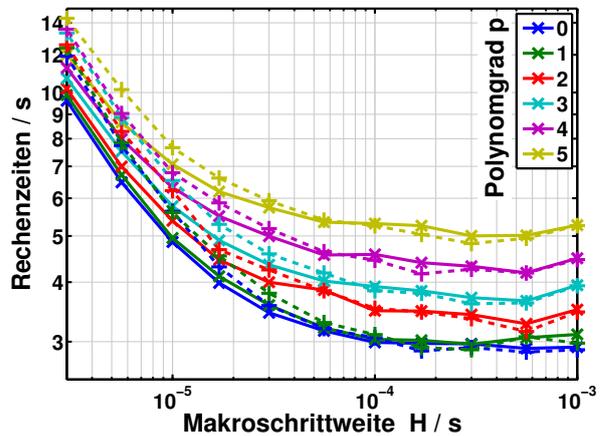


Abbildung 2.25:
Gauß-Seidel Typ mit fester Makroschrittweite.
Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-6}$ s.

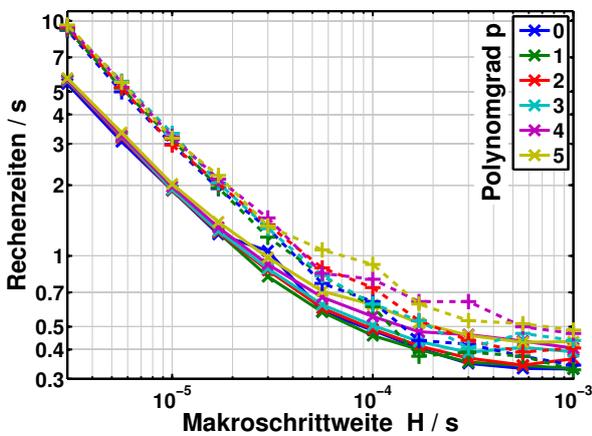


Abbildung 2.26:
Jacobi Typ mit fester Makroschrittweite.
Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-5}$ s.

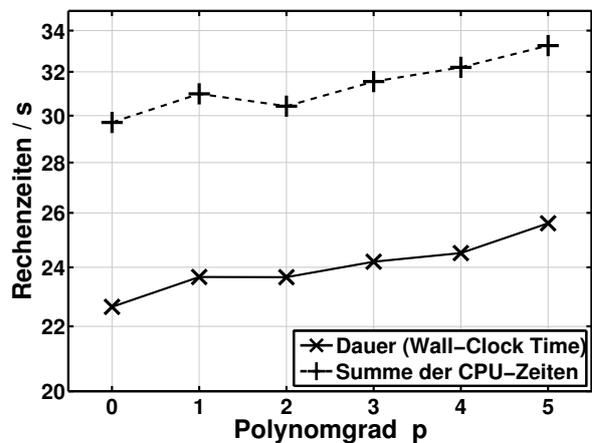


Abbildung 2.27:
Gauß-Seidel Typ im Master/Slave Modus.
Subsystemsolver: ODE5 mit $h_1 = h_2 = 10^{-6}$ s.

2.6.3.2. Fazit für die Analyse der numerischen Effizienz der Co-Simulationsverfahren

- Die Dauer der Co-Simulation mit dem *Jacobi* Typ setzt sich aus den einzelnen CPU-Zeiten folgendermaßen zusammen: $\max(\text{Solver 1} + \text{Kopplung 1}, \text{Solver 2} + \text{Kopplung 2})$
- Die Dauer der Co-Simulation mit dem *Gauß-Seidel* Typ setzt sich aus den einzelnen CPU-Zeiten folgendermaßen zusammen: $\text{Solver 1} + \text{Kopplung 1} + \text{Solver 2} + \text{Kopplung 2}$ (wobei Teile der Kopplung parallel laufen, siehe oben)

- Hierbei haben auf die CPU-Zeiten der Subsystemsolver folgende Größen Einfluss (bis auf die Mikroschrittweiten wurden diese hier nicht untersucht):
 - Gleichungsart/-formulierung (DAE, ODE, PDE, ...)
 - Art des Solvers (implizit oder explizit, Ordnung, ...)
 - Implementierung
 - Größe des Gleichungssystems (Anzahl der Zustände oder Freiheitsgrade)
 - Mikroschrittweiten h_1 und h_2 (bzw. Fehlertoleranz)
- Auf die CPU-Zeiten der Kopplung haben folgende Größen Einfluss:
 - Art der Kopplung (\rightarrow 2.4)
 - Implementierung (hier nicht untersucht)
 - Anzahl der Koppelvariablen (hier nicht untersucht)
 - Makroschrittweite H (bzw. Toleranz)
 - Polynomgrad p der Extra-/Interpolation

Auf eine Quantifizierung der Einflüsse wird hier verzichtet, da die Unterschiede in den Rechenzeiten der Co-Simulationsverfahren in der Praxis eine untergeordnete Rolle spielen, siehe unten.

2.6.3.3. Rechenzeiten bei der Co-Simulation komplexer, multiphysikalischer Modelle

Bei den hier untersuchten, komplexen Modellen (\rightarrow Kap. 3) ist der Extra-/Interpolationsaufwand und der Overhead der Kommunikation vernachlässigbar, da die Rechenzeiten der Subsystemsolver deutlich überwiegen und zwar aus folgenden Gründen:

- Die Anzahl der Systemzustände ist normalerweise wesentlich höher als bei dem einfachen Testmodell *Zweimassenschwinger*. Damit steigen die Rechenzeiten der Subsystemsolver. Die Anzahl der Koppelgrößen hingegen ist in den hier gezeigten Beispielen mit Kraft-Weg Kopplung eher klein.⁴
- Aus Gründen der numerischen Stabilität (z.B. bei steifen Differentialgleichungen) sind kommerzielle Solver oft implizit, was aufgrund des zu lösenden, nicht linearen Gleichungssystems zu einem wesentlich höheren numerischen Aufwand führt.
- Aus Stabilitäts- und Genauigkeitsgründen müssen für die hier eingesetzten expliziten Co-Simulationsverfahren oft kleine Makroschrittweiten H und damit auch kleine Mikroschrittweiten gewählt werden $h_{1/2,max} \leq H$ (\rightarrow 2.6.2), was wiederum die Rechenzeiten der Subsystemsolver ansteigen lässt.
- Oft, z.B. bei der Kopplung von MKS und Elektrodynamik (\rightarrow 3.2) oder MKS und FE-Strukturmechanik (\rightarrow 3.3), überwiegt die Rechenzeit eines Solvers (Elektrodynamik bzw. FE). In diesem Fall bietet das parallele *Jacobi* Verfahren kaum einen Vorteil.

⁴Dies ist bei gekoppelten Simulationen nicht immer der Fall. Bei Fluid-Struktur Kopplungen ist es beispielsweise erforderlich Flächenlasten über eine räumliche Diskretisierung auszutauschen, was zu einer wesentlich höheren Anzahl an Koppelgrößen führt.

Überwiegen also die Rechenzeiten der Subsystemsolver, hat der Polynomgrad p praktisch keine Bedeutung für die Dauer der Co-Simulation. Allerdings kann bei Polynomgrad $p = 0$ und Solvern mit variabler Mikroschrittweite oft ein deutlicher Anstieg der Rechenzeit beobachtet werden (\rightarrow Abb. 3.10 bis 3.13 und 3.19, jeweils (b)). Da bei Polynomgrad $p = 0$ die Subsystemsolver stark unstetige Eingangsgrößen haben, werden in diesem Fall die Mikroschrittweiten bei jedem Makroschritt verkleinert. Dies führt zu einem starken Anstieg der Rechenzeiten der Subsystemsolver.

Ebenso hat die Makroschrittweite H kaum direkten Einfluss auf die Dauer der Co-Simulation. Der indirekte Anstieg der Rechenzeiten durch die Einschränkung der Mikroschrittweiten $h_{1/2,max} \leq H$ kann bei expliziten Co-Simulationsverfahren aber nicht verhindert werden.

Der *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus kann in der Praxis auch effizient sein, da weniger Einschränkungen an den Master-Subsystemsolver vorliegen, z.B. keine maximale Mikroschrittweite $h_{1,max}$, da $H = h_1$ ist.

Unter den Einschränkungen kommerzieller Solver bietet der *Jacobi* Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung nur einen geringen Effizienzvorteil gegenüber einer festen Makroschrittweite H , da die maximalen Mikroschrittweiten $h_{1/2,max}$ die Rechenzeit wesentlich bestimmt. Der Vorteil, vor Beginn der Co-Simulation keine Makroschrittweite H , sondern eine Toleranz wählen zu müssen, bleibt allerdings.

Der Rechenzeitvorteil einer parallelen Co-Simulation kommt am besten zur Geltung, wenn die Rechenzeiten der Subsystemsolver (aufgrund der Anzahl der Zustände und der Mikroschrittweiten) ähnlich hoch sind. Anmerkung: Die ursprüngliche Idee der *Multirate* Verfahren ist, steife Gleichungsteile abzukoppeln und mit kleinerer (Mikro-)Schrittweite zu lösen.

3. Co-Simulation komplexer multiphysikalischer Systeme

In diesem Kapitel wird jeweils ein Mehrkörpersystem (MKS) mit einer anderen physikalischen Disziplin gekoppelt. Da MKS-Modelle oft von komplexen Kräften angetrieben werden und diese Kräfte von anderen physikalischen Disziplinen erzeugt werden, kann die Co-Simulation hier gewinnbringend eingesetzt werden [Arn09]. Die Kräfte sind üblicherweise von den Bewegungen des MKS-Mechanismus abhängig, so dass nur eine gemeinsame oder gekoppelte Simulation unverfälschte Ergebnisse liefert. Konkret werden in diesem Kapitel MKS-Modelle mit Submodellen aus Hydraulik (\rightarrow 3.1), Elektrodynamik (\rightarrow 3.2) und FE-Strukturmechanik (\rightarrow 3.3) gekoppelt.

Für die Co-Simulation wird im Folgenden ausschließlich kommerzielle Software verwendet. Neben den in Abschnitt 2.4.5 genannten Einschränkungen von kommerziellen Programmen ergeben sich Eigenheiten, welche oft auch von der Wahl des Solvers innerhalb dieses Programms abhängen. Aus diesem Grund wird für jedes Programm bzw. für jeden Solver die Implementierung der Co-Simulationsschnittstelle anhand des Testmodells *Zweimassenschwinger* (\rightarrow 2.2) getestet. Dies hat zur Folge, dass die Anpassung der Co-Simulationsschnittstelle an die Programme von der Erstellung und der Co-Simulation komplexer Modelle getrennt wird.

3.1. MKS - Hydraulik

Im Rahmen eines Projektes der Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen e.V. (FVV) wurde eine Hochdruckpumpe mit einem Common-Rail-Hydrauliksystem co-simuliert (\rightarrow 3.1.4) [SEW⁺12b, SEW⁺12a]. Hierzu werden auf der Seite der Pumpenmechanik und des Antriebes das MKS-Programm Adams (Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems) der Firma MSC [MSC13] zur Modellierung und Lösung des mechanischen Subsystems eingesetzt. Für die Simulation der Pumpenhydraulik und des Common-Rail-Systems kommt das Programm DSH*plus* der Firma Fluidon [FLU08] zum Einsatz.

3.1.1. Gleichungen des MKS-Submodells

Die Modellierung des MKS-Subsystems in Adams führt auf ein System aus differential-algebraischen Gleichungen (DAE) in stabilisierter Index 2 Formulierung (SI2) [GLG85]:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}(\underline{q})\dot{\underline{v}} &= \underline{f}(\underline{q}, \underline{v}, \underline{u}_{MKS}, t) - \underline{\underline{G}}^T(\underline{q}, t)\underline{\lambda} \quad , \quad \dot{\underline{q}} = \underline{v} - \underline{\underline{G}}^T(\underline{q}, t)\underline{\mu} \quad , \\ \underline{0} &= \underline{g}(\underline{q}, t) \quad , \quad \underline{0} = \underline{\underline{G}}^T(\underline{q}, t)\underline{v} + \frac{\partial \underline{g}}{\partial t}(\underline{q}, t) . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Hierbei ist \underline{q} der Vektor der generalisierten Koordinaten und \underline{v} der Vektor der generalisierten Geschwindigkeiten. $\underline{\underline{M}}(\underline{q})$ ist die symmetrische, positiv definite Massenmatrix. Der Vektor $\underline{f}(\underline{q}, \underline{v}, \underline{u}_{MKS}, t)$ enthält die eingepprägten Kräfte und der Vektor $\underline{g}(\underline{q}, t)$ enthält die algebraischen Nebenbedingungen. Die Vektoren $\underline{\lambda}$ und $\underline{\mu}$ sind *Lagrange* Multiplikatoren. Die Matrix $\underline{\underline{G}}(\underline{q}, t) = \partial \underline{g} / \partial \underline{q}$ enthält die partiellen Ableitungen von $\underline{g}(\underline{q}, t)$. Da das MKS-Submodell einen Kräfteingang hat, ist der vektorielle MKS-Subsystemeingang \underline{u}_{MKS} in den eingepprägten Kräften enthalten. Der Vektor $\underline{y}_{MKS} = \underline{y}_{MKS}(\underline{q}, \underline{v})$ beinhaltet die MKS-Subsystemausgänge und wird aus den Systemzuständen \underline{q} und \underline{v} berechnet.

Das DAE System (3.1) wird von einem BDF-Verfahren (Rückwärts-Differentiationsverfahren, engl.

backward differentiation formulas) mit variabler Mikroschrittweite h_{MKS} und variabler Ordnung gelöst [MSC13].

3.1.2. Gleichungen des hydraulischen Submodells

Die Modellierung des hydraulischen Subsystems in *DSHplus* führt auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen (DGL) 1. Ordnung [Bea99]:

$$\dot{z}_{HYD} = \underline{f}(z_{HYD}, \underline{u}_{HYD}, t) \quad . \quad (3.2)$$

Hierbei ist z_{HYD} der hydraulische Zustandsvektor und \underline{u}_{HYD} der hydraulische Subsystemeingang. Der Subsystemausgang wird aus den hydraulischen Zuständen berechnet $\underline{y}_{HYD} = \underline{y}_{HYD}(z_{HYD})$.

Das Differentialgleichungssystem (3.2) wird mit einem expliziten *Runge-Kutta* Verfahren der Ordnung 5 (*Dormand-Prince*) und fester Mikroschrittweite h_{HYD} gelöst [FLU08].

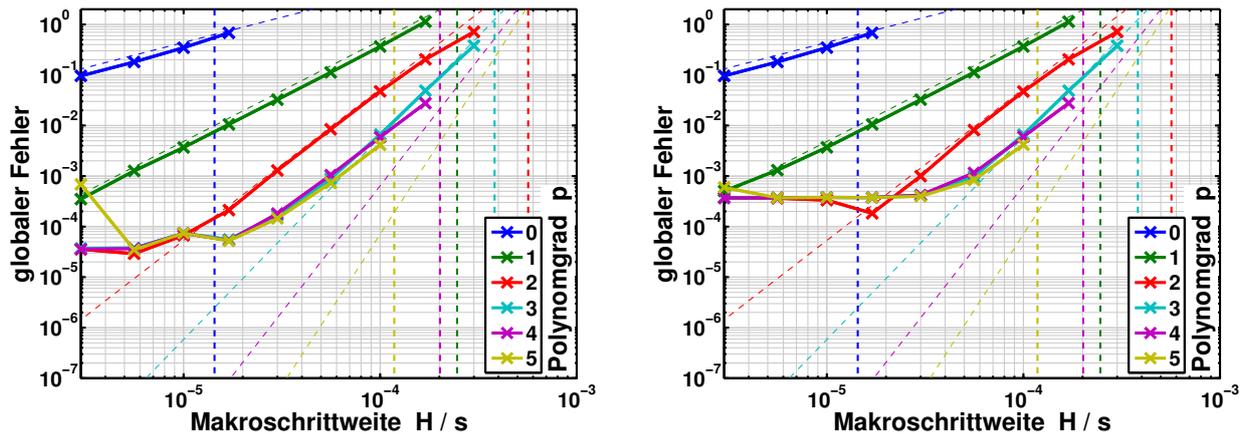
3.1.3. Testmodell: *Zweimassenschwinger*

Das Testmodell *Zweimassenschwinger* (\rightarrow 2.2) kann problemlos mit den zwei Programmsystemen Adams und *DSHplus* modelliert werden. Es wird eine Kraft-Weg Kopplung (\rightarrow 2.3.1) eingesetzt. Das MKS-Modell hat hierbei den Krafteingang und das Hydraulikmodell den Weg- und Geschwindigkeitseingang. Die Modellierung des fußpunkterregten Einmassenschwingers im Hydraulikprogramm *DSHplus* ist unproblematisch, da einfache Mechanikelemente in der Bauteilbibliothek vorhanden sind.

Konvergenz der Co-Simulationsergebnisse

Die Abbildungen 3.1 (a) und (b) zeigen zwei Konvergenzplots für das Testmodell *Zweimassenschwinger*. Hierbei wurden die Subsystemgleichungen mit den Solvern des MKS- und des Hydraulikprogramms gelöst und über ein *Jacobi* Verfahren mit fester Makroschrittweite gekoppelt. Als Referenz dient die analytische Lösung. Der Aufbau der Abbildungen ist analog zu Abbildung 2.14 (a). Der Unterschied zwischen Abbildung 3.1 (a) und (b) ist die Mikroschrittweite h_{HYD} des hydraulischen Subsystemsolvers.

Der Vergleich von Abbildung 3.1 (a) und (b) mit dem entsprechenden Konvergenzplot mit selbst implementierten ODE5 Solvern (Abbildung 2.19 (a)) zeigt, dass die Konvergenz der Co-Simulation auch mit diesen kommerziellen Subsystemsolvern den Erwartungen entspricht. Der Vergleich von Abbildung 3.1 (a) mit (b) zeigt, dass das Abknicken des Fehlers auf ca. $3 \cdot 10^{-5}$ in (a) und auf ca. $3 \cdot 10^{-4}$ in (b) auf den Fehler des hydraulischen Subsystemsolvers zurückzuführen ist.



(a) Subsystemsolver 1: Adams
 WSTIFF SI2: $e_{MKS} = 10^{-6}$, $h_{MKS,max} = 10^{-6}s$
 Subsystemsolver 2: DSHplus
 ODE5 (Prince-Dormand) RCH: $h_{HYD} = 10^{-9}s$

(b) Subsystemsolver 1: Adams
 WSTIFF SI2: $e_{MKS} = 10^{-6}$, $h_{MKS,max} = 10^{-6}s$
 Subsystemsolver 2: DSHplus
 ODE5 (Prince-Dormand) RCH: $h_{HYD} = 10^{-8}s$

Abbildung 3.1: Konvergenzplot für das Testmodell *Zweimassenschwinger*.

Co-Simulation mit dem *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite und mit trivialer Anlaufrechnung ($H_1: p = 0$, $H_2: p = 1$, ...). Dargestellt ist der globale Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

Es ist also festzuhalten, dass die Kopplung mit diesen kommerziellen Solvern korrekte Ergebnisse liefert und im Folgenden das komplexe Modell der Hochdruckpumpe mit dem Common-Rail-System gekoppelt werden kann.

3.1.4. Anwendung: Hochdruckpumpe (Common-Rail-Einspritzsystem)

Modellbeschreibung und Kopplung der Hochdruckpumpe wurden bereits in [SS11, SEW⁺12b, SEW⁺12a] veröffentlicht. In dieser Arbeit wird daher nur eine knappe Beschreibung des Modells und der Simulationsergebnisse geliefert. Im Wesentlichen wird auf die Aspekte der Kopplung und den Vergleich der Co-Simulationsverfahren eingegangen.

3.1.4.1. Common-Rail-Einspritzsystem

Abbildung 3.2 zeigt ein Common-Rail-Einspritzsystem. Zu diesem gehört die Hochdruckpumpe, welche als Nebenaggregat direkt von der Kurbelwelle angetrieben wird. Dieser Antrieb kann ein Riemen-, Ketten- oder Rädertrieb sein. Hier erfolgt der Antrieb über einen Rädertrieb. Die Hochdruckpumpe fördert und verdichtet den Diesel-Kraftstoff aus dem Tank in das Common-Rail, welches als gemeinsamer Druckspeicher für die Injektoren und damit die Einspritzung in die einzelnen Zylinder dient. [Bos98, Rob02, Con07]

Dieses Common-Rail-Einspritzsystem besteht aus mechanischen (Antrieb und Hochdruckpumpenmechanik) und hydraulischen (Hochdruckpumpenhydraulik, Common-Rail und Injektoren) Komponenten. Diese werden in der Praxis meist getrennt voneinander simuliert [SEW⁺12b, SEW⁺12a]. Hier wird nun eine Co-Simulation für die gekoppelte Berechnung des mechanischen und hydraulischen Subsystems eingesetzt.

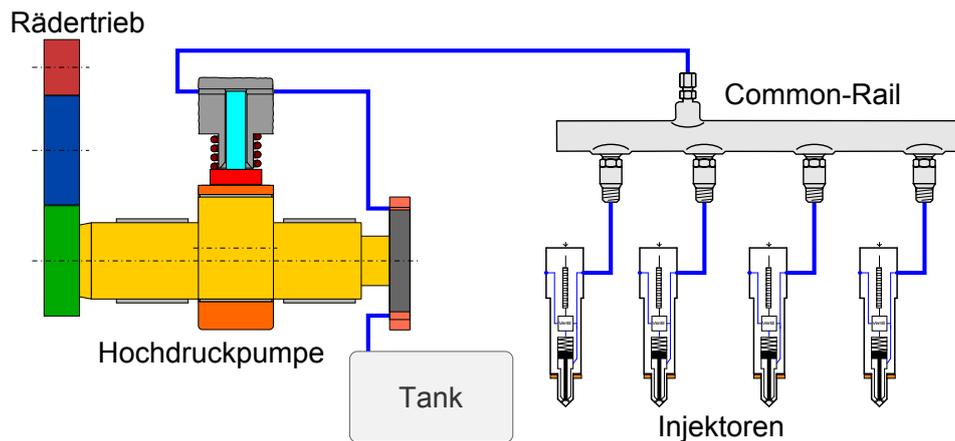


Abbildung 3.2: Common-Rail-Einspritzsystem, vgl. [SEW⁺12a].

3.1.4.2. MKS-Subsystem der Hochdruckpumpe

In Abbildung 3.3 ist das MKS-Subsystem einer Dreikolben-Hochdruckpumpe zu sehen. Die Darstellung wurde auf das Wesentliche reduziert. Auf einer Welle mit einem exzentrischen Mittelteil sitzt ein Exzenterring. Dieser hat drei plane Außenflächen, auf denen jeweils ein Gleitschuh sitzt. Die drei Gleitschuhe sind jeweils mit einem Kolben verbunden. Exzenter und Gleitschuhe wandeln nun die Rotationsbewegung der Welle in Longitudinalbewegungen der drei Kolben um. Damit beim Ansaugen des Dieselkraftstoffs Kolben und Gleitschuhe weiterhin Kontakt mit dem Exzenterring haben, werden diese mit je einer Feder auf den Exzenterring gedrückt. Die Welle wird in Dieselkraftstoff geschmierten, hydrodynamischen Lagern geführt. Am Wellenende ist eine Gerotorpumpe als Vorförderpumpe angebracht. Diese hat die Aufgabe, den Betriebsdruck für die Befüllung der drei Hochdruckpumpenzylinder und die Dieselkraftstoffschmierung der Pumpenwellenlager bereitzustellen.

Bei der Abbildung der Hochdruckpumpenmechanik als MKS-Modell werden Exzenterring, Gleitschuhe und Gerotorpumpe als Starrkörper angenommen, die Welle wird über eine modale Reduktion als flexibles Bauteil eingefügt [Sha05]. Die drei Kolben werden als Viermassenschwinger abgebildet. Die Kräfte der hydrodynamischen Lager [LS78, Sch10b] und die nichtlineare Steifigkeit der Kontakte zwischen Exzenterring und Gleitschuhen werden als Kennfelder in das Modell eingebracht.

Im Modell wird die Hochdruckpumpe über einen Rädertrieb, siehe Abbildung 3.4 und 3.5, und dieser über eine ungleichförmige Motordrehzahl kinematisch angetrieben.

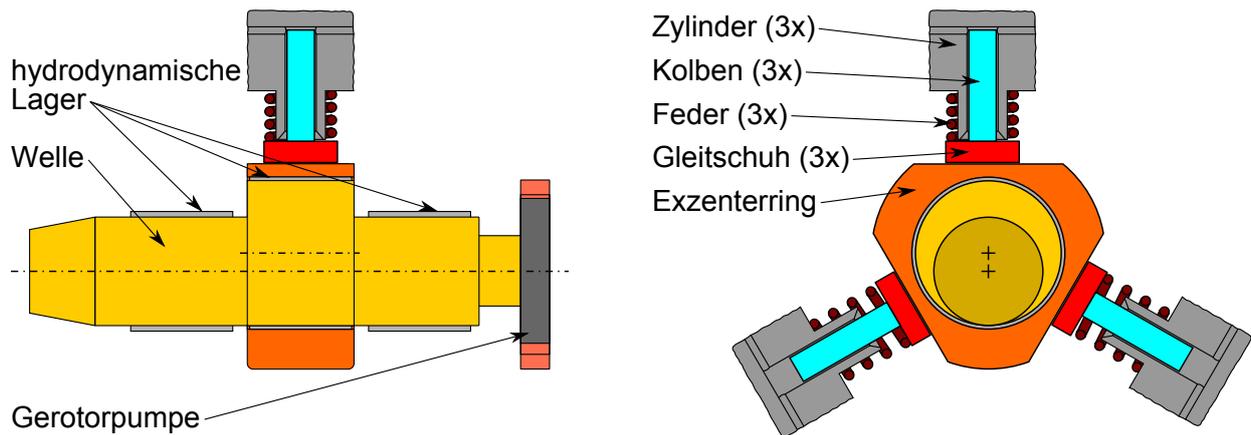


Abbildung 3.3: Vereinfachter mechanischer Aufbau der Hochdruckpumpe [SS11, SEW⁺12a].

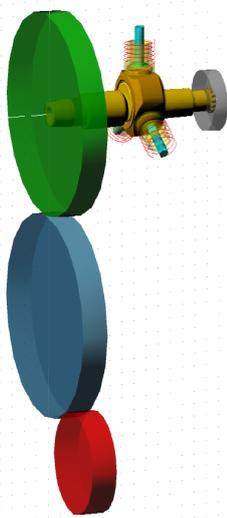


Abbildung 3.4: MKS-Modell mit Rädertrieb [SEW⁺12a].

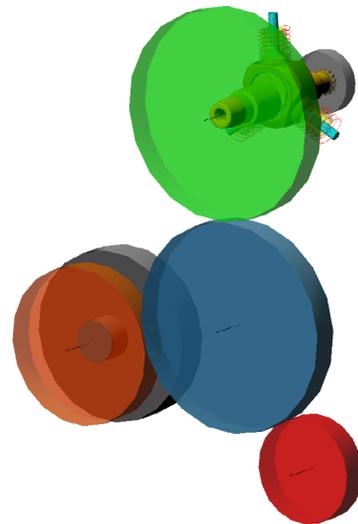


Abbildung 3.5: MKS-Modell mit Rädertrieb und Nebenaggregat [SEW⁺12a].

3.1.4.3. Hydraulisches Subsystem der Hochdruckpumpe

In Abbildung 3.6 ist der stark vereinfachte Aufbau des hydraulischen Subsystems zu sehen. Die Funktionsweise ist folgende: Bewegt sich ein Kolben radial nach innen (aus dem Zylinder heraus), wird Dieselkraftstoff über ein Volumenstromregelventil (Saugdrossel) und das zugehörige Saugventil angesaugt. Bewegt sich der Kolben radial nach außen (in den Zylinder hinein), wird der Kraftstoff komprimiert und über das zugehörige Hochdruckventil in den Druckspeicher (das Common-Rail) gefördert. Im Prüfstandsaufbau wird der Raildruck durch ein Druckbegrenzungsventil eingestellt. Im Betrieb am Motor werden aus dem Rail die Einspritzvolumenströme durch Injektoren entnommen [Bos98], siehe Abbildung 3.7.

Das Hydraulikmodell wurde im Rahmen des FVV Projektes „Hochdruckpumpe“ von Herrn Dr.-Ing. Julian Ewald am Institut für fluidtechnische Antriebe und Steuerungen (IFAS) der RWTH Aachen aufgebaut [SEW⁺12a].

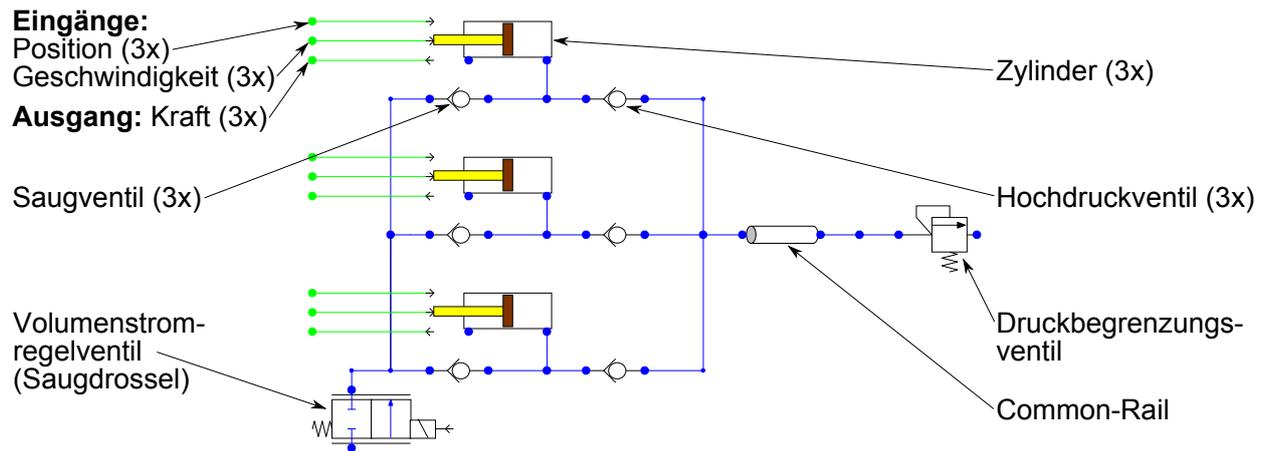


Abbildung 3.6: Stark vereinfachter hydraulischer Aufbau der Hochdruckpumpe und des Rails [SS11, SEW⁺12a].

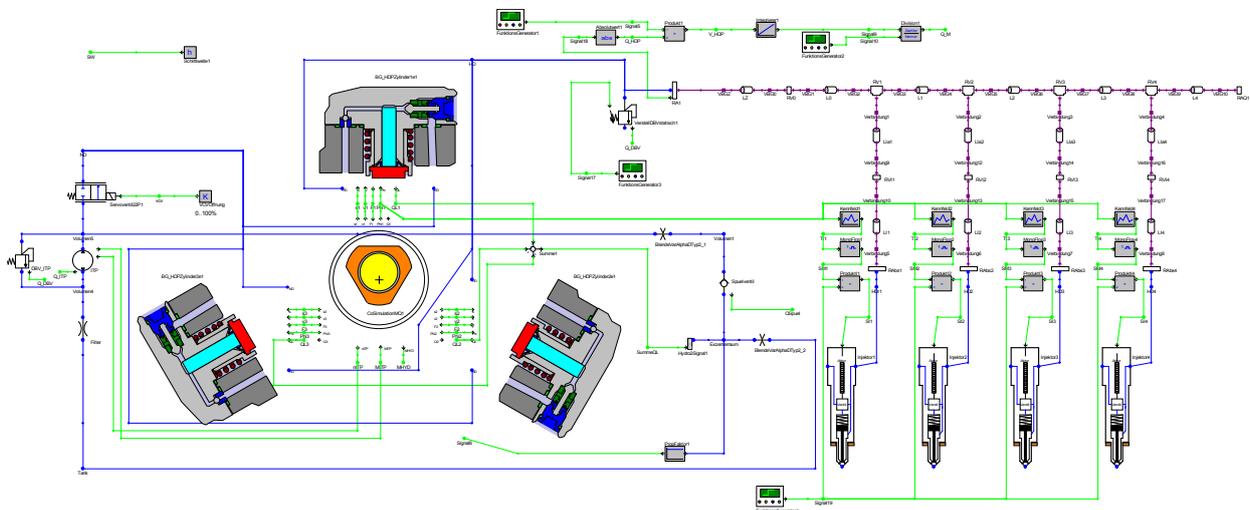


Abbildung 3.7: Vollständiges hydraulisches Modell der Hochdruckpumpe, des Rails und der Injektoren [SEW⁺12a].

3.1.4.4. Kopplung der Hochdruckpumpensubsysteme

Abbildung 3.8 zeigt die Kopplung der Hochdruckpumpensubsysteme. Es handelt sich um drei Kraft-Weg Kopplungen an den drei Kolben. Die Ausgangsgrößen des MKS-Subsystems (= Eingangsgrößen des hydraulischen Subsystems), sind die Positionen und Geschwindigkeiten der drei Kolben. Diese werden ausgehend vom unteren Totpunkt gemessen. Die Eingangsgrößen des MKS-Subsystems (= Ausgangsgrößen des hydraulischen Subsystems), sind die hydraulischen Kräfte (Zylinderdruck mal Kolbenfläche), welche axial auf die Stirnseite des Kolbens wirken.

Hier nicht weiter betrachtet wird die Leakage zwischen Kolben und Zylinder, welche als pre-processing Schritt in einem separaten EHD-Modell berechnet und als Kennlinie in das Hydraulikmodell eingebracht wurde. Dieses EHD-Modell wurde im Rahmen des FVV Projektes „Hochdruckpumpe“ von Herrn Dr.-Ing. Sedat Tuzcu für das Institut für Maschinenelemente und Konstruktions-technik (IMK) an der Universität Kassel erstellt [SEW⁺12a].

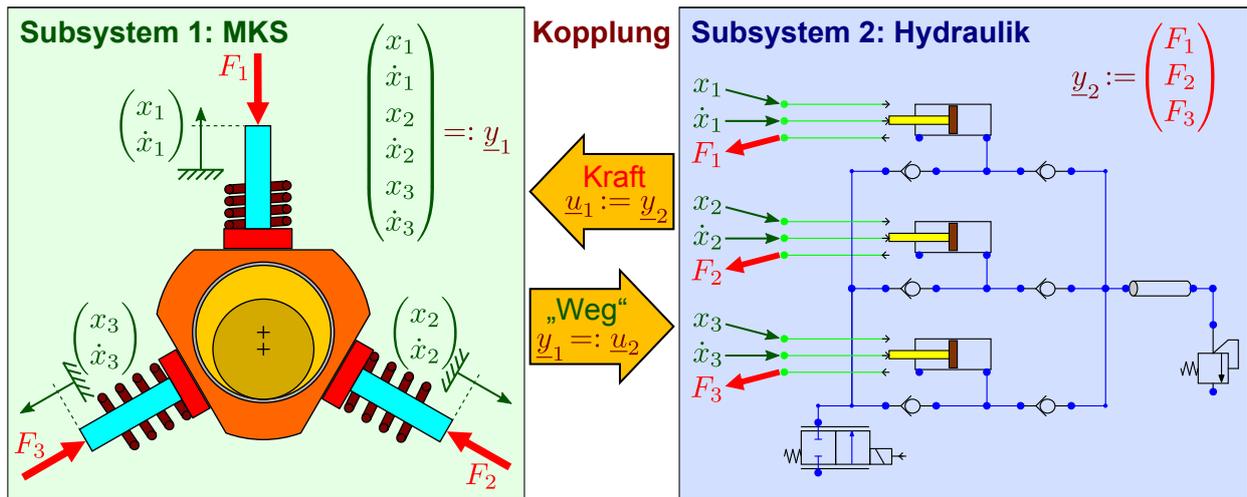


Abbildung 3.8: Kopplungsstruktur der Hochdruckpumpe [SEW⁺12a].

Ein Ziel des FVV Projektes „Hochdruckpumpe“ war es, zu untersuchen, welche Effekte mittels Co-Simulation im Vergleich zu ungekoppelten Alternativen erfasst werden können. Die ungekoppelten Alternativen sind folgende:

- Ungekoppeltes Hydraulikmodell: Nach Vorgabe einer Solldrehzahl der Pumpenwelle können über die Pumpengeometrie die Pleuellagerbewegungen als idealer Sinusverlauf mit entsprechenden Amplituden und Phasenverschiebungen berechnet werden. Diese werden dann als Eingänge des ungekoppelten Hydraulikmodells genutzt.
- Ungekoppeltes MKS-Modell: Aus einer Zylinderdruckmessung oder einer ungekoppelten Hydrauliksimulation kann eine Kennlinie (Pleuellagerkraft über Pleuellagerwinkel) erstellt werden. Während der ungekoppelten MKS-Simulation wird diese Kennlinie dann ausgewertet und die jeweils phasenverschobenen Pleuellagerkräfte als Eingänge verwendet.

Nähere Details, Formeln, Zeitverläufe und Kennlinien für unterschiedliche Betriebspunkte sind in [SEW⁺12a] zu finden.

3.1.4.5. Simulationsergebnisse der Hochdruckpumpe

Exemplarisch werden nun für eine Gesamtmodellkonfiguration und einen Betriebspunkt Zeitverläufe verschiedener Variablen dargestellt. Die Achsen wurden hierbei normiert. Weitere Betriebspunkte (Pumpendrehzahl, Raildruck und Saugdrosselstellung) und ein Vergleich von Messung und Co-Simulation ist in [SEW⁺12a] zu finden.

Abbildung 3.9 zeigt folgende normierte Signalverläufe:

- 1. Drehzahl an der Pumpenwelle.** Im Fall der ungekoppelten Hydrauliksimulation ist diese Drehzahl konstant und entspricht der Solldrehzahl. Bei der ungekoppelten MKS-Simulation und der Co-Simulation wird die entsprechend der Übersetzung umgerechnete Solldrehzahl am Pleuellagerkinematik aufgeprägt. Die Winkelgeschwindigkeit an der Pumpenwelle ergibt sich dann aufgrund der Schwingungen in Pleuellagertrieb und Pumpe.

- 2. Hübe der Hochdruckpumpenkolben 1, 2 und 3.** Im Fall der ungekoppelten Hydrauliksimulation: ideale Sinusform. Bei der ungekoppelten MKS-Simulation und der Co-Simulation folgen diese aus der dynamischen Simulation des MKS-Modells.
- 3. Geschwindigkeiten der Hochdruckpumpenkolben 1, 2 und 3.** Im Fall der ungekoppelten Hydrauliksimulation: analytische Zeitableitung der idealen Sinusform der Kolbenhübe. Bei der ungekoppelten MKS-Simulation und der Co-Simulation folgen diese aus der dynamischen Simulation des MKS-Modells.
- 4. Kräfte auf die Hochdruckpumpenkolben 1, 2 und 3.** Die Kräfte werden vom Hydraulikmodell aus Zylinderdruck mal Kolbenfläche berechnet. Im Fall der ungekoppelten MKS-Simulation werden die Kräfte aus einer Kennlinie „Kolbenkraft über Nockenwinkel“ entnommen, welche mit der ungekoppelten Hydrauliksimulation erstellt wurde.
- 5. Hydraulisches Moment an der Pumpenwelle.** Das hydraulische Moment wird aus den Kolbenkräften und den jeweils anliegenden Hebeln berechnet. Dies ist in der ungekoppelten Hydrauliksimulation auch möglich und erlaubt damit den direkten Vergleich. Das Gesamtmoment auf die Pumpenwelle (nicht dargestellt) beinhaltet zusätzlich Reib- und Trägheitsmomente der Mechanik.
- 6. Druck am Pumpenanschluss.** Dieser ist in der ungekoppelten MKS-Simulation nicht enthalten. Im Vergleich zum Raildruck (nicht dargestellt) zeigen sich am Pumpenanschluss stärkere Schwingungen, allerdings ist der Einfluss der Einspritzvolumenströme hier geringer als im Rail. Zusätzlich wurden in den 6. Graphen die Einspritzvolumenströme der Injektoren (ohne Skala) eingezeichnet.

Die ebenfalls normierte Zeitachse zeigt die letzte von rund 19 Pumpenwellenumdrehungen. Damit wurde bewirkt, dass Einschwingeffekte abgeklungen sind. Die Signalverläufe stellen daher einen eingeschwungenen Betriebszustand dar.

Die Modellparameter der in Abbildung 3.9 dargestellten Simulation wurden so gewählt, dass die Eigenfrequenzen von Rail und Rädertrieb ähnlich sind, wodurch sich die Schwingungen von Rail und Rädertrieb stark gegenseitig beeinflussen.

Im Folgenden werden die in Abbildung 3.9 dargestellten Signalverläufe erläutert:

Am Kurbelwellenrad des Rädertriebs liegt zunächst die Motordrehzahl an, welche entsprechend der Übersetzung und der mechanischen Schwingungen auf die Pumpenwelle übertragen wird. Die Drehung der Pumpenwelle wird über Exzenter und Gleitschuhe in eine nahezu sinusförmige Hubbewegung der Kolben übertragen. Betrachtet man nun beispielsweise die Kolbenbewegung von Kolben 1 vom unteren Totpunkt (UT) aus, so bewegt sich dieser in Richtung des oberen Totpunktes (OT) und verringert das Volumen im Zylinder. Aufgrund des nur zu 34% geöffneten Saugdrosselventils wurde der Zylinder aber beim vorhergehenden Ansaugen nicht vollständig gefüllt. Daher muss zunächst gasförmiger Kraftstoff im Zylinder abgebaut werden, bevor der Kolben den Diesekraftstoff komprimieren kann. Ist dies der Fall, steigt der Zylinderdruck und damit die Kolbenkraft steil an. Hat der Zylinderdruck den Raildruck erreicht, öffnet das Hochdruckventil und der Kraftstoff wird in das Rail gefördert. In diesem Zeitraum besteht eine direkte Verbindung zwischen Rail und Pumpenmechanik. Hat nun der Kolben den oberen Totpunkt erreicht und zieht sich wieder

zurück, sinkt der Zylinderdruck und das Hochdruckventil schließt. Überschreitet der Kolben 1 den oberen Totpunkt, muss zunächst der Zylinderdruck abgebaut werden. In diesem Zeitraum treibt dieser Kolben die Pumpe an, so dass negative hydraulische Momente entstehen. Der Momentenverlauf an der Hochdruckpumpenwelle hängt allerdings stark von der Saugdrosselöffnung ab, da diese die Füllmenge der Zylinder und damit den Zeitpunkt, an dem die Kolbenkräfte ansteigen, bestimmt. Ist der Zylinderdruck geringer als der Druck einer Vorförderpumpe, öffnet das Saugventil und Kraftstoff kann in den Zylinder angesaugt werden.

Im Druck am Pumpenanschluss zeigen sich relativ starke Schwingungen, welche vom hydraulischen Submodell kommen. Diese Schwingungen werden durch die Fördervolumenströme der Hochdruckpumpe und die aus dem Rail entnommenen Einspritzvolumenströme der Injektoren angeregt. Die Fördervolumenströme der Hochdruckpumpe werden direkt von den mechanischen Schwingungen beeinflusst. Im umgekehrten Fall wirken sich die Druckschwingungen direkt auf die Kolbenkräfte und damit auf das mechanische Submodell aus. Wie man sieht, hat diese Kopplung hier den Einfluss, dass die Ergebnisse der Co-Simulation von denen der ungekoppelten Modelle abweichen.

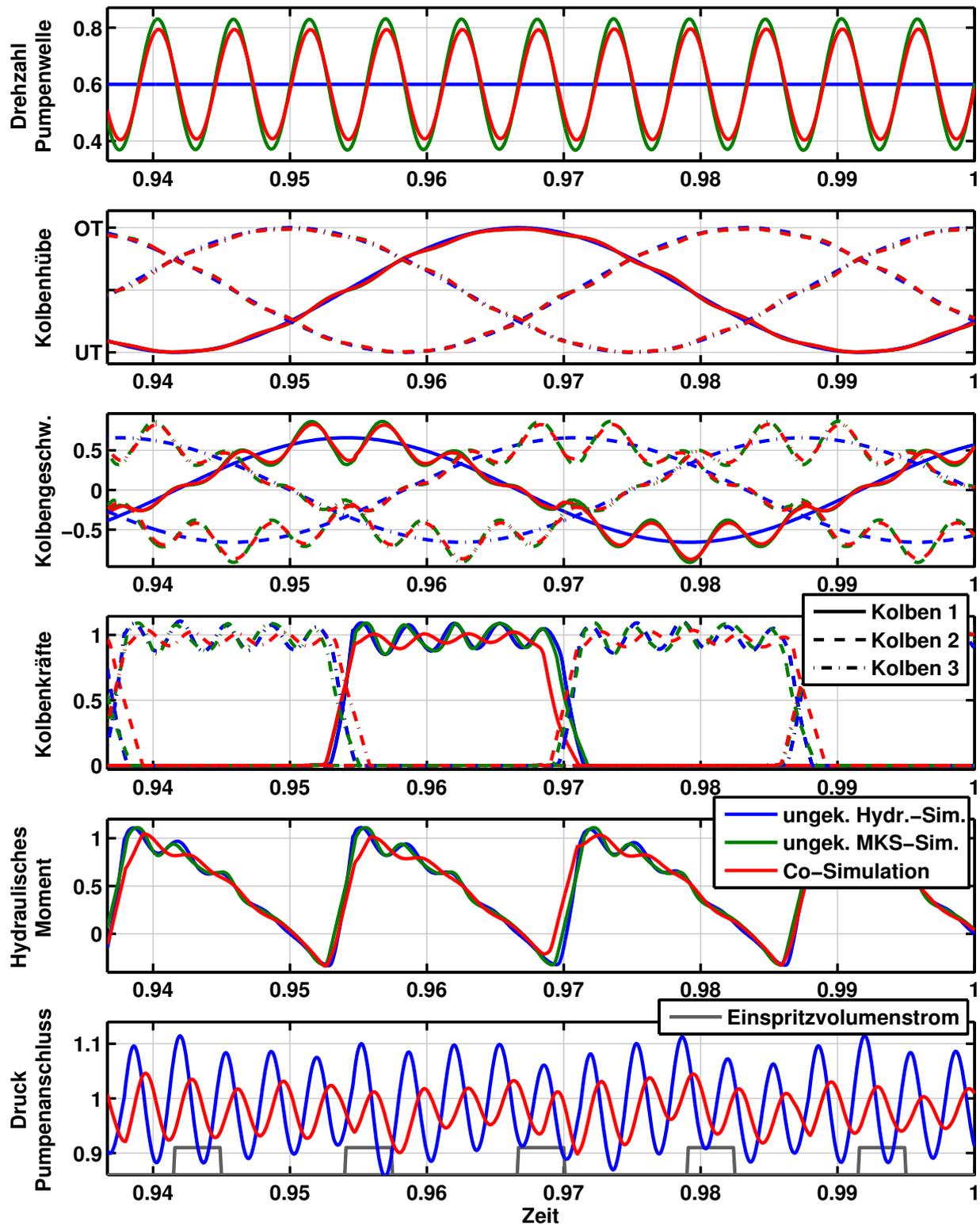


Abbildung 3.9: Vergleich: Ungekoppelte Hydrauliksimulation, ungekoppelte MKS-Simulation und Co-Simulation der Hochdruckpumpe. Betriebspunkt: Solldrehzahl $n = 0.6 n_{max}$, Railsolldruck $p = p_{max}$ und Saugdrosselstellung $VCV = 34\%$ [SEW⁺12a].

3.1.4.6. Konvergenz der Co-Simulationsergebnisse der Hochdruckpumpe

Für das Co-Simulationsmodell der Hochdruckpumpe wurden Konvergenzplots für alle in Abschnitt 2.4 vorgestellten Co-Simulationsverfahren erstellt.

Um Konvergenzuntersuchungen am komplexen Modell der Hochdruckpumpe durchführen zu können, muss zunächst eine Referenzlösung berechnet werden. Hierzu wurde der *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus gewählt, da dieser in der Analyse am Testmodell (→ 2.6) den kleinsten Fehler der untersuchten Verfahren ergeben hat. Der Fehler der Co-Simulation hängt allerdings auch von den Subsystemsolvern ab. Daher wurden für die Berechnung der Referenzlösung auch die Subsystemsolvereinstellungen verschärft. Bei dem MKS-Modell wurde dazu die Toleranz e_{MKS} des Solvers reduziert. Das hydraulische Submodell wird mit einem festschrittweiten Solver gelöst, so dass hier die Mikroschrittweite h_{HYD} verkleinert wurde.

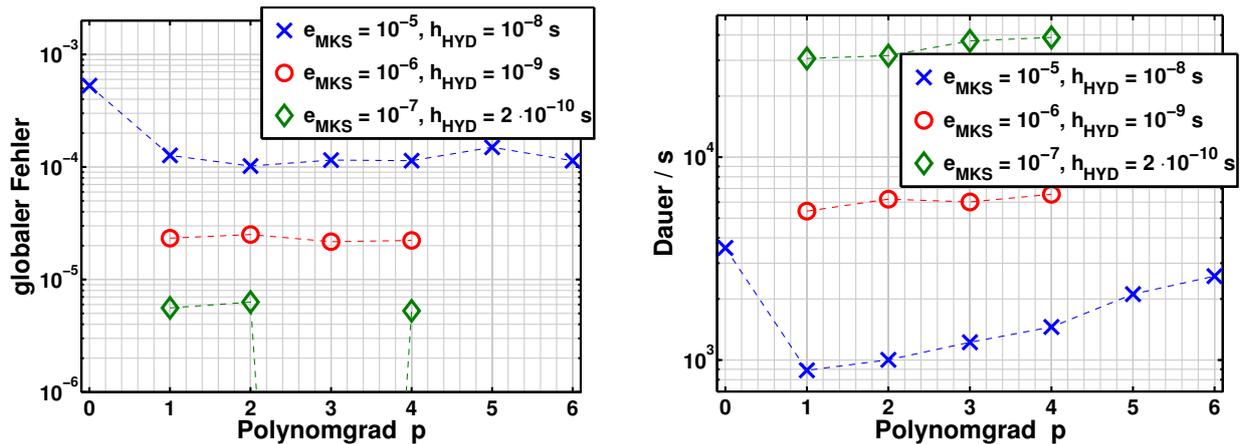
Gauß-Seidel Typ im Master/Slave Modus

Abbildung 3.10 zeigt (a) den globalen Fehler und (b) die Dauer der Co-Simulationen mit dem *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus, inklusive der Variationen der Subsystemsolvereinstellungen. Der Aufbau der Graphen ist identisch mit dem von Abb. 2.16 (a) und 2.27. Da die Co-Simulationen mit $e_{MKS} = 10^{-6}$ und $h_{HYD} = 10^{-9}$ s bzw. mit $e_{MKS} = 10^{-7}$ und $h_{HYD} = 2 \cdot 10^{-10}$ s, jeweils ca. 6000 s = 100 min bzw. ca. 35000 s \approx 580 min dauern, wurden diese nur für die Polynomgrade $p = 1, 2, 3, 4$ berechnet. Die Simulation mit $e_{MKS} = 10^{-7}$, $h_{HYD} = 2 \cdot 10^{-10}$ s und $p = 3$ wurde als Referenzlösung eingesetzt, so dass diese einen Fehler von 0 hat, welcher in logarithmischer Skalierung bei $-\infty$ liegt.

Es ist zu sehen, dass der globale Fehler bei Polynomgrad $p = 0$ relativ groß und ab $p \geq 1$ vom Polynomgrad praktisch unabhängig ist. Werden dagegen die Subsystemsolvereinstellungen verschärft (kleineres e_{MKS} und h_{HYD}) ist eine deutliche Reduktion des globalen Fehlers zu beobachten. Der Vergleich zeigt das in diesem Fall erwartete Konvergenzverhalten. Insbesondere kann davon ausgegangen werden, dass der Referenzlösung mit einem globalen Fehler $< 10^{-5}$ vertraut werden kann.⁵

Die Dauer der Co-Simulation steigt - wie zu erwarten - mit der Verschärfung der Subsystemsolvereinstellungen an. Wie auch bei den anderen Verfahren zu beobachten (→ Abb. 3.11, 3.12 und 3.13) ist die Dauer der Co-Simulation mit Polynomgrad $p = 0$ deutlich höher als im Fall $p > 0$. Dies ist auf eine Reduktion der variablen Mikroschrittweiten des MKS-Subsystemsolvers h_{MKS} zurückzuführen und lässt sich durch die bei $p = 0$ stark un stetigen Kräfteingänge des MKS-Subsystems erklären.

⁵Systematische Fehler, welche in allen Co-Simulationen enthalten sind, können durch die Konvergenzuntersuchungen am Testmodell (→ 3.1.3) weitgehend ausgeschlossen werden.



(a) Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

(b) Dauer der Co-Simulation in Sekunden.

Abbildung 3.10: Konvergenzplot und Dauer der Co-Simulation der Hochdruckpumpe mit dem *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus.

Subsystemsolver 1: Adams WSTIFF SI2: e_{MKS} (siehe Legende)

Subsystemsolver 2: DSHplus ODE5 (*Prince-Dormand*) RCH: h_{HYD} (siehe Legende)

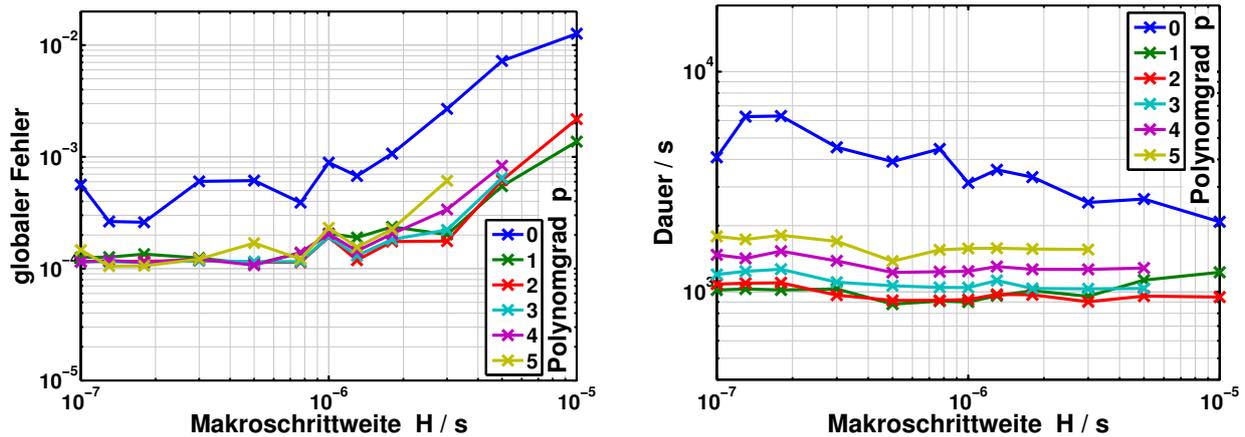
Jacobi und Gauß-Seidel Typ mit fester Makroschrittweite

Abbildung 3.11 bzw. 3.12 zeigt (a) den globalen Fehler und (b) die Dauer der Co-Simulation der Hochdruckpumpe mit dem *Gauß-Seidel* bzw. dem *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite. Der Aufbau der Graphen ist identisch mit dem von Abb. 2.15 (a) und 2.25.

Der direkte Vergleich der Typen zeigt eine große Ähnlichkeit. Bei beiden Typen ist zu beobachten, dass der globale Fehler für $p > 0$ und $H < 2 \cdot 10^{-6}$ s bei ca. 10^{-4} liegt. Die Untersuchungen am *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus mit verschiedenen Subsystemsolvereinstellungen (\rightarrow Abb. 3.10 (a)) haben gezeigt, dass dies dem Fehler der Subsystemsolver entspricht.

Wie bereits bei dem Testmodell *Zweimassenschwinger* festgestellt (\rightarrow 2.6.1), kann auch für die Hochdruckpumpe beobachtet werden, dass die Stabilitätsgrenzen beim *Jacobi* Typ im Vergleich zum *Gauß-Seidel* Typ in Richtung kleinerer Makroschrittweiten H verschoben sind (fehlende \times Markierungen sind instabil). Es kann festgestellt werden, dass bei der Co-Simulation der Hochdruckpumpe nur ein kleiner Bereich von Makroschrittweiten H zwischen der numerischen Instabilität der Co-Simulation und dem Erreichen des Fehlers der Subsystemsolver liegt. In Richtung kleinerer Makroschrittweiten kann dieser Bereich durch Verschärfung der Subsystemsolvereinstellungen vergrößert werden, was allerdings zu einem deutlichen Anstieg der Rechenzeit führen würde.

Vergleicht man die Dauer der Co-Simulationen des *Gauß-Seidel* Typs mit der des *Jacobi* Typs (Abb. 3.11 (b) und 3.12 (b)) für die Polynomgrade $p=1, 2, 3$ und Makroschrittweiten um $H=3 \cdot 10^{-6}$ s, sieht man, dass der parallele *Jacobi* Typ deutlich reduzierte Rechenzeiten aufweist. Bei $p=2$ und $H=3 \cdot 10^{-6}$ s hat der *Jacobi* Typ eine Rechenzeit von ca. 500 s und der *Gauß-Seidel* Typ von ca. 900 s. Damit wird in diesem Fall die theoretisch mögliche Halbierung der Rechenzeit annähernd erreicht.



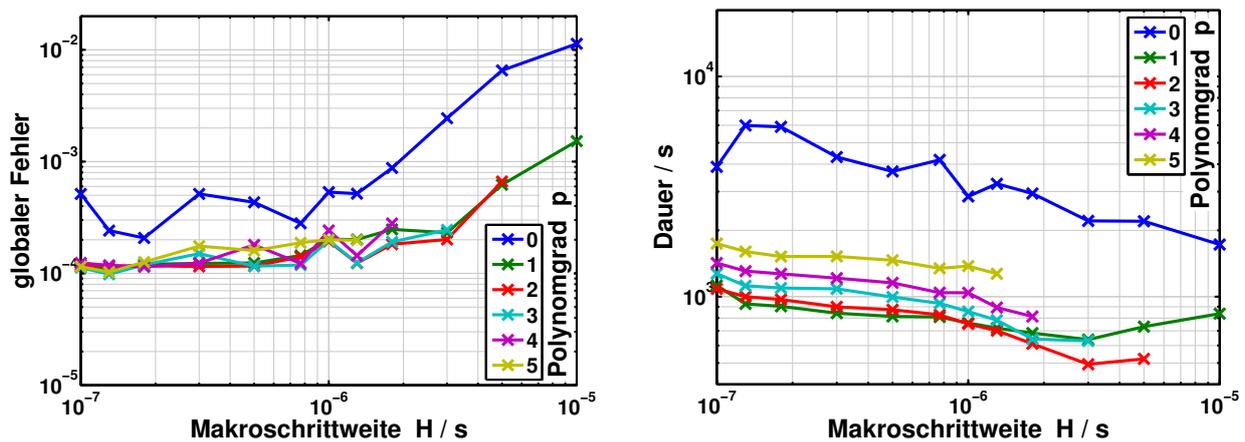
(a) Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

(b) Dauer der Co-Simulation in Sekunden.

Abbildung 3.11: Konvergenzplot und Dauer der Co-Simulation der Hochdruckpumpe mit dem *Gauß-Seidel* Typ mit fester Makroschrittweite.

Subsystemsolver 1: Adams WSTIFF SI2 $e_{MKS} = 10^{-5}$

Subsystemsolver 2: DSHplus ODE5 (*Prince-Dormand*) RCH $h_{HYD} = 10^{-8}$ s



(a) Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

(b) Dauer der Co-Simulation in Sekunden.

Abbildung 3.12: Konvergenzplot und Dauer der Co-Simulation der Hochdruckpumpe mit dem *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite.

Subsystemsolver 1: Adams WSTIFF SI2 $e_{MKS} = 10^{-5}$

Subsystemsolver 2: DSHplus ODE5 (*Prince-Dormand*) RCH $h_{HYD} = 10^{-8}$ s

Jacobi Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung

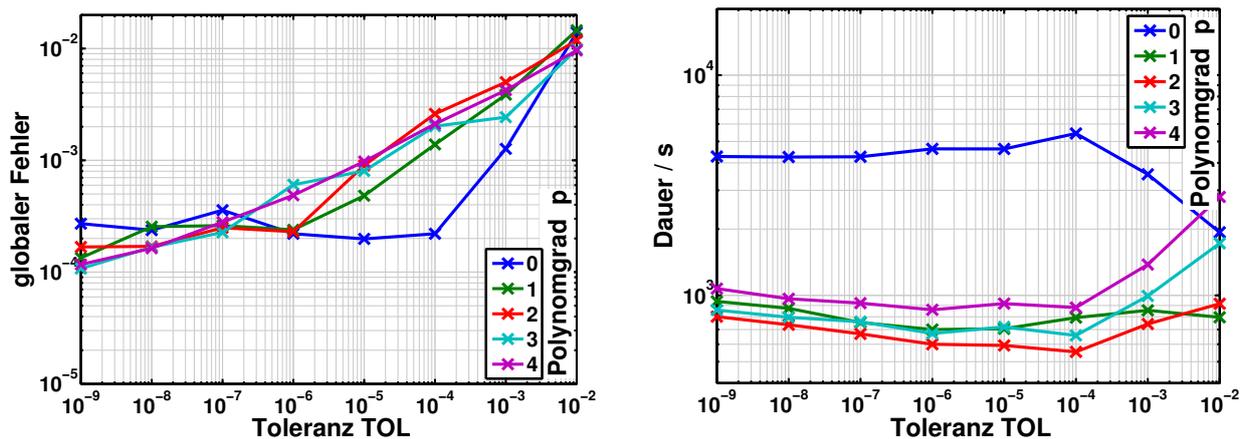
Abbildung 3.13 zeigt (a) den globalen Fehler und (b) die Dauer der Co-Simulation der Hochdruckpumpe mit dem *Jacobi* Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung ([BS11b, Bus12], → 2.4.2.3). Abbildung 3.14 zeigt die mittleren Makroschrittweiten für diese Co-Simulationen.

Im untersuchten Parameterbereich sind keine instabilen Co-Simulationen aufgetreten. Anhand der mittleren Makroschrittweite kann, wie bereits beim Zweimassenschwinger (→ Abb. 2.18), für die Polynomgrade $p=3$ und 4 eine stabilisierende Wirkung beobachtet werden. Dort ist zu sehen, dass für Toleranzen $TOL > 10^{-4}$ die Makroschrittweiten ca. auf die in Abbildung 3.12 (a) ablesbaren Stabilitätsgrenzen von ca. $H = 5 \cdot 10^{-6}$ s für $p=3$ und ca. $H = 2 \cdot 10^{-6}$ s für $p=4$ geregelt werden. Dabei ist die mittlere Makroschrittweite in Abbildung 3.14 sogar noch etwas größer, da über weite

Strecken mit langsam veränderlichen Koppelgrößen auch größere Makroschrittweiten stabil sind.

Der globale Fehler sinkt mit kleiner werdenden Toleranzeinstellungen TOL . Allerdings führt eine beispielsweise um Faktor 10 reduzierte Toleranz nicht zu einem um Faktor 10 reduzierten globalen Fehler, wie es bei den Tests am Zweimassenschwinger der Fall war (\rightarrow Abb. 2.17 (a)). Der Fehler der Subsystemsolver von ca. 10^{-4} wird erst bei sehr kleinen Toleranzen von $TOL = 10^{-9}$ erreicht.

Die Dauer der Co-Simulation der Hochdruckpumpe zeigt für $TOL < 10^{-4}$ nur eine sehr schwache Abhängigkeit von der Toleranz TOL . Bei Polynomgrad $p=2$ und Toleranz $TOL = 10^{-4}$ ergibt sich mit einer Dauer von ca. 550 s ein Minimum der Rechenzeit, welche bei Wahl von $TOL = 10^{-5}$ oder 10^{-6} nur leicht auf ca. 600 s ansteigt.



(a) Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

(b) Dauer der Co-Simulation in Sekunden.

Abbildung 3.13: Konvergenzplot und Dauer der Co-Simulation der Hochdruckpumpe mit dem *Jacobi* Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung.

Verfahrensparam.: $H_{max} = 10^{-4}s$, $H_{min} = 10^{-7}s$, $H_{init} = 10^{-6}s$, $q = 0.95$, $q_{max} = 4$, $q_{min} = 0.25$

Subsystemsolver 1: Adams WSTIFF SI2 $e_{MKS} = 10^{-5}$

Subsystemsolver 2: DSHplus ODE5 (*Prince-Dormand*) RCH $h_{HYD} = 10^{-8}s$

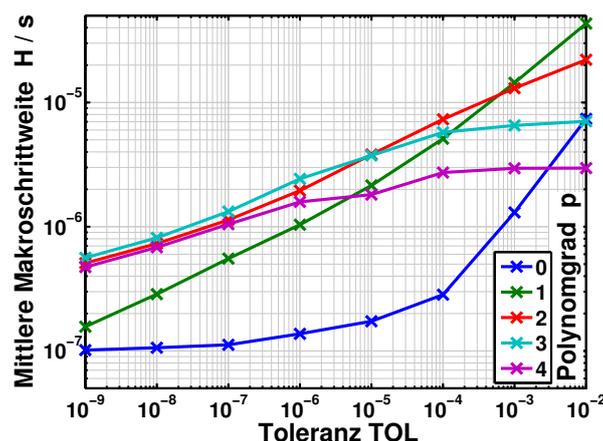


Abbildung 3.14: Mittlere Makroschrittweiten der Co-Simulation der Hochdruckpumpe mit dem *Jacobi* Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung.

Verfahrensparam.: $H_{max} = 10^{-4}s$, $H_{min} = 10^{-7}s$, $H_{init} = 10^{-6}s$, $q = 0.95$, $q_{max} = 4$, $q_{min} = 0.25$

Für die variable Makroschrittweite mittels Prädiktor/Korrektor Verfahren werden nun die Zeitverläufe der Makroschrittweiten H zusammen mit den Koppelvariablen betrachtet. Abbildung 3.15 zeigt oben die drei Kolbengeschwindigkeiten v_1 , v_2 , v_3 und in der Mitte die drei Kolbenkräfte

F_1, F_2, F_3 . Unten sind, logarithmisch skaliert, die Verläufe der variablen Makroschrittweite H für zwei Toleranzeinstellungen TOL (siehe Legende) zu sehen. Bis auf die Achse der Makroschrittweite sind alle Achsen normiert. Die ebenfalls normierte Zeitachse zeigt eine Umdrehung der Pumpenwelle, wobei Einschwingvorgänge bereits abgeklungen sind.

In Abbildung 3.15 ist zu beobachten, dass die kleinere Toleranz $TOL = 10^{-4} \rightarrow 10^{-5}$ im Mittel zu kleineren Makroschrittweiten führt, siehe auch Abb. 3.14. Darüber hinaus ist gut zu sehen, dass steile Gradienten, insbesondere in den Kolbenkräften, zu kleinen Makroschrittweiten führen. In den Bereichen, in denen sich die Kolbenkräfte nicht stark ändern bzw. kontinuierlich steigen oder fallen, steigen die Makroschrittweiten zunächst an und bleiben dann vergleichsweise groß.

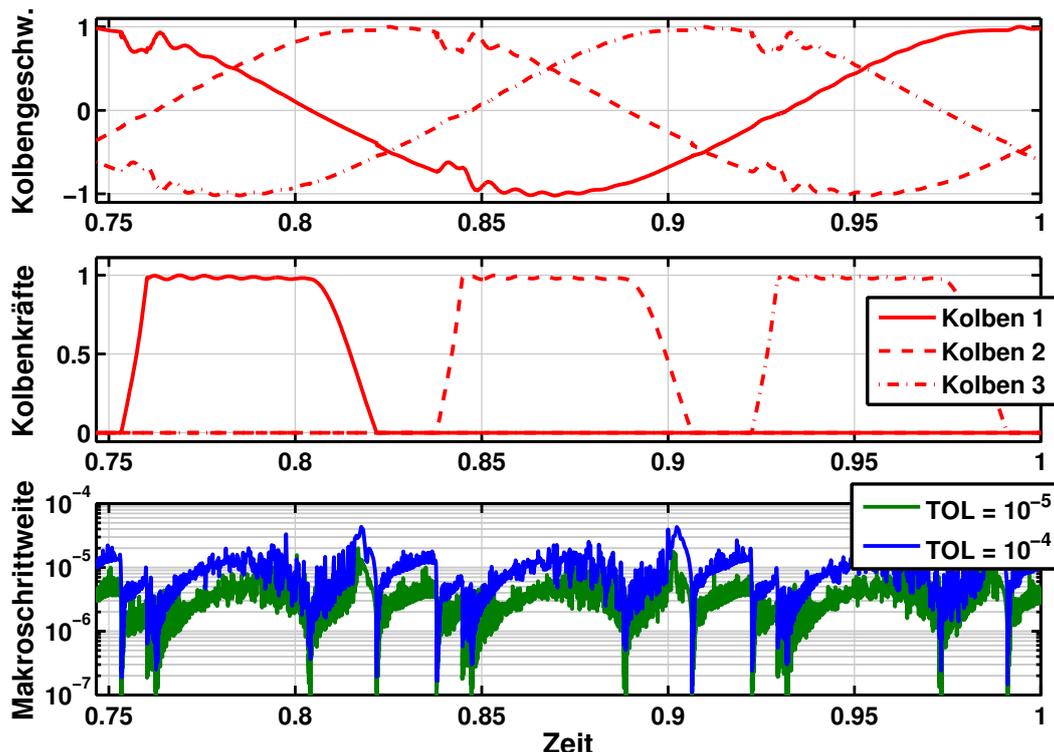


Abbildung 3.15: Co-Simulation der Hochdruckpumpe mit dem *Jacobi* Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung: Kolbengeschwindigkeiten, Kolbenkräfte und Makroschrittweiten [SS11, SEW⁺12a].

Verfahrensparam.: $H_{max} = 10^{-4}s$, $H_{min} = 10^{-7}s$, $H_{init} = 10^{-6}s$, $q = 0.95$, $q_{max} = 4$, $q_{min} = 0.25$ und Polynomgrad $p = 1$.

3.1.4.7. Fazit für die Co-Simulation der Hochdruckpumpe

Mit dem Co-Simulationsgesamtmodell konnte die wechselseitige Beeinflussung der Schwingungen in den Submodellen erfasst werden, was mit ungekoppelten Modellen nicht möglich ist. So steht mit dem gekoppelten Modell des Common-Rail-Einspritzsystems ein Werkzeug zur Verfügung, mit dem das Gesamtsystem aus Antrieb, Hochdruckpumpe, Rail und Injektoren praktisch berechnet und ausgelegt werden kann.

Für den Vergleich der Co-Simulationsverfahren am komplexen Modell der Hochdruckpumpe kann folgendes festgehalten werden:

- Der Polynomgrad $p=0$ hat für alle Verfahren sowohl einen deutlich größeren globalen Feh-

ler, als auch eine stark erhöhte Rechenzeit. Konstante Polynome ($p=0$) werden häufig aus numerischen Stabilitätsgründen verwendet. Bei der Hochdruckpumpe sind allerdings auch höhere Polynomgrade ($p=1, 2$) ausreichend stabil, so dass diese vorzuziehen sind.

- Die Rechenzeit bei dem seriellen *Gauß-Seidel* Typ (≈ 900 s) ist fast doppelt so hoch wie bei dem parallelen *Jacobi* Typ (≈ 500 s). Anmerkung: Im Fall der Hochdruckpumpe sind die Rechenzeiten des MKS-Subsystemsolvers und des hydraulischen Subsystemsolvers ähnlich, so dass die theoretisch mögliche Halbierung der Rechenzeit fast erreicht wird.
- Der *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus liefert (für $p > 0$) die genauesten Ergebnisse und hat bei der Hochdruckpumpe keine numerischen Stabilitätsprobleme.
- Der *Gauß-Seidel* Typ mit fester Makroschrittweite hat keine Vorteile gegenüber dem Master/Slave Modus. Ein Nachteil liegt in der Notwendigkeit eine geeignete Makroschrittweite H zu wählen.
- Der *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite hat bei $p=2$ und $H = 3 \cdot 10^{-6}$ s die beste Effizienz, d.h. den kleinsten Fehler bei minimaler Simulationsdauer.
- Der *Jacobi* Typ mit Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung hat den Vorteil, dass sowohl parallel gerechnet wird, als auch gute Standardwerte für die Verfahrensparameter gewählt werden können. Diese explizite Makroschrittweitensteuerung garantiert zwar nicht, dass die gewählte Toleranz eingehalten wird, allerdings wird die parallele Co-Simulation damit erfolgreich stabilisiert.

3.2. MKS - Elektrodynamik

Eine weitere Gruppe multiphysikalischer Co-Simulationsmodelle wurde in Zusammenarbeit mit dem ABB Forschungszentrum in Ladenburg erstellt. Die Submodelle wurden hierbei von der Firma ABB zur Verfügung gestellt.

Untersucht wurden zwei unterschiedliche Bauformen elektromechanischer Schalter: Der *Thomson*-Spulen-Aktor (→ 3.2.3) [SMCS11] und ein *Recloser* mit elektromagnetischem Aktor (→ 3.2.4). Für beide Bauformen wurden als elektrodynamische Subsysteme zweidimensionale, rotations-symmetrische FE-Modelle erstellt. Die elektrodynamischen, partiellen Differentialgleichungen (→ 3.2.1) werden mit dem Multiphysikprogramm Comsol [COM13] gelöst. Die MKS-Subsysteme werden mit MSC Adams [MSC13] modelliert und simuliert (→ 3.1.1).

Bei der Kopplung von MKS und Elektrodynamik kommt ausschließlich das *Jacobi* Verfahren mit fester Makroschrittweite und trivialer Anlaufrechnung (→ 2.4) zum Einsatz. Um die Schnittstelle in Verbindung mit den Subsystemsolvern der eingesetzten Programme zu testen, wurde ein Konvergenzplot für das Testmodell *Zweimassenschwinger* erstellt (→ 3.2.2).

3.2.1. Gleichungen des elektrodynamischen Submodells

Zunächst werden die Gleichungen des elektrodynamischen Submodells hergeleitet. Hierfür werden einige allgemein bekannte Gleichungen [Leh10, Nol13, PS14] benötigt:

Maxwell-Gleichungen:

$$\text{Gaußsches Gesetz} \quad \operatorname{div} \underline{D} = \rho \quad (3.3)$$

$$\text{Faradaysches Induktionsgesetz} \quad \operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$\text{Quellen-Freiheit der magnetischen Flussdichte} \quad \operatorname{div} \underline{B} = 0 \quad (3.5)$$

$$\text{Ampère-Maxwell-Gesetz (Durchflutungsgesetz)} \quad \operatorname{rot} \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \quad (3.6)$$

$$\begin{array}{lll} \underline{D} & \text{dielektrische Verschiebung,} & \underline{E} & \text{elektrisches Feld,} & \rho & \text{Ladungsdichte} \\ \underline{B} & \text{magnetische Flussdichte,} & \underline{H} & \text{Magnetfeld,} & \underline{j} & \text{Stromdichte} \end{array}$$

In dem *Ampère-Maxwell*-Gesetz (3.6) wird der von *Maxwell* eingeführte Verschiebungsstrom $\frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$ vernachlässigt (quasistationäre Näherung) [Nol13].

Materialgleichungen für lineare, homogene Medien:

$$\underline{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \underline{E} \quad (3.7)$$

$$\underline{B} = \mu_r \mu_0 \underline{H} \quad (3.8)$$

$$\begin{array}{lll} \epsilon_0 \approx 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} & \text{elektrische Feldkonstante,} & \epsilon_r & \text{Dielektrizitätszahl} \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} & \text{magnetische Feldkonstante,} & \mu_r & \text{Permeabilitätszahl} \end{array}$$

Ohmsches Gesetz für bewegte Leiter:

$$\underline{j} = \sigma(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \quad (3.9)$$

σ elektrische Leitfähigkeit, \underline{v} Geschwindigkeit des Leiters ($v \ll c$)

Vektorpotential \underline{A} :

$$\underline{B} = \text{rot } \underline{A} \quad (3.10)$$

Wird nun das Vektorpotential (3.10) in das *Faradaysche* Induktionsgesetz (3.4) eingesetzt erhält man:

$$\text{rot } \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \text{rot } \underline{A}}{\partial t} \Leftrightarrow \text{rot} \left(\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right) = \underline{0} \quad (3.11)$$

Ist die Rotation des Feldes $(\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t})$ Null, so ist dies ein „reines Quellenfeld“ und lässt sich daher als Gradient eines skalaren Potentials Φ darstellen [BSMM01]:

$$\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = -\text{grad } \Phi \Leftrightarrow \underline{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \quad (3.12)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (3.12) in das *Ohmsche* Gesetz für bewegte Leiter (3.9) erhält man:

$$\underline{j} = \sigma \left(-\text{grad } \Phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \underline{v} \times \underline{B} \right) \quad (3.13)$$

Einsetzen des *Ampèreschen* Gesetzes (3.6) und der Materialgleichung (3.8) ergibt:

$$\frac{1}{\mu_r \mu_0} \text{rot } \underline{B} = \sigma \left(-\text{grad } \Phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \underline{v} \times \underline{B} \right) \quad (3.14)$$

Wird nun noch das Vektorpotential (3.10) eingesetzt, ergibt sich eine **vektorielle Konvektions/Diffusionsgleichung für das Vektorpotential \underline{A}** :

$$\boxed{\frac{1}{\mu_r \mu_0} \text{rot rot } \underline{A} = \sigma \left(-\text{grad } \Phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \underline{v} \times \text{rot } \underline{A} \right)} \quad (3.15)$$

Einzelne Terme dieser Gleichung können wegfallen. Zum Beispiel ist die Leitfähigkeit σ in Isolatoren null, in unbewegten Teilen ist $\underline{v} = \underline{0}$ und der extern aufgeprägte Strom $\sigma \text{ grad } \Phi$ tritt nur in den Spulenwindungen auf.

Als weiterer Aspekt wird im Modell die Erwärmung der stromdurchflossenen Leiter und die daraus resultierende Verringerung des Leitwertes σ berücksichtigt [SMCS11].

Eingang des elektrodynamischen Submodells

Subsystemeingang ist die Position und Geschwindigkeit der bewegten Bauteile. Der Eingang wirkt einerseits auf ein bewegtes FE-Netz (*moving mesh*) und andererseits auf ein deformierbares Netz

(*mesh morphing*) im Spalt zwischen bewegten und unbewegten Bauteilen.

Anmerkung: Durch den Einsatz eines deformierbaren FE-Netzes ist es nicht möglich, dass der Spalt ≤ 0 wird, da die FE-Elemente dann keine oder negative Abmessungen hätten. Dies muss bei der Kopplung berücksichtigt werden.

Ausgang des elektrodynamischen Submodells

Der Ausgang des elektrodynamischen Submodells ist die elektromechanische Kraft $\underline{F}_{el-mech}$. Diese wird durch Integration des *Maxwell*schen Spannungstensors T_{ij} (mit $i, j = 1, 2, 3$ Raumrichtungen) über die Körperoberfläche $S(V)$ berechnet [COM13, Nol13, PS14]:

$$T_{ij} := \epsilon_r \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_r \mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(\epsilon_r \epsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_r \mu_0} \underline{B}^2 \right) \quad (3.16)$$

$$F_{el-mech,i} = \oint_{S(V)} d\underline{f} \cdot \underline{T}_i \quad (3.17)$$

$d\underline{f}$ Flächenelement senkrecht zur Körperoberfläche $S(V)$

δ_{ij} Kronecker-Delta, $\delta_{ij} = 0 \forall i \neq j$ und $1 \forall i = j$

Im Fall des *Thomson*-Spulen-Aktors 3.2.3 besteht die Kraft im Wesentlichen aus der magnetischen *Lorentzkraft* \underline{F}_L :

$$\underline{F}_L = \iiint \underline{j} \times \underline{B} dV \quad (3.18)$$

Hierbei wird die resultierende *Lorentzkraft* durch ein Volumenintegral über das bewegte Bauteil berechnet.

3.2.2. Testmodell: *Zweimassenschwinger*

Die Modellierung des Zweimassenschwingers (\rightarrow 2.2) in Kraft-Weg Kopplung (\rightarrow Abb. 2.4) erfolgt Comsol-seitig in Form der gewöhnlichen Differentialgleichungen (2.21), (2.22) und (2.25) und Adams-seitig wie in Abschnitt 3.1.3.

Abbildung 3.16 zeigt die Konvergenz der Co-Simulationsergebnisse des Zweimassenschwingers mit den Solvern von Adams und Comsol. Der Aufbau der Abbildungen ist identisch mit dem von Abbildung 2.14 (a). Der BDF-Subsystemsolver von Comsol hat als Parameter die absolute $tol_{el-dyn,abs}$ und relative $tol_{el-dyn,rel}$ Toleranz, sowie die maximale (Mikro)-Schrittweite $h_{el-dyn,max}$.

Der Vergleich von Abbildung 3.16 mit Abbildung 2.19 (a) aus Abschnitt 2.6.2 zeigt, dass die Konvergenz der Co-Simulation auch mit diesen kommerziellen Subsystemsolvern den Erwartungen entspricht. Insbesondere erfolgt im untersuchten Parameterbereich (H, p) und bei den gewählten Subsystemsolvereinstellungen kein Abknicken des globalen Fehlers auf den Fehler der Subsystemsolver. Anzumerken ist, dass die Subsystemsolver meist die maximalen Mikroschrittweiten h_{max} verwenden. Daher ist davon auszugehen, dass aufgrund der kleinen Werte von h_{max} und einer relativ hohen Ordnung der Subsystemsolver die eingestellten Subsystemtoleranzen von 10^{-6} deutlich unterschritten werden. Der „Ordnungsverlust“ aufgrund der trivialen Anlaufrechnung tritt ab $p \geq 3$ deutlich auf. Die Anstiege im globalen Fehler bei $H = 3 \cdot 10^{-6}$ s und $p = 3$ und 5 können nicht erklärt werden.

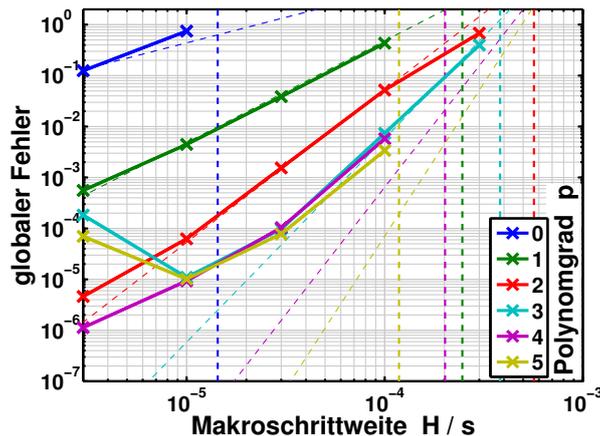


Abbildung 3.16: Konvergenzplot für das Testmodell *Zweimassenschwinger*.

Co-Simulation mit dem *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite und mit trivialer Anlaufrechnung ($H_1: p = 0, H_2: p = 1, \dots$). Dargestellt ist der globale Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

Subsystemsolver 1: Adams WSTIFF SI2: $e_{MKS} = 10^{-6}, h_{MKS,max} = 10^{-6}s$

Subsystemsolver 2: Comsol BDF: $tol_{el-dyn,abs} = tol_{el-dyn,rel} = 10^{-6}, h_{el-dyn,max} = 10^{-6}s$

3.2.3. Anwendung: Thomson Spule

Die hier vorgestellte Co-Simulation des *Thomson*-Spulen-Aktuators (kurz: *Thomson* Spule) wurde bereits in [SSSS12, Sch12, SSSS13] veröffentlicht. Der Aufbau des elektrodynamischen Submodells erfolgte am ABB Forschungszentrum. Die Kopplung und Co-Simulation wurde vom Autor dieser Arbeit durchgeführt.

3.2.3.1. Aufbau und Funktionsprinzip der Thomson Spule

Das hier *Thomson* Spule genannte System ist auch als *Thomsonscher* Ringversuch oder induktive *Gauß*-Kanone bekannt.

In Abbildung 3.17 ist der Aufbau der *Thomson* Spule skizziert. Eine Aluminiumplatte (leitend, aber nicht magnetisierbar) befindet sich über einer ebenen Spiralspule. Wird nun der Schalter S geschlossen, wird der Kondensator C über diese Spule entladen und es ergibt sich ein zeitlich veränderlicher Spulenstrom $I(t)$. (R und L sind der Widerstand und die Induktivität der Zuleitung. Die Diode D verhindert ein Schwingen der Schaltung.) Der Spulenstrom verursacht nun ein transientes Magnetfeld, welches einen Kreisstrom in der Aluminiumplatte induziert. Entsprechend der *Lenzschen* Regel ist das Magnetfeld dieses Stromes dem erzeugenden Feld entgegengerichtet. Das Magnetfeld der Spule und der Kreisstrom in der Aluminiumplatte bewirken eine magnetische *Lorentzkraft* auf die Aluminiumplatte, welche deshalb beschleunigt wird. [Leh10, Nol13]

Um die Bewegung der Aluminiumplatte zu berechnen, ist es zum einen notwendig die *Lorentzkraft* (und daher das transiente Magnetfeld und den induzierten Strom) zu berechnen zum anderen muss die Bewegungsgleichung der Aluminiumplatte gelöst werden. Unter der Annahme, dass die Aluminiumplatte starr ist und weder verkippt noch sich seitlich bewegt, ist die Bewegungsgleichung trivial. Diese kann dann als diskrete Differentialgleichung im elektrodynamischen Modell berücksichtigt werden. Soll die *Thomson* Spule hingegen als Aktor für eine kompliziertere Mechanik dienen (hier nicht betrachtet), ist es sinnvoll, diese in ein MKS-Modell auszulagern und über eine Co-Simulation zu koppeln.

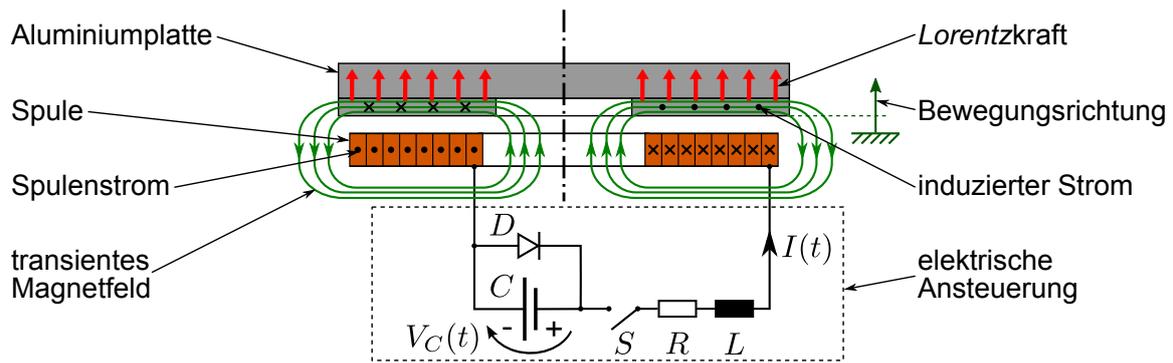


Abbildung 3.17: Aufbau der Thomson Spule

3.2.3.2. Subsysteme und Kopplung der Thomson Spule

Das MKS-Subsystem (→ Abb. 3.18 links) besteht aus der Aluminiumplatte, welche von der resultierenden *Lorentzkraft* (Eingangsgröße) beschleunigt wird. Die resultierende *Lorentzkraft* wirkt hierbei auf den Schwerpunkt der Aluminiumplatte. Der Ausgang des mechanischen Submodells sind Position und Geschwindigkeit der Aluminiumplatte.

Das elektrodynamische Subsystem (→ Abb. 3.18 rechts) ist ein zweidimensionales, rotations-symmetrisches Finite-Elemente-Modell. Mittels reduzierter *Maxwell*-Gleichungen (→ 3.2.1) werden das transiente Magnetfeld und der induzierte Strom berechnet, aus denen sich die magnetische *Lorentzkraft* ergibt. Diese wird in einem Postprocessing-Schritt über die Aluminiumplatte aufintegriert. Die resultierende magnetische *Lorentzkraft* ist dann der Ausgang des elektrodynamischen Submodells (→ 3.2.1). Eingänge des elektrodynamischen Submodells sind die Position und die Geschwindigkeit der Aluminiumplatte. Diese werden auf das FE-Netz der Platte aufgebracht. Das FE-Netz zwischen Spule und Platte deformiert sich entsprechend der Bewegung der Platte (→ 3.2.1). In dem elektrodynamischen Submodell ist die elektrische Ansteuerung der Spule als diskretes Gleichungssystem integriert.

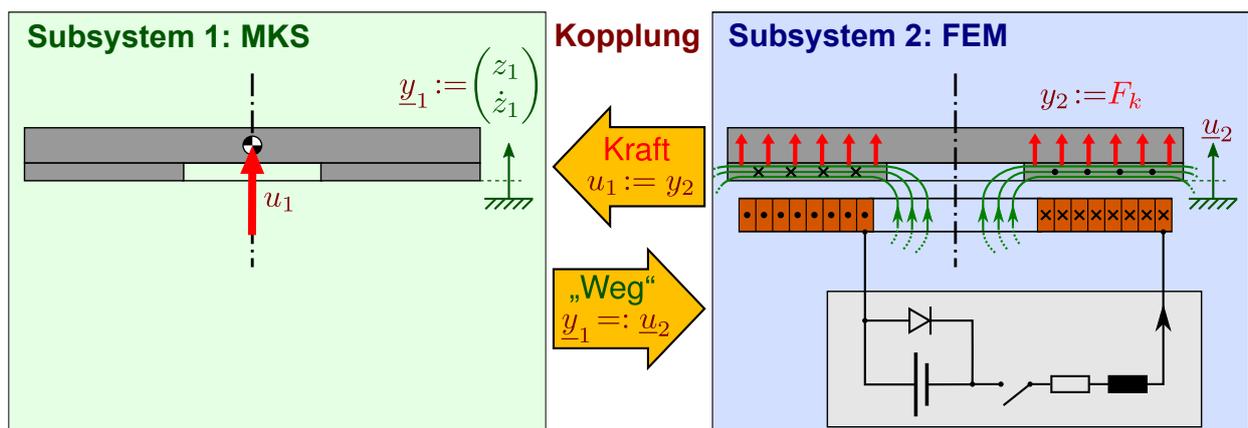


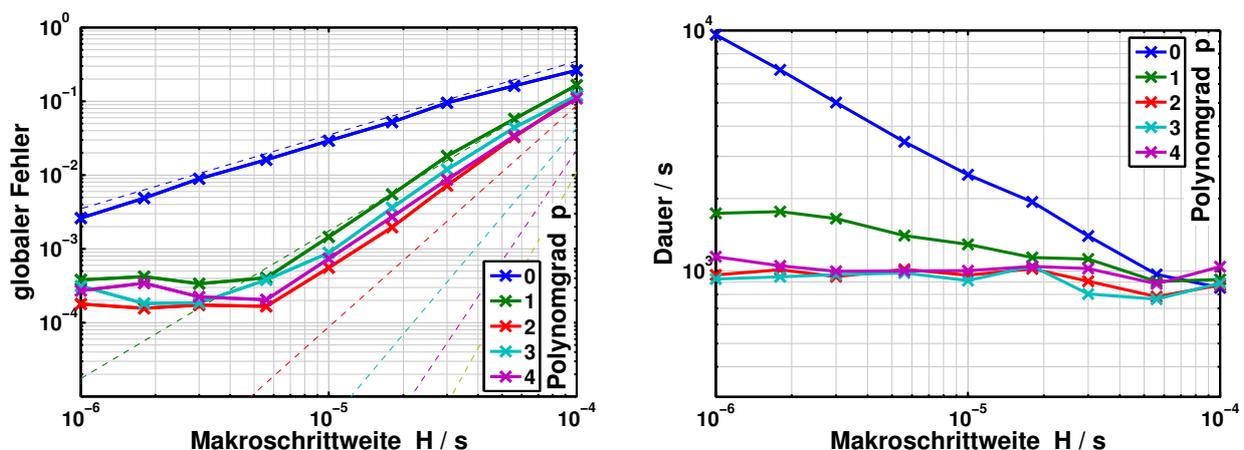
Abbildung 3.18: Subsysteme und Kopplung der Thomson Spule

3.2.3.3. Konvergenz der Co-Simulationsergebnisse der Thomson Spule

Als Referenzlösung zur Berechnung des numerischen Fehlers der Co-Simulation dient im Fall der Thomson Spule eine monolithische Comsol-Simulation. Hierfür wird als absolute und relative Toleranz $tol_{el-dyn,abs} = tol_{el-dyn,rel} = 10^{-7}$ und als maximale Mikroschrittweite $h_{el-dyn,max} = 10^{-7}$ s gewählt. Zeitverläufe der Koppelgrößen sind in Abbildung 3.20 zu sehen.

Abbildung 3.19 zeigt die Konvergenz und die Dauer der Co-Simulation der Thomson Spule mit dem *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite und mit trivialer Anlaufrechnung ($H_1: p = 0, H_2: p = 1, \dots$). Der Aufbau der Abbildungen ist identisch mit dem von Abbildung 2.14 (a) und 2.24. Es ist folgendes zu beobachten:

- Im untersuchten Parameterbereich ($p = 0$ bis 4 und $H = 10^{-6}$ s bis 10^{-4} s) sind keine Instabilitäten aufgetreten. Eine größere Makroschrittweite $H > 10^{-4}$ s ist im Hinblick auf eine untersuchte Simulationszeit von 10^{-3} s nicht sinnvoll.
- Die Konvergenz zeigt für $p=0$ und 1 die erwartete Ordnung von $p+1$. Für höhere Polynomgrade ist der durch den Anfangsfehler verursachte „Ordnungsverlust“ (\rightarrow 2.6.2.2) zu beobachten.
- Bei einem globalen Fehler von ca. $2 \cdot 10^{-4}$ ist das Abknicken auf den Fehler der Subsystemsolver (\rightarrow 2.6.2.3) zu sehen.
- Hinsichtlich der Rechenzeiten ist anzumerken, dass diese praktisch ausschließlich durch das elektrodynamische Modell verursacht werden. Für Polynomgrad $p = 0$ und etwas schwächer auch für $p = 1$ ist ein Anstieg der Dauer mit kleiner werdender Makroschrittweite H zu beobachten. Der Grund hierfür liegt in der Verkleinerung der variablen Mikroschrittweite des elektrodynamischen Subsystemsolvers h_{el-dyn} . Verursacht wird dies wahrscheinlich durch die Unstetigkeit der Koppelgrößen von einem Makroschritt zum Nächsten. Für $p \geq 2$ ist die Dauer praktisch von H und p unabhängig.



(a) Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

(b) Dauer der Co-Simulation in Sekunden.

Abbildung 3.19: Konvergenzplot und Dauer der Co-Simulation der Thomson Spule mit dem *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite und mit trivialer Anlaufrechnung ($H_1: p = 0, H_2: p = 1, \dots$). Subsystemsolver 1: Adams WSTIFF SI2: $e_{MKS} = 10^{-7}$, $h_{MKS,max} = 10^{-6}$ s
Subsystemsolver 2: Comsol BDF: $tol_{el-dyn,abs} = tol_{el-dyn,rel} = 10^{-6}$, $h_{el-dyn,max} = 10^{-6}$ s

3.2.3.4. Simulationsergebnisse der Thomson Spule

Abbildung 3.20 zeigt die Zeitverläufe der Koppelgrößen der Thomson Spule. Die ersten zwei Graphen zeigen die Position z und die Geschwindigkeit $v_z = \dot{z}$ der Aluminiumplatte. Der dritte Graph zeigt die im elektrodynamischen Modell berechnete Lorentzkraft F_L . Es wurden jeweils die Zeitverläufe der Referenzlösung (blau), der Co-Simulation mit dem größten numerischen Fehler (*Worst Case*, $H = 10^{-4}\text{s}$, $p = 0$, rot mit \times Markierungen) und dem kleinsten numerischen Fehler (*Best Case*, $H = 5.6 \cdot 10^{-6}\text{s}$, $p = 2$, grün) dargestellt. Die blaue Linie für den Verlauf der Referenzlösung liegt optisch genau unter der grünen Linie der *Best Case* Co-Simulation.

An den Zeitverläufen ist zu erkennen, dass die Aluminiumplatte von der Lorentzkraft beschleunigt wird und dann in eine gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit übergeht. Zum Endzeitpunkt der Co-Simulation $t = 1\text{ ms}$ ist die Koppelkraft bereits wieder auf 0.

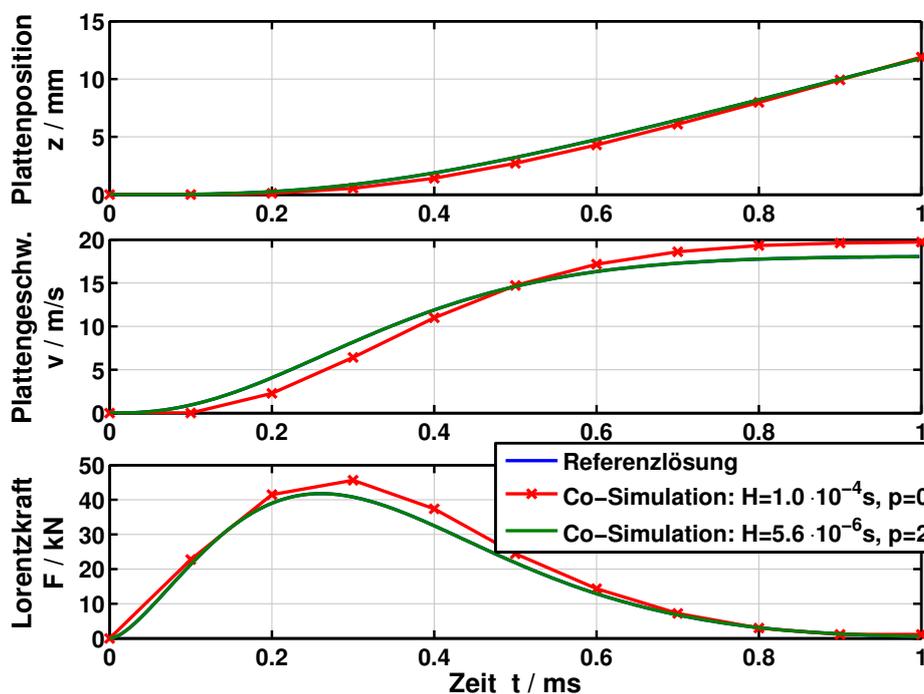


Abbildung 3.20: Vergleich von Referenzlösung, *Worst Case* ($H = 10^{-4}\text{s}$, $p = 0$) und *Best Case* ($H = 5.6 \cdot 10^{-6}\text{s}$, $p = 2$) der Co-Simulation der Thomson Spule.

Subsystemsolver 1: Adams WSTIFF SI2: $e_{MKS} = 10^{-7}$, $h_{MKS,max} = 10^{-6}\text{s}$

Subsystemsolver 2: Comsol BDF: $tol_{el-dyn,abs} = tol_{el-dyn,rel} = 10^{-6}$, $h_{el-dyn,max} = 10^{-6}\text{s}$

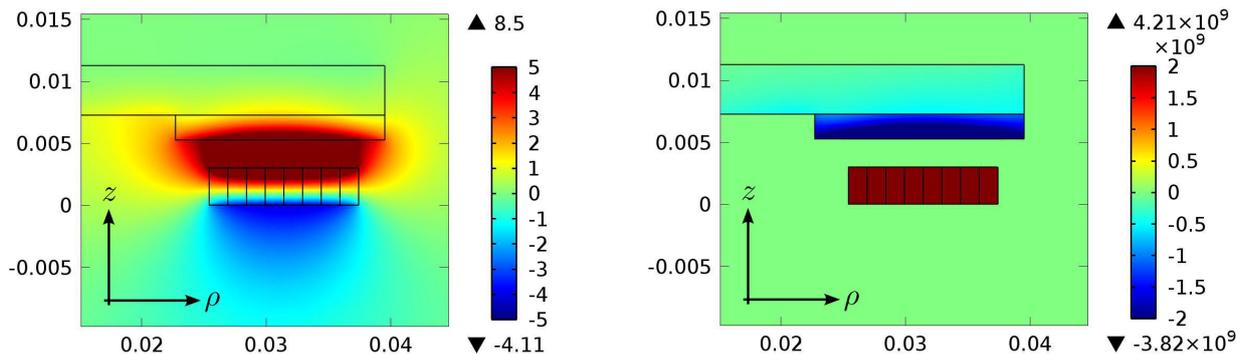
Abbildung 3.21 zeigt drei im elektrodynamischen Modell berechnete Feldgrößen zum Simulationszeitpunkt $t = 0.3392\text{ ms}$. Das elektrodynamische Modell wurde in Zylinderkoordinaten ρ, φ, z erstellt. Dargestellt ist jeweils die ρ, z -Ebene.

Abb. 3.21 (a) Zeigt die Radialkomponente der magnetischen Flussdichte B_ρ . Es ist die Form der in Abb. 3.17 skizzierten Feldlinien zu erkennen. Die magnetische Flussdichte ist in der Spule, im unteren Bereich der Aluminiumplatte und im Spalt zwischen Spule und Aluminiumplatte am größten.

Abb. 3.21 (b) Zeigt die Tangentialkomponente der Stromdichte j_φ , also den Strom, welcher in die dargestellte Ebene hinein bzw. heraus fließt. Es ist zu sehen, dass die Spule bestromt ist.

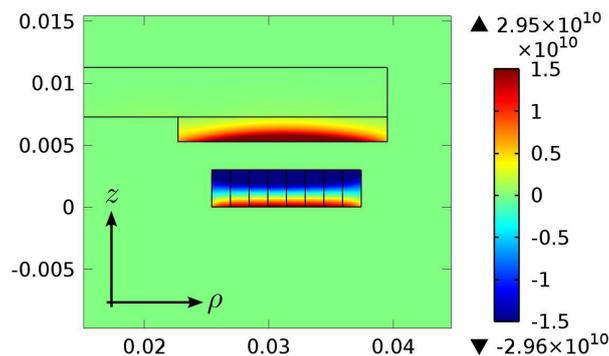
Ebenso ist der in der Aluminiumplatte induzierte Strom zu sehen, welcher dem Spulenstrom entgegengesetzt ist (*Lenzsche Regel*).

Abb. 3.21 (c) Zeigt die z -Komponente der *Lorentzkraftdichte* $f_{L,z}$. Die *Lorentzkraft* ist gemäß Gl. (3.18) das Kreuzprodukt aus der magnetischen Flussdichte und der Stromdichte. Die dargestellte z -Komponente führt zur Beschleunigung der Aluminiumplatte. Es ist zu sehen, dass dort wo magnetische Flussdichte und Stromdichte hoch sind die Kraftdichte ebenfalls groß ist.



(a) Magnetische Flussdichte, Radialkomp. B_ρ / T.

(b) Stromdichte, Tangentialkomponente j_φ / $\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$.



(c) Lorentzkraftdichte, z -Komponente $f_{L,z}$ / $\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$.

Abbildung 3.21: Felder der *Thomson Spule* zum Simulationszeitpunkt $t=0.3392$ ms.

3.2.3.5. Fazit für die Co-Simulation der *Thomson Spule*

Bei der Realisierung der Co-Simulation der *Thomson Spule* traten keine numerischen Stabilitätsprobleme auf. Vermutlich ist dies auf das sehr einfache Mechanikmodell zurückzuführen. In diesem wird lediglich eine Masse aufgrund der über die Co-Simulation kommunizierten Koppelkraft beschleunigt. Dort kann es daher nicht zu hoher Dynamik durch steife Elemente, mechanische Kontakte oder Ähnlichem kommen.

Die Rechenzeit der Co-Simulation geht wie bereits angemerkt praktisch komplett zu Lasten des elektrodynamischen FE-Modells, so dass die parallele Ausführung der Programme in diesem Fall keinen Vorteil bietet.

3.2.4. Anwendung: *Recloser*

Ein sog. *Recloser* (*Outdoor Vacuum Recloser*, OVR) ist ein Schalter, der bei Kurzschlüssen im Stromnetz ein Aus- und Wiedereinschalten der betroffenen Netzabschnitte ermöglicht. Der hier beschriebene *Recloser* kann ein- oder dreiphasig ausgeführt sein und wird im Mittelspannungsbereich von 15 kV bis 38 kV eingesetzt. [ABB10]

Das mechanische (MKS) und das elektrodynamische Submodell des *Reclosers* wurde von dem ABB Forschungszentrum in Ladenburg zur Verfügung gestellt und vom Autor gekoppelt. Die nachfolgend beschriebene Co-Simulation des *Reclosers* wurde bereits in Konferenzbeiträgen veröffentlicht [SCB⁺12, SCB⁺13, SSS⁺13].

3.2.4.1. Aufbau und Funktionsprinzip des *Reclosers*

Abbildung 3.22 zeigt den geschlossenen (a) und geöffneten (b) Zustand eines *Reclosers*. Beide Endlagen sind stromlos stabil, d.h. die vom Permanentmagnet und den Federn verursachten Kräfte halten den *Recloser* auch ohne Spulenstrom im geschlossenen bzw. geöffneten Zustand.

Ein *Recloser* besteht aus einem festen und einem beweglichen elektrischen Kontakt. Im geschlossenen Zustand wird der bewegliche Kontakt durch eine vorgespannte Feder mit einer definierten Kraft auf den festen Kontakt gedrückt. Der Aktor für den Schaltvorgang besteht aus dem unbewegten Stator und dem bewegten Anker. Der Stator besteht aus einem weich-magnetischen Eisenjoch, einem Permanentmagnet und einer Spule. Der Anker besteht aus zwei verbundenen Eisenplatten zum Öffnen und zum Schließen des *Reclosers*. Zum Öffnen wird zusätzlich eine mechanische Feder eingesetzt.

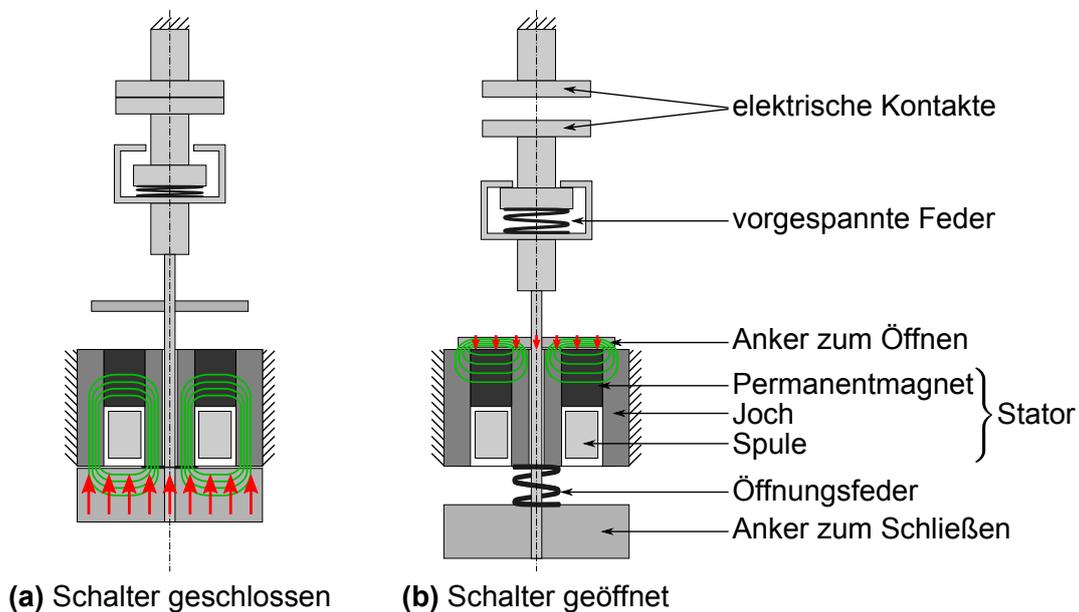


Abbildung 3.22: Aufbau eines einphasigen *Reclosers*.

Soll nun der Schalter geöffnet werden, wird die Spule bestromt, so dass das Feld des Permanentmagneten überlagert und damit im Resultat geschwächt wird. Die vorgespannte Feder bei den elektrischen Kontakten und die Öffnungsfeder drücken dann den *Recloser* auf.

Beim Schließen des Schalters wird die Spule derart bestromt, dass das Feld des Permanentmagneten im Resultat verstärkt wird. Daraufhin wird die deutlich größere untere Eisenplatte zum

Schließen angezogen und damit der Anker von den magnetischen Kräften in die geschlossene Position bewegt.

3.2.4.2. Subsysteme und Kopplung des Reclosers

Abbildung 3.23 zeigt die Kopplungsstruktur eines dreiphasigen Reclosers. Es wird ein MKS-Submodell mit drei elektrodynamischen Submodellen gekoppelt. Die Kopplung hat Baumstruktur, da die drei elektrodynamischen Submodelle untereinander nicht gekoppelt sind. Die elektrodynamischen Submodelle beeinflussen sich über das MKS-Submodell gegenseitig.

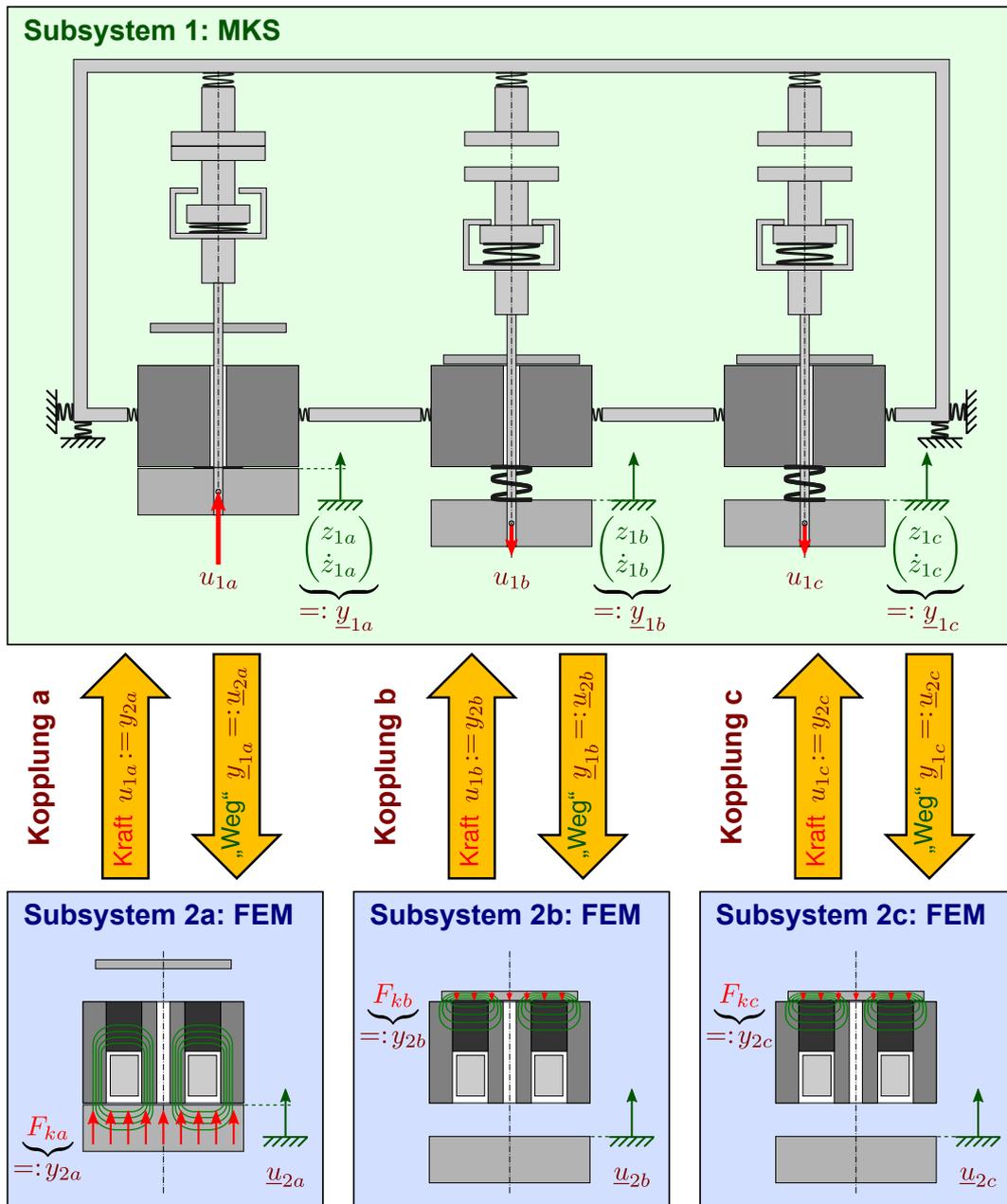


Abbildung 3.23: Kopplungsstruktur eines dreiphasigen Reclosers.

MKS-Subsystem des *Reclosers*

Das MKS-Submodell besteht aus drei baugleichen einphasigen *Reclosern*, welche über einen Rahmen miteinander verbunden sind. *Recloser* können auch direkt am Freileitungsmast montiert sein, weshalb der Rahmen im Modell flexibel aufgehängt ist.

Alle Bauteile des MKS-Submodells sind Starrkörper. Um Gehäuse- und Bauteilsteifigkeiten zu berücksichtigen, wurden zwischen den Statoren und dem Rahmen sowie zwischen den festen elektrischen Kontakten und dem Rahmen flexible Verbindungen (*Bushing*-Elemente) eingesetzt.

Da die elektrodynamischen FE-Submodelle zweidimensional und rotationssymmetrisch sind, ist es nicht sinnvoll eine Verkipfung zwischen Stator und Anker zu simulieren. Daher sind zwischen Anker und Stator alle Freiheitsgrade, bis auf die axiale Hauptbewegungsrichtung (z -Richtung) gesperrt.

Im MKS-Submodell sind vier mechanische Kontakte modelliert: 1. zwischen Stator und oberer Eisenplatte zum Öffnen des Ankers, 2. zwischen Stator und unterer Eisenplatte zum Schließen des Ankers, 3. bei der vorgespannten Feder zwischen Anker und beweglichem elektrischen Kontakt und 4. zwischen den beiden elektrischen Kontakten.

Die Eingänge des MKS-Subsystems sind die drei elektromechanischen Kräfte, welche jeweils in einem elektrodynamischen Submodell berechnet wurden. Die Ausgänge des MKS-Subsystems sind jeweils Position und Geschwindigkeit der drei Anker.

Elektrodynamische Subsysteme des *Reclosers*

Die drei elektrodynamischen Subsysteme sind bis auf die Anfangszustände, welche vom Betriebsmodus abhängen (\rightarrow 3.2.4.4), identisch. Es handelt sich jeweils um ein zweidimensionales, rotationssymmetrisches Finite-Elemente-Modell. Die Modellgleichungen sind in Abschnitt 3.2.1 zu finden und werden mit Comsol gelöst. Der Spulenstrom wird, wie bereits bei dem Modell der *Thomson* Spule, in einem diskreten Modell der elektrischen Ansteuerung (nicht dargestellt) in Comsol berechnet.

Als Eingänge für die elektrodynamischen Subsysteme dienen die jeweiligen Ankerbewegungen, welche auf das FE-Netz aufgebracht werden (\rightarrow 3.2.1). Die Ausgänge sind die über den *Maxwell*schen Spannungstensor berechneten resultierenden elektromechanischen Kräfte (\rightarrow 3.2.1).

3.2.4.3. Konvergenz der Co-Simulationsergebnisse des einphasigen *Reclosers*

Für die Konvergenzbetrachtungen wurde das Modell eines einphasigen *Reclosers* verwendet. Es wurde der Vorgang des Schließens simuliert. Der Zeitverlauf stimmt mit den entsprechenden Verläufen beim dreiphasigen *Reclosers* (\rightarrow Abb. 3.25) weitgehend überein (bis auf etwaige Koppelungseffekte durch den elastischen Rahmen).

Als Referenzlösung muss im Fall des *Recloser*-Modells eine Co-Simulation dienen, da weder eine analytische Lösung noch ein monolithisches Modell vorliegt. Für die numerische Referenz wurden folgende Verfahrensparameter gewählt:

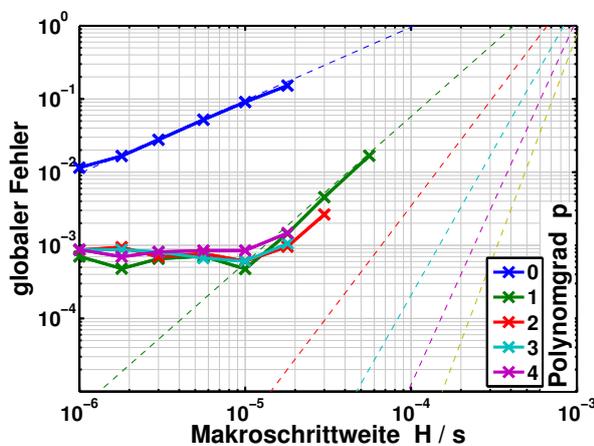
- Subsystemsolver 1: Adams WSTIFF SI2: $e_{MKS} = 10^{-7}$, $h_{MKS,max} = 10^{-7}$ s
- Subsystemsolver 2: Comsol BDF: $tol_{el-dyn,abs} = tol_{el-dyn,rel} = 10^{-7}$, $h_{el-dyn,max} = 10^{-7}$ s

- Co-Simulation: *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite $H = 10^{-7}$ s, Polynomgrad $p=2$ und mit trivialer Anlaufrechnung.

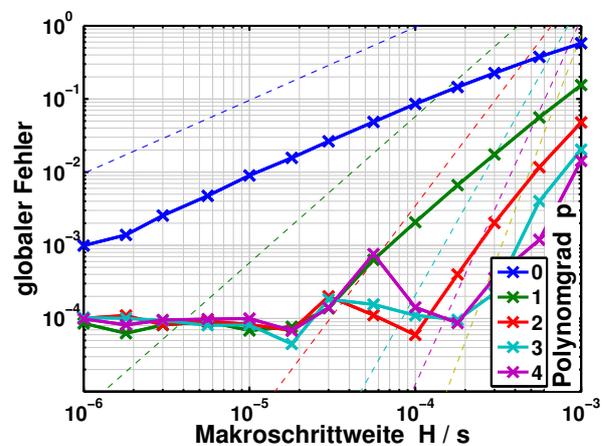
Abbildung 3.24 zeigt zwei Konvergenzplots des einphasigen *Reclosers*. Der Aufbau der Abbildungen ist identisch mit dem von Abbildung 2.14 (a). Für Abbildung 3.24 (a) wurde der komplette Schließvorgang co-simuliert. Dieser beinhaltet zwei Stoßvorgänge durch mechanische Kontakte und zwar: 1. das Aufeinandertreffen der beiden elektrischen Kontakte und 2. das Auftreffen der unteren Eisenplatte des Ankers auf den Stator (Aufbau \rightarrow Abb. 3.22, Zeitverläufe \rightarrow Abb. 3.25). Im Gegensatz dazu wurden für den Konvergenzplot in Abb. 3.24 (b) die Fehler der Co-Simulationen nur bis zum Erreichen des ersten mechanischen Kontaktes - also ohne Stoß - berechnet.

In Abbildung 3.24 (a) (mit Stoß) ist folgendes Konvergenzverhalten zu beobachten:

- Für Polynomgrad $p=0$ und 1 zeigt sich die Konvergenzordnung $p+1$.
- Ab Polynomgrad $p \geq 2$ führt die Anlaufrechnung (und hier auch der Stoß, siehe 3.2.4.5) zu einer „Ordnungsreduktion“.
- Die numerischen Fehler der Subsystemsolver begrenzen den globalen Fehler der Co-Simulation nach unten auf ca. $5 \cdot 10^{-4}$.
- Die numerische Stabilität ist für Polynomgrad $p=1$ am größten, gefolgt von $p=2$. Die kleinste Makroschrittweite H für eine stabile Simulation benötigen die Polynomgrade $p=0, 3, 4$.



(a) Co-Simulation eines Schließvorgangs inkl. mechanischem Kontakt (mit Stoß).



(b) Ende der Co-Simulation, bevor der mechanische Kontakt erreicht wird (ohne Stoß).

Abbildung 3.24: Konvergenzplot der Co-Simulation eines einphasigen *Reclosers* mit dem *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite und mit trivialer Anlaufrechnung ($H_1: p=0, H_2: p=1, \dots$). Dargestellt ist der globale Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

Subsystemsolver 1: Adams WSTIFF SI2: $e_{MKS} = 10^{-6}, h_{MKS,max} = 10^{-6}$ s

Subsystemsolver 2: Comsol BDF: $tol_{el-dyn,abs} = tol_{el-dyn,rel} = 10^{-6}, h_{el-dyn,max} = 10^{-6}$ s

Im Vergleich von Abbildung 3.24 (a) (mit Stoß) und (b) (ohne Stoß) kann folgendes festgestellt werden:

- Bei gleichen Parametern H und p ist der globale Fehler ohne Stoß um ca. eine Zehnerpotenz kleiner als mit Stoß.

- Der Effekt der „Ordnungsreduktion“ tritt ohne Stoß erst bei deutlich größerem Polynomgrad (ab ca. $p \geq 3$) auf.
- Die Begrenzung des globalen Fehlers durch die numerischen Fehler der Subsystemsolver ist ohne Stoß ca. eine Zehnerpotenz kleiner als mit Stoß (ohne Stoß ca. $6 \cdot 10^{-5}$, mit Stoß ca. $5 \cdot 10^{-4}$).
- In dem betrachteten Parameterbereich sind ohne Stoß keine numerischen Instabilitäten zu beobachten.

3.2.4.4. Co-Simulationsergebnisse des dreiphasigen *Reclosers*

Der dreiphasige *Recloser* hat folgende Betriebsmodi:

- Öffnen oder Schließen einer einzelnen Phase.
- Gleichzeitiges Öffnen oder Schließen der drei Phasen.
- Netzsynchrones (zeitversetztes) Öffnen oder Schließen der drei Phasen.

Interessant ist hierbei das netzsynchrone Öffnen bzw. Schließen. In diesem Betriebsmodus werden alle drei Phasen geöffnet bzw. geschlossen, allerdings nicht gleichzeitig, sondern mit einem Zeitversatz von $20/3$ ms, was bei einer Netzfrequenz von 50 Hz der Phasenverschiebung der Spannungen entspricht.

Die Abbildungen 3.25 und 3.26 zeigen die Zeitverläufe des netzsynchronen Schließens bzw. Öffnens des dreiphasigen *Reclosers*. Der erste und zweite Graph zeigt die im MKS-Submodell berechneten Ankerpositionen und Ankergeschwindigkeiten der Pole 1, 2 und 3. Der dritte Graph zeigt die elektromechanischen Kräfte, welche in den drei elektrodynamischen Submodellen berechnet werden und als Eingangsgrößen des MKS-Modells dienen. Aus Sicht des Anwenders ist der Abstand der elektrischen Kontakte und die Kraft mit der diese aufeinander gedrückt werden wichtig, siehe Graph vier und fünf. Alle Achsen sind normiert.

In Abbildung 3.25 ist zu sehen, dass nach Ansteigen der jeweiligen elektromechanischen Kraft die jeweilige Ankerposition eine beschleunigte Bewegung bis zum Erreichen der „zu“-Position durchführt. In den Ankergeschwindigkeiten ist bei Erreichen der jeweiligen „zu“-Position ein elastischer Stoß zu beobachten. Da die elektromechanischen Kräfte von der jeweiligen Ankerbewegung stark abhängen, ändert sich deren Verlauf mit Erreichen der „zu“-Position deutlich. Die elektrischen Kontakte schließen sich bevor der Anker die Endlage erreicht, da zwischen Anker und dem beweglichen Kontakt noch die vorgespannte Feder liegt und eingedrückt wird. Werden die elektrischen Kontakte geschlossen, zeigt sich in der Kraft zwischen den Kontakten zunächst auch ein Stoß und dann eine Schwingung bedingt durch die Bewegung von Rahmen, Stator und Anker.

Die Co-Simulation zeigt, dass sich die 3 Pole gegenseitig beeinflussen. Wäre keine mechanische Kopplung durch den Rahmen gegeben, so wären alle Verläufe von Pol 1, 2 und 3 bis auf den Zeitversatz identisch. Interessant ist, dass bei den hier gewählten Modellparametern der elektrischer Kontakt von Pol 2 nach dem Schließen kurz wieder geöffnet wird. Zu erkennen ist dies an der Kontaktkraft, welche kurzzeitig wieder 0 wird. Dieses Verhalten soll im praktischen Einsatz

nicht auftreten. Ein weiterer Einfluss der mechanischen Verbindung über den Rahmen ist, dass sich der Anker von Pol 3 bereits kurz nach Pol 2 bewegt, obwohl der zugehörige Aktor eigentlich noch nicht die hierzu notwendige Kraft aufgebaut hat. Ebenso beeinflusst beispielsweise der Stoß von Pol 2 den Pol 1 derart, dass sich dessen Kontaktkraft bei $t \approx 0.52$ deutlich verringert. Dies kann zu einem unerwünschten Anstieg des elektrischen Widerstandes zwischen den elektrischen Kontakten führen und ist daher für die Auslegung des *Reclosers* von Bedeutung.

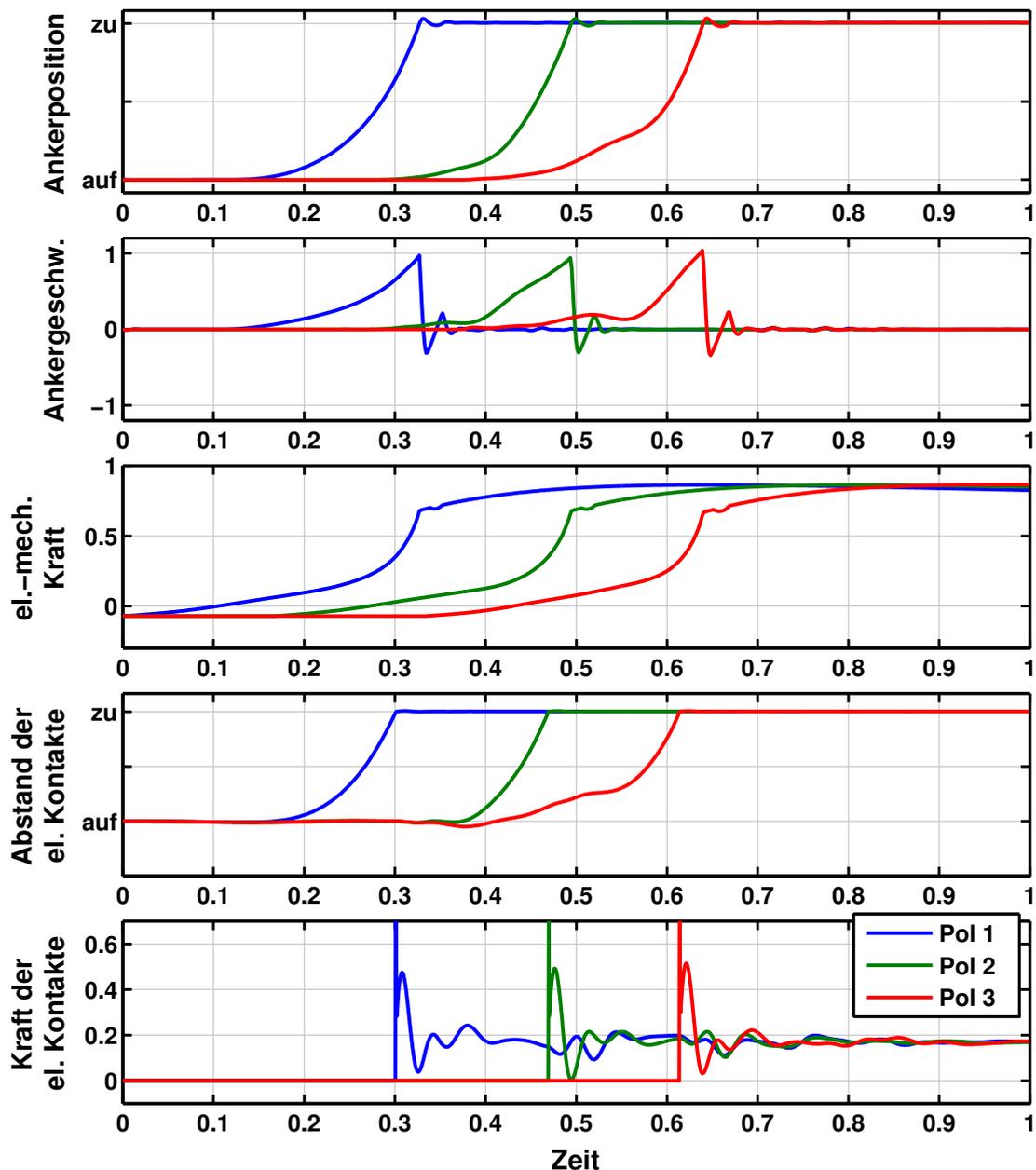


Abbildung 3.25: Co-Simulation des dreiphasigen *Reclosers*. Betriebsmodus: Netzsynchrones schließen.

Abbildung 3.26 zeigt das netzsynchrone Öffnen des *Reclosers*. Es ist zu sehen, dass zunächst die elektromechanische Haltekraft von Pol 1 absinkt und sich der Anker von Pol 1 in Bewegung setzt. Sobald die vorgespannte Feder an ihrem Anschlag angekommen ist, öffnet auch der elektrische Kontakt von Pol 1 und schwingt - aufgrund der vorgespannten Feder - gedämpft um seine „auf“-Position.

Im Vergleich zu dem Vorgang des netzsynchronen Schließens ist beim Öffnen nur ein geringer gegenseitiger Einfluss der Pole zu beobachten. In der Kraft, mit der die elektrischen Kontakte von Pol 3 aufeinander gedrückt werden, ist lediglich eine kleine Schwingung zu beobachten.

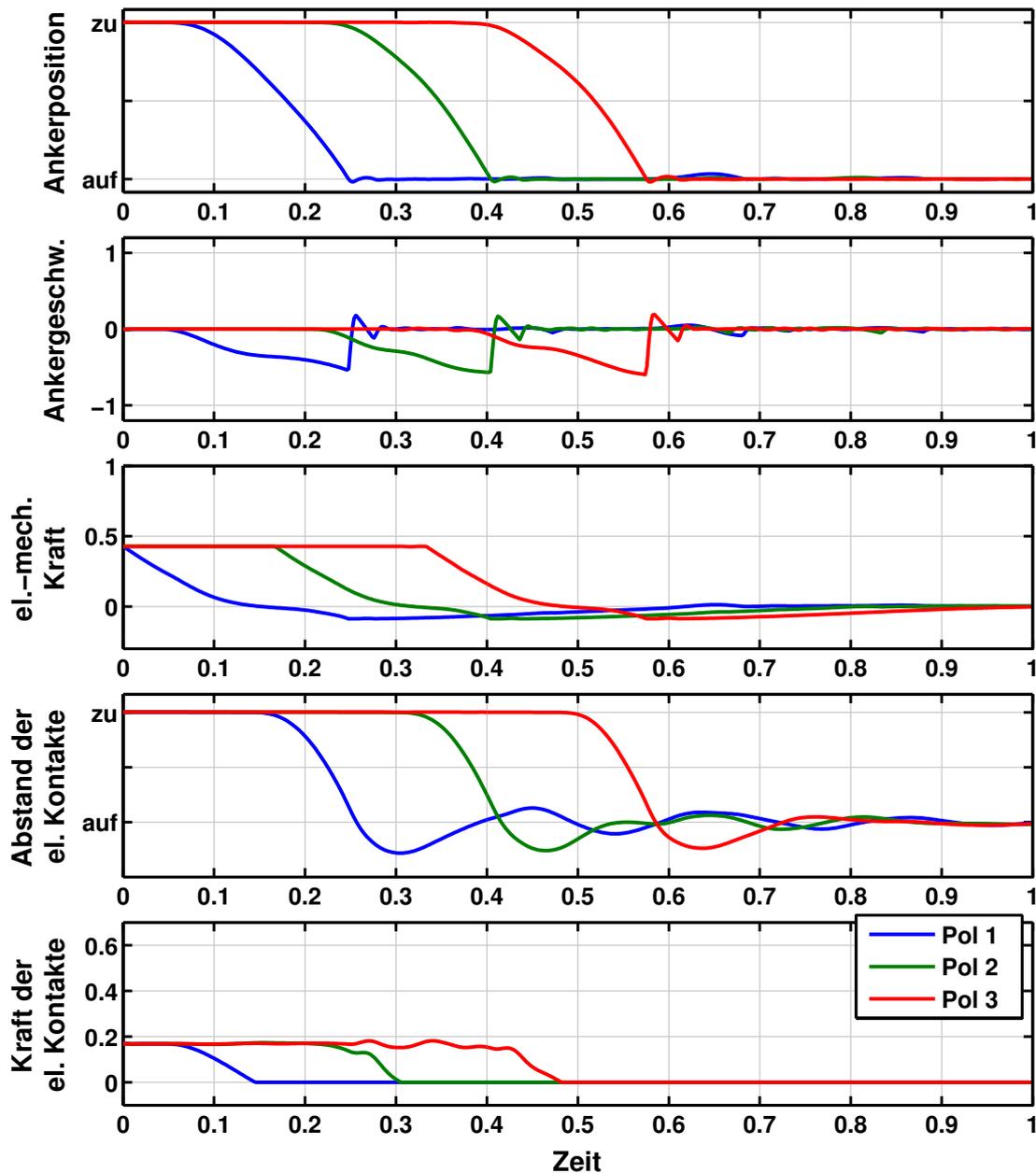


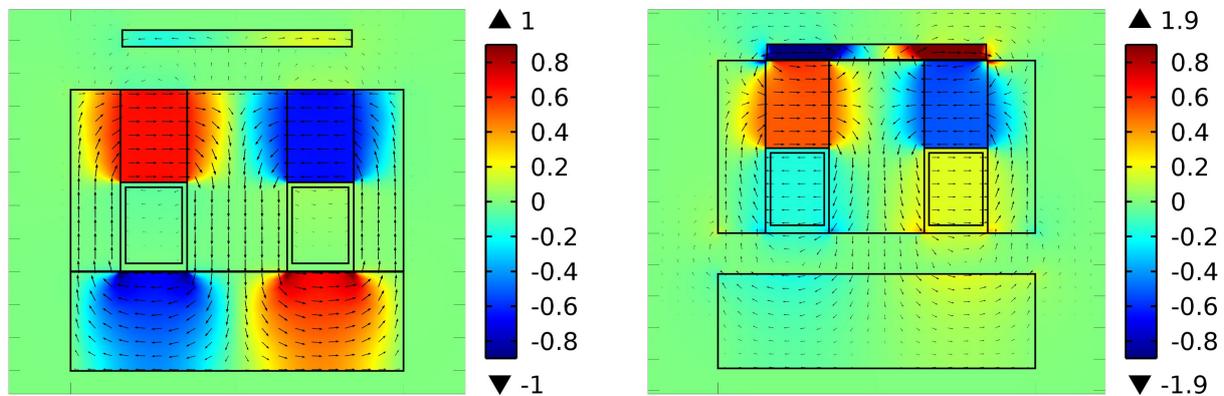
Abbildung 3.26: Co-Simulation des dreiphasigen *Reclosers*. Betriebsmodus: Netzsynchrones öffnen.

Abbildung 3.27 zeigt die magnetische Flussdichte im geschlossenen (a) und geöffneten (b) *Recloser*. In diesen Endlagen ist die Spule unbestromt und die Felder werden nur durch den Permanentmagneten erzeugt. Als Farbverlauf ist die Radialkomponente der magnetischen Flussdichte B_ρ normiert dargestellt. Zusätzlich wird der Verlauf des Vektorfeldes der magnetischen Flussdichte \underline{B} durch Pfeile dargestellt. Die Pfeillängen sind hierbei der logarithmisch skalierte Betrag des Vektors an der jeweiligen Stelle.

Es ist zu sehen, dass bei geschlossenem *Recloser* (a) der magnetische Kreis über die untere Eisenplatte des Ankers geschlossen ist. Bei dem geöffneten *Recloser* (b) ist der magnetische

Kreis über die deutlich dünnere obere Eisenplatte des Ankers geschlossen. Dies führt zwar zu einer höheren Felddichte in der oberen Eisenplatte, allerdings ist die Haltekraft aufgrund der dünneren Eisenplatte geringer.

Diese Simulationen bestätigen die bereits in Abbildung 3.22 und 3.23 skizzierten Feldlinien.



(a) Schalter geschlossen: Magnetische Flussdichte, Radialkomponente B_ρ . (b) Schalter geöffnet: Magnetische Flussdichte, Radialkomponente B_ρ .

Abbildung 3.27: Statische Felder des *Reclosers*.

3.2.4.5. Fazit für die Co-Simulation des *Reclosers*

Insbesondere durch die mechanischen Kontakte im MKS-Modell des *Reclosers* und die damit verbundene hohe Dynamik während der Stoßvorgänge, ergeben sich hohe Anforderungen an die Co-Simulation. Die Konvergenzplots mit und ohne Stoß (\rightarrow Abb. 3.24) zeigen einen starken Einfluss der Stoßmechanik auf den globalen Fehler, die „Ordnungsreduktion“ und die numerische Stabilität der Co-Simulation. (Eine nähere Betrachtung der numerisch instabilen Co-Simulationen zeigt, dass diese beim Erreichen des Kontaktes instabil werden [SSS⁺13].) Die „Ordnungsreduktion“ und die Instabilitäten können durch steile Gradienten der Koppelvariablen (insbes. bei den Geschwindigkeiten) während des Stoßes erklärt werden. Denn je höher der Polynomgrad desto größer kann der Extrapolationsfehler der Polynome bei einem plötzlich veränderten Verlauf der Koppelgrößen sein. Trotzdem ist die hier durchgeführte Co-Simulation mit dem expliziten *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite beherrschbar, d.h. es kann ein Polynomgrad und eine (nicht zu kleine) Makroschrittweite gefunden werden, so dass die Co-Simulation numerisch stabil rechnet und einen ausreichend kleinen Verfahrensfehler verursacht. Bei dem *Recloser*, welcher eine hohe Dynamik aufweist, könnte eine Makroschrittweitensteuerung wahrscheinlich gewinnbringend eingesetzt werden. Inwiefern die in Abschnitt 2.4.2 vorgestellte explizite Prädiktor/Korrektor Makroschrittweitensteuerung, welche ohne Makroschrittwiederholung auskommen muss, hierfür eingesetzt werden kann, wurde nicht untersucht.

Die Rechenzeit wurde in diesem Abschnitt nicht näher betrachtet. Wie bei der *Thomson* Spule benötigen allerdings die elektrodynamischen FE-Subsysteme wesentlich mehr Rechenzeit als das MKS-Subsystem. Bei dem dreiphasigen *Recloser* können die drei elektrodynamischen Subsysteme parallel berechnet werden. Da diese identisch sind, sind auch die Rechenzeiten weitgehend gleich, so dass bei genügend verfügbaren Rechenkernen die Gesamtrechenzeit auf ca. 1/3 der Summe der einzelnen CPU-Zeiten sinkt.

3.3. MKS - FE-Strukturdynamik

Mit der Co-Simulation können, neben multiphysikalischen Modellen, auch verschiedene Modellarten und Lösungsmethoden einer physikalischen Disziplin, z.B. der Mechanik, gekoppelt werden. In diesem Abschnitt soll ein MKS-Submodell mit einem im Allgemeinen nichtlinearen, dynamischen Finite-Elemente-Submodell (FE-Submodell) gekoppelt werden.

Die im Allgemeinen nichtlinearen, dynamischen FE-Gleichungen (\rightarrow 3.3.1) werden mit dem FE-Programm *SIMULIA* Abaqus von der Firma Dassault Systèmes [Das13] aufgestellt und gelöst. Für die Co-Simulation muss allerdings die Frage geklärt werden, wie das FE-Submodell, insbesondere im Hinblick auf die Ein- und Ausgänge für die Kopplung, aufgebaut sein muss, um keine *Constraint* Kopplung zu erzeugen (\rightarrow 3.3.2). Anhand des angepassten Testmodells werden Konvergenzuntersuchungen für die verwendeten Subsystemsolverkombinationen durchgeführt (\rightarrow 3.3.3).

Die Anwendungen für diese Kopplung sind zum einen ein MKS-Fallturm mit einer FE-Probe aus Polyurethan-Schaum (PUR-Schaum) (\rightarrow 3.3.4) und zum anderen der *Recloser*, bei dem ein Bauteil gesondert als flexibles FE-Submodell mit Kontakten betrachtet wird (\rightarrow 3.3.5). Die Submodelle wurden von der Firma ABB zur Verfügung gestellt.

3.3.1. Nichtlineare, dynamische FE-Gleichungen

Die im Allgemeinen nichtlinearen, dynamischen FE-Gleichungen [Nas12, Das13] sind:

$$\underline{M} \ddot{\underline{w}} + \underline{I} = \underline{F} \quad (3.19)$$

$\underline{w} = \underline{w}(t)$	Knotenverschiebungen,
$\dot{\underline{w}} = \dot{\underline{w}}(t)$	Knotengeschwindigkeiten,
$\ddot{\underline{w}} = \ddot{\underline{w}}(t)$	Knotenbeschleunigungen,
\underline{M}	Massenmatrix (hier konstant),
$\underline{I} = \underline{I}(\underline{w}, \dot{\underline{w}}, t)$	Innerer Kraftvektor (Steifigkeiten, Dämpfungen, ...),
$\underline{F} = \underline{F}(\underline{w}, \dot{\underline{w}}, t)$	Äußerer Kraftvektor.

Diese werden in Abaqus entweder explizit mit einem zentralen Differenzen-Verfahren oder implizit mit einem *Hilber-Hughes-Taylor* (HHT, [HHT77, HH78]) Integrator gelöst [Das13].

Wie die Ein- und Ausgänge der Kopplung in die Gleichungen eingebracht werden können, wird im folgenden Abschnitt untersucht.

3.3.2. Topologien für die Kopplung von MKS und FE-Strukturdynamik

Zeitabhängige Anregungen eines FE-Submodells können in Form von Kraft- oder Verschiebungsrandbedingungen (Kraft- oder Wegerregung) auf die FE-Knoten aufgebracht werden [Kle12, Lin14]. Anhand des abgeänderten Testmodells werden nun zwei Kopplungsvarianten erläutert.

3.3.2.1. Krafrandbedingungen

Zeitabhängige Krafrandbedingungen (äußere Knotenlasten) sind problemlos in die rechte Seite der dynamischen FE-Gleichungen (3.19) einzubringen. Als Kopplungstopologie würde dies allerdings eine Kraft-Kraft Kopplung (\rightarrow 2.3.3) erfordern.

Über einen *Penalty*-Ansatz [CMP89] können Verschiebungsrandbedingungen näherungsweise über eine *Penalty*-Feder als Krafterandbedingungen dargestellt werden.

Abbildung 3.28 stellt den Fall dar, dass ein „*Penalty*“-Feder-Dämpferelement im FE-Submodell hinzugefügt wurde. Die Eingänge des FE-Subsystems \underline{u}_2 sind die Verschiebung x_1 und Geschwindigkeit \dot{x}_1 der Masse m_1 aus dem MKS-Subsystem. Diese werden dann über das Feder-Dämpferelement c_k, d_k in eine Kraft auf den Knoten N_1 überführt. Die Dämpfung wird als stabilisierendes Element für die Co-Simulation hinzugefügt. Problematisch bei diesem Vorgehen ist die Wahl der Federsteifigkeit c_k und der Dämpfung d_k . Um das Modell nicht zu stark zu verfälschen und die Verschiebungsrandbedingungen in guter Näherung zu erfüllen, muss eine hohe Federsteifigkeit gewählt werden. Diese führt jedoch zu kleinen Makroschrittweiten, um die explizite Co-Simulation numerisch stabil zu halten [Bus12].

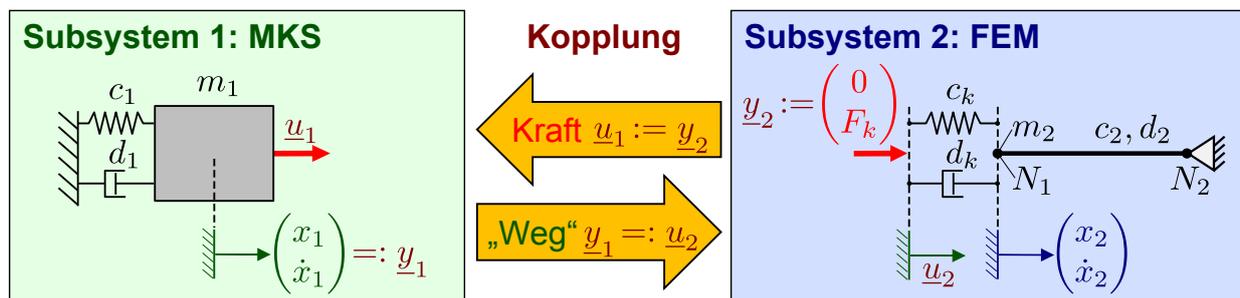


Abbildung 3.28: Indirekte Kraft-Weg Kopplung von MKS und FE-Strukturmodell über ein „*Penalty*“-Feder-Dämpferelement im FE-Submodell. Als Beispiel wird ein Einmassenschwinger mit einem eindimensionalen FE-Dehnstab gekoppelt.

3.3.2.2. Verschiebungsrandbedingungen

Werden in einem dynamischen FE-Modell zeitabhängige Verschiebungsrandbedingungen aufgebracht, so werden neben Verschiebung und Geschwindigkeit auch die Beschleunigungen benötigt [Nas12, Lin14].⁶ Die direkte oder auch indirekte Verwendung der Beschleunigung als Eingangsvariable des FE-Subsystems führt allerdings dazu, dass eine *Constraint* Kopplung (\rightarrow 2.3.4) erzeugt wird. Dies ist daran zu sehen, dass in der dann hinzuzufügenden Ausgangsgleichung des MKS-Subsystems der Beschleunigungsausgang $y_{13} = \ddot{x}_1 = -\frac{c_1}{m_1}x_1 - \frac{d_1}{m_1}\dot{x}_1 + \frac{1}{m_1}F_k$ einen Durchgriff der Eingangsgröße $F_k = u_{12}$ aus dem FE-Subsystem enthält, siehe Gleichung (2.15) bis (2.26). In diesem Fall existiert ein doppelter Durchgriff in den Ausgangsgleichungen der beiden Subsysteme (\rightarrow 2.3.1), was zu einer *Constraint* Kopplung führt [KS00b, Bus12].

Die *Constraint* Kopplung kann zum Verlust der Nullstabilität führen. Eine zusätzliche Kontraktionsbedingung müsste erfüllt sein, um die Nullstabilität zu garantieren [LRSV82, AG01, Arn07, Arn10]. Dies soll verhindert werden, dazu werden im Folgenden die dynamischen FE-Gleichungen des 2. Subsystems aus Abbildung 3.29 betrachtet.

⁶Abaqus berechnet die Beschleunigungen, falls diese nicht explizit angegeben sind, über einen Differenzenquotienten [Das13].

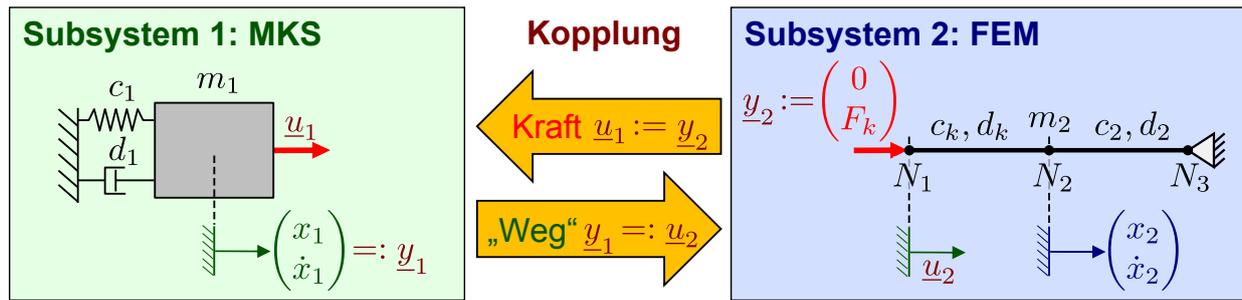


Abbildung 3.29: Direkte Kraft-Weg Kopplung von MKS und FE-Strukturdynamik in Form einer Verschiebungsrandbedingung. Als Beispiel und Testmodell (\rightarrow 3.3.3) wird ein Einmassenschwinger mit einem eindimensionalen FE-Dehnstab gekoppelt.

Dynamische FE-Gleichungen eines linearen, eindimensionalen Dehnstabes [CMP89, AM88, Lin14]

Der eindimensionale Dehnstab wird mit zwei linearen Stab-Elementen („truss“-Elemente, T2D2 [Das13]) vernetzt, was zu folgenden Variablen, Parametern und Gleichungen führt:

3 Knoten:	N_1, N_2, N_3
3 Knotenverschiebungen:	$\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$
3 Knotengeschwindigkeiten:	$\underline{\dot{w}} = (\dot{w}_1, \dot{w}_2, \dot{w}_3)^T$
3 Knotenbeschleunigungen:	$\underline{\ddot{w}} = (\ddot{w}_1, \ddot{w}_2, \ddot{w}_3)^T$
Konzentrierte „lumped“ Massenmatrix (diagonal):	\underline{M}
Steifigkeitsmatrix:	\underline{K}
Steifigkeitsproportionale <i>Rayleigh</i> Dämpfung:	$\underline{C} = \beta_R \underline{K}$
Äußere Kräfte:	\underline{F}

$$\underline{M} \underline{\ddot{w}} + \underline{C} \underline{\dot{w}} + \underline{K} \underline{w} = \underline{F} \quad (3.20)$$

$$\rho AL \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{w}_3 \end{pmatrix} + \beta_R \frac{2EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} + \frac{2EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$\frac{\rho AL}{4} \ddot{w}_1 + \beta_R \frac{2EA}{L} (\dot{w}_1 - \dot{w}_2) + \frac{2EA}{L} (w_1 - w_2) = F_1 \quad (3.22)$$

$$\frac{\rho AL}{2} \ddot{w}_2 + \beta_R \frac{2EA}{L} (-\dot{w}_1 + 2\dot{w}_2 - \dot{w}_3) + \frac{2EA}{L} (-w_1 + 2w_2 - w_3) = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\rho AL}{4} \ddot{w}_3 + \beta_R \frac{2EA}{L} (-\dot{w}_2 + \dot{w}_3) + \frac{2EA}{L} (-w_2 + w_3) = F_3 \quad (3.24)$$

Randbedingungen: Knoten N_1 (Kopplung): $w_1 = w_1(t), \dot{w}_1 = \dot{w}_1(t), \ddot{w}_1 = \ddot{w}_1(t)$
 Knoten N_3 (Lager): $w_3 \equiv 0 \Rightarrow \dot{w}_3 \equiv 0, \ddot{w}_3 \equiv 0$

Für die Berechnung der Bewegung des freien Knotens $w_2, \dot{w}_2, \ddot{w}_2$ können aufgrund der Randbedingungen die Gleichungen (3.22) und (3.24) eliminiert werden, so dass nur noch Gleichung (3.23) verbleibt. In diese geht die Beschleunigungsrandbedingung \ddot{w}_1 unter der Voraussetzung, dass die Massenmatrix Diagonalf orm hat nicht ein. Nun muss allerdings noch die Reaktionskraft

auf den Koppelknoten F_1 als Ausgang berechnet werden. Hierfür kann Gleichung (3.22) herangezogen werden, worin $\frac{\rho AL}{4}\ddot{w}_1$ (Trägheitskraft von Knoten N_1) enthalten ist. Wird die Reaktionskraft hingegen nur aus der Steifigkeit und Dämpfung der benachbarten Elemente berechnet (z.B. durch künstliches Null setzen von $\frac{\rho AL}{4}\ddot{w}_1$, siehe unten), so geht die Beschleunigungsrandbedingung \ddot{w}_1 nicht in die Rechnung ein und es wird keine *Constraint* Kopplung erzeugt.

In der Praxis der Co-Simulation ist es vergleichsweise einfach in diesem Fall eine *Constraint* Kopplung auszuschließen, indem die Beschleunigungsrandbedingung in jedem Zeitschritt explizit zu Null $\ddot{w}_1 \equiv 0$ gesetzt wird, auch wenn dies nicht den Ergebnissen der Simulation von Subsystem 1 (und der Realität) entspricht.

Als Resultat dieser Überlegungen kann eine direkte Kraft-Weg Kopplung von MKS- und FE-Strukturmodell (siehe Abbildung 3.29) eingesetzt werden. Der Vorteil hierbei ist, dass kein „Penalty“-Feder-Dämpferelement eingesetzt und parametrisiert werden muss. Im Endeffekt werden hierzu nun die Steifigkeiten und Dämpfungen der mit den Koppelknoten direkt verbundenen FE-Elemente genutzt. Da jetzt aber die Steifigkeiten und Dämpfungen dieser FE-Elemente Bestandteil der Kopplung sind, ist zu beachten, dass auch die numerische Stabilität (und der Fehler) der Co-Simulation direkt von den Materialparametern und insbesondere von der Elementgröße abhängt. Daher sind große Koppellemente günstig.

3.3.3. Testmodell: *Einmassenschwinger - eindimensionaler FE-Dehnstab*

Für die Konvergenzuntersuchung der Kopplung von MKS und FE-Strukturmodell wird nun das Testmodell mit der direkten Kraft-Weg Kopplung aus Abbildung 3.29 verwendet. Dieses Testmodell ist analog zu dem Zweimassenschwinger (\rightarrow Abb. 2.4), so dass als Referenz eine analytische Lösung eingesetzt werden kann. Im folgenden Abschnitt werden hierfür die Parameter bestimmt.

3.3.3.1. Parameter

Ein Koeffizientenvergleich der verbleibenden dynamischen FE-Gleichung (3.23) mit Subsystem 2 aus der Kraft-Weg Kopplung des Zweimassenschwingers (siehe Gleichungen (2.21) und (2.22)) ergibt:

Querschnittfläche:	A		Koppelsteifigkeit:	$c_k = \frac{2EA}{L}$
Stablänge:	L		Koppeldämpfung:	$d_k = \beta_R \frac{2EA}{L}$
E-Modul:	E	\Rightarrow	Steifigkeit 2. Subsystem:	$c_2 = \frac{2EA}{L}$
Dichte:	ρ		Dämpfung 2. Subsystem:	$d_2 = \beta_R \frac{2EA}{L}$
Rayleigh Dämpfungsparam.:	β_R		Masse 2. Subsystem:	$m_2 = \frac{\rho AL}{2}$

Es wird $A = 0.002 \text{ m}^2$, $L = 1 \text{ m}$, $E = 5 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\beta_R = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ gewählt. Damit ergeben sich (unter anderem) die Parameter und Anfangswerte in Tabelle 3.1.

Masse [kg]	Federsteifigkeit [N/m]	Dämpferkonstante [Ns/m]
$m_1 = 1$	$c_1 = 10^4$	$d_1 = 2$
$m_2 = 1$	$c_2 = 2 \cdot 10^5$	$d_2 = 4$
–	$c_k = 2 \cdot 10^5$	$d_k = 4$

Position [m]	Geschwindigkeit [m/s]
$x_{10} = 10^{-2}$	$\dot{x}_{10} = 0$
$x_{20} = 5 \cdot 10^{-3}$	$\dot{x}_{20} = 0$

Tabelle 3.1: Parameter und Anfangswerte des zum Testmodell *Einmassenschwinger - eindimensionaler FE-Dehnstab* analogen Zweimassenschwingers.

3.3.3.2. Zeitverlauf

Abbildung 3.30 zeigt den Zeitverlauf der Koppelgrößen des Testmodells *Einmassenschwinger - eindimensionaler FE-Dehnstab* aus Abbildung 3.29 mit den Parametern aus Tabelle 3.1. Es zeigt sich eine aus zwei ähnlichen Frequenzen überlagerte Schwingung mit vergleichsweise geringer Dämpfung. Als Endzeitpunkt der (Co-)Simulation wurde $t_{Ende} = 0.05$ s gewählt.

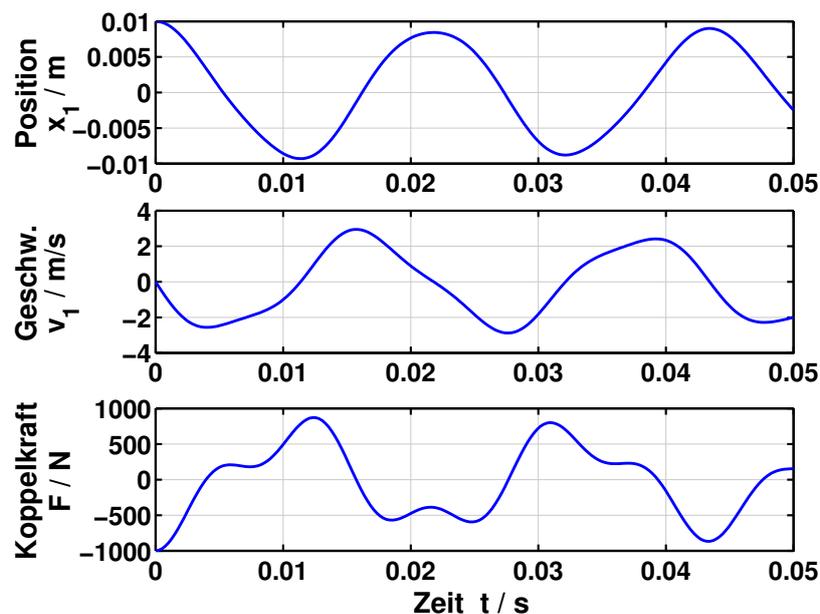


Abbildung 3.30: Zeitverlauf der Koppelgrößen für das Testmodell *Einmassenschwinger - eindimensionaler FE-Dehnstab*.

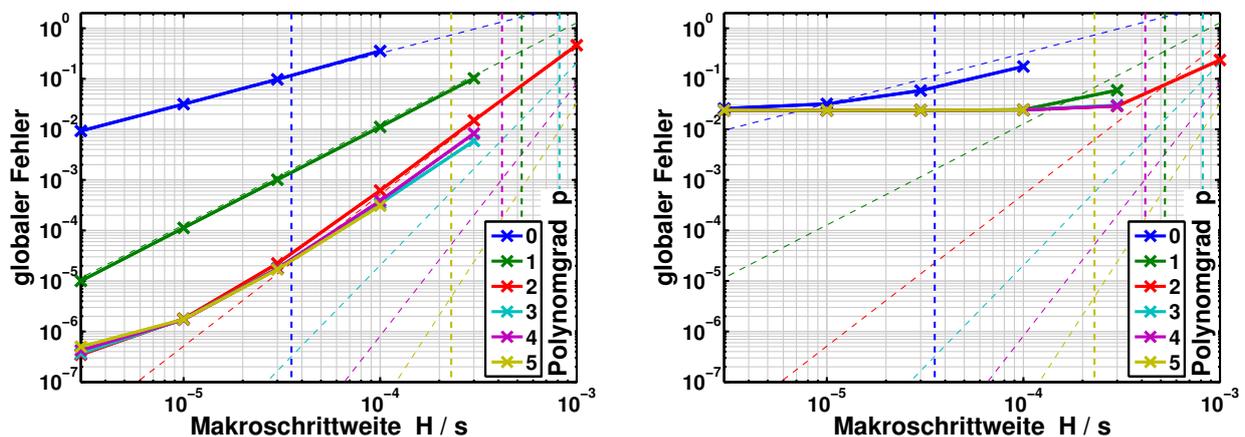
3.3.3.3. Konvergenz der Co-Simulationsergebnisse

Abbildung 3.31 zeigt die Konvergenz der Co-Simulationsergebnisse mit den Solvern von Adams und (a) dem impliziten HHT-Solver, sowie (b) dem expliziten zentrale Differenzen-Solver von Abaqus. Der Aufbau der beiden Abbildungen ist identisch mit dem von Abbildung 2.14 (a).

Um die in FE-Solvern - aus numerischen Stabilitätsgründen - oft enthaltene numerische Dämpfung auszuschalten, wird bei dem impliziten HHT-Solver der Solverparameter $\alpha = 0$ gesetzt. Dies führt gemäß Abaqus Handbuch [Das13] auf die implizite Trapezregel, welche keine numerische

Dämpfung aufweist und energieerhaltend ist. Der Konvergenzplot für den impliziten Abaqus Solver (Abb. 3.31 (a)) zeigt das erwartete Konvergenzverhalten (\rightarrow 2.6.2). Insbesondere eine Begrenzung des Fehlers nach unten durch den Fehler der Subsystemsolver ist erst bei einem eher kleinen globalen Fehler von ca. $4 \cdot 10^{-7}$ ansatzweise zu beobachten.

Bei dem expliziten zentrale Differenzen-Solver von Abaqus wurden die numerischen Dämpfungsparameter *linear bulk viscosity* und *quadratic bulk viscosity* auf 0 gesetzt. Da das FE-Modell physikalische (*Rayleigh*) Dämpfung beinhaltet und die zwei FE-Stab-Elemente des Testmodells vergleichsweise groß sind, ist mit einer (maximalen) Abaqus-Schrittweite von $h_{FEM,max} = 10^{-6}$ s keine numerische Instabilität zu beobachten (\rightarrow Anhang C.5). Der Konvergenzplot für den expliziten Abaqus Solver (Abb. 3.31 (b)) zeigt allerdings ein sehr frühes Abknicken des globalen Fehlers der Co-Simulation auf ca. $2 \cdot 10^{-2}$. Tests mit dem ungekoppelten Modell des Dehnstabes in Abaqus (\rightarrow Anhang C.5) zeigen, dass hier der globale Fehler (NRMSE) ebenfalls auf ähnliche Werte nach unten beschränkt ist. Eine nähere Betrachtung zeigt, dass die von Abaqus berechneten Zeitverläufe (nicht dargestellt) nicht um die Ruhelagen schwingen, sondern einen parameterunabhängigen Offset aufweisen, welcher weder erklärt noch beseitigt werden konnte.



(a) Subsystemsolver 1: Adams
 WSTIFF SI2: $e_{MKS} = 10^{-6}$, $h_{MKS,max} = 10^{-6}$ s
 Subsystemsolver 2: Abaqus
 dynamisch, implizit (HHT):
 $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$
 $h_{FEM,max} = 10^{-6}$ s.

(b) Subsystemsolver 1: Adams
 WSTIFF SI2: $e_{MKS} = 10^{-6}$, $h_{MKS,max} = 10^{-6}$ s
 Subsystemsolver 2: Abaqus
 dynamisch, explizit (zentrale Differenzen):
 $linear\ bulk\ viscosity = quadratic\ bulk\ visc. = 0$
 $h_{FEM,max} = 10^{-6}$ s.

Abbildung 3.31: Konvergenzplot für das Testmodell *Einmassenschwinger - eindimensionaler FE-Dehnstab*.

Co-Simulation mit dem *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite und mit trivialer Anlaufrechnung ($H_1: p = 0$, $H_2: p = 1$, ...). Dargestellt ist der globale Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

3.3.3.4. Rechenzeiten

Die direkte Abhängigkeit der Rechenzeit von den Co-Simulationsparametern (Makroschrittweite H und Polynomgrad p) ist bei der Kopplung von MKS und FE-Strukturdynamik vernachlässigbar. Insbesondere bei komplexeren FE-Modellen in 2 oder 3 Raumdimensionen, welche auf eine im Vergleich zum Testmodell hohe Anzahl an Knoten kommen, steigt die FE-Rechenzeit aufgrund der Größe der Gleichungssysteme stark an und der Einfluss der Co-Simulationsparameter ist nicht mehr relevant. Allerdings schränkt die numerische Stabilität der Co-Simulation die Wahl der

Makroschrittweite und damit auch der Mikroschrittweiten ein (\rightarrow 2.6.3.3). Dies führt dazu, dass für den impliziten FE-Solver eigentlich unnötig kleine Schrittweiten verwendet werden müssen. Für den expliziten FE-Solver ist diese Einschränkung, zumindest in den folgenden Anwendungen, aufgrund der eigenen numerischen Stabilitätsansprüche unwesentlich.

Bei gleichen Schrittweiten zeigt sich - wie zu erwarten und unabhängig von der Co-Simulation - ein großer Unterschied in den Rechenzeiten der Abaqus-Solver. Eine Co-Simulation des Testmodells ($t_{Ende} = 0.05\text{ s}$ und $h_{FEM,max} = 10^{-6}\text{ s}$) mit dem expliziten Abaqus-Solver dauert ca. 6 s. Mit dem impliziten Abaqus-Solver hingegen wurde eine Dauer von ca. 700 s ermittelt.

Da die Rechenzeit üblicherweise und speziell in den folgenden Anwendungen von dem Solver des FE-Subsystems dominiert wird, spielt die Rechenzeit des MKS-Subsystems praktisch keine Rolle. Da dies bereits mit dem im Folgenden eingesetzten expliziten Abaqus-Solver der Fall ist, gilt dies (bei ähnlichen Schrittweiten) erst recht für den deutlich langsameren impliziten FE-Solver.

3.3.4. Anwendung: Fallturm

3.3.4.1. Aufbau und Funktion des Fallturms

Abbildung 3.32 zeigt links den Fallturm. Dieser besteht aus zwei Führungsschienen, einem Schlitten, dem Fallkörper (orange) und variablen Gewichten (braun). Das untere Ende des Fallkörpers trifft auf die Probe (hellgrün). In dem Fallturmversuch kann die Position und die Geschwindigkeit des Fallkörpers (in Fallrichtung: negative y -Richtung), sowie die Kraft, die auf den Probekörper wirkt, gemessen werden. Der Aufbau des Fallturms erlaubt eine Variation der Fallhöhe und damit der Auftreffgeschwindigkeit, sowie eine Anpassung der Masse des Fallkörpers über zusätzliche Gewichte. Neben dem in Abbildung 3.32 dargestellten, axial ausgerichteten Stoß ist es möglich, den Probekörper zu verkippen und damit einen asymmetrischen Stoß zu untersuchen.

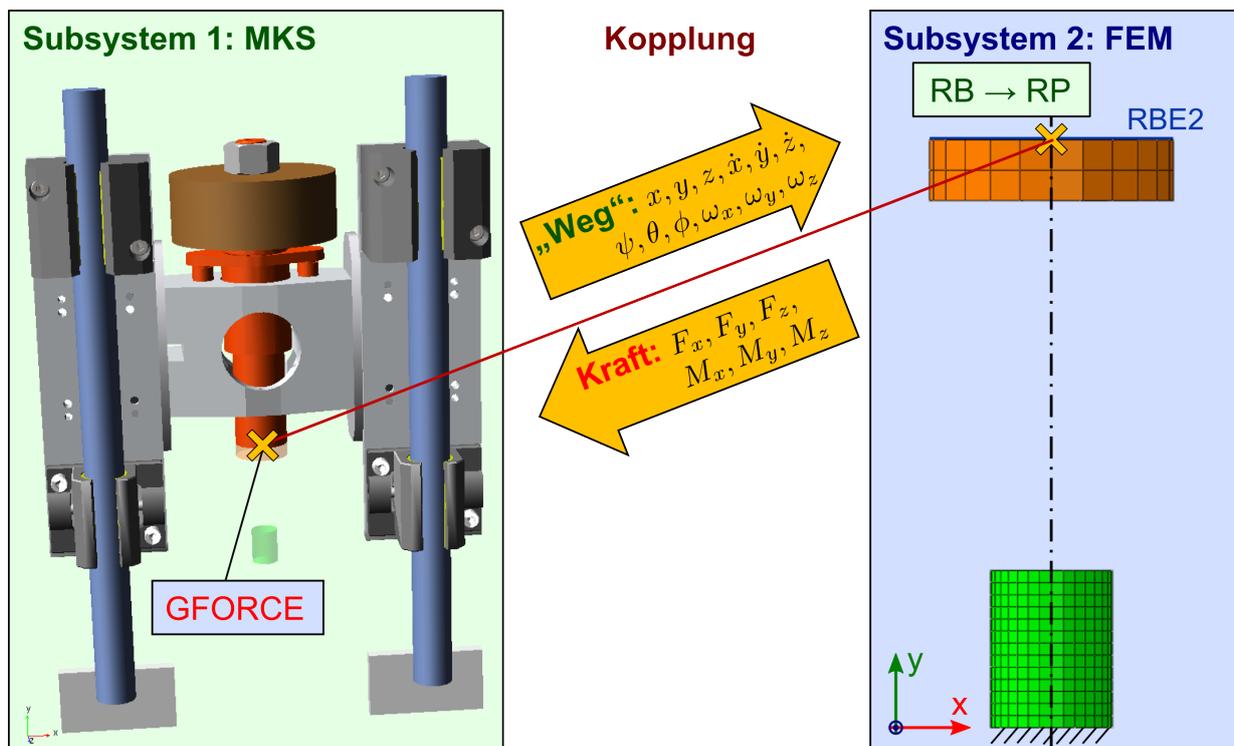


Abbildung 3.32: Subsysteme und Kopplung des Fallturms

Bei dem Versuch wird der Schlitten mit dem Probekörper fallen gelassen. Zuerst trifft der Fallkörper auf die Probe auf. Da der Schlitten nach unten nicht am Fallkörper fixiert ist, fällt dieser bis zu einem Anschlag weiter.

3.3.4.2. Subsysteme und Kopplung des Fallturms

Im Co-Simulationsmodell des Fallturms soll der Stoß des Fallkörpers auf eine Probe aus Polyurethan-Schaum (PUR-Schaum) simuliert werden. Schlitten und Fallkörper werden im MKS-Modell als Starrkörper abgebildet. Die Probe aus PUR-Schaum weist nichtlineares Materialverhalten und während des Stoßes große Verformungen auf, so dass diese als nichtlineares, strukturdynamisches FE-Modell abgebildet wird.

MKS-Subsystem des Fallturms

Das MKS-Subsystem enthält Führungsschienen, Schlitten und Fallkörper des Fallturms. Zwischen dem Schlitten und den Führungsschienen, sowie zwischen dem Fallkörper und dem Schlitten wurden Lager- und Reibkräfte mittels dynamischem *LuGre*-Reibungsmodell [WOAL95, TWZ07, AW08] eingebracht. Der Endanschlag des Schlittens ist als Kontakt im MKS-Modell vorhanden. Der Kontakt des Fallkörpers mit der PUR-Probe ist hingegen in das FEM-Subsystem ausgelagert.

Die Eingänge des MKS-Submodells sind die Kontaktkräfte/-momente der Probe auf die Unterseite des Fallkörpers. Da die Probe auch verkippt sein kann, wird eine *Gforce* mit 6 Komponenten, d.h. Kräfte in x -, y - und z -Richtung, sowie Momente um die x -, y - und z -Achse, verwendet.

Als Ausgang des MKS-Subsystems wird die komplette Bewegung der Unterseite des Fallkörpers in das FE-Subsystem übergeben, d.h. Positionen und Geschwindigkeiten in x -, y - und z -Richtung, sowie räumliche Drehungen und die Winkelgeschwindigkeitskomponenten. Die Darstellung von translatorischen Bewegungen in kartesischen Absolutkoordinaten ist eindeutig. Für räumliche, rotatorische Bewegungen hingegen sind verschiedene Drehparameterdarstellungen (z.B. *Euler*-Winkel, Quaternionen, ...) gebräuchlich [Sha05, Woe05, MSC13, Das13]. Dies führt zu der Problematik, dass gegebenenfalls verschiedene Darstellungen umgerechnet werden müssen. Es ist allerdings auch möglich, die Rotationsbewegung nur über die Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ zu koppeln. Die Rotationskoordinaten selbst werden dann im FE-Subsystem über eine numerische Zeitintegration ermittelt. Dies hat allerdings den Nachteil, dass die Rotationswinkel in den beteiligten Subsystemen aufgrund numerischer Fehler abweichen (auseinanderdriften) können. In den vorliegenden Beispielen ist dies allerdings nicht zu beobachten bzw. aufgrund der relativ kurzen Simulationszeiträume unwesentlich.

FE-Subsystem des Fallturms

Das FE-Subsystem des Fallturms besteht aus dem Probekörper und einem kleinen Teil des Fallkörpers als Gegenpart für die Kontaktberechnung. Dieser Teil des Fallkörpers ist aus Aluminium und wesentlich steifer als der Probekörper. Der Probekörper besteht aus Polyurethan-Schaum, welcher über das *Viscoelastic Hyperfoam* Materialmodell von Abaqus [Das13] abgebildet wird. Die Materialparameter wurden experimentell ermittelt.

Als Eingang des FE-Submodells dienen die Translations- und Rotationsbewegungen des unteren Endes des Fallkörpers im MKS-Modell. Um diese Bewegungen auf die FE-Knoten als Rand-

bedingungen (RB) aufzubringen, wird ein sogenannter Referenzpunkt (RP) erstellt und mit den FE-Knoten über eine kinematische Kopplung (*kinematic coupling* oder *rigid boundary element* (RBE2)) miteinander verbunden.⁷

Die Ausgänge des FE-Submodells sind die Kräfte und Momente, die am Referenzpunkt wirken.

3.3.4.3. Co-Simulationsergebnisse des Fallturms

Es wurden 3 Co-Simulationen mit dem Fallturmmodell durchgeführt: Mit unverkipptem und mit um 2.5° bzw. 5° verkipptem Probekörper. Der Probekörper wurde hierbei um seinen Schwerpunkt gedreht.

Abbildung 3.33 zeigt die Zeitverläufe der Koppelgrößen in Fallrichtung (negative y -Richtung). Zunächst befindet sich der Fallkörper im freien Fall und trifft dann bei ca. $t = 0.11\text{ s}$ auf die PUR-Probe auf. Diese verformt sich gemäß der FE-Berechnung und die Koppelkraft steigt an. Ab ca. $t = 0.12\text{ s}$ wird der Fallkörper abgestoßen und bewegt sich in positive y -Richtung. Es können im Laufe der Simulation 3 bzw. 4 Stöße beobachtet werden. Zwischen den Simulationen mit 0° , 2.5° und 5° verkippter Probe zeigen sich - wie erwartet - Unterschiede im Stoßverhalten. Das Maximum der Koppelkraft sinkt mit zunehmender Verkipfung, dafür nimmt die Stoßdauer leicht zu. Nicht dargestellt ist, dass bei verkippter Probe auch die anderen Kraftkomponenten und Momente ungleich Null sind und der Fallkörper nach dem Stoß innerhalb seine Führung Kippbewegungen ausführt.

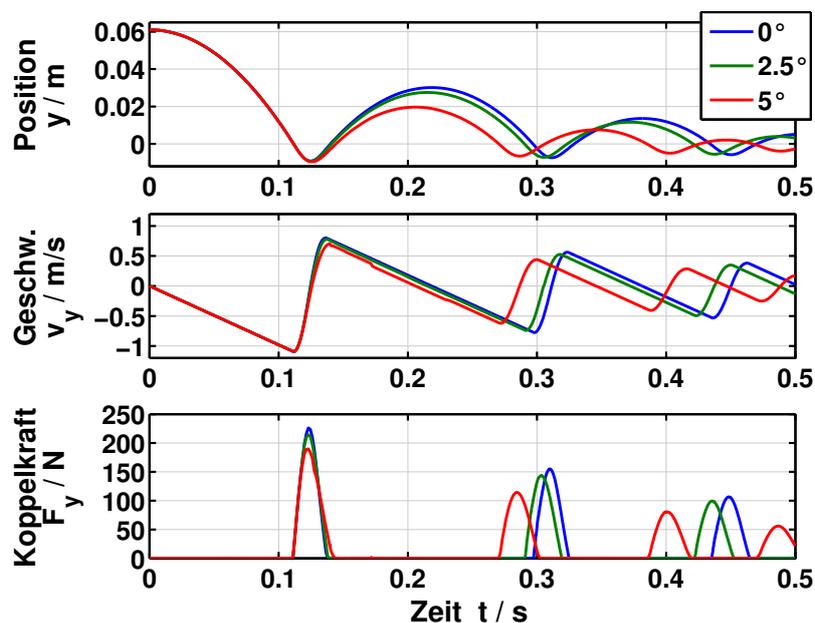
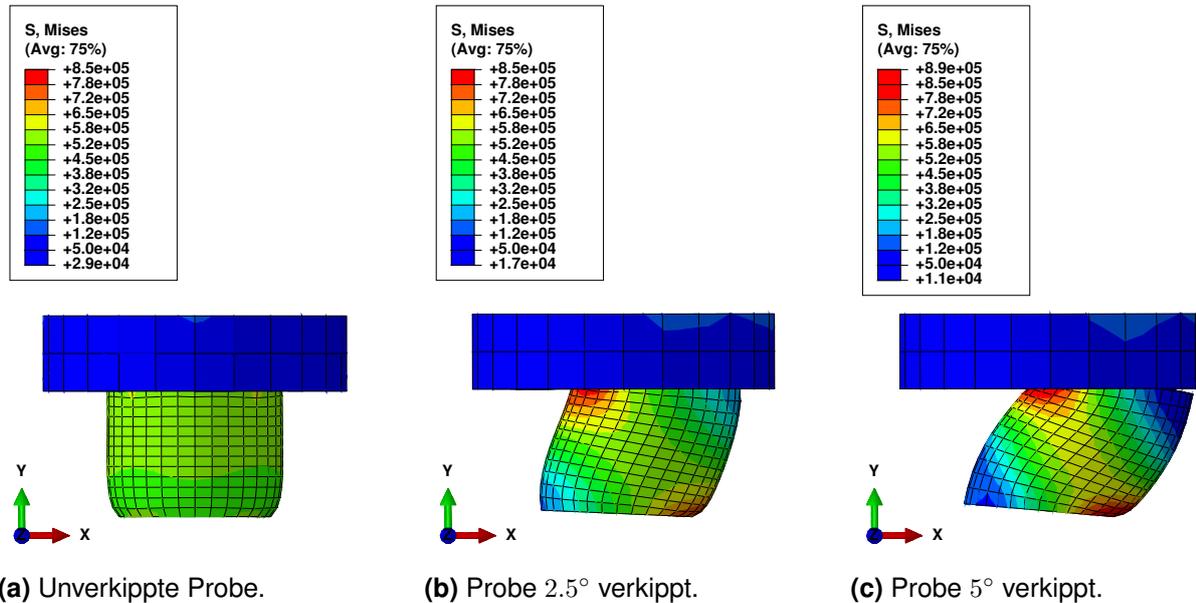


Abbildung 3.33: Zeitverlauf der y -Komponenten der Koppelgrößen mit 0° , 2.5° und 5° verkippter Probe.

Abbildung 3.34 zeigt die *Mises*-Vergleichsspannung bei maximaler Deformation, d.h. in der untersten Position des Fallkörpers bei dem ersten Stoß. Es ist zu sehen, wie die maximalen Spannungen in der PUR-Probe bei zunehmender Verkipfung im Randbereich ansteigen. Auch ist bereits bei 5° verkippter Probe ein Wegknicken bzw. „Ausweichen“ der Probe zu erkennen.

⁷Eine Kopplung über ein RBE3-Element (*distributing coupling*) ist ebenfalls möglich.



(a) Unverkippte Probe.

(b) Probe 2.5° verkippt.

(c) Probe 5° verkippt.

Abbildung 3.34: Mises-Vergleichsspannung zum Zeitpunkt $t = 0.125$ s, d.h. bei maximaler Deformation.

3.3.4.4. Fazit für die Co-Simulation des Fallturms

Es wurde gezeigt, dass eine numerisch stabile Kopplung von MKS und FE-Strukturmechanik möglich ist. Dies eröffnet die Möglichkeit, komplexe, flexible Bauteile mit großen Deformationen in einem dynamischen FE-Modell zu berechnen und an ein MKS-Modell zu koppeln.

Die Wahl der Makroschrittweite von $H = 10^{-7}$ s erfolgte aus Stabilitätsgründen. Bereits bei $H = 10^{-6}$ s geht in diesem Modell während des Kontaktes die numerische Stabilität verloren.

Über den numerischen Fehler der Co-Simulation kann keine Aussage getroffen werden, da keine Referenzlösung vorliegt. Diese numerisch zu erzeugen ist schwierig, da dieses Modell aufgrund der Kontakte sehr sensitiv auf Änderungen reagiert und der berechnete Fehler aus diesem Grund ansteigen würde. Es ist aber davon auszugehen, dass die Co-Simulation nur einen unwesentlichen zusätzlichen, numerischen Fehler verursacht.

Die Rechenzeit wird im Wesentlichen von dem FE-Solver bestimmt. Bei Verwendung des expliziten FE-Solvers mit moderater Vernetzung (\rightarrow Abb. 3.34) und einer überschaubaren FE-Submodellgröße beträgt die Rechenzeit ca. 9.5 Stunden für eine der Co-Simulationen aus Abb. 3.33 mit $t_{Ende} = 0.5$ s. Hierbei wird die Mikroschrittweite des expliziten FE-Subsystemsolvers (Mittelwert: $\text{mean}(h_{FEM}) = 6.4 \cdot 10^{-8}$ s) nicht durch die Makroschrittweite $H = 10^{-7}$ s sondern durch die eigenen Stabilitätsanforderungen begrenzt. In dieser Co-Simulation benötigt der MKS-Solver mit einer mittleren Mikroschrittweite von $\text{mean}(h_{MKS}) = 10^{-7}$ s nur ca. 1/4 der Rechenzeit, was aufgrund der parallelen Rechnung unerheblich ist.

3.3.5. Anwendung: Recloser

Als zweite Anwendung für die Kopplung von MKS und FE-Strukturmechanik wird der in Abschnitt 3.2.4 vorgestellte Recloser eingesetzt.

3.3.5.1. Subsysteme und Kopplung des Reclosers

Aufbau und Funktionsprinzip wurden bereits in Abschnitt 3.2.4.1 beschrieben. Hier wird das MKS-Modell allerdings nicht mit einem elektrodynamischen Modell gekoppelt, sondern der Mechanismus der vorgespannten Feder soll als FE-Detailmodell betrachtet werden. Die Bauteilbezeichnungen können Abbildung 3.22 entnommen werden.

MKS-Subsystem des Reclosers

Im Gegensatz zu Abschnitt 3.2.4.2 hat der Anker hier 6 Freiheitsgrade und wird am Stator und einer weiteren Position in Lagern mit Spiel und Reibung geführt, siehe rote, zylinderförmige Bauteile in Abbildung 3.35 links. Zusätzlich kommt nun ein seitliches Feder-Dämpferelement hinzu, welches die elektrische Kontaktierung des bewegten elektrischen Kontaktes abbildet und zu einer seitlichen Kraft auf den Anker führt. Dieses MKS-Modell soll neben der Primärbewegung in y -Richtung auch Kippbewegungen von Anker und beweglichem elektrischem Kontakt abbilden. In dem MKS-Modell sind 3 mechanische Kontakte vorgesehen. 1. zwischen den beiden elektrischen Kontakten, 2. zwischen Stator und oberer Eisenplatte zum Öffnen des Ankers und 3. zwischen Stator und unterer Eisenplatte zum Schließen des Ankers. Die mechanischen Kontakte im Mechanismus der vorgespannten Feder sind im FEM-Modell vorgesehen. Für die Kopplung wird der Mechanismus der vorgespannten Feder aus dem MKS-Modell herausgetrennt und an den zwei Trennstellen werden die Koppelkräfte und Momente eingefügt.

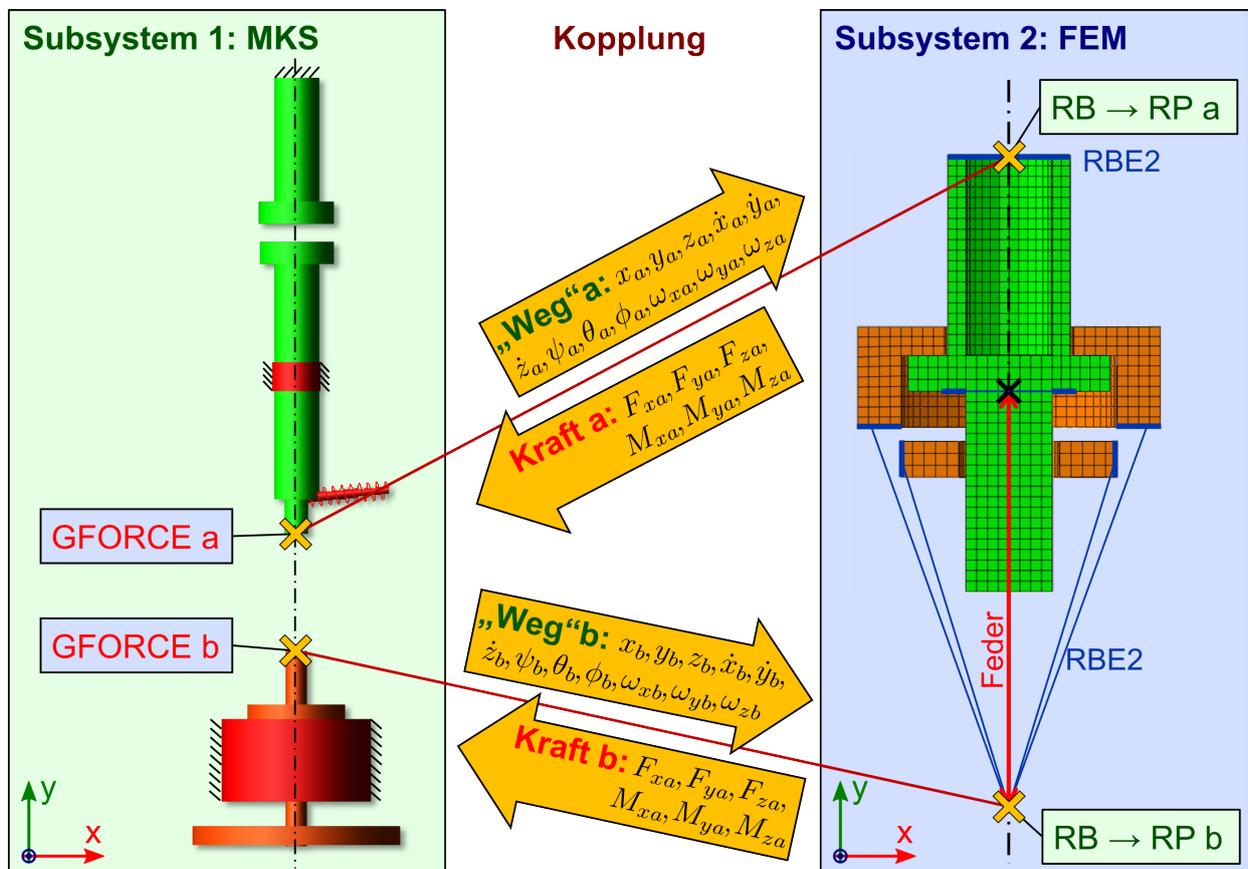


Abbildung 3.35: Subsysteme und Kopplung des Reclosers

Die Eingänge des MKS-Submodells sind demnach die Kräfte und Momente in x -, y - und z -

Richtung an den zwei Koppelstellen.

Die Ausgänge des MKS-Submodells sind die translatorischen und rotatorischen Bewegungen der Koppelstellen, d.h. Positionen und Geschwindigkeiten in x -, y - und z -Richtung, sowie räumliche Drehungen und Winkelgeschwindigkeiten.

FE-Subsystem des *Reclosers*

In Abbildung 3.35 ist rechts das strukturdynamische FE-Subsystem zu sehen. Das rotationssymmetrische dreidimensionale Modell ist im Schnitt dargestellt. Der zum Anker gehörige untere Part (orange) wurde, um Rechenzeit zu sparen, nicht vollständig abgebildet sondern, wie skizziert mit dem Referenzpunktes b (RP b) verbunden. Der zum elektrischen Kontakt gehörige obere Teil (grün) ist über eine mechanische Feder (Abbildung als Kennlinie) mit dem Referenzpunkt b verbunden. Für die Kopplung ist am oberen Ende ein RBE2 Element mit dem Referenzpunkt a (RP a) vorgesehen. Es werden Kontaktkräfte zwischen den Teilen berücksichtigt.

Als Eingänge des FE-Submodells dienen die Translations- und Rotationsbewegungen der Referenzpunkte a und b in den 3 Raumrichtungen.

Die Ausgänge des FE-Submodells sind die Kräfte und Momente, welche von den FE-Knoten über die kinematische Kopplung an die Referenzpunkte a und b übertragen werden.

3.3.5.2. Co-Simulationsergebnisse des *Reclosers*

Abbildung 3.36 zeigt die normierten Zeitverläufe aller Koppelgrößen des *Reclosers*. Es wurde ein Schließvorgang (von $t = 0$ bis ca. $t = 0.2$) und Öffnungsvorgang (ab $t = 0.35$) des *Reclosers* co-simuliert. In den oberen drei Graphen werden die translatorischen Koppelgrößen - relative Position (1. Graph), Geschwindigkeit (2. Graph) und Koppelkraft (3. Graph) jeweils in x , y und z -Richtung für die Koppelstellen a (links) und b (rechts) - dargestellt. In den unteren drei Graphen sind die rotatorischen Koppelgrößen - Winkel (als Komponenten des Drehzeigers, 4. Graph), Winkelgeschwindigkeit (5. Graph) und Drehmoment (6. Graph) ebenfalls bezogen auf die x , y und z -Richtung für die Koppelstellen a (links) und b (rechts) - dargestellt.

Die Bewegung von Koppelstelle a entspricht - von Verkippungen abgesehen - der Bewegung des unteren elektrischen Kontaktes, da diese starr miteinander verbunden sind. Entsprechend zeigt die Position von Koppelstelle b die Bewegung des Ankers. Die Differenz entsteht durch die vorgespannte Feder und die Flexibilität des FE-Modells. Dementsprechend ist der elektrische Kontakt geschlossen, wenn die y -Komponente der Position von Koppelstelle a = „1“ ist und vollständig geöffnet, wenn diese „0“ ist.

Es fällt auf, dass beim Öffnen des Schalters ($y_a : „1“ \rightarrow „0“$) fast ein Wiederschließen eintritt. Dies ist im realen System so nicht zu erwarten und wird durch den Stoß des Starrkörperkontaktes zwischen Stator und oberer Eisenplatte zum Öffnen des Ankers und die vorgespannte Feder verursacht. Interessanter sind die mechanischen Kontakte im FE-Modell, welche beim Öffnen des *Reclosers* auftreten. Diese sind als sägezahnförmige Spitzen in der y -Komponente der Geschwindigkeit zu sehen und verursachen große Kraftspitzen, welche zu Stabilitätsproblemen der Co-Simulation führen können und daher eine kleine Makroschrittweite erfordern, siehe auch Abschnitt 3.2.4.5. In den rotatorischen Bewegungen sind in den Winkeln mit Auftreten der mechanischen Kontakte im FE-Modell periodische Kippbewegungen, im Wesentlichen um die z -Achse,

zu beobachten. Diese entstehen dadurch, dass der Stoßvorgang nicht plan ist, sondern die Stoßkörper an den Kanten auftreffen, so dass es zu einer Pendelbewegung kommt. Die auftretenden Momente sind hierbei ebenfalls sehr hochfrequent.

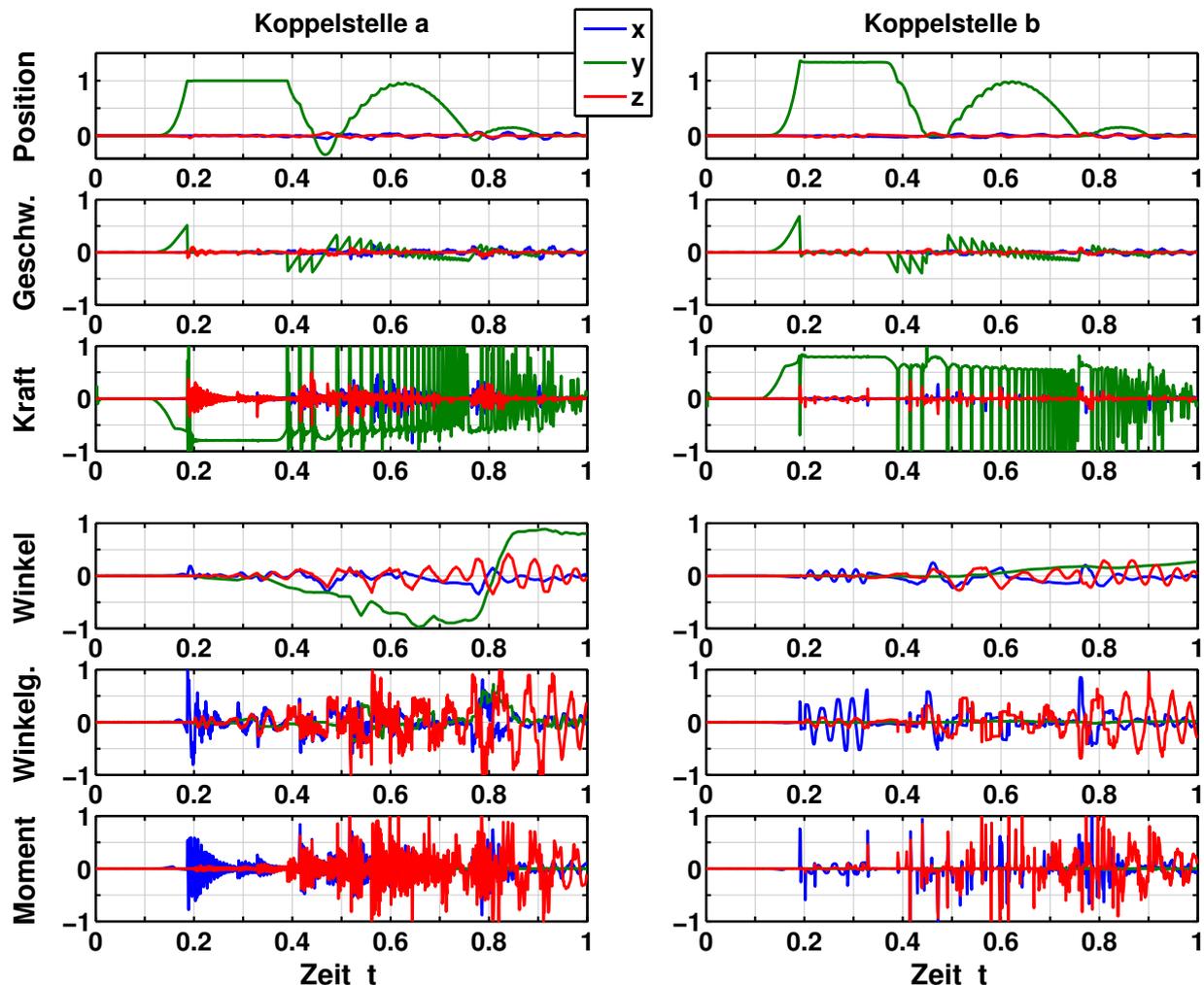


Abbildung 3.36: Zeitverlauf der Koppelgrößen für das Schließen ($t=0, \dots, 0.2$) und Wiederöffnen (ab $t=0.35$) des *Reclosers*.

3.3.5.3. Fazit für die Co-Simulation des *Reclosers*

Im Gegensatz zum Fallturm sind bei dem *Recloser* im FE-Submodell Kontakte zwischen relativ starren Körpern modelliert. Dies führt zu schnellen, impulsartigen Änderungen in den Koppelkräften und -momenten. Daher wird bei diesem Modell für eine stabile Co-Simulation eine relativ kleine Makroschrittweiten von $H = 10^{-7}$ s benötigt.

Wie bereits bei dem Fallturm ist es aufgrund der Kontakte und der Rechenzeiten schwer, eine numerische Referenzlösung zu generieren. Daher wurde hier keine Aussage über den numerischen Fehler der Co-Simulation gemacht.

Die Rechenzeit für die oben dargestellte Co-Simulation beträgt ca. 12 Stunden. Die Mikroschrittweiten waren hierbei: $\text{mean}(h_{MKS}) = 6 \cdot 10^{-8}$ s und $\text{mean}(h_{FEM}) = 1.4 \cdot 10^{-8}$ s. Da diese von der jeweiligen Schrittweitensteuerung der Subsystemsolver kleiner gewählt wurden als die Makroschrittweite ($H = 10^{-7}$ s), ergibt sich keine Einschränkung der Mikroschrittweiten durch die Co-Simulation.

Teil II.

Solverkopplung

4. Theorie der dynamisch-statischen Solverkopplung

In diesem Kapitel wird in Abschnitt 4.1 zunächst die Topologie der Solverkopplung beschrieben. Der Ablauf der Kopplung und die eingesetzten Verfahren werden in Abschnitt 4.2 erläutert. Dann wird in Abschnitt 4.3 ein Testmodell definiert und in Abschnitt 4.4 erfolgt eine Analyse der dynamisch-statischen Solverkopplungsverfahren.

4.1. Kopplungstopologie für die dynamisch-statische Solverkopplung

Abbildung 4.1 zeigt die Topologie für die dynamisch-statische Solverkopplung. Im Gegensatz zur Co-Simulation mit zwei dynamischen Subsystemen (\rightarrow Teil I) wird hier ein dynamisches Subsystem mit einem (oder mehreren) statischen Subsystem(en) gekoppelt.

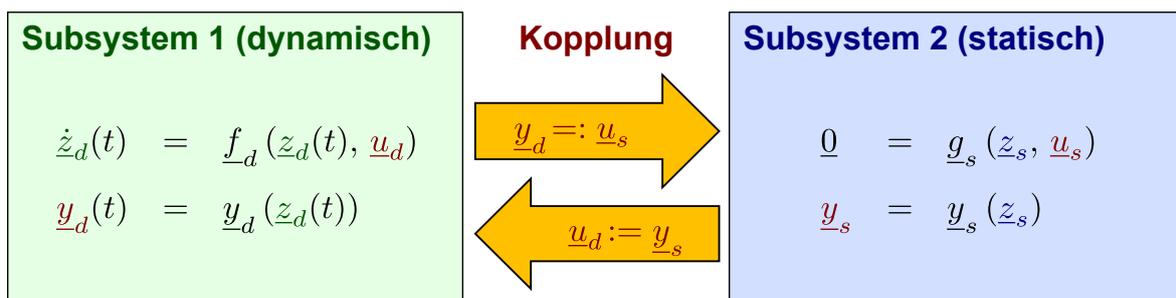


Abbildung 4.1: Kopplungstopologie für die dynamisch-statische Solverkopplung.

4.2. Kopplungsverfahren für die dynamisch-statische Solverkopplung

Für die dynamisch-statische Solverkopplung muss das statische Subsystem in Art einer externen Funktion von dem dynamischen Solver aufgerufen werden. Daher hängt das Verfahren für die Solverkopplung im Wesentlichen von dem Zeitintegrationsverfahren (Solver) ab, mit dem das dynamische Subsystem gelöst wird. Dieses wird daher zuerst betrachtet.

4.2.1. Lösung des dynamischen Subsystems

Anfangswertproblem

Die Modellbildung des dynamischen Subsystems führt auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen (DGL) 1. Ordnung⁸ mit entsprechenden Anfangswerten:

$$\text{DGL: } \dot{z}_d(t) = \underbrace{f_d(z_d(t), \underline{u}_d(y_d))}_{\text{„rechte Seite“}}, \quad \text{Anfangswerte: } z_{d,0} = z_d(t_0) \quad (4.1)$$

$$\text{Systemausgänge: } \underline{y}_d(t) = \underline{y}_d(z_d(t)) \quad (4.2)$$

\underline{u}_d sind die Systemeingänge, welche von den Systemausgängen \underline{y}_d und damit auch von den Systemzuständen z_d abhängen.

Zeitdiskretisierung

Das Anfangswertproblem soll numerisch durch ein Zeitdiskretisierungsverfahren gelöst werden. Es wird davon ausgegangen, dass das Differentialgleichungssystem (4.1) steif ist, so dass implizite Verfahren zur Lösung eingesetzt werden [ESF98, HW10].

Um die Notation einfach zu halten, wird hier als Beispiel das Differenzgleichungssystem nach Diskretisierung mit dem impliziten *Euler*-Verfahren (*Euler* „rückwärts“) angegeben [SK09, SWP12]:

$$\text{Zeitdiskretisierung: } z_{d,0} = z_d(t_0), z_{d,1} \approx z_d(t_1), \dots, z_{d,n} \approx z_d(t_n), \dots, z_{d,N} \approx z_d(t_N)$$

$$\text{implizites Euler-Verfahren: } z_{d,n} = z_{d,n-1} + h_n f_d(z_{d,n}, \underline{u}_{d,n}) \quad (4.3)$$

Hierbei werden mit dem zweiten Index $n = 0, \dots, N$ die Zeitschritte durchnummeriert. Es ist $\underline{u}_{d,n} := \underline{u}_d(\underline{y}_d(z_{d,n}))$. Die Schrittweite $h_n = t_n - t_{n-1}$ ist im Allgemeinen variabel.

Newton-Verfahren

Das Differenzgleichungssystem (4.3) ist im Allgemeinen ein nichtlineares implizites Gleichungssystem, welches (auch bei Anwendung anderer impliziter Zeitdiskretisierungsverfahren) in folgende Form überführt werden kann:

$$\text{Nichtlineares Gleichungssystem: } \underline{0} = \underline{g}_d(z_{d,n}, \underline{u}_{d,n}) \quad (4.4)$$

Dieses Gleichungssystem muss nun nach $z_{d,n}$ gelöst werden. Hierfür kommt in der Regel ein *Newton*-Verfahren (auch *Newton-Raphson*-Verfahren genannt) zum Einsatz [ESF98].

Das iterative *Newton*-Verfahren [HS06, DR08, SK09] linearisiert zunächst die Gleichung (4.4) in einem Arbeitspunkt $z_{d,n}^{(k)}$:

$$\text{Newton-Verfahren: } \underline{0} = \underline{g}_d(z_{d,n}^{(k)}, \underline{u}_{d,n}^{(k)}) + \underline{G}_d(z_{d,n}^{(k)}) \cdot [z_{d,n}^{(k+1)} - z_{d,n}^{(k)}] \quad (4.5)$$

⁸Bei Verwendung eines geeigneten Zeitintegrationsverfahrens (z.B. BDF) kann dies auch ein System differential-algebraischer Gleichungen sein (z.B. MKS-Gleichungen (3.1)). Ebenso dürfte die Gleichung zeitvariant (d.h. $\partial \underline{f}_d / \partial t \neq 0$) sein. Gleichungssysteme höherer Ordnung können in ein System 1. Ordnung überführt werden [SK09].

Wobei $\underline{G}_d = \partial \underline{g}_d / \partial \underline{z}_d$ die *Jacobi*-Matrix von \underline{g}_d ist. Der in Klammern hochgestellte Index $k = 0, \dots, N_k$ bezeichnet den Iterationsschritt und es ist $\underline{u}_{d,n}^{(k)} := \underline{u}_d(\underline{y}_d(\underline{z}_{d,n}^{(k)}))$.

Nun kann nach Wahl eines Startwertes $\underline{z}_{d,n}^{(0)}$ die Nullstelle $\underline{z}_{d,n}^{(1)}$ für das lineare Gleichungssystem (4.5) berechnet werden. Dieses Vorgehen wird iterativ fortgeführt, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist:

$$\text{Abbruchkriterium, z.B.: } \left\| \underline{g}_d \left(\underline{z}_{d,n}^{(k)}, \underline{u}_{d,n}^{(k)} \right) \right\| < \text{tol}_K \quad (4.6)$$

Hierbei ist tol_K die Korrektortoleranz. Es kann z.B. $\text{tol}_K = 0.1 \text{ tol}, \dots, 0.001 \text{ tol}$, mit tol der benutzerdefinierten Fehlertoleranz des eingesetzten Zeitintegrationsverfahrens, gewählt werden [MSC13]. Der Iterationsschritt k bei dem das Abbruchkriterium erfüllt ist, wird hier mit N_k bezeichnet.

Damit wird die Nullstelle des nichtlinearen Gleichungssystems (4.4) berechnet und der Zeitschritt des Solvers abgeschlossen.

Prädiktor/Korrektor Verfahren

Die explizite Berechnung des Startwertes der *Newton*-Iteration $\underline{z}_{d,n}^{(0)}$ wird Prädiktor genannt. Dieser Prädiktorwert wird dann von dem *Newton*-Verfahren iterativ korrigiert, siehe Abb. 4.2.

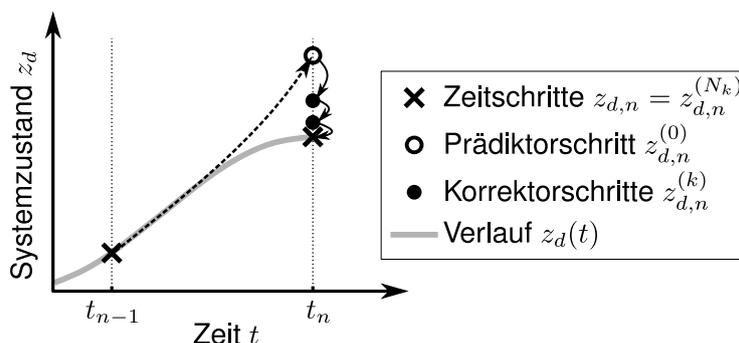


Abbildung 4.2: Arbeitsweise eines Prädiktor/Korrektor Verfahrens.

Jacobi-Matrix und partielle Ableitungen

Die Elemente der *Jacobi*-Matrix $\underline{G}_d = \partial \underline{g}_d / \partial \underline{z}_d$ sind die partiellen Ableitungen $\partial (\underline{g}_d)_m / \partial (\underline{z}_d)_l$, wobei $m = 1, \dots, N_g$ die Komponenten der vektoriellen Funktion \underline{g}_d und $l = 1, \dots, N_z$ die Komponenten des Zustandsvektors \underline{z}_d sind.

Die partiellen Ableitungen werden oft numerisch approximiert. Üblicherweise wird hierbei ein einseitiger (Vorwärts-) Differenzenquotient eingesetzt [MSC13, SWP12]:

$$\text{Vorwärts Differenzenquotient: } \frac{\partial (\underline{g}_d(\underline{z}_d))_m}{\partial (\underline{z}_d)_l} \approx \frac{(\underline{g}_d(\underline{z}_d + \Delta_l \cdot \underline{e}_l))_m - (\underline{g}_d(\underline{z}_d))_m}{\Delta_l} \quad (4.7)$$

Hierbei ist Δ_l eine „kleine“ Störung der l -ten Komponente des Zustandsvektors \underline{z}_d und \underline{e}_l der Einheitsvektor in l -Richtung.

Gemäß [SWP12, Abschnitt 8.6.1] ist $\Delta_l = \sqrt{\text{eps}} \cdot \max(1, |(\underline{z}_d)_l|)$, mit der Maschinengenauigkeit eps^9 , eine gute Wahl für die Störung.

⁹Für doppelte Genauigkeit (*double precision*) ist die Maschinengenauigkeit $\text{eps} \approx 2.22 \cdot 10^{-16}$ [Mat12].

Für die Berechnung der partiellen Ableitungen von \underline{g}_d bezüglich der Eingangsgrößen $\underline{u}_d(\underline{z}_d)$ wird zweimal die Kettenregel eingesetzt [MSC13], siehe Gleichung (4.8). Dies bedeutet, dass von der Kopplung für die Berechnung der *Jacobi*-Matrix die partiellen Ableitungen $\partial(\underline{u}_d)_j/\partial(\underline{y}_d)_i$ bereitgestellt werden müssen. Hierbei sind $j = 1, \dots, N_u$ die Komponenten der Eingänge \underline{u}_d und $i = 1, \dots, N_y$ die Komponenten der Ausgänge \underline{y}_d .

$$\frac{\partial \underline{g}_d}{\partial(\underline{z}_d)_l} = \sum_{i=1}^{N_y} \frac{\partial \underline{g}_d}{\partial(\underline{y}_d)_i} \frac{\partial(\underline{y}_d)_i}{\partial(\underline{z}_d)_l} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \underline{g}_d}{\partial(\underline{y}_d)_i} = \sum_{j=1}^{N_u} \frac{\partial \underline{g}_d}{\partial(\underline{u}_d)_j} \frac{\partial(\underline{u}_d)_j}{\partial(\underline{y}_d)_i} \quad (4.8)$$

Da die Berechnung der *Jacobi*-Matrix sehr aufwändig ist, wird diese bei dem sog. vereinfachten *Newton*-Verfahren über eine bestimmte Anzahl an Iterationsschritten konstant gehalten [SWP12]. Die meisten Solver kommerzieller Programme bieten die Möglichkeit, die Anzahl der *Newton*-Schritte anzugeben, nach denen die *Jacobi*-Matrix neu berechnet wird.¹⁰

4.2.2. Lösung des statischen Subsystems

Bei dem statischen Subsystem dürfen keine Zeitableitungen in den Systemgleichungen auftreten, so dass keine Zeitintegration durchgeführt werden muss.¹¹

Es ist also ein im Allgemeinen nichtlineares, implizites Gleichungssystem zu lösen:

$$\text{Nichtlineares Gleichungssystem:} \quad \underline{0} = \underline{g}_s(\underline{z}_s, \underline{u}_s) \quad (4.9)$$

$$\text{Systemausgänge:} \quad \underline{y}_s = \underline{y}_s(\underline{z}_s) \quad (4.10)$$

Oft wird die Lösung dieses Gleichungssystems iterativ mit dem bereits beschriebenen *Newton*-Verfahren bestimmt. Hierbei können die Konvergenz und die Anzahl der notwendigen Iterationsschritte stark von den Startwerten der *Newton*-Iteration abhängen. Bei wiederholten Berechnungen der Lösung mit jeweils nur geringfügig geänderten Eingangsgrößen \underline{u}_s ist es daher sinnvoll, als Startwerte der *Newton*-Iteration die zuvor berechnete Lösung für \underline{z}_s einzusetzen.

4.2.3. Kopplungsverfahren

Da der Eingang des dynamischen Subsystems \underline{u}_d der Ausgang des statischen Subsystems \underline{y}_s ist, wird letzteres während der gekoppelten Berechnung immer dann aufgerufen, wenn während eines Zeitschrittes des dynamischen Solvers die „rechte Seite“ $\underline{f}_d(\underline{z}_d, \underline{u}_d)$ (engl. *right hand side*, RHS) der DGL (4.1) ausgewertet wird. Ein solcher Aufruf der „rechten Seite“ erfolgt mindestens einmal während eines Korrektorschrittes (einer Iteration des *Newton*-Verfahrens). Zusätzlich sind für die numerische Berechnung der partiellen Ableitungen $\partial(\underline{u}_d)_j/\partial(\underline{y}_d)_i$ weitere Aufrufe des statischen Subsystems mit gestörten Ausgangsgrößen des dynamischen Subsystems $\underline{y}_d + \Delta_i \cdot \underline{e}_i$, $i = 1, \dots, N_y$ notwendig.

Die Berechnung der Lösung der statischen Subsysteme nimmt üblicherweise einige Zeit in Anspruch, in welcher der dynamische Solver warten muss. Es ist daher sinnvoll, Verfahren zu nutzen,

¹⁰In MSC Adams heißt diese Solver-Option „*PATTERN*“ [MSC13].

¹¹Interne Systemzustände, wie sie zum Beispiel durch Hysterese gegeben wären, dürften durchaus vorhanden sein. In dem betrachteten Testmodell (\rightarrow 4.3) oder der Anwendung (\rightarrow 5.1) werden allerdings ausschließlich eindeutige, statische Subsysteme ohne „Gedächtnis“ eingesetzt. Dies bedeutet, dass die Subsystemausgänge ausschließlich durch den aktuellen Wert der Subsystemeingänge festgelegt sind [FB09].

bei denen die Aufrufe des statischen Solvers verringert werden. Im Folgenden werden drei Kopplungsverfahren beschrieben. Auf das in [BS10b, BS11a, Bus12] „explizit“ genannte Verfahren wird nicht eingegangen, da es keinen Vorteil gegenüber der semi-impliziten Kopplung bietet.

4.2.3.1. Voll-implizite Kopplung

Bei dem in [BS10b, BS11a, Bus12] „voll-implizit“ genannten Verfahren wird das statische Subsystem in jedem Korrektorschritt aufgerufen und die Eingangsgrößen \underline{u}_d werden aufgrund der aktuellen Werte der Ausgangsgrößen \underline{y}_d neu berechnet.

Um die Dauer der Simulation mit der voll-impliziten Kopplung gering zu halten, können die Aufrufe des statischen Subsystems mit den ungestörten und die Aufrufe mit den gestörten Eingangsgrößen (zur Berechnung der partiellen Ableitungen $\partial(\underline{u}_d)_j / \partial(\underline{y}_d)_i$ mittels Differenzenquotient) parallel erfolgen.

Es müssen also:

$$\text{die Eingangsgrößen} \quad \underline{u}_d \left(\underline{y}_{d,n}^{(k)} \right) = \underline{u}_{d,n}^{(k)} \quad (4.11)$$

$$\text{und die gestörten Eingangsgrößen} \quad \underline{u}_d \left(\underline{y}_{d,n}^{(k)} + \Delta_i \cdot \underline{e}_i \right), \quad i = 1, \dots, N_y \quad (4.12)$$

in jedem Solverzeitschritt $n = 1, \dots, N$ und bei jeder Korrekturiteration $k = 0, \dots, N_k$ durch Aufruf des statischen Subsystems berechnet werden.

4.2.3.2. Semi-implizite Kopplung

In [BS10b, BS11a, Bus12] wird nun eine „semi-implizite“ Kopplung vorgestellt. Die Idee hierbei ist, die Eingangsgrößen \underline{u}_d bezüglich der Ausgangsgrößen \underline{y}_d zu linearisieren, siehe Gleichung (4.13). Dazu werden die partiellen Ableitungen $\partial(\underline{u}_d)_j / \partial(\underline{y}_d)_i$ benötigt, welche ohnehin für die *Jacobi*-Matrix des Korrektors berechnet werden müssen.

$$\tilde{\underline{u}}_d \Big|_{\underline{y}_d^{AP}} \left(\underline{y}_d \right) = \underline{u}_d \left(\underline{y}_d^{AP} \right) + \frac{\partial \underline{u}_d}{\partial \underline{y}_d} \left(\underline{y}_d^{AP} \right) \cdot \left(\underline{y}_d - \underline{y}_d^{AP} \right) \quad (4.13)$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial \underline{u}_d}{\partial \underline{y}_d} := \left[\frac{\partial \underline{u}_d}{\partial (\underline{y}_d)_1}, \dots, \frac{\partial \underline{u}_d}{\partial (\underline{y}_d)_{N_y}} \right]$$

Es sind: $\tilde{\underline{u}}_d$ die linearisierten Eingangsgrößen und \underline{y}_d^{AP} der Arbeitspunkt in dem linearisiert wird.

Es bleibt festzulegen, um welchem Arbeitspunkt linearisiert und wann die Linearisierung neu berechnet wird.

Arbeitspunkt: letzter Korrektorschritt

[BS10b, BS11a, Bus12] schlägt vor, als Arbeitspunkt den auskonvergierten Zustand aus der vorhergehenden Korrekturiteration ($k = N_k$) des letzten Zeitschrittes $n - 1$ zu verwenden:

$$\underline{y}_d^{AP} = \underline{y}_{d,n-1}^{(N_k)} \quad (4.14)$$

Die resultierende Linearisierung des Eingangsvektors $\tilde{\underline{u}}_d$ wird dann für alle Korrekturiterationen k des aktuellen Zeitschrittes n verwendet:

$$\underline{z}_{d,n}^{(k-1)} \quad \text{und} \quad \tilde{\underline{u}}_d \Big|_{\underline{y}_{d,n-1}^{(N_k)}} \left(\underline{y}_{d,n}^{(k-1)} \right) \quad \text{ergibt} \quad \underline{z}_{d,n}^{(k)} \quad , \quad k = 1, \dots, N_k \quad (4.15)$$

Arbeitspunkt: Prädiktorschritt

Es ist auch möglich als Arbeitspunkt den Zustand aus dem aktuellen Prädiktorschritt ($k = 0$) zu wählen:

$$\underline{y}_d^{AP} = \underline{y}_{d,n}^{(0)} \quad (4.16)$$

und die Linearisierung für alle Korrekturiteration des aktuellen Zeitschrittes n zu verwenden:

$$\underline{z}_{d,n}^{(k-1)} \quad \text{und} \quad \tilde{\underline{u}}_d \Big|_{\underline{y}_{d,n}^{(0)}} \left(\underline{y}_{d,n}^{(k-1)} \right) \quad \text{ergibt} \quad \underline{z}_{d,n}^{(k)} \quad , \quad k = 1, \dots, N_k \quad (4.17)$$

Diese Verfahren werden nun anhand eines Testmodells untersucht.

4.3. Testmodell: *nichtlinearer Einmassenschwinger*

Ausgehend von dem in Abschnitt 2.2 vorgestellten Testmodell *Zweimassenschwinger* für die Co-Simulation, wird nun ein nichtlinearer Einmassenschwinger als Testmodell für die dynamisch-statische Solverkopplung vorgestellt, siehe Abbildung 4.3. Im Gegensatz zur Co-Simulation ist es hier relevant, dass zumindest das statische Subsystem nichtlinear von seinen Eingangsgrößen \underline{u}_s abhängt. Wäre dieser Zusammenhang linear, würde kein Unterschied zwischen dem voll- und dem semi-impliziten Verfahren mit Arbeitspunkt im Prädiktorschritt bestehen. Hier wird ebenfalls das dynamische Subsystem nichtlinear gewählt, damit der dynamische Subsystemsolver im Allgemeinen mehr als eine Korrekturiteration durchführen muss.

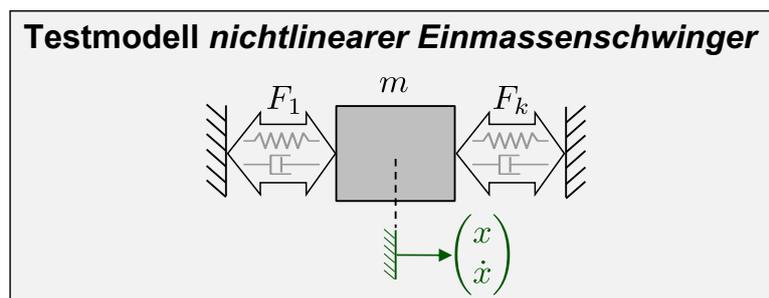


Abbildung 4.3: Testmodell *nichtlinearer Einmassenschwinger*

Bei dem Testmodell schwingt eine Masse m mit einem Freiheitsgrad in x -Richtung. Für die Kraft F_1 wird das folgende nichtlineare Kraftgesetz angenommen:

$$F_1 = -10^5 \operatorname{sgn}(x) |x|^4 - 5 \cdot 10^{-4} \operatorname{sgn}(\dot{x}) |\dot{x}|^2 \quad (4.18)$$

Für die spätere Koppelkraft F_k wird ebenfalls ein nichtlineares Kraftgesetz verwendet:

$$F_k = -10^5 \operatorname{sgn}(x) (\exp(3 \cdot |x|) - 1) - 10^{-5} \operatorname{sgn}(\dot{x}) |\dot{x}|^3 \quad (4.19)$$

Hierbei dienen die Vorzeichenfunktion $\text{sgn}(\square)$ und der Absolutbetrag $|\square|$ dazu, dass die Kraft immer rückstellend bzw. dämpfend wirkt.

Die nichtlineare, gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung des Einmassenschwingers ergibt sich daraus wie folgt:

$$m \ddot{x} = - 10^5 \text{sgn}(x) |x|^4 - 5 \cdot 10^{-4} \text{sgn}(\dot{x}) |\dot{x}|^2 \leftrightarrow - 10^5 \text{sgn}(x) (\exp(3 \cdot |x|) - 1) - 10^{-5} \text{sgn}(\dot{x}) |\dot{x}|^3 \quad (4.20)$$

Als Anfangswerte wurden $x_0 = 2 \text{ m}$ und $\dot{x}_0 = -100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ gewählt. Der Endzeitpunkt der Simulation ist $t_{\text{Ende}} = 0.05 \text{ s}$.

Abbildung 4.4 zeigt den Zeitverlauf der Koppelgrößen für den nichtlinearen Einmassenschwinger.

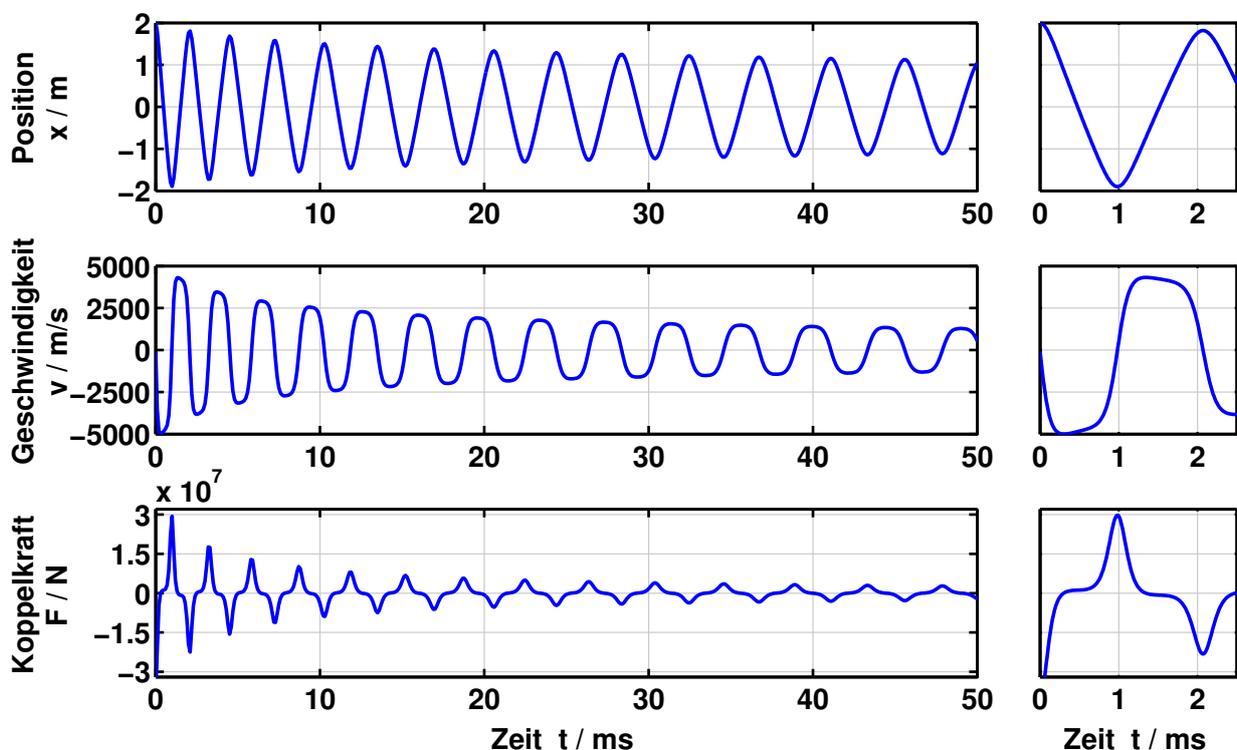


Abbildung 4.4: Zeitverlauf der Koppelgrößen für den nichtlinearen Einmassenschwinger. Links: Kompletter Verlauf bis $t = 0.05 \text{ s}$. Rechts: Detaillierter Verlauf bis $t = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

Kopplungstopologie für die dynamisch-statische Solverkopplung des nichtlinearen Einmassenschwingers

Abbildung 4.5 zeigt die Topologie für die Solverkopplung des nichtlinearen Einmassenschwingers. Hierbei besteht das dynamische Subsystem aus einem nichtlinearen Einmassenschwinger (Masse m , Kraft $F_1 \rightarrow \text{Gl. (4.18)}$). Das nichtlineare Kraftgesetz für $F_k \rightarrow \text{Gl. (4.19)}$ wird hingegen in das statische Subsystem ausgelagert. Als Koppelgrößen ergeben sich damit der Weg x und die Geschwindigkeit \dot{x} der Masse m und die im statischen Subsystem berechnete, nichtlineare Koppelkraft F_k . Diese Aufteilung kann als „Weg-Kraft“ Kopplung bezeichnet werden.

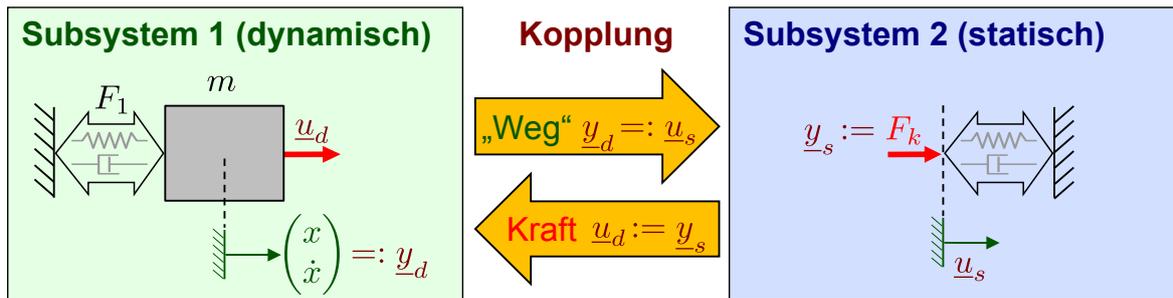


Abbildung 4.5: „Weg-Kraft“ Kopplung für die dynamisch-statische Solverkopplung des nichtlinearen Einmassenschwingers.

Die nichtlinearen Subsystemgleichungen ergeben sich damit wie folgt:

Subsystem 1 (dynamisch):

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \left(-10^5 \operatorname{sgn}(x) |x|^4 - 5 \cdot 10^{-4} \operatorname{sgn}(\dot{x}) |\dot{x}|^2 + u_d \right) \quad (4.21)$$

$$y_{d1} = x =: u_{s1} \quad (4.22)$$

$$y_{d2} = \dot{x} =: u_{s2} \quad (4.23)$$

Subsystem 2 (statisch):

$$0 = F_k - \left(-10^5 \operatorname{sgn}(u_{s1}) (\exp(3 \cdot |u_{s1}|) - 1) - 10^{-5} \operatorname{sgn}(u_{s2}) |u_{s2}|^3 \right) \quad (4.24)$$

$$y_s = F_k =: u_d \quad (4.25)$$

4.4. Analyse der dynamisch-statischen Solverkopplungsverfahren

In diesem Kapitel werden die Solverkopplungsverfahren anhand des nichtlinearen Einmassenschwingers verglichen. Als Subsystemsolver kommen Adams [MSC13] für das dynamische Subsystem und Comsol [COM13] für das statische Subsystem zum Einsatz.

Als erstes Bewertungskriterium wird der numerische Fehler mit dem in Abschnitt 2.5.2 vorgestellten Fehlermaß NRMSE verwendet. Als weiteres Bewertungskriterium wird die numerische Effizienz anhand der Dauer und der notwendigen Anzahl der Aufrufe des statischen Subsystems (Comsol) beurteilt.

4.4.1. Numerische Fehleranalyse der Solverkopplungsverfahren

Für alle Simulationen des nichtlinearen Einmassenschwingers wurde der Adams WSTIFF SI2 Solver mit folgenden Einstellungen eingesetzt: $h_{MKS,max} = 10^{-4}$ s, $h_{MKS,min} = 10^{-11}$ s, $h_{MKS,init} = 10^{-7}$ s, $CORRECTOR = ORIGINAL$, $PATTERN = T:F:F:F:T:F:F:F:T:F^{12}$. Die Adams Fehlertoleranz $e_{MKS} =: tol$ wird variiert, um die Auswirkung der verschiedenen Kopplungsverfahren auf die Konvergenz der Simulationsergebnisse zu untersuchen.

Da der Einmassenschwinger nichtlinear ist, muss eine numerische Referenzlösung verwendet werden. Hierzu dient eine ungekoppelte Adams Lösung mit der Fehlertoleranz $e_{MKS} = 10^{-12}$.

In Abbildung 4.6 wird der globale Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen für folgende Varianten der Solverkopplung dargestellt:

¹²Bei $T = true$ wird die *Jacobi*-Matrix neu berechnet und bei $F = false$ nicht [MSC13].

- Ungekoppelte Simulation des Gesamtsystems in Adams (blau, ×)
- Voll-implizite Solverkopplung von Adams und Comsol (grün, +)
- Semi-implizite Solverkopplung von Adams und Comsol mit Arbeitspunkt (AP) im letzten Korrektorschritt (rot, □)
- Semi-implizite Solverkopplung von Adams und Comsol mit Arbeitspunkt im Prädiktorschritt (lila, ◇)

Als gestrichelte Hilfslinie wurde die eingestellte Adams Fehlertoleranz $e_{MKS} =: tol$ eingezeichnet.

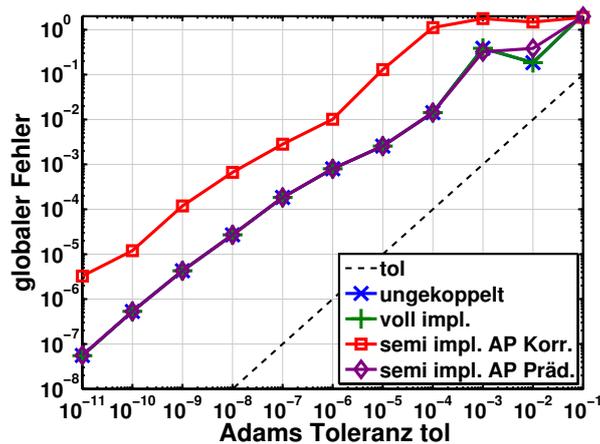


Abbildung 4.6: Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen des nichtlinearen Einmassenschwingers für die ungekoppelte Adams Simulation und die verschiedenen Solverkopplungsverfahren.

Anhand des nichtlinearen Einmassenschwingers ist für den Fehler der Solverkopplungsverfahren im Vergleich zu der ungekoppelten Adams Simulation in Abbildung 4.6 folgendes zu beobachten:

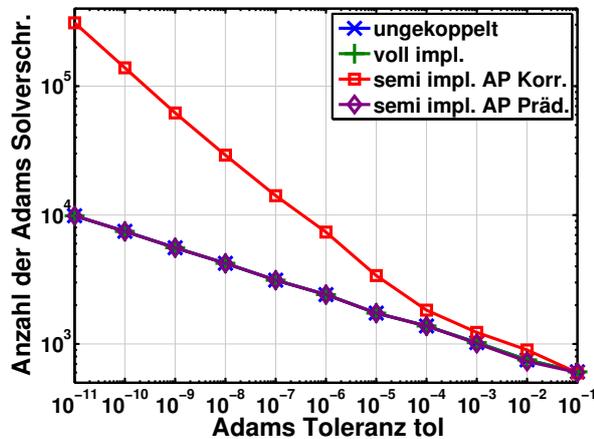
- Bei allen Verfahren wird der globale Fehler mit Herabsetzen der Adams Fehlertoleranz tol kleiner. Ab ca. $tol \leq 10^{-4}$ ist ungefähr eine proportionale Abnahme zu beobachten.
- Der globale Fehler ist für Adams Fehlertoleranzen $tol \leq 10^{-3}$ bei der ungekoppelten Adams Simulation, der voll-impliziten Solverkopplung und der semi-impliziten Solverkopplung mit Arbeitspunkt im Prädiktor nahezu identisch.
(Die Linien: blau ×, grün + und lila ◇ liegen praktisch übereinander.)
- Der globale Fehler des semi-impliziten Solverkopplungsverfahrens mit Arbeitspunkt im letzten Korrektorschritt ist ca. 1-2 Zehnerpotenzen größer als bei den anderen Simulationen.

Diese Ergebnisse sind höchstwahrscheinlich nicht zu verallgemeinern, sondern auf das Modell des nichtlinearen Einmassenschwingers einzuschränken, siehe Fazit 4.4.3.

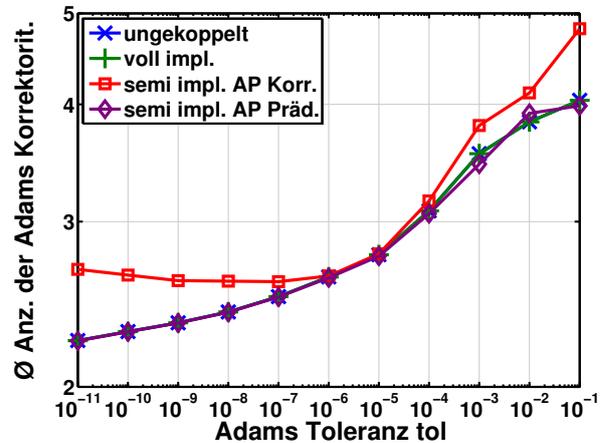
4.4.2. Analyse der numerischen Effizienz der Solverkopplungsverfahren

Die Dauer der gekoppelten Simulation wird sowohl bei dem nichtlinearen Einmassenschwinger als auch in der Anwendung Rotor mit Gleitlager (\rightarrow 5.1) hauptsächlich durch die Anzahl der Aufrufe des statischen Subsystems (Comsol) bestimmt. Diese ist allerdings abhängig von der Anzahl der Schritte des dynamischen Subsystemsolvers (Adams) und ggf. von der Anzahl der Korrekturiterationen.

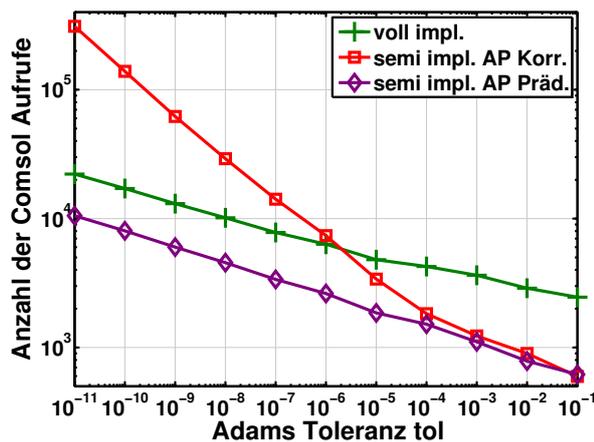
Daher ist in Abbildung 4.7 (a) die Anzahl der Adams Solverschritte, (b) die durchschnittliche Anzahl der Adams Korrekturiterationen, (c) die Anzahl der Comsol Aufrufe und (d) die Dauer der Simulationen des nichtlinearen Einmassenschwingers mit dem ungekoppelten Adams Solver und den verschiedenen Solverkopplungsverfahren dargestellt.



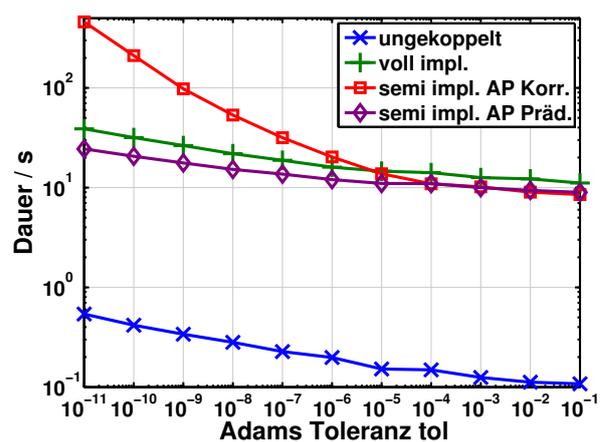
(a) Anzahl der (erfolgreichen) Adams Solverschritte.



(b) Durchschnittliche Anzahl der Adams Korrekturiterationen.



(c) Anzahl der Comsol Aufrufe.



(d) Dauer der gekoppelten Simulation in Sekunden.

Abbildung 4.7: Größen zur Beurteilung der Effizienz der Simulation des nichtlinearen Einmassenschwingers mit dem ungekoppelten Adams Solver und den verschiedenen Solverkopplungsverfahren. Simulation bis $t_{Ende} = 0.05$ s.

In den Unterabbildungen von Abbildung 4.7 ist folgendes zu sehen:

- (a) und (b): Die Anzahl der Adams Solverschritte und der Korrekturiterationen sind für die ungekoppelte Adams Simulation (blau, \times), die voll-implizite Solverkopplung (grün, $+$) und die semi-implizite Solverkopplung mit Arbeitspunkt im Prädiktor (lila, \diamond) nahezu identisch. Im Vergleich dazu ist bei dem semi-impliziten Verfahren mit Arbeitspunkt im letzten Korrektorschritt (rot, \square), sowohl die Anzahl der Adams Solverschritte, als auch der Korrekturiterationen (bis auf bei $tol = 10^{-6}$ und $tol = 10^{-5}$) deutlich höher.
- (a): Die Anzahl der Solverschritte nimmt mit kleiner werdender Adams Toleranz erwartungsgemäß zu. Bei dem semi-impliziten Verfahren mit Arbeitspunkt im letzten Korrektorschritt ist die Zunahme der Schrittzahl deutlich stärker als bei den anderen Verfahren.

- (b): Die durchschnittliche Anzahl der Korrekturiterationen nimmt mit kleiner werdender Adams Toleranz (und damit mit steigender Anzahl an Solverschritten) ab.
Bei dem semi-impliziten Verfahren mit Arbeitspunkt im letzten Korrektorschritt nimmt sie hingegen ab $tol \leq 10^{-7}$ wieder leicht zu.
- (c): Die Anzahl der Comsol Aufrufe ergibt sich entsprechend der Verfahren:
 - Implizites Verfahren: Anzahl der Solverschritte · Anzahl der Korrekturiterationen im jeweiligen Schritt (inkl. Schrittwiederholungen).
 - Semi-implizites Verfahren mit AP Korrektor: Anzahl der Solverschritte.
 - Semi-implizites Verfahren mit AP Prädiktor: Anzahl der Solverschritte + Schrittwiederholungen.

Dies kann anhand von Abbildung (a), (b) und (c) bestätigt werden, wobei hier die Anzahl der Schrittwiederholungen im Vergleich zu der Anzahl der erfolgreichen Solverschritte vernachlässigbar (< 10) ist (nicht dargestellt).
- (d): Der Verlauf der Dauer entspricht ca. dem der Anzahl der Comsol Aufrufe.
Die ungekoppelte Adams Simulation ist wesentlich schneller, als die gekoppelten Varianten.

Wie auch bei der numerischen Fehleranalyse im vorhergehenden Abschnitt sind diese Ergebnisse höchstwahrscheinlich nicht zu verallgemeinern, sondern auf das Modell des nichtlinearen Einmassenschwingers einzuschränken, siehe Fazit 4.4.3.

4.4.3. Fazit für die Analyse der Solverkopplungsverfahren

Der für die Analyse als Testmodell genutzte nichtlineare Einmassenschwinger ist willkürlich gewählt. Es wurden Variationen der Kraftgesetze und Parameter durchgeführt (hier nicht dargestellt), welche auf dieselben Aussagen bezüglich Fehler und Effizienz geführt haben. Trotzdem können die Ergebnisse nicht ohne weiteres verallgemeinert werden. Insbesondere die Eignung der beiden Varianten der semi-impliziten Solverkopplung hängt von den Submodellen, dem dynamischen Solver und dessen Einstellungen ab. Hierbei muss die Frage gestellt werden, wie groß der zusätzliche Fehler durch die Linearisierung ist. Dieser hängt einerseits von der Nichtlinearität der Subsysteme ab, aber auch von der Wahl des Arbeitspunktes. Hier nicht näher ausgeführte Beobachtungen am nichtlinearen Einmassenschwinger und auch anhand der folgenden Anwendung des Rotors mit Gleitlager zeigen, dass es vom letzten Korrektorschritt zu dem Prädiktorwert des folgenden Zeitschrittes eine deutliche Änderung der Systemzustände gibt. Vom Prädiktorwert bis zum konvergierten Korrektorwert desselben Zeitschrittes hingegen ist die Änderung der Systemzustände in den hier betrachteten Systemen eher klein. Ebenso wird bei dem semi-impliziten Verfahren mit Arbeitspunkt im Prädiktorschritt für den darauf folgenden ersten Korrektorschritt immer der korrekte Eingangswert zur Verfügung gestellt, da sich dieser im Arbeitspunkt der Linearisierung befindet. Dies kann erklären, warum das semi-implizite Verfahren mit Arbeitspunkt im Prädiktorschritt hier einen erheblich kleineren Fehler liefert, als das Verfahren mit Arbeitspunkt im letzten Korrektorschritt. Es ist allerdings denkbar, dass Prädiktorwerte durch die Extrapolation sehr schlecht sind und stark „korrigiert“ werden müssen. In diesem Fall würde das semi-implizite Verfahren mit Arbeitspunkt im letzten Korrektorschritt bessere Ergebnisse liefern. In jedem Fall

sollten die Ergebnisse einer Solverkopplung mit den semi-impliziten Verfahren zunächst mit den Ergebnissen einer voll-impliziten Solverkopplung überprüft werden.

Für den nichtlinearen Einmassenschwinger kann festgehalten werden, dass das semi-implizite Verfahren mit Arbeitspunkt im Prädiktorschritt praktisch den gleichen Fehler wie das voll-implizite Verfahren liefert und dabei deutlich schneller ist. Das semi-implizite Verfahren mit Arbeitspunkt im letzten Korrektorschritt hingegen liefert sowohl schlechtere Ergebnisse, als auch - aufgrund der gestiegenen Anzahl der Adams Solverschritte - eine wesentlich schlechtere Effizienz im Vergleich zu den anderen Verfahren.

5. Solverkopplung komplexer multiphysikalischer Systeme

5.1. MKS - FEM (quasi-statisch), Anwendung: Rotor mit Gleitlager

Die Kopplung eines starren Rotors mit einem Gleitlager ist ein erster Schritt zur Simulation komplexer Rotor/Lager-Systeme [Sch09b, Sch10b, BS10b, Boy11, BS11a, Bus12, NBS⁺15b, NBS⁺15a]. Zur näheren Untersuchung der Solverkopplung ist das Modell eines starren Rotors mit einem hydrodynamischen Gleitlager allerdings ausreichend.

5.1.1. MKS-Subsystem: Rotor

Das MKS-Subsystem besteht aus einem starren Rotor mit einer Unwucht. Abbildung 5.1 zeigt Schnittdarstellungen des Rotors mit der Lagerschale. Der Rotor dreht sich um die z -Achse und kann Bewegungen in der x, y -Ebene durchführen. Ein Verkippen des Rotors im Lager und axiale Bewegungen werden durch entsprechende Zwangsbedingungen verhindert. Am Rotor liegt die Schwerkraft in negativer y -Richtung an. Es wird eine Hochlaufsimulation durch kinematische Vorgabe der Drehzahl durchgeführt. Für die Modellierung und Simulation des MKS-Subsystems kommt, wie bisher auch, MSC Adams [MSC13] zum Einsatz. Die Subsystemgleichungen sind daher differential-algebraische Gleichungen in stabilisierter Index 2 Formulierung, siehe Abschnitt 3.1.1.

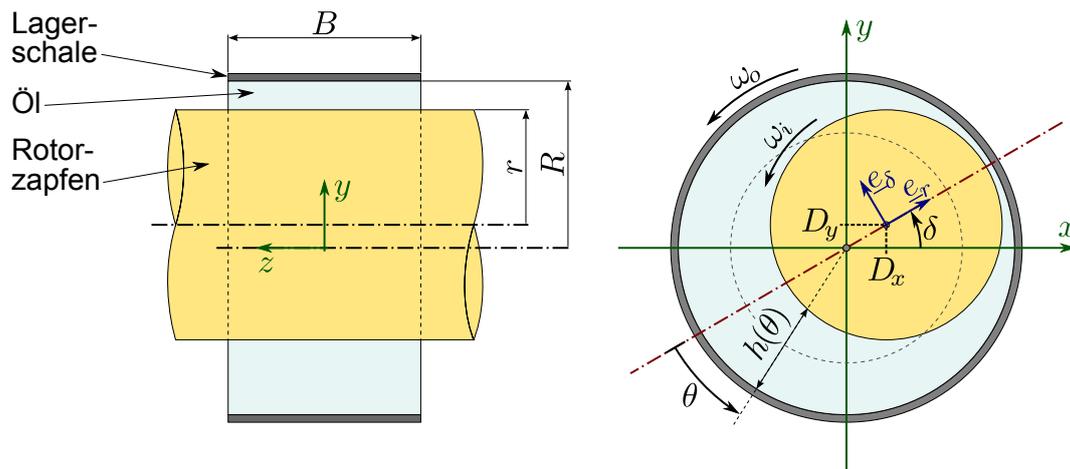


Abbildung 5.1: Schnittdarstellungen des Rotors mit der Lagerschale.

Die Ausgangsgrößen des MKS-Subsystems sind folgende normierten Größen [Boy11, NBS⁺15b, NBS⁺15a]:

dimensionslose Exzentrizität:
$$\varepsilon = \frac{1}{R-r} \sqrt{D_x^2 + D_y^2} \quad (5.1)$$

dimensionslose Geschw. in radialer Richtung:
$$\varepsilon' = \frac{D_x \dot{D}_x + D_y \dot{D}_y}{(R-r)^2 \varepsilon (\omega_i + \omega_o)} \quad (5.2)$$

dimensionslose Geschw. in tangentialer Richtung:
$$\delta' = \frac{D_x \dot{D}_y - D_y \dot{D}_x}{(R-r)^2 \varepsilon^2 (\omega_i + \omega_o)} \quad (5.3)$$

Für R, r, D_x, D_y, ω_i und ω_o , siehe Abbildung 5.1, wobei hier die Lagerschale fest steht und damit $\omega_o = 0$ ist.

Die Eingänge des MKS-Subsystems sind die vom hydrodynamischen Schmierfilm erzeugten Lagerkräfte auf die Rotormitte.

5.1.2. FEM-Subsystem: Gleitlager

Das quasi-statische FEM-Subsystem besteht aus dem Schmierfilm zwischen Rotorzapfen und Lagerschale, in dem aufgrund der Rotorbewegung ein hydrodynamischer Druckaufbau stattfindet. Die vollumschlossene, kreiszylindrische Lagerschale, sowie der Rotorzapfen, werden hier als starr angenommen.

Die Berechnung des Druckes im Schmierfilm erfolgt mittels der *Reynolds*-Gleichung [LS78, Boy11, NBS⁺15b]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(H^3 \frac{\partial \bar{p}(\bar{z}, \theta)}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{B} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(H^3 \frac{\partial \bar{p}(\bar{z}, \theta)}{\partial \bar{z}} \right) = \varepsilon (2\delta' - 1) \sin(\theta) + 2\varepsilon' \cos(\theta) \quad (5.4)$$

Hierin bedeuten:

$$\text{dimensionsloser Druck:} \quad \bar{p}(\bar{z}, \theta) = \left(\frac{R-r}{R} \right)^2 \frac{p(\bar{z}, \theta)}{6\eta(\omega_i + \omega_o)} \quad (5.5)$$

$$\text{dimensionslose Breitenkoordinate:} \quad \bar{z} = \frac{z}{B} \quad (5.6)$$

$$\text{Umfangskoordinate:} \quad \theta \quad (5.7)$$

$$\text{dimensionslose Spaltfunktion:} \quad H(\theta) = 1 + \varepsilon \cos(\theta) \quad (5.8)$$

$$\text{dynamische Viskosität des Öls:} \quad \eta \quad (\text{hier: } \eta = \text{konstant}) \quad (5.9)$$

Um die *Reynolds*-Gleichung lösen zu können, müssen Randbedingungen (RB) festgelegt werden [LS78, Boy11, BS11a, Bus12, NBS⁺15a]:

$$\text{Umgebungsdruck am Lagerrand:} \quad \bar{p}(\bar{z} = -\frac{1}{2}, \theta) = \bar{p}(\bar{z} = +\frac{1}{2}, \theta) = 0 \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Lager geschlossen (periodische RB):} \quad & \bar{p}(\bar{z}, \theta = 0) = \bar{p}(\bar{z}, \theta = 2\pi) \\ & \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta}(\bar{z}, \theta = 0) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta}(\bar{z}, \theta = 2\pi) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Da die Lösung nun auch negative Drücke aufweist, das Schmieröl allerdings keine Zugkräfte aufnehmen kann, werden diese mit den *Gümbel*-Randbedingungen abgeschnitten [LS78, Boy11, NBS⁺15a]:

$$\text{Gümbel-Randbedingungen:} \quad \bar{p}(\bar{z}, \theta) = 0, \quad \text{falls } \bar{p}(\bar{z}, \theta) < 0 \quad (5.12)$$

Die Lösung der *Reynolds*-Gleichung ist nun eine dimensionslose Druckverteilung $\bar{p}(\bar{z}, \theta)$ im Schmierfilm des Gleitlagers, siehe Abbildung 5.2.

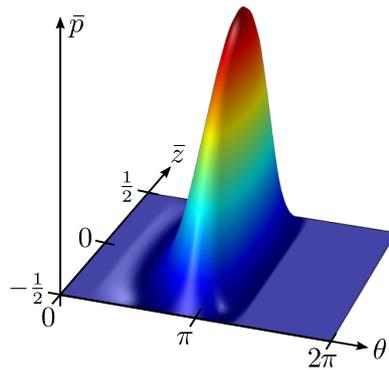


Abbildung 5.2: Beispiel einer Druckverteilung im Schmierfilm des Gleitlagers.

Aus dieser Druckverteilung lässt sich nun die resultierende, dimensionslose Tragkraft des Lagers berechnen (der Anteil der Wandschubspannung wird vernachlässigt [Böh00, S.184]):

$$\text{Radialkomponente:} \quad \bar{F}_r = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{p}(\bar{z}, \theta) \, d\bar{z} \cos(\theta) \, d\theta \quad (5.13)$$

$$\text{Tangentialkomponente:} \quad \bar{F}_\delta = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{p}(\bar{z}, \theta) \, d\bar{z} \sin(\theta) \, d\theta \quad (5.14)$$

Diese dimensionslosen Kraftkomponenten dienen als Ausgang des quasi-statischen FEM-Submodells.

Da bei dem hier eingesetzten Modell der Rotor kinematisch angetrieben wird und die Lagerschale fest steht, kann auf eine Berechnung des Reibmomentes verzichtet werden. Dieses kann jedoch durch Integration der Scherspannung berücksichtigt werden [Sch10b, BS11a, NBS⁺15b, NBS⁺15a].

5.1.3. Kopplung des Rotors mit dem Gleitlager

Bei der Kopplung des Rotors mit dem Gleitlager werden aus den kinematischen Größen ε , ε' , δ' des MKS-Subsystems in dem quasi-statischen FEM-Subsystem die dimensionslosen Lagerkraftkomponenten \bar{F}_r und \bar{F}_δ berechnet, siehe Abbildung 5.3.

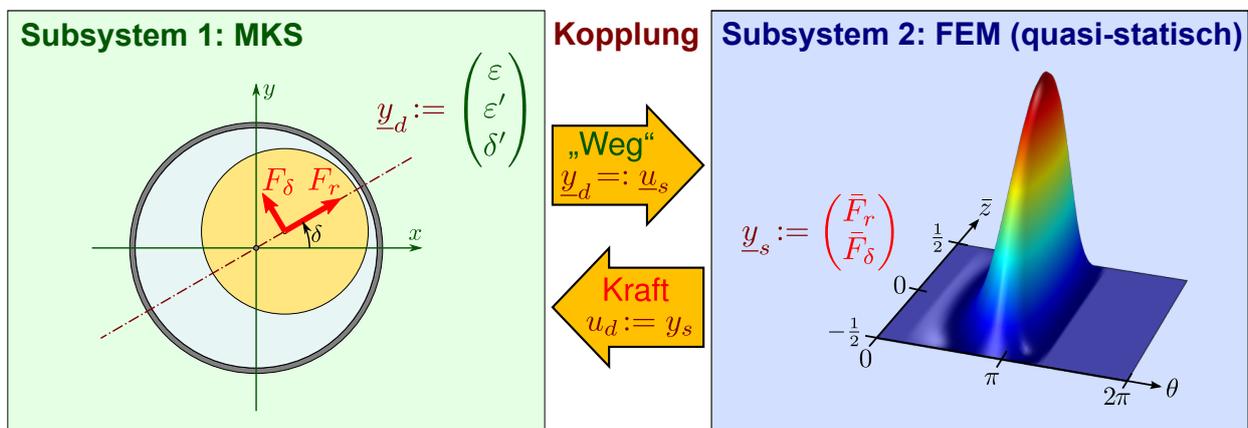


Abbildung 5.3: Kopplung des Rotors mit dem Gleitlager.

Diese dimensionslosen Kraftkomponenten müssen dann noch in dimensionsbehaftete Lagerkräfte F_r und F_δ umgerechnet werden:

$$F_i = \underbrace{R}_{\theta \rightarrow R\theta} \underbrace{B}_{\bar{z} \rightarrow z} \underbrace{\frac{6\eta(\omega_i + \omega_o)R^2}{(R-r)^2}}_{\bar{p} \rightarrow p} \bar{F}_i, \quad i = r, \delta \quad (5.15)$$

Ebenfalls ist noch eine Koordinatentransformation von dem mitrotierenden r, δ -Koordinatensystem in das raumfeste x, y -Koordinatensystem des MKS-Subsystems über den bekannten Winkel $\delta = \arctan(D_y/D_x)$ notwendig:

$$F_x = \cos(\delta) F_r - \sin(\delta) F_\delta, \quad F_y = \sin(\delta) F_r + \cos(\delta) F_\delta \quad (5.16)$$

Neben der eigentlichen Kraftberechnung müssen für die Solverkopplungsverfahren (\rightarrow 4.2.3) auch die partiellen Ableitungen

$$\left(\frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \bar{F}_\delta}{\partial \varepsilon} \right), \quad \left(\frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \varepsilon'}, \frac{\partial \bar{F}_\delta}{\partial \varepsilon'} \right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \delta'}, \frac{\partial \bar{F}_\delta}{\partial \delta'} \right)$$

berechnet werden. Dies geschieht numerisch mittels Differenzenquotient (\rightarrow Gl. (4.7)). Es sind daher weitere Aufrufe des quasi-statischen FEM-Subsystems des Gleitlagers mit gestörten Ausgangsgrößen $\varepsilon + \Delta_\varepsilon$, $\varepsilon' + \Delta_{\varepsilon'}$ und $\delta' + \Delta_{\delta'}$ notwendig. Da diese Aufrufe parallel erfolgen, werden drei weitere Instanzen des statischen Solvers (Comsol) benötigt, siehe auch Abb. D.3.

Die Berechnung der partiellen Ableitungen von F_x und F_y aus \bar{F}_r und \bar{F}_δ geschieht mittels der Kettenregel (\rightarrow Gl. (4.8)).

5.1.4. Vergleich der Solverkopplungsverfahren am Modell des Rotors mit Gleitlager

Die Betrachtung der Koppelgrößen ε' (\rightarrow Gl. (5.2)) und δ' (\rightarrow Gl. (5.3)) zeigt, dass diese für $\varepsilon = 0$ bzw. $\omega_i = 0$ singulär werden. Dies ist dann der Fall, wenn Rotorachse und Lagerachse aufeinanderliegen ($D_x = D_y = 0$) bzw. wenn sich der Rotor nicht dreht ($\omega_i = 0$). Diese Singularitäten werden zwar im Modell abgefangen, allerdings steigt der numerische Fehler in den Koppelgrößen in der Nähe einer Singularität deutlich an. Daher ist der Vergleich von Lösungen mit unterschiedlichen Solverkopplungsverfahren und/oder Solvareinstellungen im Bereich $\varepsilon = 0$ und/oder $\omega_i = 0$ und ggf. auch danach, schwierig. Aus diesem Grund wird für die Konvergenzbetrachtungen nur eine relativ kurze Simulationszeit gewählt. Abbildung 5.4 zeigt die Verläufe der Koppelgrößen von $t = 0$ bis 50 ms. In dieser Simulationszeit ist zu Beginn ($t = 0$), bei ca. $t = 40$ ms und bei ca. $t = 46$ ms die Exzentrizität nahe Null ($\varepsilon \approx 0$). Die abgemilderten Singularitäten zeigen sich hierbei dadurch, dass ε' vergleichsweise schnell das Vorzeichen wechselt und δ' in Richtung $\pm\infty$ strebt. Daher wird für die Berechnung des globalen Fehlers (\rightarrow Abb. 5.5) nur der Simulationszeitraum von $t = 2$ ms bis 39 ms berücksichtigt (vertikale rote Hilfslinien in Abb. 5.4).

Diese Beobachtungen haben nichts mit nichtlinearen, rotordynamischen Effekten zu tun, welche in Verbindung mit Gleitlagern auftreten (z.B. *oil whirl/whip*) [BHS⁺08, Sch09a].

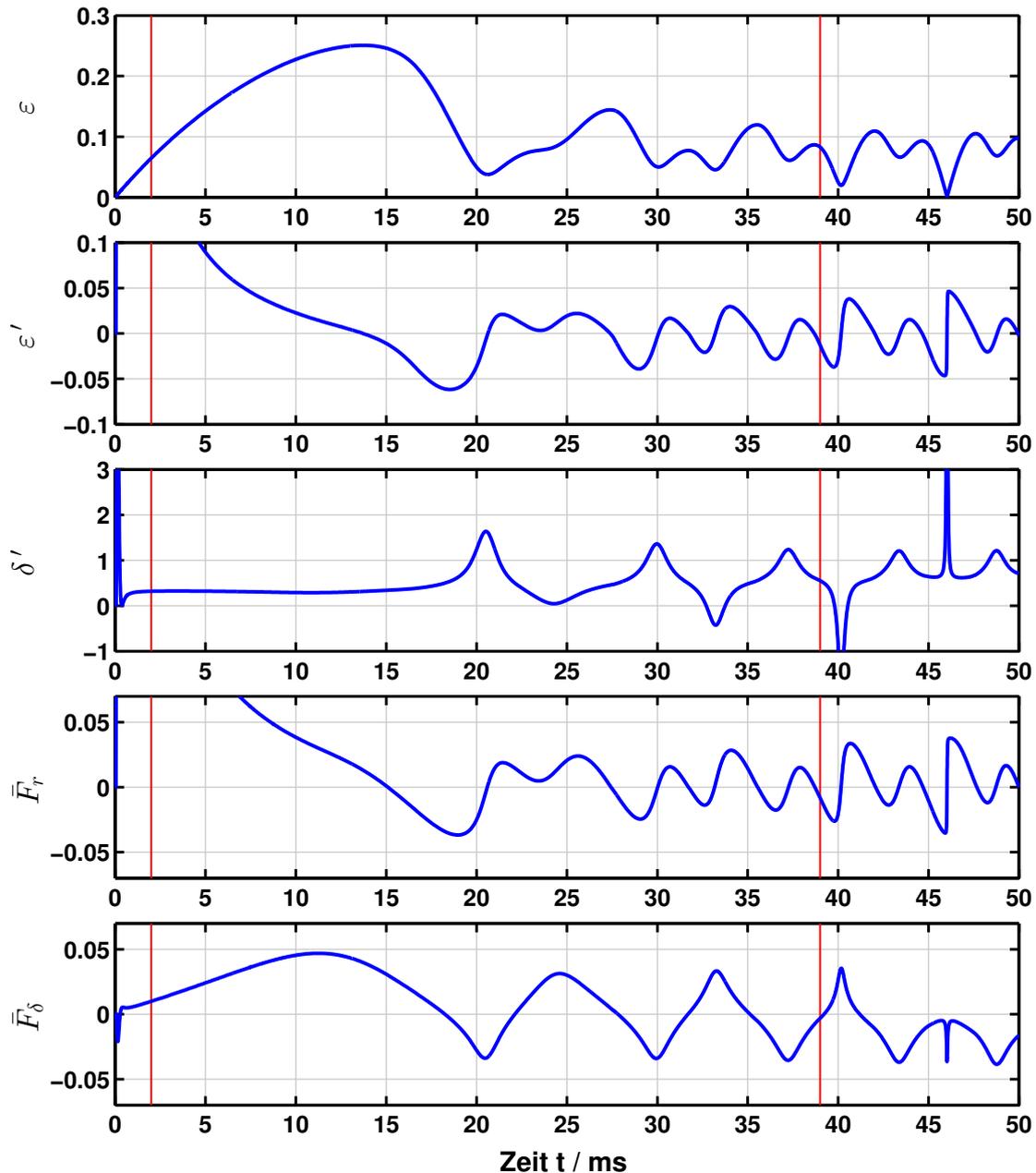


Abbildung 5.4: Zeitverlauf der Koppelgrößen des Rotors mit Gleitlager.

Abbildung 5.5 zeigt den globalen Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen des Rotors mit Gleitlager. Es wird die Adams Fehlertoleranz $e_{MKS} =: tol$ variiert, um die Auswirkung der verschiedenen Kopplungsverfahren auf die Konvergenz der Simulationsergebnisse zu untersuchen.

Als Referenzlösung dient eine gekoppelte Simulation mit dem voll-impliziten Solverkopplungsverfahren und dem Adams WSTIFF SI2 Solver mit folgenden Einstellungen: $e_{MKS} = 10^{-10}$, $h_{MKS,max} = 10^{-3}ms$, $h_{MKS,min} = 10^{-8}ms$, $h_{MKS,init} = 10^{-3}ms$, $CORRECTOR = ORIGINAL$, $PATTERN = T:F:F:F:T:F:F:F:T:F$.

Anhand von Abbildung 5.5 ist folgendes zu beobachten:

- Alle Solverkopplungsverfahren liefern bei kleiner werdender Adams Toleranz einen kleineren globalen Fehler.

- Das Abknicken des globalen Fehlers ab ca. $tol \leq 10^{-6}$ ist wahrscheinlich auf den Fehler der Referenzlösung zurückzuführen.
- Der globale Fehler der voll-impliziten Solverkopplung ist praktisch gleich dem des semi-impliziten Verfahrens mit Arbeitspunkt im Prädiktorschritt (grün + ist hinter lila \diamond).
- Das semi-implizite Verfahren mit Arbeitspunkt im letzten Korrektorschritt (rot mit \square) zeigt einen etwas größeren Fehler als die anderen Verfahren.

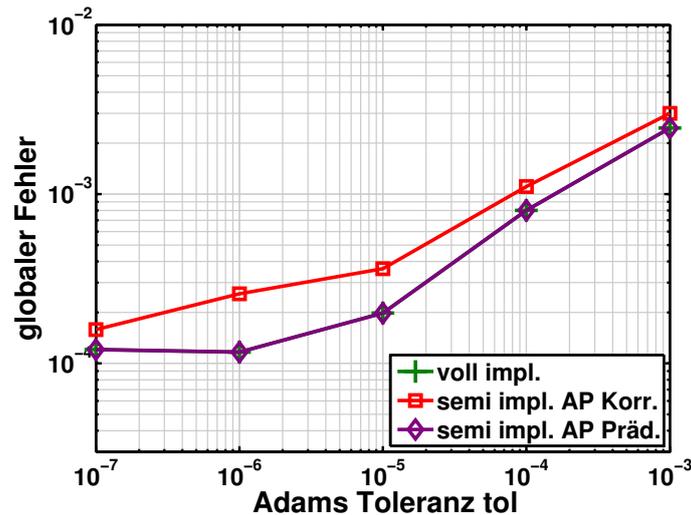


Abbildung 5.5: Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen des Rotors mit Gleitlager für die verschiedenen Solverkopplungsverfahren.

Simulationszeit für die Fehlerberechnung: $2 \text{ ms} \leq t \leq 39 \text{ ms}$.

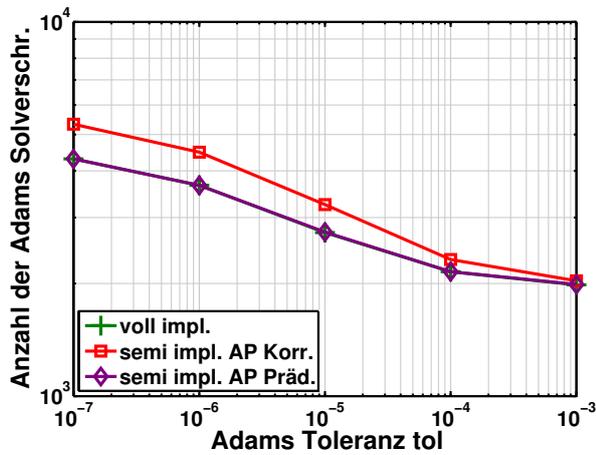
Solvereinstellungen: Adams WSTIFF SI2 $e_{MKS} = tol$, $h_{MKS,max} = 10^{-1} \text{ ms}$, $h_{MKS,min} = 10^{-8} \text{ ms}$, $h_{MKS,init} = 10^{-3} \text{ ms}$, $CORRECTOR = ORIGINAL$, $PATTERN = T:F:F:F:T:F:F:F:T:F$.

Abbildung 5.6 zeigt (a) die Anzahl der erfolgreichen Adams Solverschritte, (b) die durchschnittliche Anzahl der Adams Korrektoriterationen, (c) die Anzahl der Comsol Aufrufe und (d) die Dauer der Simulationen des Rotors mit Gleitlager mit den verschiedenen Solverkopplungsverfahren.

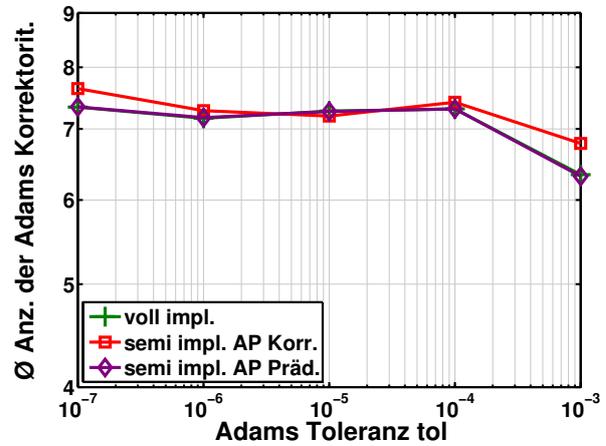
In den Unterabbildungen von Abbildung 5.6 ist folgendes zu beobachten:

- (a) und (b): Die Anzahl der erfolgreichen Adams Solverschritte und der Korrektoriterationen sind für die voll-implizite Solverkopplung und die semi-implizite Solverkopplung mit Arbeitspunkt im Prädiktorschritt praktisch identisch (grün + ist hinter lila \diamond). Im Vergleich dazu ist bei dem semi-impliziten Verfahren mit Arbeitspunkt im letzten Korrektorschritt (rot \square), die Anzahl der erfolgreichen Adams Solverschritte (bis auf bei $tol = 10^{-3}$) höher. Die durchschnittliche Anzahl der Korrektoriterationen ist hingegen ähnlich.
- (b): Es werden durchschnittlich 6-8 Adams Korrektoriterationen benötigt. Der Einfluss der Adams Toleranz hierauf ist gering.
- (c): Die Anzahl der Comsol Aufrufe ist bei der voll-impliziten Solverkopplung (grün +) erwartungsgemäß deutlich höher als bei den beiden semi-impliziten Verfahren.
- (d): Der Verlauf der Dauer entspricht ca. dem der Anzahl der Comsol Aufrufe.

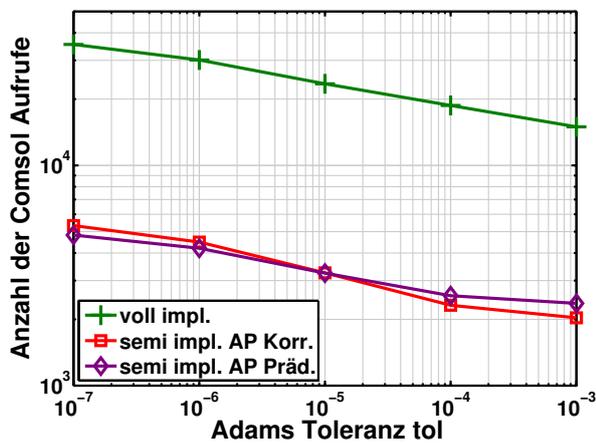
Die voll-implizite Solverkopplung benötigt ca. 4x länger als die beiden semi-impliziten Verfahren.



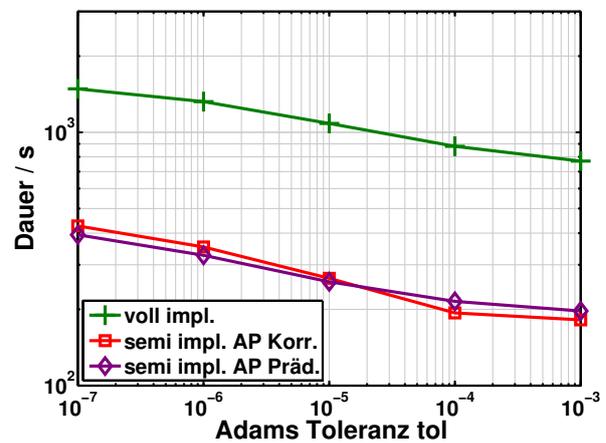
(a) Anzahl der erfolgreichen Adams Solverschritte.



(b) Durchschnittliche Anzahl der Adams Korrekturiterationen.



(c) Anzahl der Consol Aufrufe.



(d) Dauer der gekoppelten Simulation in Sekunden.

Abbildung 5.6: Größen zur Beurteilung der Effizienz der Simulation des Rotors mit Gleitlager mit den verschiedenen Solverkopplungsverfahren. Simulation bis $t_{Ende} = 50$ ms.

Solvereinstellungen: Adams WSTIFF SI2 $e_{MKS} = tol$, $h_{MKS,max} = 10^{-1}$ ms, $h_{MKS,min} = 10^{-8}$ ms, $h_{MKS,init} = 10^{-3}$ ms, $CORRECTOR = ORIGINAL$, $PATTERN = T:F:F:F:T:F:F:F:T:F$.

Anmerkung:

Für die in Abbildung 5.6 ausgewerteten Simulationen wurde eine vergleichsweise große maximale Adams Schrittweite von $h_{MKS,max} = 10^{-1}$ ms gewählt. Dies ist sinnvoll, da bei einem kleineren $h_{MKS,max}$ die variable Schrittweite oft nach oben eingeschränkt wäre und damit z.B. die Aussagen über die Anzahl der Solverschritte verfälscht wären.

Tabelle 5.1 zeigt nun einen Vergleich von Simulationen mit verschiedenen maximalen Adams Schrittweiten $h_{MKS,max}$. Hierbei ist zu beobachten, dass bei größer werdendem $h_{MKS,max}$ die Anzahl der Schrittwiederholungen deutlich steigt. Die Anzahl der erfolgreichen Schritte hingegen nimmt zunächst ab, steigt dann aber wieder an. Dies führt dazu, dass bei $h_{MKS,max} = 2 \cdot 10^{-2}$ ms die Rechenzeit deutlich geringer ist, als bei den anderen getesteten Einstellungen für $h_{MKS,max}$.

Maximale Adams Schrittweite $h_{MKS,max}$	10^{-2} ms	$2 \cdot 10^{-2}$ ms	$3 \cdot 10^{-2}$ ms	10^{-1} ms
Anzahl der RHS-Aufrufe	25606	24497	27890	30151
Anzahl der erfolgreichen Adams Solverschr.	5037	3186	3596	3657
Anzahl der Adams Schrittwiederholungen	6	146	327	546
Ø Anzahl der Adams Korrektoriterationen	5.1	7.3	7.1	7.2
Dauer	396 s	261 s	303 s	326 s

Tabelle 5.1: Vergleich von Simulationen mit unterschiedlicher maximaler Adams Schrittweite $h_{MKS,max}$. Semi-implizites Verfahren mit Arbeitspunkt im Prädiktor. Simulation bis $t_{Ende} = 50$ ms. Adams Fehlertoleranz $e_{MKS} = 10^{-6}$. Restliche Solvareinstellungen wie in Abb. 5.6.

Dieser Vergleich zeigt, dass bei dem Einsatz der Solverkopplung durch die vergleichsweise hohe Rechenzeit des statischen Subsystems die Wahl der Einstellungen des dynamischen Subsystemsolvers eine noch höhere Bedeutung hat, als bei einer ungekoppelten Simulation. Gegebenenfalls können durch günstige Wahl von $h_{MKS,max}$ (aber auch e_{MKS}) eine geringere Anzahl an Solverschritten, Schrittwiederholungen und/oder Korrektoriterationen bei wahrscheinlich ähnlicher Ergebnisgüte erreicht werden, was zu einer geringeren Rechenzeit führt.

5.1.5. Fazit für die Solverkopplung des Rotors mit Gleitlager

Durch die Solverkopplung lassen sich hydrodynamische Gleitlagerkräfte durch numerische Lösung der *Reynolds*-Gleichung in rotordynamische (MKS) Modelle einbringen. Im Gegensatz zu häufig für einfache Lagergeometrien erfolgreich eingesetzte Näherungsmethoden (Kennfeldmethoden, Kurzlagertheorie, ... [LS78, Boy11]) hat die Solverkopplung den Vorteil, dass auch komplexe Lagergeometrien (Ölzuführnuten [NBS⁺15b, NBS⁺15a], Bohrungen, Taschen, Keile, ...) und zusätzliche Fragestellungen (z.B. Schiefstellung des Zapfens in der Lagerschale [Bus12], Temperatureffekte, massenerhaltende Kavitation, ...) bearbeitet werden können. Der Nachteil der Solverkopplung liegt in der deutlich höheren Rechenzeit für die Lösung der *Reynolds*-Gleichung. Dieser Nachteil wird durch die semi-impliziten Solverkopplungsverfahren deutlich abgemildert.

Für den Vergleich der Solverkopplungsverfahren kann festgehalten werden, dass auch bei dem Modell des Rotors mit Gleitlager das semi-implizite Verfahren mit Arbeitspunkt im Prädiktorschritt keine Nachteile (praktisch gleicher Fehler, gleiche Anzahl an Solverschritten und Korrektoriterationen) gegenüber der voll-impliziten Kopplung hat. Demgegenüber steht ein klarer Vorteil durch die wesentlich (hier ca. 1/4) geringere Rechenzeit.

Das semi-implizite Verfahren mit Arbeitspunkt im letzten Korrektorschritt hingegen liefert bei dem Rotor mit Gleitlager einen höheren Fehler als die beiden anderen betrachteten Solverkopplungsverfahren. Ein starker Anstieg der Anzahl der Solverschritte, wie er bei dem nichtlinearen Einmassenschwinger zu beobachten war, ist allerdings bei dem Modell des Rotors mit Gleitlager nicht zu sehen.

Fazit

6. Ergebnisse und Diskussion

Die Co-Simulation und die dynamisch-statische Solverkopplung sind grundsätzlich verschieden, deshalb werden auch die Ergebnisse dieser zwei Kopplungsvarianten getrennt voneinander diskutiert.

6.1. Co-Simulation

In Abschnitt 2.6 wurden numerische Tests zur Analyse expliziter Co-Simulationsverfahren (\rightarrow 2.4) am Testmodell *Zweimassenschwinger* (\rightarrow 2.2) durchgeführt. Hierbei wurden eine selbst implementierte Schnittstelle und selbst implementierte Subsystemsolver verwendet. Es konnten die theoretischen Ergebnisse aus [Arn07, Arn09, Fri11, Bus12, SLL14] hinsichtlich numerischer Stabilität und Fehlerordnung nachvollzogen werden (\rightarrow 2.6.2.4).

Der Einfluss der notwendigen, aber bisher ausgeklammerten Anlaufrechnung auf den Fehler der Co-Simulation (\rightarrow 2.6.2.2) wurde untersucht. Bei der „trivialen“ Anlaufrechnung tritt insbesondere bei dem *Jacobi* Typ mit fester Makroschrittweite ein Anstieg im globalen Fehler für Polynomgrade $p \geq 3$ auf (\rightarrow Abb. 2.19). Diese „Ordnungsreduktion“ kann durch ein *Gauß-Seidel* Typ im Master/Slave Modus als Anlaufrechnung für den *Jacobi* Typ deutlich abgemildert werden (\rightarrow Abb. 2.21).

Inwiefern die Co-Simulation durch den Fehler und die Mikroschrittweiten der Subsystemsolver eingeschränkt wird, wurde in Abschnitt 2.6.2.3 betrachtet. Wie zu erwarten, ist der Fehler der Co-Simulation durch die Fehler der Subsystemsolver nach unten beschränkt (\rightarrow Abb. 2.22). Ebenso ergibt sich die Einschränkung, dass die Makroschrittweite nicht kleiner als die Mikroschrittweiten sein sollte (\rightarrow Abb. 2.23). Ob dies überhaupt zulässig ist und was in diesem Fall passiert, hängt von der Implementierung der Schnittstelle ab.

Die Untersuchungen am Testmodell *Zweimassenschwinger* mit analytischer Referenzlösung und bekanntem Verhalten lassen es nun zu, die Konvergenzplots komplexer Modelle mit kommerziellen Subsystemsolvern (\rightarrow Kap.3) zu interpretieren und Abweichungen vom idealen Konvergenzverhalten zu erklären.

Im Gegensatz zum linearen Zweimassenschwinger können bei der Co-Simulation komplexer Modelle schnell veränderliche oder sogar unstetige Koppelgrößen auftreten, wie es z.B. bei mechanischen Kontakten in den Submodellen der Fall ist. Dies verringert die numerische Stabilität der Kopplung und lässt den Fehler der Co-Simulation ansteigen (\rightarrow Abb. 3.24). Das Auftreten schnell veränderlicher Koppelgrößen führt in den bearbeiteten Beispielen allerdings nicht dazu, dass die expliziten Co-Simulationsverfahren unbrauchbar wären. Die Verfahrensparameter (Polynomgrad und Makroschrittweite) konnten immer problemlos so gewählt werden, dass die Co-Simulation numerisch stabil und mit akzeptablem Fehler durchgeführt werden konnte.

Bei der Kopplung von MKS und FE-Strukturodynamik muss der Wahl der Koppelgrößen besondere Beachtung geschenkt werden, da hierbei leicht eine *Constraint* Kopplung (\rightarrow 2.3.4) erzeugt werden kann. Um trotzdem eine Kraft-Weg Kopplung (\rightarrow 2.3.1) aufbauen zu können, wurden „be-

schleunigungslose“ Verschiebungsrandbedingungen für das FE-Strukturmodell verwendet (→ 3.3.2).

Für die Rechenzeiten kann festgehalten werden, dass bei den in dieser Arbeit durchgeführten Co-Simulationen der komplexen Modelle der Extra- bzw. Interpolationsaufwand und der Overhead der Kommunikation gegenüber den Rechenzeiten der Subsystemsolver vernachlässigbar ist (→ 2.6.3). Auch eine Einschränkung der Mikroschrittweiten durch die Makroschrittweite ist bei den betrachteten Modellen nicht aufgetreten. Bei der Kopplung von MKS und FE-Strukturmodell ist dies bei Verwendung impliziter Solver für die FE-Strukturmodellierung allerdings denkbar.

Bei der Verwendung von Subsystemsolvern mit variabler Schrittweite (wie z.B. dem Adams Solver) hat sich herausgestellt, dass bei Polynomgrad $p = 0$ für die Extrapolation der Koppelgrößen die Mikroschrittzahl und damit die Rechenzeit deutlich ansteigt (→ 2.6.3.3). Dies kann mit der Reaktion der (Mikro-)Schrittweitensteuerung auf starke Unstetigkeiten in den Koppelgrößen für den Fall der konstanten Extrapolation ($p = 0$) erklärt werden. Da die konstante Extrapolation aufgrund der geringen Ordnung ebenfalls einen großen Fehler mit sich bringt, wäre der einzige Grund, diese zu nutzen, die numerische Stabilität der Kopplung. Am Beispiel des Zweimassenschwingers (→ Abb. 2.14) und der MKS - Elektrodynamik Kopplung (→ *Recloser*, Abb. 3.24 (a)) zeigt sich aber sehr deutlich, dass ein kleinerer Polynomgrad nicht unbedingt eine höhere Stabilität nach sich zieht, vgl. [Bus12, SLL14].

Die Parallelisierung durch die Verwendung des *Jacobi* Typs für die Co-Simulation kann für den Fall, dass die Rechenzeiten der beteiligten Subsystemsolver ähnlich sind, eine deutliche Rechenzeiterparnis bedeuten (→ 3.1.4.7, 3.2.4.5). Für den Fall, dass die Rechenzeit von einem der beteiligten Subsystemsolver dominiert wird, geht der Vorteil der Parallelisierung allerdings verloren (→ 3.2.3.5, 3.3.4.4, 3.3.5.3).

Für die Hochdruckpumpe (→ 3.1.4) wurden neben der Co-Simulation auch die ungekoppelten Submodelle simuliert (→ Abb. 3.9). Die jeweiligen Eingangsgrößen wurden dabei durch eine Kennlinie bzw. durch einfache kinematische Gleichungen ersetzt. Der Nachteil hierbei ist, dass diese Approximationen das dynamische Verhalten der Submodelle nicht beinhalten. Daher können dynamische Interaktionen nur mit dem voll gekoppelten Modell erfasst werden.

6.2. Dynamisch-statische Solverkopplung

Die Verfahren bei der dynamisch-statischen Solverkopplung hängen stark von dem verwendeten dynamischen Solver ab. In dieser Arbeit wird ein impliziter Prädiktor/Korrektor Solver eingesetzt. Das voll-implizite Solverkopplungsverfahren (→ 4.2.3.1) liefert - wie zu erwarten - die besten Ergebnisse, benötigt allerdings auch die größte Rechenzeit. Eine deutliche Rechenzeiterparnis kann mit einem semi-impliziten Verfahren (→ 4.2.3.2) erreicht werden. Hierbei hat sich herausgestellt, dass die ursprünglich in [BS10b, Bus12] vorgestellte Variante, in dem letzten Korrektorschritt als Arbeitspunkt zu linearisieren, Nachteile hat, da dies zu einem vergleichsweise großen Verfahrensfehler führt. Im Gegensatz dazu liefert das semi-implizite Verfahren mit Arbeitspunkt im Prädiktorschritt in den betrachteten Modellen einen wesentlich geringeren Fehler, der praktisch dem der voll-impliziten Kopplung entspricht. Dies kann auch anhand des komplexen Modells des Rotors mit Gleitlager (→ 5.1) nachvollzogen werden. In diesem Fall kann die Simulation mit dem semi-impliziten Verfahren und Arbeitspunkt im Prädiktorschritt bei praktisch gleicher Genauigkeit

mit 1/4 der Rechenzeit im Vergleich zu der voll-impliziten Kopplung durchgeführt werden.

Die dynamisch-statische Solverkopplung bietet für das komplexe Modell des Rotors mit Gleitlager deutliche Modellierungsvorteile. Durch die Verwendung eines umfangreichen FE-Programms (Comsol) kann die volle Lösung der *Reynolds*-Gleichung für die Berechnung der Lagerkraft verwendet werden. Ist dieser Vorteil bei dem voll umschlossenen Lager noch gering, so ermöglicht die Kopplung jedoch nun die detaillierte Untersuchung von komplexen Lagergeometrien, Temperatur- und Kavitationseffekten und vielem mehr (→ 5.1.5).

6.3. Fazit

Abschließend ist zu festzuhalten, dass die gekoppelte Simulation viele Vorteile bietet. Bei komplexen multiphysikalischen Modellen liegt der Vorteil im Wesentlichen in der modularen Modellierung. Ein weiterer Vorteil ist die parallele Lösung der Subsysteme unter Verwendung der oft optimierten Subsystemsolver. Die Nachteile der gekoppelten Simulation sind Unsicherheiten bezüglich der numerischen Stabilität und des Verfahrensfehlers der Kopplung. Diese haben sich für die in dieser Arbeit betrachteten Modelle als unproblematisch herausgestellt. Die gekoppelte Simulation hat hier stabile und vertrauenswürdige Ergebnisse geliefert.

Die Einsatzmöglichkeiten der gekoppelten Simulation sind umfangreich, so dass vermutlich in Zukunft der Einsatz der gekoppelten Simulation zunehmen wird. Bieten kommerzielle Programme die Möglichkeit einer Solver-Reinitialisierung, könnten künftig auch verbesserte Methoden für eine Makroschrittweitensteuerung und implizite (semi-implizite) Kopplungsverfahren, im industriellen Umfeld eingesetzt werden. Hierbei kann die relativ neue Schnittstellenspezifikation FMI (→ A.1) den Weg für diese alternativen Möglichkeiten eröffnen.

Anhang

A. Schnittstellen und Beispiele

A.1. Verfügbare Schnittstellen

- Schnittstellenspezifikationen, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, alphabetisch sortiert:
 - FMI for Co-Simulation (Functional Mock-up Interface) [AS09, AAB⁺09, MOD10, BCWS11, SAC12, BOÄ⁺12, ACS13, Vie14, Mod14] <http://functional-mockup-interface.org/>
 - GUSMA (Gekoppelte Unternehmensübergreifende Simulation Mobiler Arbeitsmaschinen zur Virtualisierung der Produktentstehung) [Rüd12] http://www.fast.kit.edu/mobima/288_gusma.php
 - ...
- Übergeordnete Ansätze (*Middleware*), ohne Anspruch auf Vollständigkeit, alphabetisch sortiert:
 - BCVTB (Building Controls Virtual Test Bed) <http://simulationresearch.lbl.gov/bcvtb>
 - CoSimA+ (co-simulation adaptation platform) [ST10, TSB⁺11] <http://publica.fraunhofer.de/documents/N-163099.html>
 - CosiMate <http://site.cosimate.com/>
 - ICOS (Independent Co-Simulation) [BZWB12, BWZH13a, BWZH13b] <http://vif.tugraz.at/products/icos/>
 - MpCCI (Mesh-based parallel Code Coupling Interface) [Fra12, BBD⁺11, BBD⁺12] <http://www.mpcci.de>
 - TISC (TLK Inter Software Connector) [KCL⁺09, KST09] <http://www.tlk-thermo.com/de/softwareprodukte/tisc.html>
 - X-In-The-Loop (XIL) [JHM10, Jus11] http://www.ostfalia.de/cms/de/ivs/X_in_the_Loop
 - ...
- Spezialisierte Schnittstellen, unvollständig, alphabetisch sortiert:
 - DSH $plus$ -STC (Simulation Tool Chain) (DSH $plus$, Matlab/Simulink, Adams, SimPack, LMS Virtual.Lab) [FLU03] <http://www.fluidon.com/index.php?id=277>
 - SIMAT - Co-Simulation (SimPack, Matlab/Simulink) [Dro03] <http://www.simpack.com/mbs-software-product-cace.html>
 - SimulationX Co-Simulation <http://www.iti.de/co-simulation>
 - ...
- Beschreibungssprachen für Modellexport, unvollständig, alphabetisch sortiert:
 - FMI for Model Exchange (Functional Mock-up Interface) [Mod14] <http://functional-mockup-interface.org/>

- Modelica [FE98]
<https://www.modelica.org/>
- S-function (Matlab/Simulink) [Mat12]
- ...

A.2. Beispiele für gekoppelte Modelle

- Stromabnehmer (*pantograph*, MBS, DAE) - Oberleitung (*catenary*, Strukturdynamik, PDE), *Constraint* Kopplung mit *dynamic iteration (waveform relaxation)* [VA99, AS00, AG01, Arn07, Arn10] [AAB⁺09, Fig. 3] [APRP08, PA12]
- Doppelpendel (*double pendulum*), *Constraint* Kopplung [KS00b] [SL14a, SL14c, SL14b]
- Doppelpendel (*double pendulum*), Kopplung durch flexible Gelenke (Feder-Dämpfer Kräfte) [VM11]
- Kurbelschwinge (*slider-crank mechanism*), *Constraint* Kopplung [KS00a] [SL14a, SL14c, SL14b]
- Viertel-Fahrzeugmodell (*quarter car model*), Kraft-Weg Kopplung (und Weg-Weg Kopplung) [Kno02, Kap. 3.1] [Val09, S. 81] [SAC12, ACS13, AHK14]
- Pendel mit Einmassenschwinger (*mathematical pendulum coupled to an oscillator*) [Arn07, Fig. 3] [Arn09, Fig. 17] [AAB⁺09, Fig. 1]
- Minimales Mehrskalenproblem (*minimal multiscale problem*, steife DGL), *Multirate*-Verfahren [SM11b, SM11a]
- Zug (*vehicle*, MBS, DAE, SimPack) - Brücke (*guideway*, FE-Strukturdynamik, Nastran) [Arn04, Fig. 1]
- Fahrzeug (MBS, DAE, Adams) - Reifen (FE-Strukturdynamik, Abaqus), Kopplung über MpCCI [BBD⁺11, BBD⁺12]
- System (Regelstrecke) - Regler, („Positionsregelung eines Feder-Masse-Dämpfer Systems“), Kopplung über ICOS [BSW10, BZWB12]
- Fahrzeug (MBS, Adams) - Antilockiersystem (Regler, Simulink), Kopplung über ICOS [BWZH13a]
- Antriebsstrang (AVL Cruise) - Fahrer, Batterie, Regler (Matlab) - Kühlung (ECS Kuli), (*hybrid electric vehicle*), Kopplung über ICOS [BWZH13b]
- Regelung eines rotierenden inversen Pendels [Bou09, Kap. 6.2] und Gesamt Fahrzeugmodell mit Antilockiersystem [Bou09, Kap. 6.3]
- Zug (MBS) - Aerodynamik (CFD) [Car03]
- 2D-Balken (FEMLAB, Comsol) - Regler (Modelica) [CMN⁺05, Kap. 4.1]
- Schaltkreise [LRSV82, VEGMM05, VMMT07, Ebe08, VTB⁺08]
- Fluid/Struktur Interaktion [FPF99, FL00]
- Fahrzeug (MBS, SimPack) - Ladung (*granular cargo, smoothed particle hydrodynamics*, Pasimodo), Kopplung über Simulink [FLE10]

- Kettentrieb (KetSim) - hydraulischer Kettenspanner (Hysim) [FU09, FSU10, Fri11]
- Kettentrieb (SimPack) [HAS05, Arn07]
- *L-four-bar mechanism* [GLLG09, GGM10]
- Halb-Fahrzeugmodell (MBS) - Antrieb (Simulink) [GNLG11]
- Fahrzeug (MBS, SimPack) - servo-hydraulische Lenkung (Dymola) [Bus07, BAHD07, Arn09]
- MBS (Adams) - FEM (Nastran) und Strukturoptimierung (TOSCA) [HME04]
- MBS (Adams) - Hydraulik (DSH*plus*) - Regelung (Simulink), (Injection Molding Machine) [HMNZ05]
- Mehrmassenschwinger und flexibles MBS - Hydraulik [IN11]
- *Heating Ventilation and Air-Conditioning system (HVAC)*, Kopplung über TISC [KST09]
- Zug (SimPack) - Neigetechnik (DSH*plus*), Kopplung über Modellexport, Echtzeitsimulation mit Matlab/Simulink Real-Time-Workshop [LDHS01]
- Fahrwerk, Lenkung (AMESim) - Regler (Simulink) [LLmJbHb07]
- Deltaflügel (Strukturdynamik, FEM, Matlab mit Eigenwertanalyse aus Nastran) - Aerodynamik (CFD, DLR TAU), Co-Simulation mit einer Makroschrittwiederholung des Strukturdynamikmodells [NES05]
- *Magnetic rail system, Multirate-Verfahren* [OV04]
- Elektromotor, Getriebe (Simulink) - Batterie (Simulink), (*drill driver*), Co-Simulation, „asynchrones“ Verfahren [PKB08]
- *Human-centred indoor thermal quality performance analysis*, Kopplung über CoSimA+ [TSB⁺11]
- Fahrzeug, Fahrwerk (MBS, SimPack) - Regler (Simulink), Vergleich verschiedener Kopplungen [VKV04]
- Radladerhubgerüst: Mechanik (SimPack) - Hydraulik (DSH*plus*) [Völ10, Kap. 5.3] und Traktorvorderachsfederung: Mechanik (SimPack) - hydraulischer Steuerblock (AMESim) - hydraulische Druckversorgung (DSH*plus*) - Niveauregler (Simulink), Kopplung über Simulink (SIMAT, DSH*plus*-STC, AMESim CoSim) [Völ10, Kap. 5.4]
- Landeklappe (Adams - Simulink) [VAH03]
- Beschleunigungssensor (*acceleration sensor system*) [WCSW97a, 4.1] und Schaltkreis (Saber) - Temperatur (Ansys) [WCSW97a, WCSW97b]
- FEM Feldberechnung - Schaltkreis, (*coupled field-circuit problems*) [ZLF⁺06]
- Hydraulik (AMESim), Kopplung über FMI [Vie14]

B. Veröffentlichungen zu dieser Arbeit

- Testmodell *Zweimassenschwinger*
 - Convergence Study of Explicit Co-Simulation Approaches with Respect to Subsystem Solver Settings, GAMM 2012 [SS12]
 - Implementierung einer Co-Simulationsschnittstelle mit Makroschrittweitensteuerung für die Kopplung von MKS und Hydraulik, Diplomarbeit 2 [Bül11]
- Hochdruckpumpe (Common-Rail-Einspritzsystem)
 - Co-Simulation of Multibody and Hydraulic Systems: Comparison of Different Coupling Approaches, ECCOMAS Multibody Dynamics 2011 [SS11]
 - Co-Simulation einer Hochdruckpumpe für PKW-Dieseleinspritzsysteme, FLUIDON Konferenz 2011 [SE11]
 - Co-Simulation einer Hochdruckpumpe mit dem Common-Rail-Hydrauliksystem, Tagungsbericht, FVV Herbsttagung 2012 [SEW⁺12b]
 - Co-Simulation einer Hochdruckpumpe mit dem Common-Rail-Hydrauliksystem, FVV Abschlussbericht [SEW⁺12a]
- *Thomson Spule*
 - Co-Simulation elektromechanischer Systeme am Beispiel eines wirbelstrominduzierten Linearaktors, NAFEMS deutschsprachige Konferenz 2012 [SSSS12]
 - Mehrkörpersysteme und Elektrodynamik: Gekoppelte Simulation, 130. Norddeutsches Mechanik-Kolloquium 2012 [Sch12]
 - Co-Simulation elektromechanischer Systeme am Beispiel eines wirbelstrominduzierten Linearaktors, NAFEMS Online-Magazin [SSSS13]
- *Recloser*
 - Solver Coupling between Multibody and Electro-Magnetic Systems, ECCOMAS Multibody Dynamics 2013 [SSS⁺13]
 - Electro-mechanical co-simulation of electro-magnetically actuated medium-voltage reclosers, NAFEMS European Conference: Multiphysics Simulation 2012 [SCB⁺12]
 - Multi-Client Co-Simulation of Electro-Magneto-Mechanically Actuated Three-Phase Medium-Voltage Reclosers, NAFEMS World Congress 2013 [SCB⁺13]
- MKS - FE-Strukturdynamik
 - Coupling of Structural and Multibody Mechanics in Switchgear Development, NAFEMS European Conference on Multiphysics Simulation 2014 [SSS14]
- Dynamisch-statische Solverkopplung
 - Influence of circumferential grooves on the non-linear oscillations of turbocharger rotors in floating ring bearings, IFToMM World Congress 2015 [NBS⁺15a]
 - Influence of axial grooves in full-floating-ring bearings on the nonlinear oscillations of turbocharger rotors, 11th International Conference on Vibrations in Rotating Machines 2015 [NBS⁺15b]

C. Software

Die verwendete Software, insbesondere die eingesetzten Subsystemsolver, hat Einfluss auf die Kopplungsverfahren und die Ergebnisse der gekoppelten Simulation. Im Wesentlichen ist der numerische Fehler der Co-Simulation durch den Fehler der Subsystemsolver nach unten beschränkt (→ 2.6.2.3). Daher wurden für diesen Abschnitt des Anhangs Konvergenzplots der verwendeten Solver erstellt. Als Testfall dient hierbei immer eine monolithische Simulation des Zweimassenschwingers (→ 2.2) und als Referenz dient die analytische Lösung.

C.1. Explizite *Runge-Kutta* Verfahren

Um die Analyse der Co-Simulationsverfahren (→ 2.6) von den oft komplexen und nicht im Quelltext einsehbaren Solvern der kommerziellen Programme unabhängig zu machen, wurden selbst implementierte, explizite *Runge-Kutta* Verfahren verwendet. Da es sich um explizite Einschrittverfahren handelt, sind diese leicht zu implementieren.

Allgemeine Verfahrensvorschrift für *s*-stufige explizite *Runge-Kutta* Verfahren

Runge 1895, *Kutta* 1901, [But08, HNW08, SWP12]

$$u_{j+1} = u_j + h \cdot [b_1 K_1 + b_2 K_2 + \dots + b_s K_s] \quad , \quad s : \text{Stufen} \quad (\text{C.1})$$

$$K_i = f(t_j + h \cdot c_i, u_j + h \cdot \sum_{l=1}^{i-1} a_{i,l} K_l) \quad , \quad i = 1, \dots, s \quad (\text{C.2})$$

hier: explizit! (implizit, falls $a_{i,l} \neq 0$ für $i \leq l$)

Die Parameter werden in der Regel in ein sog. Butcher-Tableau geschrieben:

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & 0 & & & \\ c_2 & a_{2,1} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_s & a_{s,1} & \cdots & a_{s,s-1} & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array} \Leftrightarrow: \begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} \quad (\text{C.3})$$

Butcher-Tableaus der implementierten Verfahren

Die Verfahrensnamen werden in der Literatur nicht einheitlich verwendet. Die Kurzbezeichnungen (ODE x) sind angelehnt an den häufig eingesetzten Matlab Solver „ODE45“ und das Hydrauliksimulationsprogramm DSH $plus$, siehe unten. Hierbei bezeichnet „ x “ die Verfahrensordnung.

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array} \quad (\text{C.4})$$

Euler explizit (ODE1)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad (\text{C.5})$$

Heun 2 (ODE2)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \hline \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \quad (\text{C.6})$$

Heun 3 (ODE3)

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \quad (\text{C.7})$$

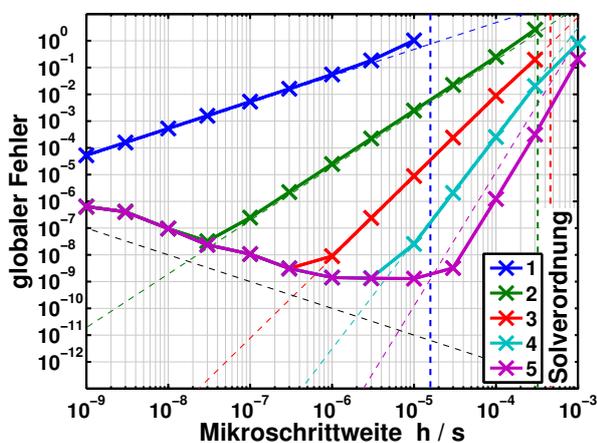
Runge-Kutta 4 (ODE4)

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \hline \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & & & \\ \hline \frac{3}{10} & \frac{3}{40} & \frac{9}{40} & & \\ \hline \frac{4}{5} & \frac{44}{45} & -\frac{56}{15} & \frac{32}{9} & \\ \hline \frac{8}{9} & \frac{19372}{6561} & -\frac{25360}{2187} & \frac{64448}{6561} & -\frac{212}{729} \\ \hline 1 & \frac{9017}{3168} & -\frac{355}{33} & \frac{46732}{5247} & \frac{49}{176} & -\frac{5103}{18656} \\ \hline & \frac{35}{384} & 0 & \frac{500}{1113} & \frac{125}{192} & -\frac{2187}{6784} & \frac{11}{84} \end{array} \quad (\text{C.8})$$

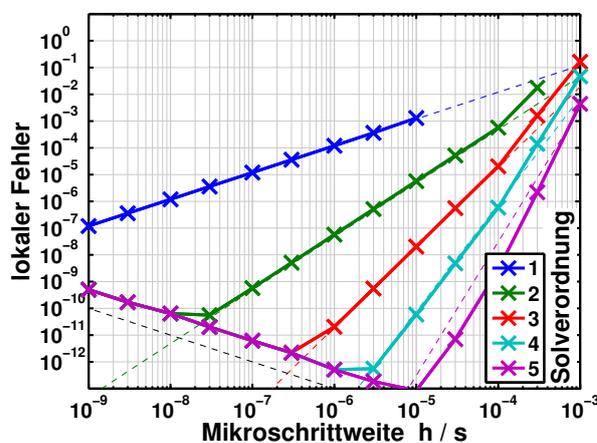
Dormand-Prince Verfahren (ODE5)

Test der Konvergenz der expliziten *Runge-Kutta* Verfahren

Abbildung C.1 zeigt den globalen bzw. lokalen Fehler in Abhängigkeit der gewählten (Mikro-) Schrittweite für alle oben genannten expliziten *Runge-Kutta* Verfahren.



(a) Globaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.



(b) Lokaler Fehler (NRMSE) der Koppelgrößen.

Abbildung C.1: Konvergenzplot für die selbst implementierten, expliziten *Runge-Kutta* Verfahren (ODEx). Testmodell: *Zweimassenschwinger* (\rightarrow 2.2).

In Abbildung C.1 ist jeweils die erwartete Konvergenzordnung zu beobachten (schräge, gestrichelte Hilfslinien in der jeweiligen Farbe). Auch die jeweilige Stabilitätsgrenze wird bestätigt (vertikale, gestrichelte Hilfslinien in der jeweiligen Farbe). Dies ist daran zu erkennen, dass die \times Markierungen „von links“ bis an die jeweilige Stabilitätsgrenze reichen. Instabile Simulationen (Schrittweiten größer als die jeweilige Stabilitätsgrenze) ergeben einen Fehler $> 10^0$ und wurden nicht eingezeichnet. Dass der Fehler bei kleiner werdenden Schrittweiten wieder ansteigt, ist durch den numerischen Rundungsfehler zu erklären [Pla06, SK09, SWP12]. Der Rundungsfehler ist $\sim 1/h$

[Pla06] und von der Maschinengenauigkeit eps abhängig, was durch die schwarz gestrichelte Hilfslinie bestätigt wird. An dem globalen Fehler ist zu erkennen, dass für das *Dormand-Prince* Verfahren 5. Ordnung (ODE5) eine Reduktion der Schrittweite h von 10^{-5} s auf 10^{-6} s keine Verringerung des Fehlers bewirkt. Anmerkung: Die Stabilitätsgrenzen, die absoluten Werte der Fehler und das sichtbar werden des Rundungsfehlereinflusses gelten nur für das hier verwendete Testmodell mit den hier gewählten Parametern.

C.2. Adams

Das Mehrkörpersimulationsprogramm Adams [MSC13] von der Firma MSC Software wurde in folgenden Versionen eingesetzt:

- MSC Adams MD R3, 32-bit und 64-bit
- MSC Adams 2012, 32-bit und 64-bit
- MSC Adams 2013, 32-bit und 64-bit
- MSC Adams 2013.2, 64-bit

Abbildung C.2 zeigt verschiedene numerische Fehler über der eingestellten Toleranz des Adams WSTIFF SI2 Solvers im Vergleich mit einer analytischen Referenzlösung. Als Testmodell wurde der Zweimassenschwinger (\rightarrow 2.2) verwendet.

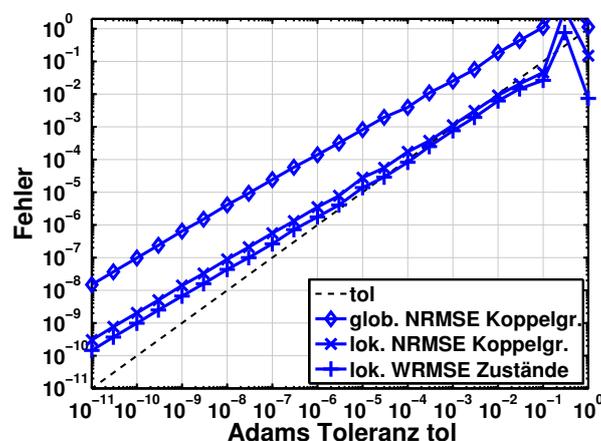


Abbildung C.2: Konvergenzplot für den Adams WSTIFF SI2 Solver. Testmodell: *Zweimassenschwinger* (\rightarrow 2.2).

$e_{MKS} = tol$, $h_{MKS,max} = 10^{-3}$ s, $h_{MKS,min} = 10^{-11}$ s, $h_{MKS,init} = 10^{-7}$ s, $CORRECTOR=MODIFIED$.

In Abbildung C.2 ist zu sehen, dass der lokale WRMSE der Systemzustände (+ Markierung) die Toleranz bei ca. $tol \geq 10^{-6}$ gut einhält. Dies ist das zu erwartende Verhalten. Ab $tol < 10^{-6}$ sinkt dieser Fehler mit kleiner werdender Toleranz weiter, liegt aber nicht mehr auf der eingestellten Toleranz. Der lokale NRMSE der Koppelgrößen (\times Markierung) liegt leicht über dem lokalen WRMSE der Systemzustände (+ Markierung). Der globale NRMSE der Koppelgrößen (\diamond Markierung) liegt ein bis zwei Zehnerpotenzen über den lokalen Fehlern, was aufgrund der Fehlerfortpflanzung zu erwarten ist.

C.3. DSHplus

Das Hydrauliksimulationsprogramm DSHplus [FLU08] von der Firma FLUIDON wurde in der folgenden Version eingesetzt:

- DSHplus 3.6.2.514

Die Bauteilbibliotheken von DSHplus beinhalten auch mechanische Komponenten, so dass einfache eindimensionale Mechaniken wie der Zweimassenschwinger (\rightarrow 2.2) modelliert werden können. Abbildung C.3 zeigt das Konvergenzverhalten des DSHplus ODE5 (*Prince-Dormand*) RCH Solvers mit fester Schrittweite.

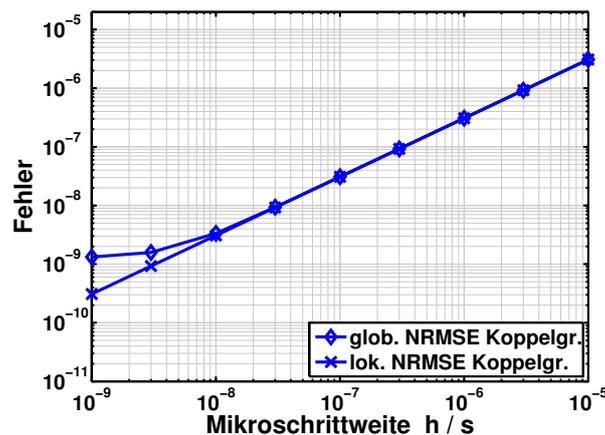


Abbildung C.3: Konvergenzplot für den DSHplus ODE5 (*Prince-Dormand*) RCH Solver. Testmodell: *Zweimassenschwinger* (\rightarrow 2.2).

In Abbildung C.3 ist zu sehen, dass der DSHplus ODE5 (*Prince-Dormand*) RCH Solver in diesem Test die Konvergenzordnung 1 zeigt! Außerdem liegen der globale und der lokale NRMSE der Koppelgrößen für $h > 10^{-8}s$ praktisch übereinander, was im Vergleich mit den anderen hier betrachteten Solvern ungewöhnlich ist. Dieses Verhalten kann nicht nachvollzogen werden.

Um den Fehler des DSHplus Solvers, auf die Untersuchungen an der Co-Simulation, gering zu halten wurden für die Anwendungen (*Zweimassenschwinger* \rightarrow 3.1.2, *Hochdruckpumpe* \rightarrow 3.1.4.6) vergleichsweise kleine (Mikro-) Schrittweiten von $10^{-8}s$ bzw. $10^{-9}s$ gewählt.

C.4. Comsol

Das Multiphysik-Programm Comsol [COM13] wurde in folgenden Versionen eingesetzt:

- Comsol 4.2a (4.2.1.110), 32-bit und 64-bit
- Comsol 4.3 (4.3.0.233), 32-bit und 64-bit
- Comsol 4.3b (4.3.2.189), 32-bit und 64-bit
- Comsol 4.4 (4.4.0.150), 32-bit und 64-bit

Comsol hat sich aus FEMLAB entwickelt und ist gut für die Lösung partieller Differentialgleichungen (PDE) geeignet. Die Gleichungen des Zweimassenschwingers (\rightarrow 2.2) lassen sich in impliziter Form eingeben. Zur Lösung steht unter anderem ein BDF-Verfahren mit variabler Schrittweite und

variabler Ordnung von 1 bis 5 zur Verfügung. Für dieses werden in Abbildung C.4 verschiedene Fehler über die eingestellte Toleranz dargestellt.

In Abbildung C.4 ist zu sehen, dass der lokale WRMSE der Systemzustände (+ Markierung) sehr gut der vorgegebenen Toleranz folgt. Dies entspricht dem erwarteten Verhalten. Der lokale NRMSE der Koppelgrößen (× Markierung) liegt leicht über dem lokalen WRMSE der Systemzustände. Der globale NRMSE der Koppelgrößen (◇ Markierung) liegt ca. zwei bis drei Zehnerpotenzen über den lokalen Fehlern. Dies war bereits bei dem Adams Solver zu beobachten und lässt sich durch die Fehlerfortpflanzung erklären.

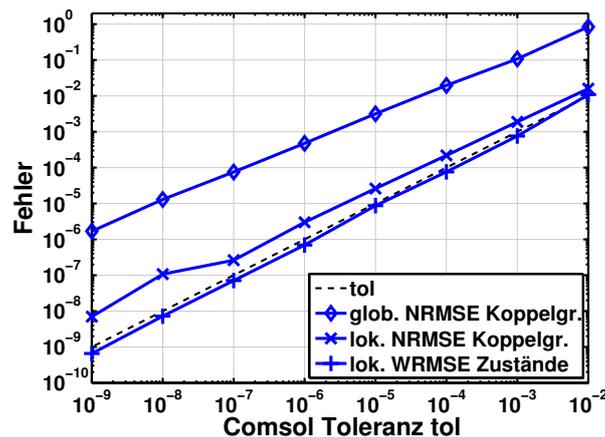


Abbildung C.4: Konvergenzplot für den Comsol BDF-Solver.

Testmodell: *Zweimassenschwinger* (\rightarrow 2.2).

$e_{abs} = e_{rel} = tol$, $h_{max} = automatic$, $h_{init} = 10^{-7}$ s.

C.5. Abaqus

Das FE-Programm SIMULIA Abaqus von der Firma Dassault Systèmes [Das13] wurde in folgenden Versionen eingesetzt:

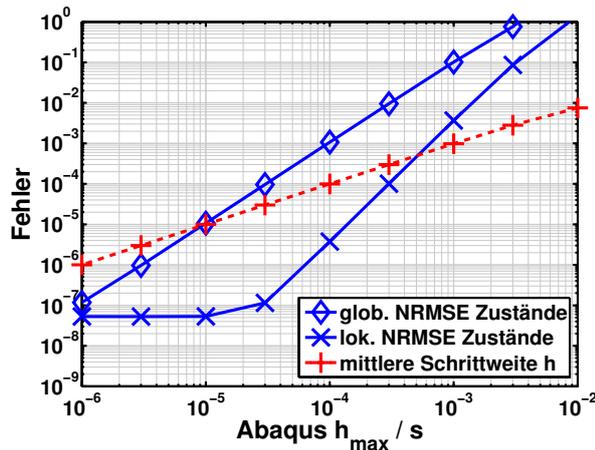
- Abaqus 6.12-3, 64-bit
- Abaqus 6.13-3, 64-bit

In Abaqus wird grundsätzlich zwischen „Abaqus/Standard“, welches ein implizites Zeitintegrationsverfahren verwendet und „Abaqus/Explicit“, mit explizitem Zeitintegrationsverfahren, unterschieden. Für beide Verfahren wurden Konvergenzplots erstellt, siehe Abbildung C.5. Wobei die Berechnung des Testmodells mit dem impliziten Solver von „Abaqus/Standard“ wesentlich länger dauert als mit „Abaqus/Explicit“.

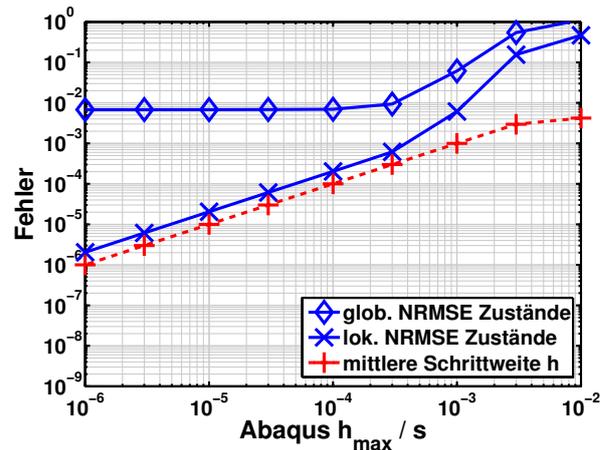
Sowohl der explizite, als auch der implizite Abaqus Solver haben eine maximale Schrittweite h_{max} als Parameter. Diese wird bei den folgenden Konvergenzplots variiert.

In Abbildung C.5 (a) ist zu sehen, dass die eingestellte maximale Schrittweite der resultierenden mittleren Schrittweite (rote + Markierungen mit gestrichelter Linie) entspricht, so dass der Solver praktisch mit fester Schrittweite arbeitet. Hierbei zeigt sich eine Konsistenzordnung von 3 und eine Konvergenzordnung von 2.

In Abbildung C.5 (b) ist zu sehen, dass auch der explizite Solver praktisch mit der eingestellten maximalen Schrittweite arbeitet. Nur bei $h_{max} = 10^{-2}$ s ist die mittlere Schrittweite kleiner, was vermutlich auf eine Schrittweitenreduktion zur Stabilisierung der Lösung zurückzuführen ist. Der lokale Fehler sinkt ca. mit der Ordnung 1. Der globale Fehler hingegen ist bei Schrittweiten $\leq 10^{-4}$ s nahezu konstant bei einem Wert von ca. $7 \cdot 10^{-3}$. Wie bereits in Abschnitt 3.3.3.3 beschrieben, zeigt eine nähere Betrachtung, dass die von Abaqus berechneten Zeitverläufe (nicht dargestellt) nicht um die Ruhelagen schwingen, sondern einen parameterunabhängigen Offset aufweisen, welcher weder erklärt noch beseitigt werden konnte.



(a) Abaqus implizit (HHT),
 $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 1/4, \gamma = 1/2$.



(b) Abaqus explizit (zentrale Differenzen),
 $linear\ bulk\ viscosity = quadratic\ bulk\ viscosity = 0$.

Abbildung C.5: Konvergenzplot für den ex- und impliziten Abaqus Solver.

Testmodell: Eindimensionaler Dehnstab mit einem linearen „truss“ Stab-Element (T2D2).

Parameter: $A = 0.002 \text{ m}^2$, $L = 1 \text{ m}$, $E = 5 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\beta_R = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ (\rightarrow 3.3.3).

Referenz: Analytische Lösung für einen Einmassenschwinger mit $m = 1 \text{ kg}$, $c = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $d = 2 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$.

Anfangswerte: $x_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

D. Implementierung

Hier soll ein kurzer Überblick über die Kopplungsstruktur der verwendeten Schnittstellen gegeben werden. Es handelt sich nicht um eine Dokumentation sondern um einen graphischen Überblick über die beteiligten Programme, Dateien und Funktionen.

D.1. Implementierung der Co-Simulation

Die Co-Simulationsschnittstelle ist als statische Windows-Library (`lib`) implementiert. Diese Library wird dann jeweils in den entsprechenden programmspezifischen Schnittstellen (engl. *interface*: z.B. *user routine*, *external function*, ...) eingebunden und durch den jeweiligen Solver aufgerufen.

Die Kopplungsstruktur, welche der Benutzer benötigt, um die Co-Simulationsschnittstelle einbinden und nutzen zu können ist in Abbildung D.1 dargestellt. Eigenheiten der eingesetzten kommerziellen Programme können dazu führen, dass die Struktur etwas anders aussieht und beispielsweise Initialisierung und Terminierung aus der Aufruffunktion heraus aufgerufen werden.

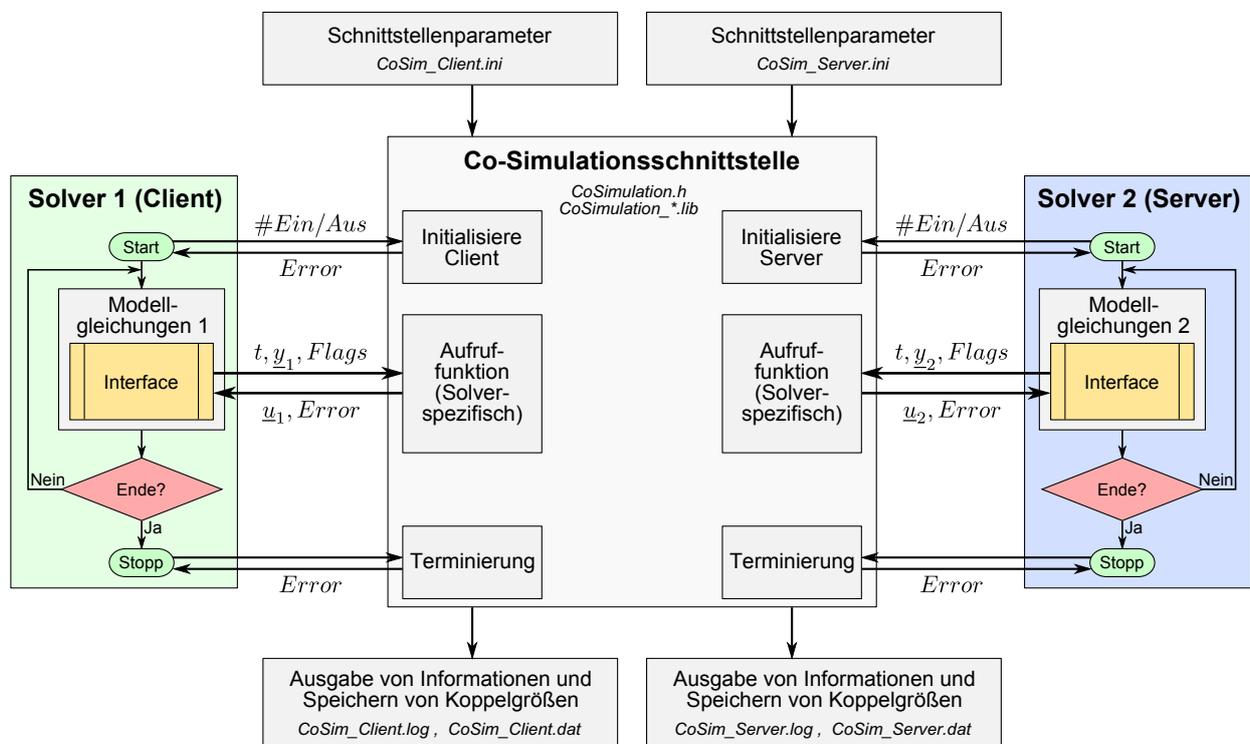


Abbildung D.1: Benutzerrelevante Kopplungsstruktur der Co-Simulationsschnittstelle.

Um von den Eigenheiten der jeweiligen Zeitintegrationsverfahren (Solver) unabhängig zu sein, werden für jeden Solver angepasste Aufruffunktionen verwendet. Der Ablauf des verwendeten Co-Simulationsverfahrens (z.B. der *Jacobi* Typ) ist damit von den Solvern unabhängig, siehe Abbildung D.2.

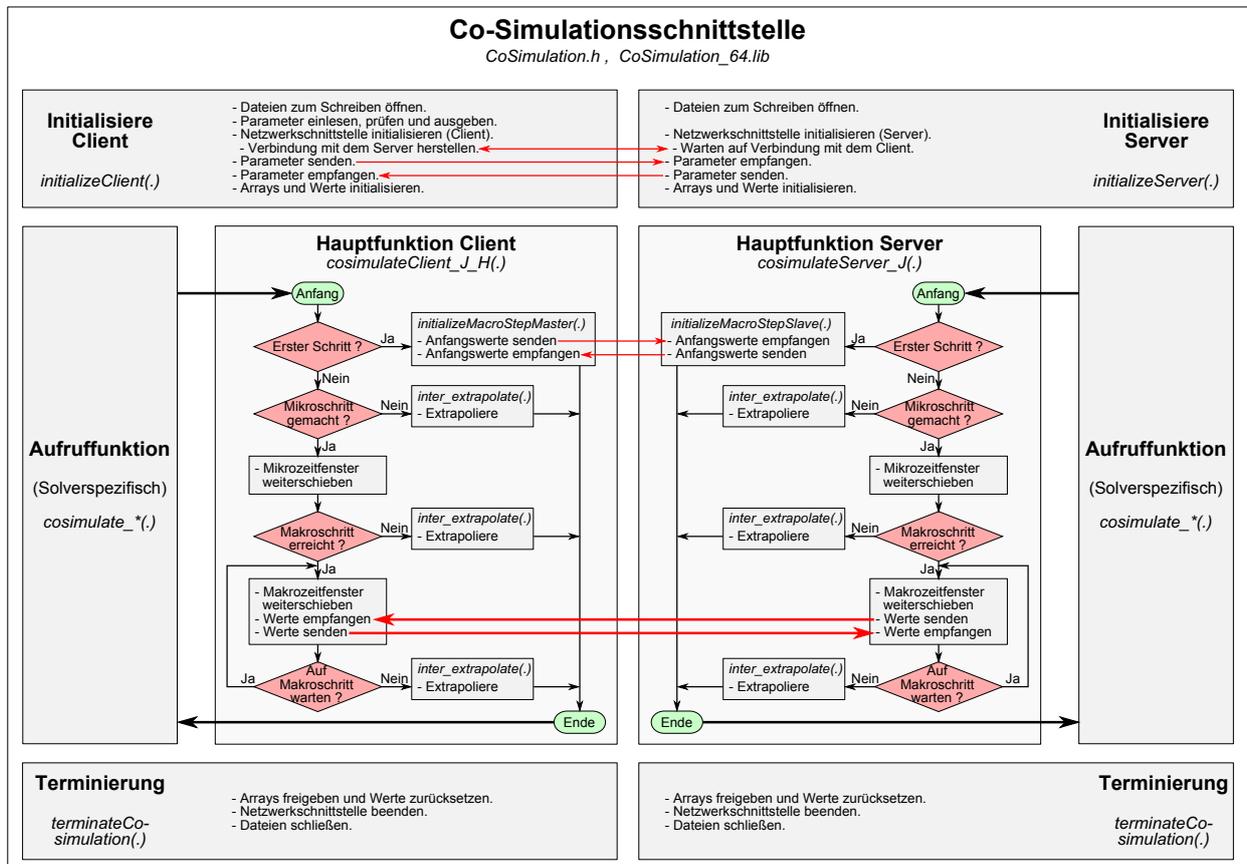


Abbildung D.2: Interne Kopplungsstruktur der Co-Simulationsschnittstelle (*Jacobi* Typ).

D.2. Implementierung der dynamisch-statischen Solverkopplung

Die dynamisch-statische Solverkopplung ist im Sinne eines externen Aufrufes einer Funktion für den dynamischen Solver implementiert. Es wird davon ausgegangen, dass der dynamische Solver ein Prädiktor/Korrektor Verfahren zur Lösung der dynamischen Gleichungen einsetzt (z.B. Adams). Für diesen und auch für die semi-impliziten Kopplungsverfahren (\rightarrow 4.2.3.2) werden partielle Ableitungen benötigt. Abbildung D.3 zeigt die Kopplungsstruktur. Hierbei berechnet der statische Solver 0 die ungestörten Koppelgrößen und die statischen Solver $i = 1, \dots, N_y$ die gestörten Koppelgrößen für die numerische Berechnung der partiellen Ableitungen mittels (Vorwärts-) Differenzenquotient. Bei den statischen Subsystemen muss eine extra hinzugefügte Schleife (über einen externen Solveraufruf oder die Variation eines „Dummy“-Parameters) für den wiederholten Aufruf der statischen Solver sorgen.

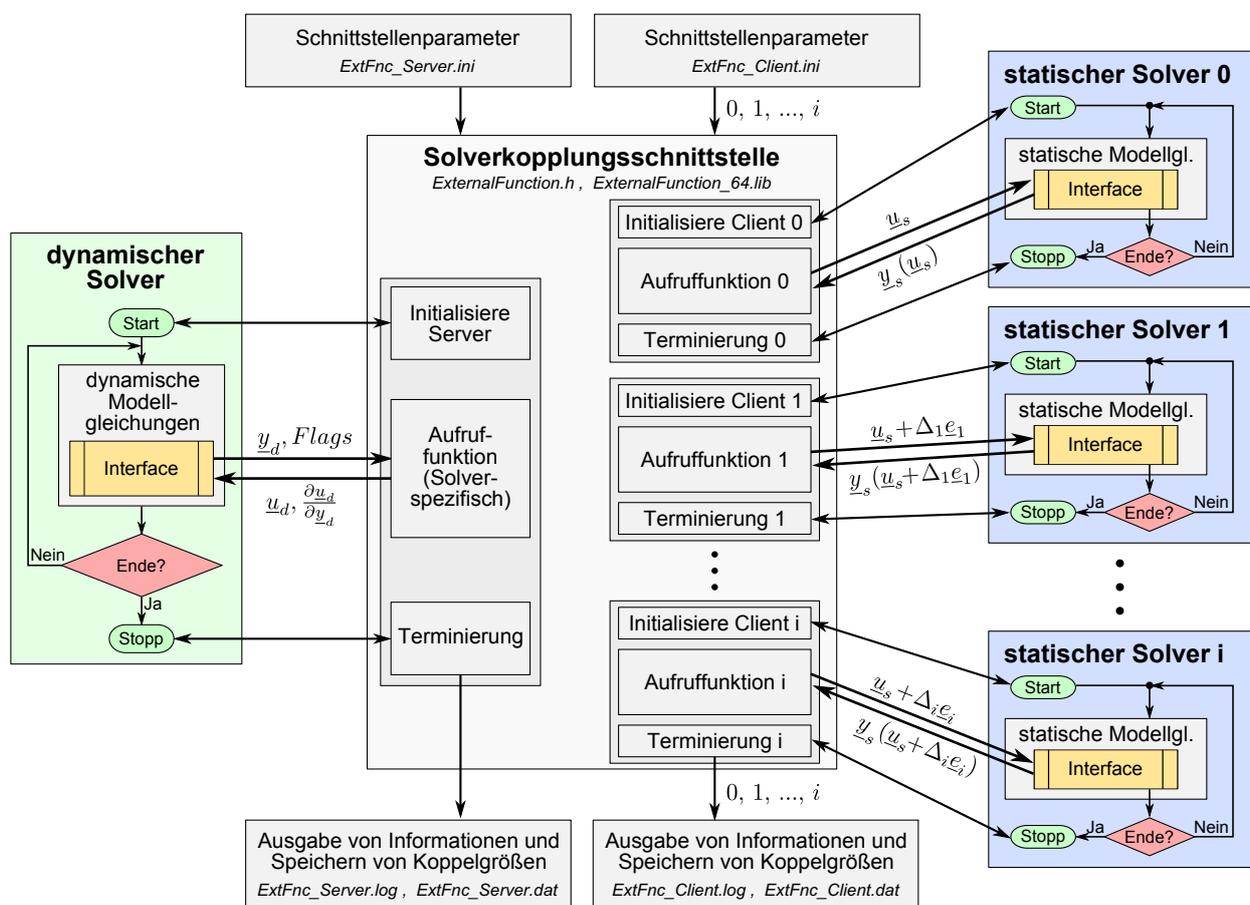


Abbildung D.3: Benutzerrelevante Kopplungsstruktur der dynamisch-statischen Solverkopplung.

Abbildung D.4 zeigt den internen Aufbau der dynamisch-statischen Solverkopplung. Die ausgegraute Möglichkeit Modellparameter aus dem dynamischen an die statischen Subsysteme zu senden wird derzeit nicht genutzt.

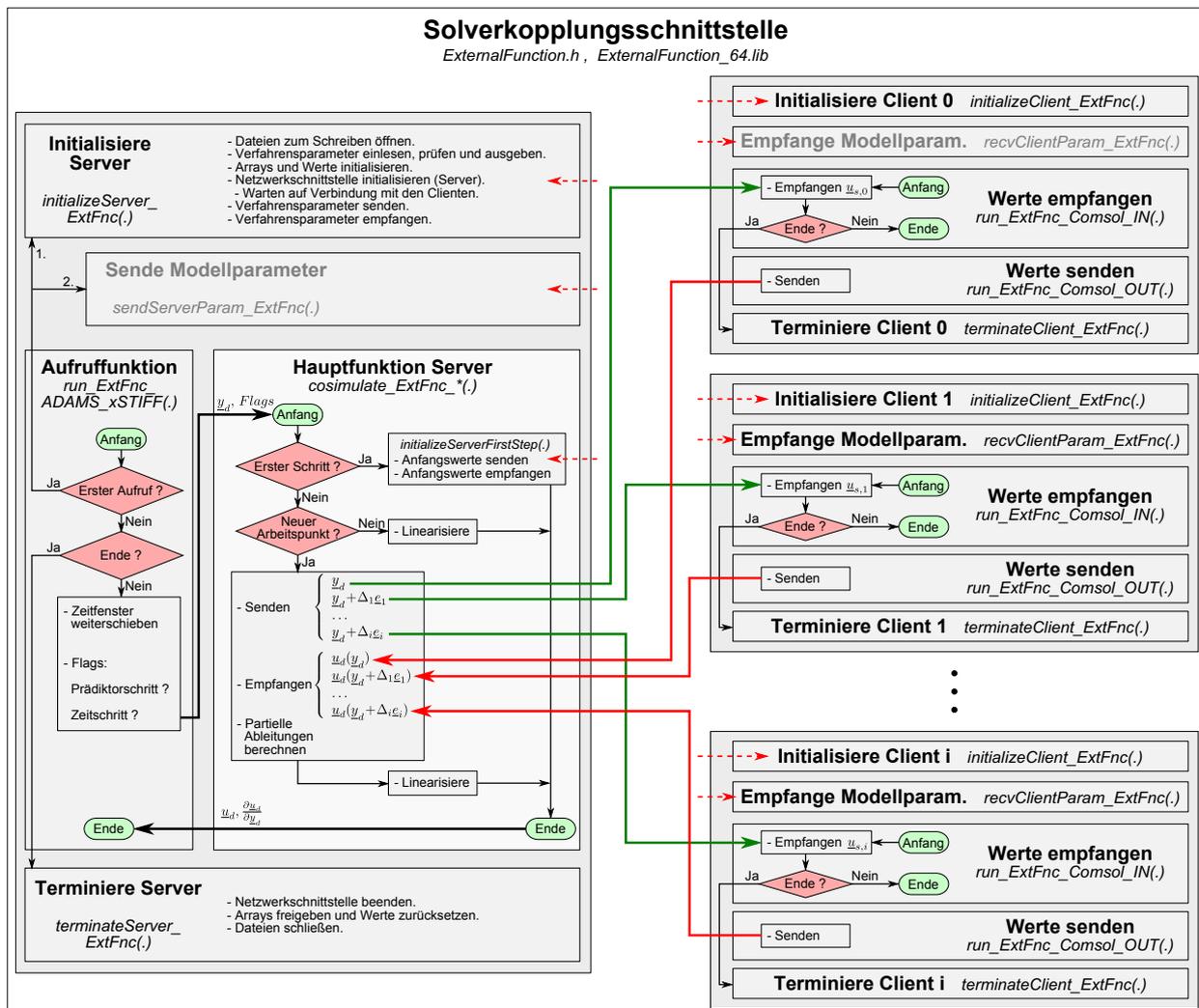


Abbildung D.4: Interne Kopplungsstruktur der dynamisch-statischen Solverkopplung.

Literatur

- [AAB⁺09] Amberg, J., Arnold, M., Burgermeister, B., Eichberger, A., Keppler, R. und Schierz, T. "Study on Efficiency and Robustness of Numerical Methods in Co-Simulation". Technischer Bericht, Modellisar, sWP 203, November 2009.
- [ABB10] ABB. "OVR outdoor vacuum reclosers 15-38 kV". [http://www05.abb.com/global/scot/scot235.nsf/veritydisplay/c4ad81671d9fe4c1c125778800538150/\\$file/abb%20recloser%20brochure%20val2601-tg%20rev%20g.pdf](http://www05.abb.com/global/scot/scot235.nsf/veritydisplay/c4ad81671d9fe4c1c125778800538150/$file/abb%20recloser%20brochure%20val2601-tg%20rev%20g.pdf), 2010. Abruf: 11.11.2014.
- [ACS13] Arnold, M., Clauss, C. und Schierz, T. "Error Analysis and Error Estimates for Co-Simulation in FMI for Model Exchange and Co-Simulation V2.0". *Archive of Mechanical Engineering*, Band 60(1), Seiten 75 – 94, 2013.
- [AG01] Arnold, M. und Günter, M. "Preconditioned dynamic iteration for coupled differential-algebraic systems". *BIT Numerical Mathematics*, Band 41, Seiten 1 – 25, 2001.
- [AHK14] Arnold, M., Hante, S. und Köbis, M.A. "Error analysis for co-simulation with force-displacement coupling". *Proc. Appl. Math. Mech.*, Band 14(1), Seiten 43 – 44, Dec 2014.
- [AM88] Argyris, J.H. und Mlejnek, H.P. *Die Methode der finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik - Band 3 Einführung in die Dynamik*. Vieweg, 1988.
- [APRP08] Ambrósio, J., Pombo, J., Rauter, F. und Pereira, M. "A Memory Based Communication in the Co-simulation of Multibody and Finite Element Codes for Pantograph-Catenary Interaction Simulation". In C.L. Bottasso (Herausgeber), "Multibody Dynamics", Band 12 von *Computational Methods in Applied Sciences*, Seiten 231 – 252. Springer Netherlands, 2008.
- [Arn04] Arnold, M. "Numerical methods in the simulation of vehicle-guideway interaction". In "Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2002", Seiten 115 – 120. Springer-Verlag, 2004.
- [Arn07] Arnold, M. "Multi-Rate Time Integration for Large Scale Multibody System Models". In P. Eberhard (Herausgeber), "IUTAM Symposium on Multiscale Problems in Multibody System Contacts", Band 1 von *IUTAM Bookseries (closed)*, Seiten 1 – 10. Springer, 2007.
- [Arn09] Arnold, M. "Numerical methods for simulation in applied dynamics". In M. Arnold und W. Schiehlen (Herausgeber), "Simulation Techniques for Applied Dynamics", Band 507 von *CISM Courses and Lectures*, Seiten 191 – 246. Springer, 2009.
- [Arn10] Arnold, M. "Stability of sequential modular time integration methods for coupled multibody system models". *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Band 5, 2010.

- [AS00] Arnold, M. und Simeon, B. "Pantograph and catenary dynamics: a benchmark problem and its numerical solution". *Applied Numerical Mathematics*, Band 34, Seiten 345 – 362, 2000.
- [AS09] Arnold, M. und Schierz, T. "Effizienz und Robustheit numerischer Kopplungsalgorithmen im MODELISAR Co-Simulation-Interface". In G. Elst (Herausgeber), "Tagungsband ASIM-Treffen STS/GMMS 2009 und DASS 2009", Fraunhofer-Institut für Integrierte Schaltungen IIS, Institutsteil Entwurfsautomatisierung EAS, Dresden, März 2009. 978-3-8167-7981-0.
- [AW08] Aström, K.J. und de Wit, C.C. "Revisiting the LuGre friction model". *IEEE Control Syst. Mag.*, Band 28(6), Seiten 101 – 114, Dec 2008.
- [BAHD07] Busch, M., Arnold, M., Heckmann, A. und Dronka, S. "Interfacing SIMPACK to Modelica/Dymola for multi-domain vehicle system simulations". *SIMPACK News*, Band 11, Seiten 1 – 3, 2007.
- [BBD⁺11] Bayrasy, P., Burger, M., Dehning, C., Kalmykov, I. und Speckert, M. "Applications for MBS-FEM coupling with MpCCI using automotive simulation as example". In "NAFEMS Seminar: The Role of CAE in System Simulation", Wiesbaden, Germany, November 8–9 2011.
- [BBD⁺12] Bayrasy, P., Burger, M., Dehning, C., Kalmykov, I. und Speckert, M. "Applications for MBS-FEM-coupling with MpCCI using automotive simulation as example." In "SIMULIA Community Conference", Providence RI, USA, May 15–17 2012.
- [BCWS11] Bastian, J., Clauß, C., Wolf, S. und Schneider, P. "Master for Co-Simulation Using FMI". Technischer Bericht, Fraunhofer Institute for Integrated Circuits IIS / Design Automation Division EAS, 2011.
- [Bea99] Beater, P. *Entwurf hydraulischer Maschinen: Modellbildung, Stabilitätsanalyse und Simulation hydrostatischer Antriebe und Steuerungen*. Springer-Verlag, 1999.
- [Böh00] Böhme, G. *Strömungsmechanik nichtnewtonscher Fluide*. Teubner, 2. Auflage, 2000.
- [BHS⁺08] Boyaci, A., Hetzler, H., Seemann, W., Proppe, C. und Wauer, J. "Analytical bifurcation analysis of a rotor supported by floating ring bearings". *Nonlinear Dyn*, Band 57(4), Seiten 497 – 507, Aug 2008.
- [Bül11] Bülow, B. *Implementierung einer Co-Simulationsschnittstelle mit Makroschrittweitensteuerung für die Kopplung von MKS und Hydraulik*. Diplomarbeit, Universität Kassel, 2011.
- [BOÄ⁺12] Blochwitz, T., Otter, M., Åkesson, J., Arnold, M., Clauß, C., Elmqvist, H., Friedrich, M., Junghanns, A., Mauss, J., Neumerkel, D., Olsson, H. und Viel, A. "Functional Mockup Interface 2.0: The standard for tool independent exchange of simulation models". In M. Otter und D. Zimmer (Herausgeber), "Proc. of the 9th International Modelica Conference", September 3–5 2012.

- [Bos98] Bosch. *Diesel-Speichereinspritzsystem Common Rail*. Robert Bosch GmbH, 2. Auflage, 1998.
- [Bou09] Bouabdallah, L. *Sicherstellung des deterministischen Verhaltens bei der Kopplung mehrerer Softwaretools innerhalb einer Gesamtfahrzeugsimulation*. Dissertation, Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, 2009.
- [Boy11] Boyaci, A. *Zum Stabilitäts- und Bifurkationsverhalten hochtouriger Rotoren in Gleitlagern*. Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie, Fakultät für Maschinenbau, 2011.
- [BS10a] Busch, M. und Schweizer, B. "Explicit and Implicit Solver Coupling: Stability Analysis Based on an Eight-Parameter Test Model". *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Band 10, Seiten 61 – 62, 2010.
- [BS10b] Busch, M. und Schweizer, B. "MBS/FEM Co-Simulation Approach for Lubrication Problems". *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Band 10, Seiten 729 – 732, 2010.
- [BS10c] Busch, M. und Schweizer, B. "Numerical Stability and Accuracy of Different Co-Simulation Techniques: Analytical Investigations Based on a 2-DOF Test Model". In "The 1st Joint International Conference on Multibody System Dynamics", Lappeenranta, Finland, May 2010.
- [BS11a] Busch, M. und Schweizer, B. "Coupled simulation of multibody and finite element systems: an efficient and robust semi-implicit coupling approach". *Archive of Applied Mechanics*, Band 82, Seiten 723 – 741, 2011.
- [BS11b] Busch, M. und Schweizer, B. "An explicit approach for controlling the macro-step size of co-simulation methods". In "7th European Nonlinear Dynamics Conference", Rome, Italy, July 2011.
- [BS11c] Busch, M. und Schweizer, B. "Stability of Co-Simulation Methods Using Hermite and Lagrange Approximation Techniques". In "ECCOMAS Thematic Conference - Multibody Dynamics 2011", Brussels, Belgium, July 2011.
- [BSMM01] Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A., Musiol, G. und Mühlig, H. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 5. Auflage, 2001.
- [BSW10] Benedikt, M., Stippel, H. und Watzenig, D. "An Adaptive Coupling Methodology for Fast Time-Domain Distributed Heterogeneous Co-Simulation". In "SAE 2010 World Congress & Exhibition", April 2010.
- [Bus07] Busch, M. *Entwicklung einer Simpack-Modelica/Dymola-Schnittstelle*. Diplomarbeit, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 2007.
- [Bus12] Busch, M. *Zur effizienten Kopplung von Simulationsprogrammen*. Dissertation, Universität Kassel, 2012.

- [But08] Butcher, J.C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, 2. Auflage, 2008.
- [BWZH13a] Benedikt, M., Watzenig, D., Zehetner, J. und Hofer, A. "Macros-step-size selection and monitoring of the coupling error for weak coupled subsystems in the frequency-domain". In "COUPLED PROBLEMS 2013", Sta. Eulalia, Ibiza, Spain, June 17–19 2013.
- [BWZH13b] Benedikt, M., Watzenig, D., Zehetner, J. und Hofer, A. "NEPCE - A nearly energy-preserving coupling element for weak-coupled problems and co-simulations". In "COUPLED PROBLEMS 2013", Sta. Eulalia, Ibiza, Spain, June 17–19 2013.
- [BZBP13] Bungartz, H.J., Zimmer, S., Buchholz, M. und Pflüger, D. *Modellbildung und Simulation*. eXamen.press. Springer-Verlag, 2. Auflage, 2013.
- [BZWB12] Benedikt, M., Zehetner, J., Watzenig, D. und Bernasch, J. "Moderne Kopplungsmethoden - Ist Co-Simulation beherrschbar?" *NAFEMS Online-Magazin*, Band 22, Seiten 63 – 74, 2012.
- [Car03] Carrarini, A. "Coupled Multibody-Aerodynamic Simulation of High-Speed Trains Manoeuvres". *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Band 2(1), Seiten 114 – 115, 2003.
- [CMN⁺05] Clauß, C., Martin, R., Nordwig, A., Nytsch-Geusen, C., Schneider, A. und Schwarz, P. "Simulatorkopplung mit FEMLAB". In "FEMLAB Konferenz 2005 - Neue Wege der Multiphysik Simulation", Frankfurt/Main, Germany, November 2005.
- [CMP89] Cook, R.D., Malkus, D.S. und Plesha, M.E. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, 3. Auflage, 1989.
- [COM13] COMSOL. *Introduction to COMSOL Multiphysics® - Version 4.4*, November 2013. <http://www.comsol.de/>.
- [Con07] Continental Automotive GmbH. "Hochdruckpumpe und Einspritzanlage für eine Brennkraftmaschine mit einer Hochdruckpumpe". Patentschrift DE 10 2007 004 605 B4, 01 2007.
- [Dah85] Dahlquist, G. "33 years of numerical instability, Part I". *BIT*, Band 25, Seiten 188 – 204, 1985.
- [Das13] Dassault Systèmes. *Abaqus 6.13 Online Documentation*, April 2013.
- [DP80] Dormand, J.R. und Prince, P.J. "A family of embedded Runge-Kutta formulae". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Band 6(1), Seiten 19 – 26, 1980.
- [DR08] Dahmen, W. und Reusken, A. *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 2008.
- [Dro03] Drobny, V. "ABS Braking with SIMAT Co-Simulation Interface". *SIMPACT News*, Band 7, Seiten 10 – 11, 2003.

- [Dro04] Dronka, S. *Die Simulation gekoppelter Mehrkörper- und Hydraulik-Modelle mit Erweiterung für Echtzeitsimulation*. Dissertation, Technische Universität Dresden, 2004.
- [Ebe08] Ebert, F. *On Partitioned Simulation of Electrical Circuits using Dynamic Iteration Methods*. Dissertation, Technische Universität Berlin, 2008.
- [Eic92] Eich, E. *Projizierende Mehrschrittverfahren zur numerischen Lösung von Bewegungsgleichungen technischer Mehrkörpersysteme mit Zwangsbedingungen und Unstetigkeiten*. Dissertation, Universität Augsburg, 1992.
- [ESF98] Eich-Soellner, E. und Führer, C. *Numerical Methods in Multibody Dynamics*. Teubner, 1998.
- [FB09] Frey, T. und Bossert, M. *Signal- und Systemtheorie*. Vieweg+Teubner, 2. Auflage, 2009.
- [FE98] Fritzson, P. und Engelson, V. "Modelica - A unified object-oriented language for system modeling and simulation". In E. Jul (Herausgeber), "ECOOP'98 - Object-Oriented Programming", Band 1445 von *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 67 – 90. Springer-Verlag, 1998.
- [FL00] Farhat, C. und Lesoinne, M. "Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Band 182, Seiten 499 – 515, 2000.
- [FLE10] Fleissner, F., Lehnart, A. und Eberhard, P. "Dynamic simulation of sloshing fluid and granular cargo in transport vehicles". *Vehicle System Dynamics*, Band 48(1), Seiten 3 – 15, 2010.
- [FLU03] FLUIDON® Gesellschaft für Fluidtechnik mbH, Aachen. *DSHplus - STC Modul Handbuch*, 2003.
- [FLU08] FLUIDON® Gesellschaft für Fluidtechnik mbH, Aachen. *DSHplus - User Manual*, 2008.
- [FPF99] Felippa, C.A., Park, K.C. und Farhat, C. "Partitioned Analysis of Coupled Mechanical Systems". Technischer Bericht, Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado at Boulder, Boulder, Colorado, USA, 1999.
- [Fra12] Fraunhofer Institute for Algorithms and Scientific Computing SCAI, Sankt Augustin, Germany. *MpCCI 4.2.1 | Overview*, September 2012.
- [Fri11] Friedrich, M. *Parallel Co-Simulation for Mechatronic Systems*. Dissertation, Technische Universität München, München, 2011.
- [FSU10] Friedrich, M., Schneider, M. und Ulbrich, H. "A Parallel Co-Simulation for Mechatronic Systems". In "The 1st Joint International Conference on Multibody System Dynamics", Lappeenranta, Finland, May 2010.

- [FU09] Friedrich, M. und Ulbrich, H. "A Parallel Co-Simulation for Multibody Systems". In "2nd South-East European Conference on Computational Mechanics", Rhodes, Greece, June 2009.
- [GA04] Gu, B. und Asada, H.H. "Co-Simulation of Algebraically Coupled Dynamic Subsystems Without Disclosure of Proprietary Subsystem Models". *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Band 126, Seiten 1 – 13, 2004.
- [GGC09] González, F., González, M. und Cuadrado, J. "Weak Coupling of Multibody Dynamics and Block Diagram Simulation Tools". In "Proceedings of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference", 2009.
- [GGM10] González, F., González, M. und Mikkola, A. "Efficient coupling of multibody software with numerical computing environments and block diagram simulators". *Multibody System Dynamics*, Band 24, Seiten 237 – 253, 2010.
- [GKL06] Geimer, M., Krüger, T. und Linsel, P. "Co-Simulation, gekoppelte Simulation oder Simulatorkopplung? Ein Versuch der Begriffsvereinheitlichung". *O + P Zeitschrift für Fluidtechnik*, Band 50(11 - 12), Seiten 572 – 576, 2006.
- [GKR01] Günter, M., Kværnø, A. und Rentrop, P. "Multirate Partitioned Runge-Kutta Methods". *BIT Numerical Mathematics*, Band 41(3), Seiten 504 – 514, 2001.
- [GLG85] Gear, C.W., Leimkuhler, B. und Gupta, G.K. "Automatic integration of Euler-Lagrange equations with constraints". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Band 12-13, Seiten 77 – 90, 1985.
- [GLLG09] González, F., Luaces, A., Lugrís, U. und González, M. "Non-intrusive parallelization of multibody system dynamic simulations". *Computational Mechanics*, Band 44, Seiten 493 – 504, 2009.
- [GLS88] Gustafsson, K., Lundh, M. und Söderlind, G. "A PI Stepsize Control for the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations". *BIT Numerical Mathematics*, Band 28, Seiten 270 – 287, 1988.
- [GNLG11] González, F., Ángel Naya, M., Lucaces, A. und González, M. "On the effect of multirate co-simulation techniques in the efficiency and accuracy of multibody system dynamics". *Multibody System Dynamics*, Band 25, Seiten 461 – 483, 2011.
- [Gom81] Gomm, W. "Stability analysis of explicit multirate methods". *Mathematics and Computers in Simulation*, Band 23, Seiten 34 – 50, 1981.
- [GR94] Günter, M. und Rentrop, P. "Partitioning and Multirate Strategies in Latent Electric Circuits". In R.E. Bank, R. Bulirsch, H. Gajewski und K. Merten (Herausgeber), "Mathematical modelling and simulation of electrical circuits and Semiconductor Devices", Band 117 von *International Series of Numerical Mathematics*, Seiten 33 – 60. Birkhäuser Verlag Basel, 1994.

- [Gu01] Gu, B. *Co-Simulation of Algebraically Coupled Dynamic Subsystems*. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [GW84] Gear, C.W. und Wells, D.R. "Multirate linear multistep methods". *BIT Numerical Mathematics*, Band 24, Seiten 484 – 502, 1984.
- [HAS05] Hippmann, G., Arnold, M. und Schittenhelm, M. "Efficient simulation of bush and roller chain drives". In "ECCOMAS Thematic Conference - Multibody Dynamics 2005", Madrid, Spain, June 2005.
- [HH78] Hilber, H.M. und Hughes, T.J.R. "Collocation, dissipation and [overshoot] for time integration schemes in structural dynamics". *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Band 6(1), Seiten 99 – 117, 1978.
- [HHT77] Hilber, H.M., Hughes, T.J.R. und Taylor, R.L. "Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics". *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Band 5(3), Seiten 283 – 292, 1977.
- [HME04] Häußler, P., Minx, J. und Emmrich, D. "Topology optimization of dynamically loaded parts in mechanical systems: Coupling of MBS, FEM, and structural optimization". In "NAFEMS Seminar: Analysis of Multi-Body Systems Using FEM and MBS", Wiesbaden, Germany, October 2004.
- [HMNZ05] Hostert, C., Maas, S., Nordmann, R. und Zürbes, A. "Dynamic Simulation of an Injection Molding Machine". *VDI BERICHTE*, Band 1887, Seiten 165 – 180, 2005.
- [HNW08] Hairer, E., Nørsett, S.P. und Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations I - Nonstiff Problems*. Springer-Verlag, 3. Auflage, 2008.
- [HS06] Huckle, T. und Schneider, S. *Numerische Methoden*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 2006.
- [HW10] Hairer, E. und Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations II - Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 2010.
- [IN11] Imanishi, E. und Nanjo, T. "Fast Simulation of Flexible Multibody Dynamics Using Improved Domain Decomposition Technique". In "ECCOMAS Thematic Conference - Multibody Dynamics 2011", Brussels, Belgium, July 2011.
- [JHM10] Justen, D., Hinzmann, S. und Mubarak, A. "X-in-the-Loop-Einsatz des XCP-Protokolls". *ATZelektronik*, Band 01, 2010.
- [Jus11] Justen, D. "Anforderungen und Chancen der Co-Simulation". http://www.ostfalia.de/export/sites/default/de/presse/download/2011/Co_Simulation.pdf, 2011.
- [KCL⁺09] Kossel, R., Correia, C., Loeffler, M., Bodmann, M. und Tegethoff, W. "Verteilte Systemsimulation mit TISC". Technischer Bericht, TLK-Thermo GmbH, 2009.
- [Kle12] Klein, B. *FEM - Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau*. Vieweg+Teubner Verlag, 9 Auflage, 2012.

- [Kno02] Knorr, S. *Multirate-Verfahren in der Co-Simulation gekoppelter dynamischer Systeme mit Anwendung in der Fahrzeugdynamik*. Diplomarbeit, Universität Ulm, 2002.
- [KS00a] Kübler, R. und Schiehlen, W. "Modular Simulation in Multibody System Dynamics". *Multibody System Dynamics*, Band 4(2), Seiten 107 – 127, 2000.
- [KS00b] Kübler, R. und Schiehlen, W. "Two Methods of Simulator Coupling". *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, Band 6(2), Seiten 93 – 113, 2000.
- [KSS02] Kübler, R., Schiehlen, W. und Scholz, C. "Simulator coupling for multibody systems". *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Band 1(1), Seiten 33 – 36, 2002.
- [KST09] Kossel, R., Strupp, N.C. und Tegethoff, W. "Effects of Tool Coupling on Transient Simulation of a Mobile Air-Conditioning Cycle". In "Proceedings 7th Modelica Conference", Como, Italy, September 2009.
- [LDHS01] Liebig, S., Dronka, S., Helduser, S. und Stüwing, M. "Simulation gekoppelter mechanischer und hydraulischer Systeme". ASIM-Workshop, Technische Universität Dresden, 2001.
- [Leh10] Lehner, G. *Elektromagnetische Feldtheorie*. Springer-Verlag, 7. Auflage, 2010.
- [LF98] Lesoinne, M. und Farhat, C. "Higher-Order Subiteration-Free Staggered Algorithm for Nonlinear Transient Aeroelastic Problems". *AIAA Journal*, Band 36(9), Seiten 1754 – 1757, Sep 1998.
- [Lin14] Link, M. *Finite Elemente in der Statik und Dynamik*. Springer Vieweg, 4. Auflage, 2014.
- [LLmJbHb07] Long, C., Li-min, N., Jing-bo, Z. und Hao-bin, J. "Application of AMESim & MATLAB simulation on vehicle chassis system dynamics". In "Intelligent Information Technology Application, Workshop on", Seiten 185 – 188. 2007.
- [LRSV82] Lelarasme, E., Ruehli, A. und Sangiovanni-Vincentelli, A. "The Waveform Relaxation Method for Time-Domain Analysis of Large Scale Integrated Circuits". *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, Band 1(3), Seiten 131 – 145, Jul 1982.
- [LS78] Lang, O.R. und Steinhilper, W. *Gleitlager - Berechnung und Konstruktion von Gelitlagern mit konstanter und zeitlich veränderlicher Belastung*. Springer-Verlag, 1978.
- [Mat12] The MathWorks, Inc. *MATLAB Documentation Version: 8.0.0.783 (R2012b)*, 2012. <http://de.mathworks.com/>.
- [MC96] Matz, K. und Clauß, C. "Zur Simulationspraxis bei DAE's mit höherem Index". In "GMM / ITG", Seiten 101 – 108. 1996.
- [MN87] Miekka, U. und Nevanlinna, O. "Convergence of Dynamic Iteration Methods for Initial Value Problems". *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Band 8(4), Seiten 459 – 482, 1987.

- [MOD10] MODELISAR consortium. *Functional Mock-up Interface for Co-Simulation v1.0*, October 2010.
- [Mod14] Modelica Association Project "FMI". *Functional Mock-up Interface for Model Exchange and Co-Simulation v2.0*, July 2014. https://svn.modelica.org/fmi/branches/public/specifications/v2.0/FMI_for_ModelExchange_and_CoSimulation_v2.0.pdf.
- [MSC13] MSC. *Adams 2013.2 Online Help*, 2013.
- [Nas12] Nasdala, L. *FEM - Formelsammlung Statik und Dynamik*. Vieweg+Teubner Verlag, 2. Auflage, 2012.
- [NBS⁺15a] Nowald, G., Boyaci, A., Schmoll, R., Koutsovasilis, P. und Schweizer, B. "Influence of circumferential grooves on the non-linear oscillations of turbocharger rotors in floating ring bearings". In "Proceedings of 2015 IFToMM World Congress", Taipei, Taiwan, To appear on October 2015.
- [NBS⁺15b] Nowald, G., Boyaci, A., Schmoll, R., Koutsovasilis, P., Driot, N. und Schweizer, B. "Influence of axial grooves in full-floating-ring bearings on the nonlinear oscillations of turbocharger rotors". In "11th International Conference on Vibrations in Rotating Machines", Magdeburg, Deutschland, February 2015.
- [NES05] Neumann, J., Einarsson, G. und Schütte, A. "Mutidisziplinäre Simulation eines rollenden, generischen Deltaflügels - Kopplung von Aerodynamik, Flugmechanik und Strukturdynamik". DGLR Paper Friedrichshafen, 2005.
- [Nol09] Nollau, R. *Modellierung und Simulation technischer Systeme*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [Nol13] Nolting, W. *Grundkurs Theoretische Physik 3 - Elektrodynamik*. Springer-Verlag, 10. Auflage, 2013.
- [OV04] Oberschelp, O. und Vöcking, H. "Multirate Simulation of Mechatronic Systems". In "IEEE International Conference on Mechatronics", Istanbul, Turkey, June 2004.
- [PA12] Pombo, J. und Ambrósio, J. "Multiple Pantograph Interaction With Catenaries in High-Speed Trains". *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Band 7(4), Seite 041008, 2012.
- [PBAH06] Puntigam, W., Balic, J., Almbauer, R. und Hager, J. "Transient Co-Simulation of Comprehensive Vehicle Models by Time Dependent Coupling". In "SAE 2006 World Congress & Exhibition", 2006.
- [PKB08] Petridis, K., Klein, A. und Beitelschmidt, M. "Asynchronous method for the coupled simulation of mechatronic systems". *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Band 8(1), Seiten 10521 – 10522, 2008.
- [Pla06] Plato, R. *Numerische Mathematik kompakt*. Vieweg, 3. Auflage, 2006.

- [PS14] Petrascheck, D. und Schwabl, F. *Elektrodynamik*. Springer-Verlag, 2014.
- [Rüd12] Rüdener, A. "Cross-Company System Simulation using the GUSMA-Standard for Co-Simulation". *SIMPACT News*, Band July, Seiten 26 – 30, 2012.
- [Rob02] Robert Bosch GmbH. "Kraftsoffeinspritzeinrichtungen für eine Brennkraftmaschine". Europäische Patentschrift EP 1 296 060 B1, 08 2002.
- [RP02] Rathinam, M. und Petzold, L.R. "Dynamic Iteration Using Reduced Order Models: A Method For Simulation Of Large Scale Modular Systems". *SIAM J. Numer. Anal.*, Band 40, Seiten 1446 – 1474, 2002.
- [SAC12] Schierz, T., Arnold, M. und Clauß, C. "Co-simulation with communication step size control in an FMI compatible master algorithm". In "Proceedings of the 9th International Modelica Conference", Munich, Germany, September 2012.
- [SBC⁺07] Samin, J.C., Brüls, O., Collard, J.F., Sass, L. und Fiset, P. "Multiphysics modeling and optimization of mechatronic multibody systems". *Multibody Syst Dyn*, Band 18, Seiten 345 – 373, 2007.
- [SBTZ13] Stettinger, G., Benedikt, M., Thek, N. und Zehetner, J. "On the difficulties of real-time co-simulation". In "COUPLED PROBLEMS 2013", Sta. Eulalia, Ibiza, Spain, June 17–19 2013.
- [SCB⁺12] Simonidis, C., Craciun, O., Biagini, V., Reuber, C., Schmoll, R. und Schweizer, B. "Electro-mechanical co-simulation of electro-magnetically actuated medium-voltage reclosers". In "NAFEMS European Conference: Multiphysics Simulation 2012", Frankfurt, Germany, October 2012.
- [SCB⁺13] Simonidis, C., Craciun, O., Biagini, V., Reuber, C., Schmoll, R. und Schweizer, B. "Multi-Client Co-Simulation of Electro-Magneto-Mechanically Actuated Three-Phase Medium-Voltage Reclosers". In "NAFEMS World Congress 2013", Salzburg, Austria, June 2013.
- [Sch09a] Schweizer, B. "Oil whirl, oil whip and whirl/whip synchronization occurring in rotor systems with full-floating ring bearings". *Nonlinear Dynamics*, Band 57(4), Seiten 509 – 532, 2009.
- [Sch09b] Schweizer, B. "Total instability of turbocharger rotors - Physical explanation of the dynamic failure of rotors with full-floating ring bearings". *Journal of Sound and Vibration*, Band 328(1-2), Seiten 156 – 190, Nov 2009.
- [Sch10a] Scherf, H. *Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme*. Oldenbourg Verlag München, 4. Auflage, 2010.
- [Sch10b] Schweizer, B. "Dynamics and stability of turbocharger rotors". *Archive of Applied Mechanics*, Band 80(9), Seiten 1017 – 1043, 2010.
- [Sch12] Schmoll, R. "Mehrkörpersysteme und Elektrodynamik: Gekoppelte Simulation". In "130. Norddeutsches Mechanik-Kolloquium", Kassel, Juni 2012.

- [SE11] Schmoll, R. und Ewald, J. "Co-Simulation einer Hochdruckpumpe für PKW-Dieseleinspritzsysteme". In "FLUIDON Konferenz 2011", Aachen, 2011.
- [SEW⁺12a] Schmoll, R., Ewald, J., Wolf, C., Tuzcu, S., Schweizer, B., Murrenhoff, H., Knoll, G. und Rienäcker, A. "Co-Simulation einer Hochdruckpumpe mit dem Common-Rail-Hydrauliksystem". Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen - Abschlussbericht, Vorhaben Nr. 1001, AiF-Nr. 16060 N, 2012.
- [SEW⁺12b] Schmoll, R., Ewald, J., Wolf, C., Tuzcu, S., Schweizer, B., Murrenhoff, H., Knoll, G. und Rienäcker, A. "Co-Simulation einer Hochdruckpumpe mit dem Common-Rail-Hydrauliksystem". Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen - Informationstagung Motoren, Herbsttagung 2012, Dortmund, Heft R 560, 2012.
- [Sha05] Shabana, A.A. *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge University Press, 3. Auflage, 2005.
- [SHV07] Savcenco, V., Hundsdorfer, W. und Verwer, J.G. "A multirate time stepping strategy for stiff ordinary differential equations". *BIT Numerical Mathematics*, Band 47, Seiten 137 – 155, 2007.
- [SK09] Schwarz, H.R. und Köckler, N. *Numerische Mathematik*. Vieweg + Teubner, 7. Auflage, 2009.
- [Ske89] Skelboe, S. "Stability properties of backward differentiation multirate formulas". *Applied Numerical Mathematics*, Band 5, Seiten 151 – 160, 1989.
- [SL14a] Schweizer, B. und Lu, D. "Predictor/corrector co-simulation approaches for solver coupling with algebraic constraints". *Z. angew. Math. Mech.*, May 2014.
- [SL14b] Schweizer, B. und Lu, D. "Semi-implicit co-simulation approach for solver coupling". *Archive of Applied Mechanics*, August 2014.
- [SL14c] Schweizer, B. und Lu, D. "Stabilized index-2 co-simulation approach for solver coupling with algebraic constraints". *Multibody Syst Dyn*, June 2014.
- [SLL14] Schweizer, B., Li, P. und Lu, D. "Explicit and Implicit Co-Simulation Methods: Stability and Convergence Analysis for Different Solver Coupling Approaches". *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, September 2014.
- [SM11a] Solcia, T. und Masarati, P. "Efficient Multirate Simulation of Complex Multibody Systems Based on Free Software". In "ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference", ASME International, Washington, DC, USA, August 28-31 2011.
- [SM11b] Solcia, T. und Masarati, P. "Multirate Simulation of Complex Multibody Systems". In "Multibody Dynamics 2011", Brussels, Belgium, July 2011.
- [SMCS11] Simonidis, C., Mechler, G., Chladny, R. und Stengel, G. "Mehrkriterienoptimierung eines wirbelstrominduzierten Linearaktors". *VDI Mechatronik*, Band 60(2), 2011.

- [SS11] Schmoll, R. und Schweizer, B. "Co-Simulation of Multibody and Hydraulic Systems: Comparison of Different Coupling Approaches". In "ECCOMAS Thematic Conference - Multibody Dynamics 2011", Brussels, Belgium, July 2011.
- [SS12] Schmoll, R. und Schweizer, B. "Convergence Study of Explicit Co-Simulation Approaches with Respect to Subsystem Solver Settings". *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Band 12, Seiten 81 – 82, 2012.
- [SSS⁺13] Schmoll, R., Schweizer, B., Simonidis, C., Craciun, O. und Biagini, V. "Solver Coupling between Multibody and Electro-Magnetic Systems". In "ECCOMAS Thematic Conference - Multibody Dynamics 2013", Zagreb, Croatia, July 2013.
- [SSS14] Simonidis, C., Schmoll, R. und Schweizer, B. "Coupling of Structural and Multibody Mechanics in Switchgear Development". In "NAFEMS European Conference on Multiphysics Simulation", Manchester, U.K., October 2014.
- [SSSS12] Simonidis, C., Stengel, G., Schmoll, R. und Schweizer, B. "Co-Simulation elektromechanischer Systeme am Beispiel eines wirbelstrominduzierten Linearaktors". In "NAFEMS deutschsprachige Konferenz 2012", Bamberg, Deutschland, Mai 2012.
- [SSSS13] Simonidis, C., Stengel, G., Schmoll, R. und Schweizer, B. "Co-Simulation elektromechanischer Systeme am Beispiel eines wirbelstrominduzierten Linearaktors". *NAFEMS Online-Magazin*, Band 1(25), Seiten 80 – 87, 2013.
- [ST10] Stratbücker, S. und van Treeck, C. "CoSimA+ - Co-Simulation Adaptation Platform". *IBP-Mitteilung*, Band 37(505), 2010.
- [SWP12] Strehmel, K., Weiner, R. und Podhaisky, H. *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen - Nichtsteife, steife und differential-algebraische Gleichungen*. Vieweg + Teubner, 2. Auflage, 2012.
- [TSB⁺11] van Treeck, C., Stratbücker, S., Bolineni, S.R., Schmidt, C. und Wölki, D. "Coupling Heterogeneous Computational Codes for Human-Centred Indoor Thermal Performance Analysis". In "Building Simulation 2011", November 2011.
- [TWZ07] Tan, D., Wang, Y. und Zhang, L. "Research on the Parameter Identification of LuGre Tire Model Based on Genetic Algorithms". In "Proceedings on Intelligent Systems and Knowledge Engineering (ISKE2007)", Atlantis Press, Chengdu, China, October 2007.
- [VA99] Veitl, A. und Arnold, M. "Coupled Simulation of Multibody Systems and Elastic Structures". In J.A.C. Ambrosio und W. Schiehlen (Herausgeber), "Advances in Computational Multibody Dynamics", Seiten 635 – 644. 1999.
- [VAH03] Vötter, A., von Appen, F. und Holert, B. "System/Strukturdynamik-Cosimulation eines elektrisch angetriebenen Landeklappensegmentes". In "Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress 2003", München, November 2003.

- [Val09] Valasek, M. "Modeling, simulation and control of mechatronical systems". In M. Arnold und W. Schiehlen (Herausgeber), "Simulation Techniques for Applied Dynamics", Band 507 von *CISM Courses and Lectures*, Seiten 75 – 140. Springer, 2009.
- [VEGMM05] Verhoeven, A., El Guennouni, A., ter Maten, E.J.W. und Mattheij, R.M.M. "Multirate methods for the transient analysis of electrical circuits". *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Band 5(1), Seiten 821 – 822, 2005.
- [Vie14] Viel, A. "Implementing stabilized co-simulation of strongly coupled systems using the Functional Mock-up Interface 2.0". In "Proceedings of the 10th International ModelicaConference", Seiten 213 – 223. Lund, Sweden, March 2014.
- [VKV04] Vaculin, O., Krüger, W.R. und Valasek, M. "Overview of Coupling of Multibody and Control Engineering Tools". *Vehicle System Dynamics*, Band 41(5), Seiten 415 – 429, 2004.
- [Völ10] Völker, L. *Untersuchung des Kommunikationsintervalls bei der gekoppelten Simulation*. Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie, 2010.
- [VM11] Valasek, M. und Mraz, L. "Parallelization of multibody system dynamics by heterogeneous multiscale method". In "ECCOMAS Thematic Conference - Multibody Dynamics 2011", Brussels, Belgium, July 2011.
- [VMMT07] Verhoeven, A., Maten, E.J.W.T., Mattheij, R.M.M. und Tasic, B. "Stability analysis of the BDF Slowest-first multirate methods". *Int. J. Comput. Math.*, Band 84(6), Seiten 895 – 923, June 2007.
- [VTB⁺08] Verhoeven, A., Tasic, B., Beelen, T., ter Maten, E. und Mattheij, R. "BDF Compound-Fast Multirate Transient Analysis with Adaptive Stepsize Control". *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics*, Band 3(3 - 4), Seiten 275 – 297, 2008.
- [WCSW97a] Wünsche, S., Clauß, C., Schwarz, P. und Winkler, F. "Microsystem Design Using Simulator Coupling". In "Proceedings of the 1997 European conference on Design and Test", EDTC '97, Seiten 113 – 118. IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 1997.
- [WCSW97b] Wünsche, S., Clauss, C., Schwarz, P. und Winkler, F. "Electro-thermal circuit simulation using simulator coupling". *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, Band 5(3), Seiten 277 – 282, 1997.
- [WOAL95] de Wit, C.C., Olsson, H., Aström, K. und Lischinsky, P. "A new model for control of systems with friction". *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Band 40(3), Seiten 419 – 425, Mar 1995.
- [Woe05] Woernle, C. "Manuskript zur Vorlesung: Dynamik von Mehrkörpersystemen". Vorlesungsskript, Universität Rostock, 2005.

-
- [ZI08] Zimmerschied, R. und Isermann, R. "Regularisierungsverfahren für die Identifikation mittels lokal-affiner Modelle". *at - Automatisierungstechnik*, Band 56(7), Seiten 339 – 349, 2008.
- [ZKT14] Zehetner, J., Kokal, G.S.S. und Toye, B. "Echtzeit-Co-Simulation für die Regelung eines Motorprüfstands". *Automobiltechnische Zeitschrift*, Band 116(02), Seiten 41 – 45, 2014.
- [ZLF⁺06] Zhou, P., Lin, D., Fu, W.N., Ionescu, B. und Cendes, Z.J. "A General Co-Simulation Approach for Coupled Field-Circuit Problems". *IEEE Transactions on Magnetics*, Band 42(4), Seiten 1051 – 1054, 2006.

Glossar

Co-Simulation	Kopplung von zwei oder mehr dynamischen Solvern (Zeitintegrationsverfahren)
Makroschritt	Zeitdiskretisierungsschritt der Co-Simulation, Kommunikationszeitschritt
Mikroschritt	Zeitdiskretisierungsschritt eines Subsystemsolvers
Solverkopplung	Kopplung eines dynamischen Solvers (Zeitintegrationsverfahren) mit einem oder mehreren statischen Gleichungslösern

Abkürzungsverzeichnis

BDF	Rückwärts-Differentiationsformeln, engl. <i>Backward Differentiation Formulas</i>
CFD	numerische Strömungsmechanik, engl. <i>Computational Fluid Dynamics</i>
DAE	differential-algebraische Gleichung, engl. <i>Differential-Algebraic Equation</i>
DGL	gewöhnliche Differentialgleichung, engl. ODE <i>Ordinary Differential Equations</i>
El.-dyn.	Elektrodynamik
FE	<u>F</u> inite- <u>E</u> lemente
FEM	<u>F</u> inite- <u>E</u> lemente- <u>M</u> ethode
FMI	<i>Functional Mock-Up Interface</i> [BOÅ ⁺ 12] http://functional-mockup-interface.org/
HHT	<i>Hilber-Hughes-Taylor</i> Zeitintegrationsverfahren [HHT77, HH78]
MKS	<u>M</u> ehr <u>k</u> ör <u>p</u> ersystem, engl. MBS <i>Multi Body System</i>
NRMSE	<i>Normalized Root Mean Square Error</i> (→ Gl. (2.34))
ODEx	explizites <i>Runge-Kutta</i> Zeitintegrationsverfahren der Ordnung x (→ C.1)
PDE	Partielle Differentialgleichung, engl. <i>Partial Differential Equation</i>
RB	<u>R</u> and <u>b</u> edingung(en)

RBE2	engl. <i>Rigid Boundary Element</i> , kinematische Kopplung (engl. <i>kinematic coupling</i>) von FE-Knoten
RHS	engl. <i>Right Hand Side</i> , „rechte Seite“ einer Differentialgleichung
RP	Referenzpunkt (engl. <i>Reference Point</i>)
SI2	<i>Stabilized Index-2 formulation</i>
VCV	Volumenstromregelventil, engl. <i>Volume Control Valve</i>
WRMSE	<i>Weighted Root Mean Square Error</i> (\rightarrow (2.36))
WSTIFF	<i>Wielenga stiff integrator</i> von Adams [MSC13]

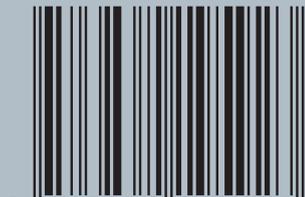
Formelzeichen

A	Fläche
\underline{A}	Systemmatrix
\underline{A}	Vektorpotential
\underline{B}	Eingangsmatrix
B	Breite der Lagerschale
\underline{B}	magnetische Flussdichte
\underline{C}	Ausgangsmatrix, Dämpfungsmatrix
C	Kapazität eines Kondensators
c	Steifigkeit
\underline{D}	Durchgangsmatrix
D	Diode
d	Dämpfungskonstante
\underline{D}	dielektrische Verschiebung
\underline{E}	reelle Matrix (ggf. singulär)
E	Elastizitätsmodul
e	absoluter Fehler
eps	Maschinengenauigkeit, bei <i>double precision</i> $eps \approx 2.22 \cdot 10^{-16}$
\underline{E}	elektrisches Feld
F	Kraft
\underline{f}	i. Allg. nichtlineare vektorielle Funktion
\bar{F}	dimensionslose Kraft
\underline{F}	äußerer Kraftvektor
\underline{G}	<i>Jacobi</i> -Matrix
\underline{g}	i. Allg. nichtlineare vektorielle Funktion
H	Makroschrittweite, dimensionslose Spaltfunktion
\underline{h}	i. Allg. nichtlineare vektorielle Funktion
h	Mikroschrittweite
H_{max}	maximale Makroschrittweite
H_{min}	minimale Makroschrittweite

\underline{H}	Magnetfeld
I	Strom
\underline{I}	innerer Kraftvektor
\underline{j}	Stromdichte
$\underline{\underline{M}}$	Steifigkeitsmatrix
L	Induktivität, Stablänge
M	Drehmoment
m	Masse
$\underline{\underline{M}}$	Massenmatrix
n	Drehzahl
p	Polynomgrad, Druck
\bar{p}	dimensionsloser Druck
q_{max}	$\in [1, \infty[$ maximale Makroschrittweiten-Vergrößerung
q_{min}	$\in]0, 1]$ maximale Makroschrittweiten-Verkleinerung
q	$\in]0, 1]$ Sicherheitsfaktor für die Makroschrittweitensteuerung
\underline{q}	Vektor der generalisierten Koordinaten
R	elektrischer Widerstand, Innenradius der Lagerschale
r	Außenradius des Rotorzapfens
S	Schalter
t	Zeit
T_{ij}	<i>Maxwell</i> scher Spannungstensor
T_n	Makrozeitpunkt
t_n	diskreter (Mikro-)Zeitpunkt
TOL	benutzerdefinierte Toleranz der Makroschrittweitensteuerung
tol	benutzerdefinierte Toleranz eines Subsystemsolvers
\underline{u}	Eingangsvektor
V	Spannung
v	Geschwindigkeit
\underline{v}	Vektor der generalisierten Geschwindigkeiten, Geschwindigkeit eines Leiters
\underline{w}	Knotenverschiebungen
x	Position (x -Koordinate)
\underline{y}	Ausgangsvektor
\bar{z}	dimensionslose Breitenkoordinate
\underline{z}	Zustandsvektor
α	P-Regler Parameter der Makroschrittweitensteuerung
β	I-Regler Parameter der Makroschrittweitensteuerung
β_R	<i>Rayleigh</i> Dämpfung
Δ	numerische, „kleine“ Störung
δ'	dimensionslose Geschwindigkeit in tangentialer Richtung
δ_{ij}	<i>Kronecker-Delta</i> , $\delta_{ij} = 0 \forall i \neq j$ und $1 \forall i = j$
ϵ_0	$\approx 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ elektrische Feldkonstante
ε	numerischer Fehler, dimensionslose Exzentrizität

ε'	dimensionslose Geschwindigkeit in radialer Richtung
ϵ_r	Permeabilitätszahl
η	dynamische Viskosität
λ	<i>Lagrange</i> Multiplikator
μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ magnetische Feldkonstante
μ_r	Dielektrizitätszahl
μ	<i>Lagrange</i> Multiplikator
$\underline{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit
Φ	skalares Potential
ρ	Dichte, Ladungsdichte
ϱ	Gewichtung zwischen relativem und absolutem Fehler
σ	elektrische Leitfähigkeit
θ	Umfangskoordinate
\square_i	$i = 1, \dots, N_y$ Komponenten des Ausgangsvektors
\square_j	$j = 1, \dots, N_u$ Komponenten des Eingangsvektors
$\square^{(k)}$	$k = 0, \dots, N_k$ <i>Newton</i> -Iterationen
\square_l	$l = 1, \dots, N_z$ Komponenten des Zustandsvektors
\square_n	$n = 0, \dots, N$ Zeitschritte
$\dot{\square}$	Erste Zeitableitung
$\ddot{\square}$	Zweite Zeitableitung
$ \square $	Absolutbetrag
div	Divergenzoperator: $\text{div } \underline{V} = \nabla \cdot \underline{V}$
$\exp(\square)$	Exponentialfunktion
grad	Gradient: $\text{grad } v = \nabla v$
mean(\square)	Mittelwert
∇	<i>Nabla</i> -Operator: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$
$\ \square\ $	Norm
\mathcal{O}	<i>Landau</i> -Symbol
rot	Rotationsoperator: $\text{rot } \underline{V} = \nabla \times \underline{V}$
sgn(\square)	Vorzeichenfunktion (Signumfunktion)

ISBN 978-3-86219-592-3



9 783862 195923 >