

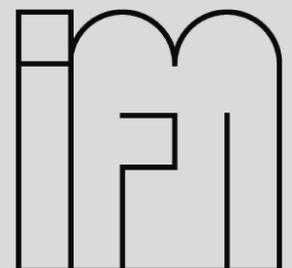
Mitteilung des Instituts für Mechanik

1/2017

**Erweiterung der UMAT-Implementierung eines
Thermoviskoplastizitätsmodells um die Erfassung von
Schädigung und den konsistenten Tangentenoperator**

Alexander Szczepaniak

Universität Kassel
Fachbereich Maschinenbau
Institut für Mechanik



Herausgeber

Der Geschäftsführende Direktor
Institut für Mechanik
Universität Kassel

Organisation und Verwaltung

Sekretariat
Institut für Mechanik
Universität Kassel
Mönchebergstr. 7
34125 Kassel
Deutschland

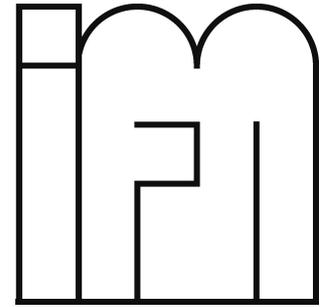
Der Inhalt dieser Arbeit muss nicht das eingereichte oder publizierte Original sein, sondern kann Änderungen beinhalten.

© 2017 Institut für Mechanik
Universität Kassel
Mönchebergstr. 7
34125 Kassel
Deutschland
www.ifm.maschinenbau.uni-kassel.de

Universität Kassel

Fachbereich Maschinenbau

Institut für Mechanik



Diplomarbeit 2

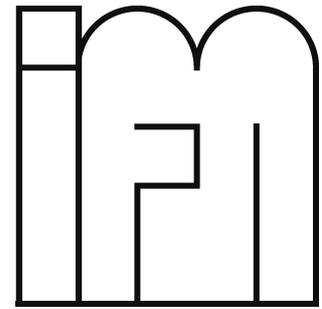
**Erweiterung der UMAT-Implementierung eines
Thermoviskoplastizitätsmodells um die
Erfassung von Schädigung und den
konsistenten Tangentenoperator**

ALEXANDER SZCZEPANIAK

Universität Kassel

Fachbereich Maschinenbau

Institut für Mechanik



**Erweiterung der UMAT-Implementierung eines
Thermoviskoplastizitätsmodells um die
Erfassung von Schädigung und den
konsistenten Tangentenoperator**

ALEXANDER SZCZEPANIAK

Diplomarbeit 2
im gestuften Studiengang Maschinenbau

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. A. Matzenmiller
Dipl.-Ing. M. Schmerbauch

Kassel, August 2015

Erklärung

Hiermit versichere ich, Alexander Szczepaniak, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der aufgeführten Quellen angefertigt zu haben. Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Schriften entnommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Kassel, den 22. August 2015

Unterschrift: _____

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis	i
Abbildungsverzeichnis	iii
Symbolverzeichnis	x
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Ziele der Arbeit	1
1.3 Gliederung der Arbeit	2
2 Grundlagen des Thermoviskoplastizitätsmodells mit Schädigung	4
2.1 Simultane Kalt-/Warmumformung	4
2.2 Charakterisierung des temperaturabhängigen Werkstoffverhaltens von Stahl . .	5
2.3 Rheologische Materialmodellierung	6
2.3.1 Rheologische Materialmodellierung eines vereinfachten Thermoviskoplastizitätsmodells	6
2.3.2 Konzept der effektiven Spannungen	7
2.3.3 Erweiterung zum Thermoviskoplastizitätsmodell nach Bröcker und Matzenmiller	7
2.3.4 Materialmodell in 3D-Formulierung im effektiven Modellzustand	9
2.4 Betrachtung von Fließkurven des Thermoviskoplastizitätsmodells	11
2.5 Der konsistente Tangentenoperator	12
2.5.1 Der Tangentenoperator im Newton-Raphson-Verfahren	12
2.5.2 Zusammenfassung des Newton-Raphson-Verfahrens als iterativer Prozess	13
3 Implementierung der Schädigung	15
3.1 Konzept der effektiven Spannung	15
3.1.1 Erfassung Zug-/Druckasymmetrie	15
3.1.2 Hinweise zur Implementierung	15
3.2 Berechnung der Schädigungsvariable	17
3.2.1 Schädigungsentwicklung	17
3.2.2 Hinweise zur Implementierung	17
3.3 Anpassungen zur Energiespeicherung	20
3.3.1 Viskoplastische Arbeit	20
3.3.2 Dissipierte Arbeit	20
3.3.3 Gespeicherte Energie	21
3.3.4 Anmerkungen zur Implementierung	21
3.4 Zusammenfassung	22
4 Studien am Materialmodell mit implementierter Schädigung	23
4.1 Druck-Zug-Druck-Versuch bei konstanter Starttemperatur	23
4.1.1 Beschreibung des FE-Modells	23
4.1.2 Ergebnisauswertung hinsichtlich physikalischer Plausibilität	23

Plastische Dehnung	23
Spannung und Verfestigungsanteile	23
Hydrostatischer Druck	27
Temperatur und Energie	27
4.2 Versuch mit monotoner Belastung bei veränderlicher Starttemperatur	28
4.3 Versuch mit monotoner Belastung bei veränderlicher Dehnrate	28
4.4 Verwendung der Nonlocal-Formulierung in LS-DYNA	29
4.5 Ergebnis	31
5 Implementierung des konsistenten Tangentenoperators	32
5.1 Konsistente Tangente im Modellzustand ohne Schädigung	32
5.2 Konsistente Tangente im Modellzustand mit Schädigung	32
5.3 Implementierung als UTAN-Subroutine	36
5.3.1 Beschreibung der UTAN-Subroutine	36
5.3.2 Verwendung der Voigt-Notation	36
5.3.3 Beschreibung des Programmalgorithmus	38
6 Konvergenzstudien	40
6.1 Vorgehensweise	40
6.2 Ein-Element-Untersuchung	40
6.2.1 FE-Modell	40
6.2.2 Güte der Näherungslösungen	41
6.2.3 Numerische Effizienz der Näherungslösungen	42
6.3 Konvergenzverhalten des Viertelzylinders bei optimalen Rahmenbedingungen	44
6.3.1 FE-Modell	44
6.3.2 Güte der Näherungslösungen	44
6.3.3 Numerische Effizienz der Näherungslösungen	45
6.4 Konvergenzstudien der Tangente mit Schädigung am Viertelzylinder	46
6.4.1 Vorbemerkungen zur Untersuchung	46
6.4.2 Güte der Näherungslösungen	47
6.4.3 Numerische Effizienz der Näherungslösungen	47
6.4.4 Anmerkung zur Implementierung der Tangente	49
6.5 Validierung durch Simulation des Kalt-/Warmumformungsprozesses der Flanschschwelle	50
6.5.1 Modellbeschreibung	50
6.5.2 Bemerkung zur Optimierung numerischer Effizienz	52
6.5.3 Auswertung der Berechnungsvarianten	52
6.6 Validierungsergebnis	54
7 Identifikation der Schädigungsparameter	55
7.1 Erläuterungen zu den Schädigungsparametern	55
7.2 Identifikation	55
7.2.1 Strategie	55
7.2.2 Parameteridentifikation in Matlab	56
7.2.3 Parameteridentifikation in LS-DYNA	57
7.2.4 Identifikationsergebnis	59
8 Zusammenfassung und Ausblick	60

Literaturverzeichnis	II
A Anhang	III
A.1 Materialmodell in 3D-Formulierung im effektiven Modellzustand	III
A.2 Materialmodell in 3D-Formulierung mit Erfassung von Schädigung	VI
A.3 Temperaturabhängige Materialparameter	IX
A.4 Auflistung der Materialparameter	X
A.5 Auszüge verwendeter LS-DYNA-Input-Decks	XI

Tabellenverzeichnis

6.2-1	Vergleich des numerischen Aufwands für die Berechnung mit veränderlichen Zeitschrittgrößen Δt_0	43
6.2-2	Verlaufstabelle der Konvergenzwerte bei Zeitschrittgröße $\Delta t_0 = 500\text{ms}$	43
6.3-1	Vergleich des numerischen Aufwands für die isothermen Berechnungen des Viertelzylinders ohne Schädigung	45
6.3-2	Verlaufstabelle der Konvergenzwerte auf $t = 0.05\text{ s}$ bei quasi-statischer Simulation	45
6.4-1	Vergleich des numerischen Aufwands bei veränderlichen Berechnungseinstellungen und ohne Schädigungsentwicklung	50
6.4-2	Vergleich des numerischen Aufwands bei veränderlichen Berechnungseinstellungen und mit Schädigungsentwicklung	51
6.5-1	Konvergenztoleranzwerte für die untersuchten Berechnungsvarianten der Flanschschwelle	51
6.5-2	Ergebnisvergleich der berechneten Varianten des Kalt-/Warmumformungsprozesses	54
7.2-1	Identifizierte Materialparameter der Schädigung für den Werkstoff 51CrV4	58
A.4-1	Identifizierte und vorgegebene Materialparameter des Stahls 51CrV4	X

Abbildungsverzeichnis

2.1-1	Induktive Erwärmung der Welle [Weidig et al., 2008]	4
2.1-2	Simultane Kalt-/Warmumformung der Flanschwellen [Weidig et al., 2008]	4
2.2-1	Spannungs-Dehnungs-Diagramm zur Beschreibung temperaturabhängigen Werkstoffverhaltens [Bröcker, 2014]	5
2.2-2	Rheologisches Modell für die Thermoviskoplastizität [Bröcker, 2014]	5
2.3-1	Idealisierte Einteilung von linearen Verfestigungsverhaltens metallischer Werkstoffe	6
2.3-2	Skizze zum Konzept der effektiven Spannung [Bröcker und Matzenmiller, 2013a]	7
2.3-3	Tensorielle Darstellung des rheologischen Modells der Thermoviskoplastizität mit nichtlinearer Verfestigung, statischer Erholung und temperaturabhängigen Materialparametern [Bröcker, 2014]	9
2.4-1	Simulation von Zugversuchen für Temperaturstufen von 300 K bis 1500 K. Spannungsverlauf bei Schädigung (in Farbe) und effektive Spannungsantwort (in Grau) [Bröcker und Matzenmiller, 2013b]	11
3.1-1	Algorithmus der angepassten UMAT-Subroutine mit Erfassung von Schädigung	16
3.2-1	Algorithmus der angepassten UMAT-Subroutine zur Erfassung von Schädigung	18
3.2-2	Algorithmus der angepassten UMAT-Subroutine zur Erfassung von Schädigung	19
4.1-1	Verschiebungsgesteuerter Druck-Zug-Druck-Versuch an einem zylindrischen Körper	24
4.1-2	Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für die viskoplastische Bogenlänge $\bar{\epsilon}_{vp}$	24
4.1-3	Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für die Schädigungsvariable D	25
4.1-4	Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für die Vergleichsspannung σ_v	25
4.1-5	Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für die isotrope Verfestigung κ	25
4.1-6	Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für die z -Komponente X_{zz} des Tensors der kinematischen Verfestigung \mathbf{X}	26
4.1-7	Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für den hydrostatischen Druck p	26
4.1-8	Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für die Temperatur θ	26
4.1-9	Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für die gespeicherte Energie e_s	27
4.2-1	Auswertungsergebnisse am Element mit der größten Schädigung für unterschiedliche Starttemperaturen θ	28
4.3-1	Auswertungsergebnisse am Element mit der größten Schädigung für unterschiedliche Verschiebungsgeschwindigkeiten \dot{u}	29
4.3-2	Auswertungsergebnisse am Element mit der größten Schädigung für unterschiedliche Verschiebungsgeschwindigkeiten \dot{u}	29
4.4-1	Ergebnisverläufe bei veränderlicher Elementanzahl in der Untersuchung zur Verwendung der Nonlocal-Formulierung	30
4.4-2	Konturplots bei veränderlicher Elementanzahl in der Untersuchung zur Verwendung der Nonlocal-Formulierung	30

5.1-1	Abkürzungen aus [Bröcker, 2014] für den konsistenten Tangentenoperator in Gleichung 5.1-1	33
5.1-2	Abkürzungen aus [Bröcker, 2014] für die Gleichungen aus Abb. 5.1-1	34
5.3-1	Algorithmus der UTAN-Subroutine	39
6.2-1	Verschiebungsgesteuerter Zug-Versuch an einem Ein-Element-Modell	41
6.2-2	Ergebnisverläufe der Ein-Element-Untersuchung	42
6.2-3	Verlaufdiagramme der Konvergenzwerte bei Zeitschrittgröße $\Delta t_0 = 500\text{ms}$	43
6.3-1	Verlauf der Vergleichsspannung σ_v für die isotherme Berechnung des Viertelzylinders ohne Schädigung – Auswertung: Element ID 311	44
6.3-2	Verlaufdiagramme der Konvergenzwerte des Iterationsverlaufs auf $t = 0.05\text{ s}$	46
6.4-1	Ergebnisverläufe für die nicht-isotherme Berechnung mit Schädigungsentwicklung und ohne Schädigungsanteile in der UTAN-Subroutine – Auswertung: Element ID 311	48
6.4-2	Ergebnisverläufe für die isotherme Berechnung mit Schädigungsentwicklung und ohne Schädigungsanteile in der UTAN-Subroutine – Auswertung: Element ID 311	49
6.5-1	Auszug des LS-DYNA-Input-Decks: Vorgabe von Δt_{max}	50
6.5-2	Ausgewertete Umformkraft für die berechneten Varianten des Kalt-/Warmumformungsprozesses	53
6.5-3	Endgeometrie der Flanschelle [Bröcker, 2014]	54
7.2-1	Vergleich zwischen experimentellen Stützstellen (Punkte) und Simulationsergebnissen (Kurven) [Scholtes und Grüning, 2009]	56
7.2-2	Verlauf der Parameteridentifikation: Spannungsverläufe über der viskoplastischen Bogenlänge $\bar{\epsilon}_{vp}$ für unterschiedliche Starttemperaturen	57
7.2-3	Validierung der übernommenen Materialparameter aus [Johnson und Cook, 1985]	59
A.1-1	Tensorielle Darstellung des rheologischen Modells der Thermoviskoplastizität mit nichtlinearer Verfestigung, statischer Erholung und temperaturabhängigen Materialparametern [Bröcker, 2014]	III
A.5-1	Auszug eines LS-DYNA-Input-Decks: Definition der Parameter	XI
A.5-2	Auszug eines LS-DYNA-Input-Decks: Definition der Materialmodelle	XII

Symbolverzeichnis

Abkürzungen

- Abb. Abbildung
EUV Energieumsetzungsverhältnis
FE finite Elemente
FEM Finite-Elemente-Methode
Tab. Tabelle
temp.-abh. temperaturabhängig
vgl. vergleiche

Indizes

- $()_d$ dissipativer Anteil einer Größe
 $()_e$ elastischer/energiespeichernder Anteil einer Größe
 $()_{el}$ elastischer Anteil einer Größe
 $()_\eta$ dem Dämpferelement zugeordnete Größe
 $()_\kappa$ der isotropen Verfestigung zugeordnete Größe
 $()_{\kappa_0}$ dem Reibelement zugeordnete Größe
 $()_s$ der statischen Erholung zugeordnete Größe
 $()_{te}$ thermoelastischer Anteil einer Größe
 $()_{th}$ thermischer Anteil einer Größe
 $()_{tp}$ thermoplastischer Anteil einer Größe
 $()_{vp}$ viskoplastischer Anteil einer Größe
 $()_X$ der kin. Verfestigung zugeordnete Größe (3D-Formulierung)
 $()_\xi$ der kinematischen Verfestigung zugeordnete Größe
 $()_D$ dem geschädigten Modellzustand zugeordnete Größe
^a $()$ Größe im geschädigten Modellzustand

Operatoren

- $\langle a \rangle$ Macauley-Klammer: $\langle a \rangle = (a + |a|)/2$
 $|a|$ Betrag von a

\bar{a}	Bogenlänge $\bar{a} = \int_0^t \dot{a} d\tau$
\bar{A}	Bogenlänge eines Tensors $\bar{A} = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \ \dot{\mathbf{A}}\ d\tau$
$\dot{\bar{A}}$	Rate der Bogenlänge eines Tensors \bar{A}
$H()$	Heaviside-Funktion von $()$
$d()$	(totales) Differential von $()$
$\frac{\partial}{\partial ()}$	partielle Ableitung nach $()$
$\frac{d}{d ()}$	Ableitung nach $()$
$\partial_\theta()$	partielle Ableitung nach θ
$(\dot{\quad})$	Ableitung nach der Zeit
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	Skalarprodukt von Tensoren
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	dyadisches Produkt von Tensoren
\mathbf{A}^D	Deviatoranteil eines Tensors $\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \mathbf{A}^K$
\mathbf{A}^K	Kugelanteil eines Tensors $\mathbf{A}^K = \frac{1}{3} \text{sp}(\mathbf{A}) \mathbf{1}$
\mathbf{A}^T	Transposition eines Tensors
$\text{sp}(\mathbf{A})$	Spur eines Tensors $\text{sp}(\mathbf{A}) = \mathbf{1} \cdot \mathbf{A}$
$\ \mathbf{A}\ $	Frobenius Norm $\ \mathbf{A}\ = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$
$\mathbf{N}(\mathbf{A})$	normierter Anteil $\mathbf{N}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A}}{\ \mathbf{A}\ }$ des Tensors \mathbf{A}

Skalare

α	thermischer Ausdehnungskoeffizient
$\hat{\alpha}(\theta)$	differentieller thermischer Ausdehnungskoeffizient (temp.-abh.)
β	Materialparameter für Energiespeicherung im Reibelement
β_1	Materialparameter für Energiespeicherung im Reibelement
β_2	Materialparameter für Energiespeicherung im Reibelement
$\hat{\beta}(\theta)$	temp.-abh. Parameter für Energiespeicherung im Reibelement
Δt	Zeitschrittweite
Δt_0	Startwert der Zeitschrittweite
Δt_{krit}	erforderliche Zeitschrittweite zum Erreichen von Konvergenz
Δt_{max}	maximale Zeitschrittweite (Zeitschrittsteuerung)
Δt_{min}	minimale Zeitschrittweite (Zeitschrittsteuerung)
δ	innere Dissipation
δ_M	mechanische Dissipation

δ_{th}	thermische Dissipation
δ_{vp}	viskoplastische Dissipation
${}^a\delta_D$	Dissipation infolge Schädigung
$\bar{\varepsilon}$	Bogenlänge der Dehnung ε
$\bar{\varepsilon}_{vp}$	viskoplastische Bogenlänge
$\dot{\varepsilon}_{\kappa S}$	statische Erholungsrate der isotropen Verfestigung
$\dot{\varepsilon}_{\kappa 0S}$	statische Erholungsrate im Reibelement
$\dot{\varepsilon}_{\xi S}$	statische Erholungsrate der kinematischen Verfestigung
$\dot{\varepsilon}_0$	Parameter der Schädigung
$\dot{\bar{\varepsilon}}$	Rate der Bogenlänge $\bar{\varepsilon}$
$\dot{\bar{\varepsilon}}_{vp}$	Rate der viskoplastischen Bogenlänge $\bar{\varepsilon}_{vp}$
$\hat{\varepsilon}_{\kappa S}^*(\theta)$	temp.-abh. Funktion der statischen Erholungsrate $\dot{\varepsilon}_{\kappa S}$
$\hat{\varepsilon}_{\xi S}^*(\theta)$	temp.-abh. Funktion der statischen Erholung $\dot{\varepsilon}_{\xi S}$
$\hat{\varepsilon}_{X_S}^*(\theta)$	temp.-abh. Funktion der statischen Erholung $\dot{\mathbf{E}}_{X_S}$
ε	Dehnung
ε_{el}	elastische Dehnung
ε_{κ}	innere Dehnungsvariable der isotropen Verfestigung
$\varepsilon_{\kappa}^{\infty}$	Sättigungswert der inneren Dehnung ε_{κ}
$\varepsilon_{\kappa 0}$	innere (energiespeichernde) Dehnungsvariable im Reibelement
ε_{th}	thermische Dehnung
ε_{vp}	viskoplastische Dehnung
ε_X^{∞}	Sättigungswert der Norm $\ \mathbf{E}_X\ $ der inneren Dehnung \mathbf{E}_X
ε_{ξ}	innere Dehnungsvariable der kinematischen Verfestigung
$\varepsilon_{\xi}^{\infty}$	Sättigungswert der inneren Dehnung ε_{ξ}
ε_{c0}	Parameter der Schädigung
ε_{f0}	Parameter der Schädigung
$\dot{\varepsilon}_{\kappa S}^*$	Parameter der temp.-abh. Funktion $\hat{\varepsilon}_{\kappa S}^*(\theta)$
$\dot{\varepsilon}_{\xi S}^*$	Parameter der temp.-abh. Funktion $\hat{\varepsilon}_{\xi S}^*(\theta)$
$\dot{\varepsilon}_{X_S}^*$	Parameter der temp.-abh. Funktion $\hat{\varepsilon}_{X_S}^*(\theta)$
η	Viskosität
$\hat{\eta}(\theta)$	temp.-abh. Viskosität
$\hat{\kappa}^{\infty}(\theta)$	temp.-abh. Sättigungswert der isotropen Verfestigung

$\hat{\kappa}_0(\theta)$	temp.-abh. Anfangsfließspannung
κ	isotrope Verfestigung
κ^∞	Sättigungswert der isotropen Verfestigung
κ_0	Anfangsfließspannung
κ_s	statische Erholung
λ	plastischer Multiplikator
ν	Querdehnzahl
φ	Energieumsetzungsverhältnis (EUV)
ψ_{th}	thermische freie Energie
ψ	freie Energie
ψ_{el}	elastische freie Energie
ψ_κ	freie Energie der isotropen Verfestigung
ψ_{κ_0}	freie Energie des Reibelements
ψ_ξ	freie Energie der kinematischen Verfestigung
ρ	Massendichte
σ	Spannung
σ_η	Spannung im Dämpfer
σ_κ	Spannung im Verfestigungselement
σ_{κ_0}	Spannung im Reibelement
σ_ξ	Spannung in Feder der kinematischen Verfestigung
σ_{ov}	viskoser Überspannungsanteil
σ_η	viskose Überspannung
τ	Integrationsvariable
θ	absolute Temperatur
θ_E	Parameter der temp.-abh. Steifigkeit $\hat{E}(\theta)$
θ_κ	Parameter der temp.-abh. Steifigkeit $\hat{E}_\kappa(\theta)$
θ_{κ_0}	Parameter der temp.-abh. Anfangsfließspannung $\hat{\kappa}_0(\theta)$
θ_X	Parameter der temp.-abh. Steifigkeit $\hat{E}_X(\theta)$
θ_ξ	Parameter der temp.-abh. Steifigkeit $\hat{E}_\xi(\theta)$
θ_0	Referenztemperatur
$\hat{\xi}^\infty(\theta)$	temp.-abh. Sättigungswert der kinematischen Verfestigung
ξ	kinematische Verfestigung

ξ^∞	Sättigungswert der kinematischen Verfestigung
$\hat{D}(\kappa, \theta)$	Schalterfunktion der viskosen Überspannung
D^∞	Sättigungswert der Schädigungsvariablen
D	Schädigungsvariable
D_0	Parameter zur Dimensionskorrektur
D_1	Materialparameter der Schalterfunktion $\hat{D}(\kappa, \theta)$
d_2	Parameter der Schädigung
d_3	Parameter der Schädigung
d_4	Parameter der Schädigung
d_5	Parameter der Schädigung
$\dot{\bar{E}}_{vp}$	Rate der Bogenlänge \bar{E}_{vp}
$\hat{E}(\theta)$	temp.-abh. Elastizitätsmodul
$\hat{E}_\kappa(\theta)$	temp.-abh. Steifigkeit der isotropen Verfestigung
$\hat{E}_X(\theta)$	temp.-abh. Steifigkeit der kin. Verfestigung (3D-Formulierung)
$\hat{E}_\xi(\theta)$	temp.-abh. Steifigkeit der kinematischen Verfestigung
E	Elastizitätsmodul
e	innere Energie
E_κ	Steifigkeit der isotropen Verfestigung
E_X	Steifigkeit der kin. Verfestigung (3D-Formulierung)
E_ξ	Steifigkeit der kinematischen Verfestigung
E_t	Verfestigungsmodul
\bar{E}_{vp}	Bogenlänge der viskoplastischen Dehnung \mathbf{E}_{vp}
F	Fließfunktion (3D-Formulierung)
$\hat{G}(\theta)$	temp.-abh. Schubmodul
$\hat{K}(\theta)$	temp.-abh. Kompressionsmodul
$\hat{m}(\theta)$	temp.-abh. Exponent des plastischen Multiplikators λ
m	Exponent des plastischen Multiplikators / der Dämpferspannung
m_0	Parameter des temp.-abh. Exponenten $\hat{m}(\theta)$
m_1	Parameter des temp.-abh. Exponenten $\hat{m}(\theta)$
n_D	Parameter der Schädigung
n_κ	Verfestigungsexponent der isotropen Verfestigung
$n_{\kappa S}$	Erholungsexponent der isotropen Verfestigung

n_{κ_0}	Exponent der temp.-abh. Anfangsfließspannung $\hat{\kappa}_0(\theta)$
n_X	Verfestigungsexponent der kin. Verfestigung (3D-Formulierung)
n_ξ	Verfestigungsexponent der kinematischen Verfestigung
n_{ξ_S}	Erholungsexponent der kinematischen Verfestigung
n_{X_S}	Erholungsexponent der kin. Verfestigung (3D-Formulierung)
p_{VP}	viskoplastische Spannungsleistung
Q_E	Parameter der temp.-abh. Steifigkeit $\hat{E}(\theta)$
Q_η	Parameter der temp.-abh. Viskosität $\hat{\eta}(\theta)$
Q_κ	Parameter der temp.-abh. Steifigkeit $\hat{E}_\kappa(\theta)$
Q_{κ_S}	Parameter der temp.-abh. Funktion $\hat{\varepsilon}_{\kappa_S}^*(\theta)$
Q_{κ_0}	Parameter der temp.-abh. Anfangsfließspannung $\hat{\kappa}_0(\theta)$
Q_X	Parameter der temp.-abh. Steifigkeit $\hat{E}_X(\theta)$
Q_ξ	Parameter der temp.-abh. Steifigkeit $\hat{E}_\xi(\theta)$
Q_{ξ_S}	Parameter der temp.-abh. Funktion $\hat{\varepsilon}_{\xi_S}^*(\theta)$
Q_{X_S}	Parameter der temp.-abh. Funktion $\hat{\varepsilon}_{X_S}^*(\theta)$
s	Entropie
t	Zeit
w_{VP}	viskoplastische Arbeit
$\hat{X}^\infty(\theta)$	temp.-abh. Sättigungswert der Norm $\ \mathbf{X}\ $ der kin. Verfestigung
X^∞	Sättigungswert der kin. Verfestigung (3D-Formulierung)

Tensoren

$\mathbf{1}$	Einheitstensor 2. Stufe
\mathbf{C}^*	konstanter Stofftensor 4. Stufe der Momentankonfiguration
$\hat{\mathbf{C}}_k$	konsistente Tangente im effektiven Modellzustand
${}^a\hat{\mathbf{C}}_k$	konsistente Tangente im geschädigten Modellzustand
\mathbf{E}	Verzerrungstensor
\mathbf{E}_{el}	elastischer Anteil des Dehnungstensors
\mathbf{E}_{th}	thermischer Anteil des Dehnungstensors
\mathbf{E}_{VP}	viskoplastischer Anteil des Dehnungstensors
\mathbf{H}_d	innere Dehnung in dissipativem Dehnungselement
\mathbf{H}_e	innere Dehnung im Reibelement
\mathbf{R}_d	innere Dehnung in dissipativem Dehnungselement

- \mathbf{R}_e innere Dehnung im Verfestigungselement
- \mathbf{T} Spannungstensor
- \mathbf{T}_η Spannung im Dämpfer
- \mathbf{T}_κ Spannung im Verfestigungselement
- \mathbf{T}_{κ_0} Spannung im Reibelement
- \mathbf{T}_X Spannung in Feder der kinematischen Verfestigung
- \mathbf{Y}_d innere Dehnung in dissipativem Dehnungselement
- \mathbf{Y}_e innere Dehnung in Feder der kinematischen Verfestigung

1 Einleitung

1.1 Motivation

In der historischen Entwicklung der Technik spielt Wärme in der Umformung von metallischen Bauteilen seit langem eine entscheidende Rolle. Eine kontinuierliche Weiterentwicklung im Bereich der Umformprozesse hat es ermöglicht, Werkstücke mit komplizierten Geometrien in großer Stückzahl produzieren zu können. Allerdings erfordert dessen gewinnbringende Produktion eine robuste Prozessauslegung, die oftmals mit kostenintensiven Vorversuchen verbunden ist.

In der Auslegungsphase von robusten Produktionsprozessen hat sich die computergestützte Simulation in den letzten Jahrzehnten als sehr nützliches Werkzeug erwiesen, dessen Einsatz zu einer maßgeblichen Kostenreduzierung durch eine Verringerung von experimentellen Versuchsreihen beiträgt. Die computergestützte Simulation solcher Verfahren ermöglicht daneben eine vielfältige und detaillierte Untersuchung, die sich in der Optimierung altbewährter und der Entwicklung neuer und innovativer Produktionsprozesse als nützlich erweist.

Allerdings wird für die Simulation von komplexem, thermomechanischen Werkstoffverhalten ein Materialmodell vorausgesetzt, das in der Lage ist, die relevanten physikalischen Effekte ausreichend genau zu erfassen. Insbesondere das simultane Kalt-/Warm Schmieden [Weidig et al., 2008] mit differentieller Temperaturführung und komplexer Umformstrategie stellt aus Sicht der computergestützten Simulation eine enorme Herausforderung dar, die eine hinreichend genaue Prognose des temperaturabhängigen Werkstoffverhaltens erfordert.

Zur Berechnung derartig komplexer Umformprozesse wie der simultanen Kalt-/Warmumformung wurde im Rahmen von DFG-Forschungsvorhaben am Fachgebiet Numerische Mechanik ein Thermoviskoplastizitätsmodell entwickelt, das die nichtlineare isotrope und kinematische Verfestigung mit statischer Erholung, die Dehnratensensitivität sowie insbesondere die thermische Entfestigung im relevanten Temperaturbereich abbilden kann [Bröcker, 2014] und eine spannungs-, dehnraten- und temperatursensitive Schädigungserfassung erlaubt [Bröcker und Matzenmiller, 2012]. Das effektive Materialmodell (ohne Schädigungsprognose) wurde über die User-Schnittstelle in das kommerzielle FEM-Programm LS-DYNA für die explizite Zeitintegration implementiert und anhand der simultanen Kalt-/Warmumformung einer Flanschswelle validiert [Bröcker, 2014].

1.2 Ziele der Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit soll die zur Verfügung gestellte UMAT-Subroutine um das in [Bröcker und Matzenmiller, 2012] entwickelte Materialmodell mit Schädigungserfassung erweitert werden. Die Implementierung ist anschließend anhand geeigneter Beispielrechnungen zu verifizieren. In Ergänzung sollen die mit der Erweiterung um Schädigungserfassung hinzukommenden Materialparameter für den Stahlwerkstoff 51CrV4 identifiziert und verifiziert werden. In der Berechnung von Prozessen, die über einen größeren Zeitraum ablaufen, ist die Verwendung von impliziter Zeitintegration ein effizienter und üblicher Weg Rechenzeit einzusparen.

Für dessen Anwendung ist der konsistente Tangentenoperator für das Materialmodell im effektiven sowie geschädigten Modellzustand als UTAN-Subroutine zu implementieren und dessen Einsetzbarkeit mithilfe unterschiedlicher Berechnungsbeispiele zu prüfen.

1.3 Gliederung der Arbeit

Im hierauf folgenden Kapitel sollen die grundlegenden Konzepte des Thermoviskoplastizitätsmodells erörtert werden. Dazu wird zunächst der Kalt-/Warmumformungsprozess zusammengefasst vorgestellt, der verdeutlicht, welche Herausforderungen aus Sicht der Simulation bestehen und welche Anforderungen an ein Materialmodell daraus resultieren. Anschließend werden zur Vorstellung des Thermoviskoplastizitätsmodells die für das Kalt-/Warmumformen relevanten charakteristischen Merkmale des Materialverhaltens metallischer Werkstoffe wiedergegeben. Danach wird das Konzept der rheologischen Materialmodellierung anhand eines vereinfachten Thermoviskoplastizitätsmodells neben dem Konzept der effektiven Spannungen erläutert. Nach der zusammengefassten Erweiterung des vereinfachten Thermoviskoplastizitätsmodells auf das Thermoviskoplastizitätsmodell nach Bröcker und Matzenmiller und einem einfachen Berechnungsbeispiel schließt das Kapitel mit einer kurzgefassten Vorstellung des Newton-Raphson-Verfahrens ab, in der verdeutlicht werden soll, inwiefern der konsistente Tangentenoperator für die FE-Berechnung mittels impliziter Zeitintegration benötigt wird.

In Kapitel 3 werden alle Schritte ausführlich dargestellt, die für die Erweiterung der zur Verfügung gestellten UMAT-Subroutine um die Erfassung von Schädigung nötig sind. Dazu wird die Überführung des Materialmodells aus dem effektiven Modellzustand in den geschädigten Modellzustand beschrieben. Neben dem Konzept der effektiven Spannung und der Berechnung der dazu notwendigen Schädigungsvariablen D werden die daraus resultierenden Anpassungen der dissipierten Arbeit in Bezug auf die Modellgleichungen sowie auf die Umsetzung in der Implementierung erläutert. Die Erweiterungen am Spannungsalgorithmus aus [Bröcker, 2014] werden mithilfe von Struktogrammen anschaulich erklärt.

In Kapitel 4 soll untersucht werden, ob mithilfe der um Schädigungserfassung erweiterten UMAT-Subroutine physikalisch plausible Ergebnisse berechnet werden können. Damit dient es zur Verifikation der Implementierung sowie der ursprünglichen Erweiterung des effektiven Materialmodells. In Zuge dessen wird ein zylindrischer Körper unter veränderlicher Last, Temperatur sowie Dehnrates untersucht. Außerdem wird anhand einer Untersuchung zur Nonlocal-Formulierung geprüft, ob diese am Thermoviskoplastizitätsmodell mit Schädigung angewendet werden kann.

Kapitel 5 behandelt die Implementierung des konsistenten Tangentenoperators. Zunächst werden die der Implementierung zugrunde liegenden Gleichungen der konsistenten Tangente zusammengefasst und hergeleitet. Dabei wird für die konsistente Tangente im Modellzustand mit Schädigung die Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand berücksichtigt. Abschließend wird nach allgemeiner Beschreibung der UTAN-Subroutine, dessen Einschränkungen auf die Konsistenz der Tangente und der verwendeten Voigtschen Notation der programmierte Algorithmus mithilfe eines Struktogramms ausführlich erläutert.

Die Identifikation der Materialparameter für den Werkstoff 51CrV4, die mit der implementierten Schädigungserfassung hinzugekommen sind, wird in Kapitel 7 behandelt. Nach Erläuterung der verwendeten Identifikationsstrategie sowie dessen Durchführung schließt das Kapitel mit dem Identifikationsergebnis und der Auflistung aller Materialparameter der Schädigung

ab.

Im letzten Kapitel werden die Ergebnisse dieser Arbeit nochmals zusammengefasst dargestellt und ein Ausblick auf womöglich weiter zu verfolgende Untersuchungsschwerpunkte gegeben.

2 Grundlagen des Thermoviskoplastizitätsmodells mit Schädigung

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Konzepte des Thermoviskoplastizitätsmodells vorgestellt. Die Vorstellung eines Produktionsprozesses wird zunächst verdeutlichen, welche Herausforderungen aus Sicht der Simulation bestehen und welche Anforderungen an ein Materialmodell daraus resultieren. Dazu werden die relevanten charakteristischen Merkmale des Materialverhaltens metallischer Werkstoffe zunächst allgemein zusammengefasst. Anschließend wird das Konzept der rheologischen Materialmodellierung anhand eines vereinfachten Thermoviskoplastizitätsmodells vorgestellt und danach der gewählte Ansatz zur Schädigungserfassung erläutert. Nach der zusammengefassten Erweiterung des vereinfachten Thermoviskoplastizitätsmodells auf das Thermoviskoplastizitätsmodell nach Bröcker und Matzenmiller, Erläuterungen zu dessen Konstitutivgleichungen und einem einfachen Berechnungsbeispiel schließt das Kapitel mit einer kurzgefassten Vorstellung des Newton-Raphson-Verfahrens ab, in der verdeutlicht werden soll, wofür der konsistente Tangentenoperator in FE-Berechnungen mit impliziter Zeitintegration benötigt wird.

2.1 Simultane Kalt-/Warmumformung

In Hinblick auf eine Prozesssimulation stellt der in [Weidig et al., 2008] beschriebene Umformprozess eine große Herausforderung dar. Ein zylindrisches Werkstück aus Schmiedestahl wird – siehe Abb. 2.1-1 roter Bereich – über Induktion lokal erwärmt, wodurch es zu hohen Temperaturunterschieden im Vergleich zu den kalten Enden des Werkstücks kommt. Ein Materialmodell, mit dem sich die in Abb. 2.1-2 dargestellte Umformung ausreichend genau simulieren lassen soll, muss unter anderem das stark temperaturabhängige Materialverhalten von metallischen Werkstoffen abbilden. Im weiteren Verlauf dieses Produktionsprozesses erfolgt eine große Umformung im erwärmten Bereich, der sich eine prozessintegrierte Härtung durch Ab-

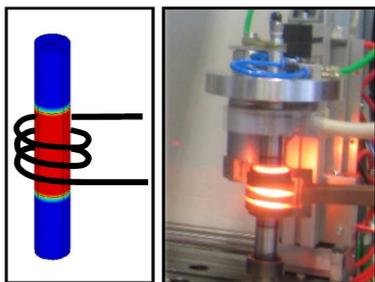


Abb. 2.1-1: Induktive Erwärmung der Welle [Weidig et al., 2008]

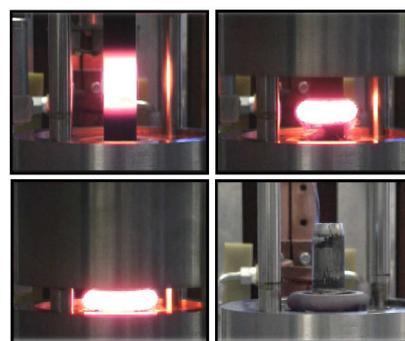


Abb. 2.1-2: Simultane Kalt-/Warmumformung der Flanschswelle [Weidig et al., 2008]

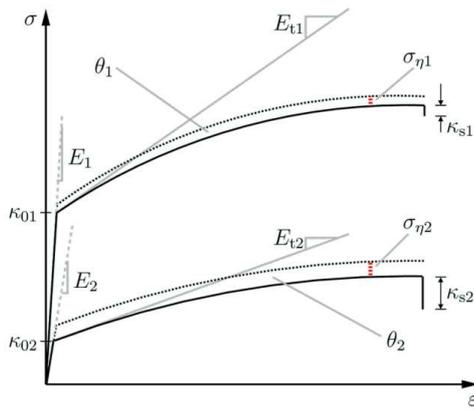


Abb. 2.2-1: Spannungs-Dehnungs-Diagramm zur Beschreibung temperaturabhängigen Werkstoffverhaltens [Bröcker, 2014]

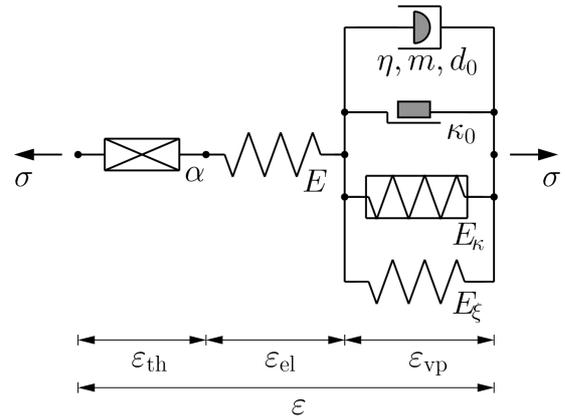


Abb. 2.2-2: Rheologisches Modell für die Thermoviskoplastizität [Bröcker, 2014]

kühlung direkt im Gesenk anschließt. Während des Umformvorgangs findet an den Wellenenden eine Kaltumformung mit Kaltverfestigung statt. Je nachdem, welche der genannten Effekte erfasst werden sollen, muss das Materialmodell entsprechend formuliert sein.

2.2 Charakterisierung des temperaturabhängigen Werkstoffverhaltens von Stahl

Metallische Werkstoffe weisen ein stark temperaturabhängiges Materialverhalten auf. Die im folgenden dargestellten charakteristischen Merkmale werden in dem im weiteren Verlauf vorgestellten Thermoviskoplastizitätsmodell erfasst.

Das in Abb. 2.2-1 dargestellte Spannungs-Dehnungs-Diagramm zeigt Spannungsverläufe für zwei Temperaturen θ , für die $\theta_2 > \theta_1$ gilt. Bei sehr geringen Verformungen verhalten sich Metalle in guter Näherung zunächst elastisch. In der Mikrostruktur des Werkstoffes kommt es zu reversiblen Verzerrungen, sodass nach einem Zyklus von Be- und Entlastung der Werkstoff den Ausgangszustand wieder annimmt. Der dort noch vorliegende lineare Zusammenhang zwischen Spannung σ und Dehnung ε wird durch den Elastizitätsmodul E definiert. Die Steigung des linearen Bereiches nimmt mit steigender Temperatur ab: $E_1 > E_2$.

Überschreitet die Spannung die Anfangsfließspannung κ_0 , kommt es zu irreversiblen Veränderungen in der Mikrostruktur des Werkstoffes, die sich durch plastische Deformationen des Werkstoffes äußern. In Bezug auf die Abb. 2.2-1 gilt für die dargestellten Kurven $\kappa_{01} > \kappa_{02}$. Nach Überschreiten der Anfangsfließspannung liegt ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen Spannung und plastischer Dehnung vor. Eine differentielle Betrachtung am Beginn des nichtlinearen plastischen Bereiches liefert die Tangentensteigung, die auch als Verfestigungsmodul E_t bezeichnet wird. Für diesen gilt: $E_{t1} > E_{t2}$. Folglich kommt es bei höheren Temperaturen zu einer langsamer fortschreitenden und geringeren Verfestigung als bei niedrigeren Temperaturen.

Der Spannungsanteil, der sich durch die Viskosität des Materials ergibt, wird als viskose Überspannung bezeichnet. Diese fällt bei höheren Temperaturen, relativ zur Gesamtspannung betrachtet, größer aus: $\frac{\sigma_{\eta 1}}{\sigma_1} < \frac{\sigma_{\eta 2}}{\sigma_2}$. Bei einer höheren Temperatur liegt also eine größere Dehnratenabhängigkeit der Spannungsantwort vor.

Die zeitabhängige Rückbildung der Verfestigung wird als statische Erholung bezeichnet. Die-

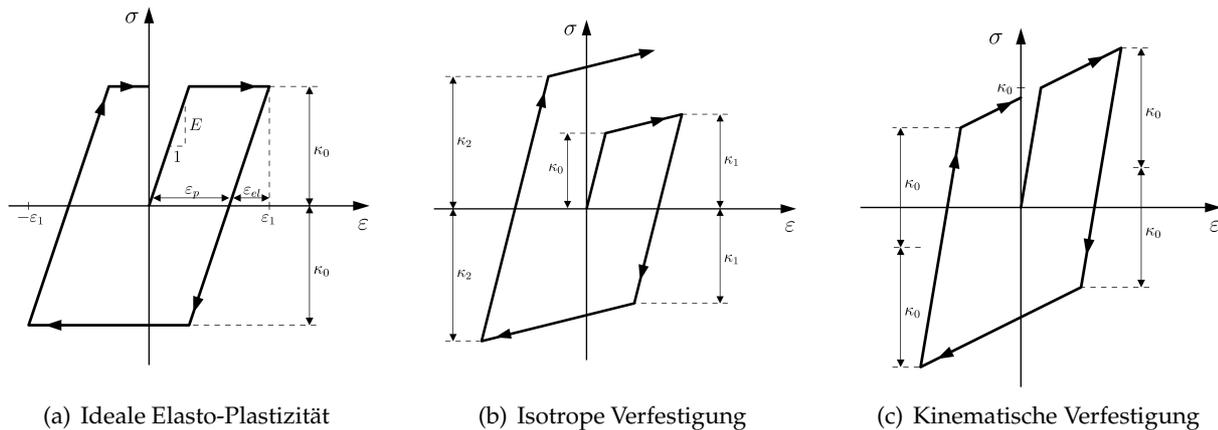


Abb. 2.3-1: Idealisierte Einteilung von linearen Verfestigungsverhaltens metallischer Werkstoffe

se ist auf thermisch aktivierte Erholungsvorgänge im Metallgefüge zurückzuführen. Es gilt $\kappa_{s1} < \kappa_{s2}$, womit bei erhöhter Temperatur eine verstärkte Rückbildung der Verfestigung auftritt [Bröcker, 2014].

2.3 Rheologische Materialmodellierung

Ein besonderes Merkmal des Thermoviskoplastizitätsmodells nach Bröcker und Matzenmiller [Bröcker und Matzenmiller, 2013b] ist, dass es, im Gegensatz zu vielen anderen Materialmodellen, auf Grundlage rheologischer Modelle entwickelt worden ist. Durch diese Vorgehensweise handelt es sich bei diesem Materialmodell nicht nur um einen Satz an Gleichungen, sondern um ein anschauliches System aus Grundelementen, bei dem sich der Zusammenhang zwischen Deformationen und Spannungen durch die Regeln der Netzwerkbildung ergeben. Unter Einhaltung der grundlegenden Regeln für die Reihen- und Parallelschaltung in Netzwerken ist es mithilfe von rheologischen Grundelementen möglich, einzelne charakteristische Merkmale zu einem Gesamtmodell zusammenzufügen. Die Betrachtung eines Materialmodells als Netzwerk von Grundelementen vereinfacht letztendlich den Umgang mit dem Materialmodell, sei es in dessen Entwicklung, Weiterentwicklung, oder der Materialparameteridentifikation.

2.3.1 Rheologische Materialmodellierung eines vereinfachten Thermoviskoplastizitätsmodells

In Abb. 2.2-2 ist eine vereinfachte Variante des Thermoviskoplastizitätsmodells nach Bröcker und Matzenmiller dargestellt, mit dessen Hilfe das Konzept der Materialmodellierung auf Grundlage rheologischer Modelle vorgestellt wird.

Durch eine von den restlichen Grundelementen isolierte Betrachtung des Federelements (Materialparameter E), bildet das rheologische Modell aus Abb. 2.2-2 zunächst elastisches Materialverhalten ab. Das Hinzufügen eines Reibelementes (Materialparameter κ_0) ermöglicht dem Modell, die in Abb. 2.3-1(a) dargestellte ideale Elasto-Plastizität abzubilden.

Wird die bisher vorliegende Reihenschaltung um ein zum Reibelement parallel geschaltetes Verfestigungselement (Materialparameter E_κ) ergänzt, ermöglicht dies die Abbildung linearer isotroper Verfestigung (siehe Abb. 2.3-1(b)). Die Erweiterung um ein dazu parallel geschaltetes

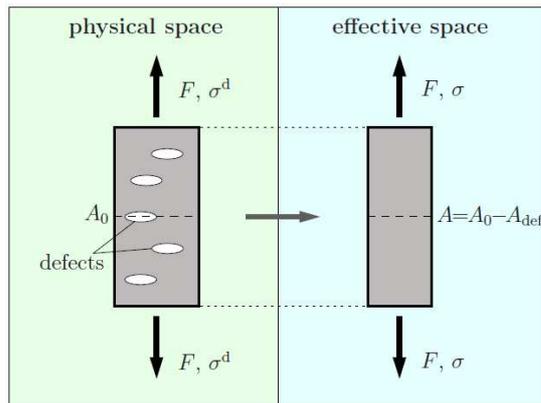


Abb. 2.3-2: Skizze zum Konzept der effektiven Spannung [Bröcker und Matzenmiller, 2013a]

Federelement (Materialparameter E_ξ) liefert, wie in Abb. 2.3-1(c) dargestellt, die Abbildung linearer kinematischer Verfestigung. Ein zur Parallelschaltung hinzugefügter Dämpfer fügt dem für die Plastizität verantwortlichen Zweig des rheologischen Modells noch Dehnratenabhängigkeit und somit viskoses Materialverhalten hinzu. Wird abschließend das rheologische Modell um ein thermisches Dehnelement (Materialparameter α) erweitert, ergibt dies ein Thermoelastoviskoplastizitätsmodell mit linearer isotroper und kinematischer Verfestigung.

2.3.2 Konzept der effektiven Spannungen

Eine Schädigungserfassung lässt sich in Materialmodellen mithilfe des Konzepts der effektiven Spannungen nach Rabotnov umsetzen – vgl. [Lemaitre, 1996]. Der Grundgedanke dieses Konzeptes ist, dass es im Material in Folge von Beanspruchungen zu Mikrorissen, Poren oder anderen Schadensformen kommt, welche zu einer Verringerung des effektiv tragenden Querschnitts führen – siehe Abb. 2.3-2.

Durch Betrachtung zweier materieller Körper im physikalischen und effektiven Spannungsraum (s. Abb. 2.3-2) wird deutlich: Bei Einhaltung des Dehnungsäquivalenzprinzips und gleichbleibender Last liegt zwischen physikalischer Spannung und effektiver Spannung ein von der Querschnittsabnahme abhängiger, proportionaler Zusammenhang vor. Die Beziehung zwischen der geschädigten und der effektiven Spannung wird mithilfe der Schädigungsvariablen D , die Werte von 0 (ungeschädigt) bis 1 (vollständig geschädigt) annehmen kann, hergestellt. Im Materialmodell wird für die Entwicklung der Schädigung das Schädigungskriterium nach Johnson und Cook [Johnson und Cook, 1985] verwendet um eine spannungs-, dehnraten- und temperaturabhängige Entwicklung zu realisieren.

2.3.3 Erweiterung zum Thermoelastoviskoplastizitätsmodell nach Bröcker und Matzenmiller

Das in Abschnitt 2.3.1 vorgestellte Materialmodell kann mithilfe geeigneter Änderungen zum Thermoelastoviskoplastizitätsmodell nach Bröcker und Matzenmiller [Bröcker und Matzenmiller, 2012] [Bröcker und Matzenmiller, 2013a] [Bröcker und Matzenmiller, 2013b] [Bröcker und Matzenmiller, 2014] [Bröcker, 2014] erweitert werden, das nichtlineare isotrope und kinematische Verfestigung mit statischer Erholung, Dehnratensensitivität sowie insbesondere auch die thermische Entfestigung im relevanten Temperaturbereich abbilden kann und eine spannungs-,

dehnraten- und temperatursensitive Schädigungserfassung erlaubt. Das Thermoviskoplastizitätsmodell erfasst alle in Abschnitt 2.2 genannten Charakteristika temperaturabhängigen Materialverhaltens von metallischen Werkstoffen. Es stellt eine Weiterentwicklung des Bammann-Modells [Bammann, 1990] und des EMMI-Modells [Marin et al., 2006] dar.

Dem vereinfachten Thermoviskoplastizitätsmodell aus Abschnitt 2.3.1 wird zunächst eine Schädigungserfassung nach dem Konzept der effektiven Spannungen hinzugefügt. Ausgehend von der Gleichgewichtsbeziehung zwischen den einzelnen Grundelementen im rheologischen Modell lässt sich zeigen, dass die Verminderung der Gesamtspannung σ nach $^a\sigma$ infolge der Schädigung zur Verminderung aller Spannungen in den einzelnen Grundelementen führt – siehe Gl. A.2-5 im Anhang. Nach konsequenter Umsetzung der Spannungsverminderung durch die Schädigungsvariable in den Modellgleichungen ermöglicht die Einführung einer geeigneten Differentialgleichung zur Beschreibung der Schädigungsentwicklung nach Johnson und Cook [Johnson und Cook, 1985] die Erfassung von Schädigung im Materialmodell. Die genaue Vorgehensweise wird ausführlich in [Bröcker und Matzenmiller, 2012] sowie für eine erweiterte Form in Abschnitt 3.1.1 zusammenfassend behandelt.

Geeignete Änderungen an den Definitionen der Grundelemente der kinematischen Verfestigung und der isotropen Verfestigung ermöglichen im nächsten Schritt eine Berücksichtigung von statischer Erholung. Die Rückbildung der Verfestigungen wird dabei in Abhängigkeit der bestehenden Dehnungen, der vorliegenden Temperatur und dafür eigens eingeführter Materialparameter vorgegeben – vgl. [Bröcker und Matzenmiller, 2013b] [Bröcker, 2014].

Die bisher lineare isotrope und kinematische Verfestigung können im nächsten Schritt jeweils in nichtlineare Verfestigungen überführt werden. Die Ergänzung des rheologischen Modells um dissipative Dehnungselemente sorgt dafür, die auftretende Dehnung in den betroffenen Grundelementen zu begrenzen [Bröcker und Matzenmiller, 2012] [Bröcker und Matzenmiller, 2013b] [Bröcker, 2014]. Durch den von den dissipativen Dehnungselementen aufgenommenen Dehnungsanteil kann ein nichtlinearer Verfestigungsverlauf (siehe Abb. 2.4-1) erreicht werden, wodurch die einzelnen Verfestigungsarten asymptotisch gegen einen Sättigungswert laufen.

Die Einführung geeigneter temperaturabhängiger Funktionen für die Materialparameter ermöglicht dem Konstitutivmodell, den in der simultanen Kalt-/Warmumformung relevanten Temperaturbereich von Raumtemperatur bis nahe dem Schmelzpunkt des Werkstoffes abzubilden. Damit lassen sich die in Abb. 2.4-1 dargestellten temperaturabhängigen Spannungsverläufe eines simulierten Zugversuchs realisieren. Als Grundlage der eingeführten Funktionen wird unter anderem der Tangens Hyperbolicus verwendet, dessen charakteristischer Verlauf sich für das temperaturabhängige Verhalten anbietet.

Die vorangegangene kurze Zusammenfassung kann mithilfe von [Bröcker und Matzenmiller, 2012] [Bröcker und Matzenmiller, 2013a] [Bröcker und Matzenmiller, 2013b] [Bröcker und Matzenmiller, 2014] [Bröcker, 2014] im genaueren nachvollzogen werden. Das aus diesen Schritten resultierende Materialmodell wird im nächsten Abschnitt in dreidimensionaler Formulierung für kleine Verzerrungen im effektiven Modellzustand zusammenfassend vorgestellt. Dieses ist vor der Implementierung als User-Materialmodell in eine hypoelastische Formulierung zur Anwendung bei finiten Deformationen unter Annahme kleiner elastischer Verzerrungen überführt worden, wobei für das Spannungsupdate von der objektiven JAUMANN-Spannungsrate Gebrauch gemacht worden ist – siehe [Bröcker und Matzenmiller, 2014] [Bröcker, 2014].

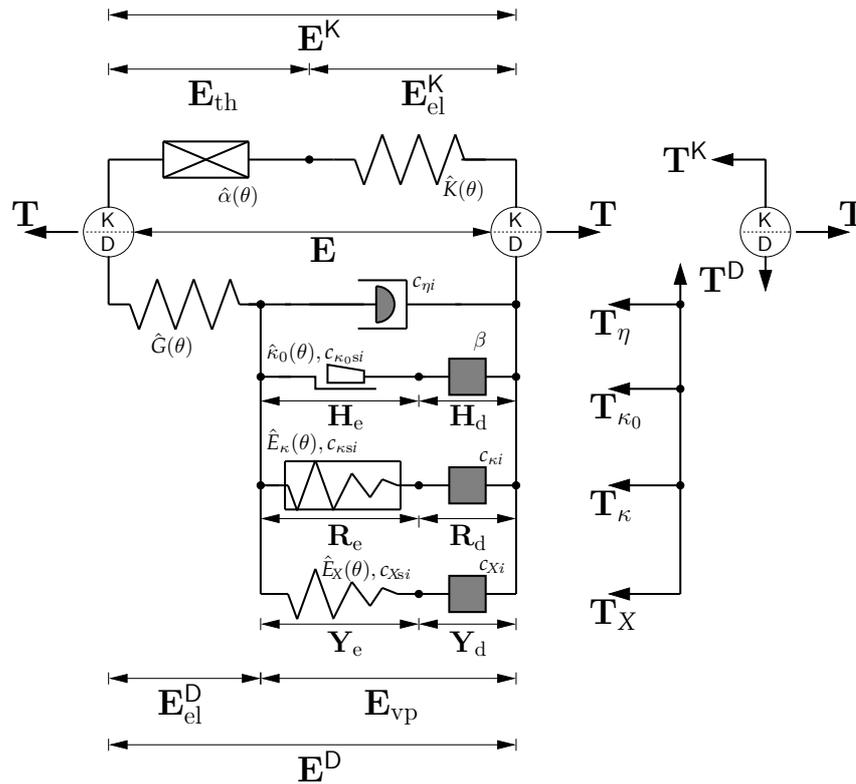


Abb. 2.3-3: Tensorielle Darstellung des rheologischen Modells der Thermoviskoplastizität mit nicht-linearer Verfestigung, statischer Erholung und temperaturabhängigen Materialparametern [Bröcker, 2014]

2.3.4 Materialmodell in 3D-Formulierung im effektiven Modellzustand

Die in Abschnitt 2.3.3 zusammenfassend geschilderte Erweiterung führt nach einer räumlichen Erweiterung – siehe [Bröcker, 2014] – zu dem in Abb. 2.3-3 als rheologisches Modell dargestellten Thermoviskoplastizitätsmodell im effektiven Modellzustand. Der Vollständigkeit halber werden nachfolgend die wichtigsten der dem Konstitutivmodell zugrunde liegenden Modellgleichungen aufgeführt, die zum Verständnis der Implementierung erforderlich sind.

Das Modell in Abb. 2.3-3 unterteilt sich in zwei Bereiche: Dem Kugelanteil sowie dem deviatorischen Anteil der Dehnung. Dessen kinematische Beziehung resultiert aus den Schaltungsregeln rheologischer Modelle zu:

$$\mathbf{E} = \underbrace{\mathbf{E}_{th} + \mathbf{E}_{el}^K}_{\mathbf{E}^K} + \underbrace{\mathbf{E}_{el}^D + \mathbf{E}_{vp}}_{\mathbf{E}^D}, \quad \dot{\mathbf{E}}_{th} = \hat{\alpha}(\theta) \dot{\theta} \mathbf{1}. \quad (2.3-1)$$

Eine weitere additive Zerlegung des viskoplastischen Bereichs entsprechend seiner einzelnen Pfade liefert:

$$\mathbf{E}_{vp} = \mathbf{H}_e + \mathbf{H}_d = \mathbf{R}_e + \mathbf{R}_d = \mathbf{Y}_e + \mathbf{Y}_d. \quad (2.3-2)$$

Dazu passend zerfällt auch der Spannungstensor \mathbf{T} in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil

$$\mathbf{T} = \underbrace{2 \hat{G}(\theta) \mathbf{E}_{el}^D}_{\mathbf{T}^D} + \underbrace{\hat{K}(\theta) \text{sp}(\mathbf{E}_{el}) \mathbf{1}}_{\mathbf{T}^K}, \quad (2.3-3)$$

wobei der deviatorische Spannungsanteil \mathbf{T}^D der Summe der Teilspannungen aus den vier Parallelketten im viskoplastischen Abschnitt entspricht:

$$\mathbf{T}^D = \mathbf{T}_\eta + \mathbf{T}_{\kappa_0} + \mathbf{T}_\kappa + \mathbf{T}_X. \quad (2.3-4)$$

Die freie Energie des Modells folgt aus den Beiträgen aller Grundelemente zu

$$\psi = \psi_{th} + \psi_M, \quad \psi_{th} = \hat{Q}(\theta) \quad (2.3-5)$$

$$\psi_M = \frac{1}{2\rho} \left(2\hat{G}(\theta) \mathbf{E}_{el}^D \cdot \mathbf{E}_{el}^D + \hat{K}(\theta) \text{sp}(\mathbf{E}_{el})^2 + 2\hat{\kappa}_0(\theta) \varepsilon_{\kappa_0} + \hat{E}_\kappa(\theta) \varepsilon_\kappa^2 + \hat{E}_X(\theta) \mathbf{E}_X \cdot \mathbf{E}_X \right). \quad (2.3-6)$$

Im Materialmodell ist mithilfe der Fließregel und der Fließfunktion unter Verwendung der Frobenius-Norm – siehe [Bröcker, 2014] – definiert, ab wann plastisches Fließen einsetzt. Die Fließregel

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{vp} &= \lambda \mathbf{N}(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}), \quad \lambda = \frac{1}{\hat{\eta}(\theta)} \left\langle \frac{F}{\hat{D}(\kappa, \theta)} \right\rangle^{\hat{m}(\theta)} \\ \mathbf{N}(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}) &= \frac{\mathbf{T}^D - \mathbf{X}}{\|\mathbf{T}^D - \mathbf{X}\|} \end{aligned} \quad (2.3-7)$$

sowie die Fließfunktion

$$F = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{T}^D - \mathbf{X}\| - (\hat{\kappa}_0(\theta) + \kappa) \quad (2.3-8)$$

gehen direkt aus dem Gleichgewicht der Spannungen in Gl. 2.3-4 hervor – siehe [Bröcker, 2014]. Die Evolutionsgleichungen für die isotrope Verfestigung κ ist durch

$$\kappa = \hat{E}_\kappa(\theta) \varepsilon_\kappa, \quad \dot{\varepsilon}_\kappa = \left(1 - \left(\frac{\varepsilon_\kappa}{\varepsilon_\kappa^\infty} \right)^{n_\kappa} \right) \dot{\mathbf{E}}_{vp} - \hat{\varepsilon}_{\kappa S}^*(\theta) \left(\frac{\varepsilon_\kappa}{\varepsilon_\kappa^\infty} \right)^{n_{\kappa S}} \quad (2.3-9)$$

$$\dot{\kappa} = \hat{E}_\kappa(\theta) \left[\left(1 - \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}^\infty(\theta)} \right)^{n_\kappa} \right) \dot{\mathbf{E}}_{vp} - \hat{\varepsilon}_{\kappa S}^*(\theta) \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}^\infty(\theta)} \right)^{n_{\kappa S}} \right] + \frac{\partial_\theta \hat{E}_\kappa(\theta)}{\hat{E}_\kappa(\theta)} \kappa \dot{\theta} \quad (2.3-10)$$

und die kinematische Verfestigung \mathbf{X} durch

$$\mathbf{X} = \hat{E}_X(\theta) \mathbf{E}_X, \quad \dot{\mathbf{E}}_X = \dot{\mathbf{E}}_{vp} - \left(\frac{\|\mathbf{E}_X\|}{\varepsilon_X^\infty} \right)^{n_X} \mathbf{N}(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{E}}_{vp} - \hat{\varepsilon}_{X S}^*(\theta) \left(\frac{\|\mathbf{E}_X\|}{\varepsilon_X^\infty} \right)^{n_{X S}} \mathbf{N}(\mathbf{E}_X) \quad (2.3-11)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \hat{E}_X(\theta) \left[\dot{\mathbf{E}}_{vp} - \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}^\infty(\theta)} \right)^{n_X} \mathbf{N}(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{E}}_{vp} - \hat{\varepsilon}_{X S}^*(\theta) \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}^\infty(\theta)} \right)^{n_{X S}} \mathbf{N}(\mathbf{X}) \right] + \frac{\partial_\theta \hat{E}_X(\theta)}{\hat{E}_X(\theta)} \mathbf{X} \dot{\theta} \quad (2.3-12)$$

unter Berücksichtigungen statischer Erholung festgelegt. Die Raten der isotropen sowie der kinematischen Verfestigung in den Gleichungen 2.3-10 und 2.3-12 setzen sich dabei jeweils aus dem ersten und zweiten Summanden zusammen, welche die nichtlineare Verfestigung beschreiben, dem dritten Summanden für die statische Erholung sowie dem vierten Summanden, durch den die Ab- oder Zunahme der Verfestigung infolge von Temperaturänderungen erfolgt.

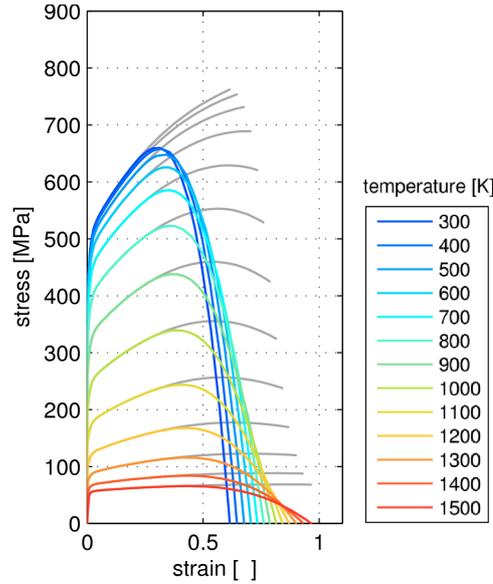


Abb. 2.4-1: Simulation von Zugversuchen für Temperaturstufen von 300 K bis 1500 K. Spannungsverlauf bei Schädigung (in Farbe) und effektive Spannungsantwort (in Grau) [Bröcker und Matzenmiller, 2013b]

Die im Reibelement gespeicherte Energie wird mithilfe von

$$\dot{\varepsilon}_{\kappa_0} = \hat{\beta}(\theta) \left(1 - \left(\frac{\varepsilon_{\kappa}}{\varepsilon_{\kappa}^{\infty}} \right)^{n_{\kappa}} \right) \dot{\bar{E}}_{\text{VP}} - \hat{\varepsilon}_{\kappa\text{S}}^*(\theta) \left(\frac{\varepsilon_{\kappa_0}}{\varepsilon_{\kappa}} \right)^{n_{\kappa\text{S}}} \quad (2.3-13)$$

bestimmt, wobei auch hier durch den ersten und zweiten Summanden das nichtlineare Verhalten erreicht wird und im dritten Summanden die statische Erholung ausgedrückt wird.

Die Bestimmungsgleichung der aufgrund von viskoplastischer Deformation sowie statischer Erholung dissipierten Energie ist durch

$$\begin{aligned} \delta_{\text{M}} = & \frac{1}{\rho} \left[F + (1 - \hat{\beta}(\theta)) \hat{\kappa}_0(\theta) + (\beta(\theta) \hat{\kappa}_0(\theta) + \kappa) \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}^{\infty}(\theta)} \right)^{n_{\kappa}} + \|\mathbf{X}\| \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}^{\infty}(\theta)} \right)^{n_{\text{X}}} \right] \dot{\bar{E}}_{\text{VP}} \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\left(\hat{\kappa}_0(\theta) \left(\frac{\varepsilon_{\kappa_0}}{\varepsilon_{\kappa}} \right)^{n_{\kappa\text{S}}} + \kappa \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}^{\infty}(\theta)} \right)^{n_{\kappa\text{S}}} \right) \hat{\varepsilon}_{\kappa\text{S}}^*(\theta) + \|\mathbf{X}\| \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}^{\infty}(\theta)} \right)^{n_{\text{X}\text{S}}} \hat{\varepsilon}_{\text{X}\text{S}}^*(\theta) \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (2.3-14)$$

definiert. Hierbei werden die Dissipationsanteile der rheologischen Grundelemente für den Dämpfer, dem Reib-, dem Verfestigungselement und der Feder der kinematischen Verfestigung berücksichtigt. Die erste Zeile von Gleichung 2.3-14 beschreibt den Dissipationanteil der viskoplastisch verrichteten Arbeit, die zweite die Dissipation infolge von Erholung.

Die soeben vorgestellten Konstitutivgleichungen des Materialmodells im effektiven Modellzustand werden im Anhang A.1 nochmals zusammengefasst aufgeführt.

2.4 Betrachtung von Fließkurven des Thermoviskoplastizitätsmodells

Die Verwendung des Thermoviskoplastizitätsmodells nach Bröcker und Matzenmiller ermöglicht die Berechnung der in Abb. 2.4-1 dargestellten Fließkurven bei veränderlicher Temperatur. Die in grau dargestellten effektiven Spannungsantworten zeigen den erfolgreich umgesetzten

Ansatz für das nichtlineare Verfestigungsverhalten. An ihnen lässt sich erkennen, dass es zu einer unterschiedlichen Entwicklung des verfestigenden und entfestigenden Anteils der Verfestigungsspannung in Abhängigkeit der Temperatur kommt. Bei Raumtemperatur findet fast ausschließlich Verfestigung statt wodurch es zu dem in Abschnitt 2.3.3 angesprochenen asymptotischen Verlauf kommt. Mit steigender Temperatur nimmt der entfestigende Anteil an der Verfestigungsspannung zu und führt in Summe zu einer deutlichen Entfestigung der Gesamtspannung – s. Abb. 2.4-1.

Die farbigen Verläufe in Abb. 2.4-1 stellen die Fließkurven des Materialmodells mit Schädigung dar. Hier ist eine deutliche Abnahme der Spannung nach Erreichen des Maximums aufgrund des Schädigungsansatzes zu erkennen. Des Weiteren nehmen die kritische Dehnung, welche am Spannungsmaximum vorliegt und den Schädigungsbeginn markiert, sowie die Bruchdehnung mit steigender Temperatur zu. Dies ist mit der temperaturabhängigen Entwicklung der Schädigungsvariablen D zu erklären, welche anhand des Verlaufs der Fließkurven im Entfestigungsbereich gut zu erkennen ist.

2.5 Der konsistente Tangentenoperator

Die Lösung nichtlinearer FE-Berechnungen erfolgt iterativ indem während einzelner Iterationen, den sogenannten Gleichgewichtsiterationen, lineare Berechnungen durchgeführt werden, die zum jeweils nächsten Iterationsschritt führen. Der Grundgedanke dieser iterativen Vorgehensweise ist, dass der nichtlineare Gesamtverlauf schrittweise (inkrementell) auf linearem Weg nachverfolgt werden kann. Der Gesamtverlauf wird dazu, je nach Simulation, in Last- oder Zeitinkremente aufgeteilt. Nichtlineare Verläufe mithilfe linearer Abschnitte möglichst genau zu berechnen, kann sowohl explizit als auch implizit erledigt werden. Für die implizite Zeitintegration nichtlinearer Probleme wird üblicherweise die Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T benötigt, so wie im weiteren Verlauf anhand des Newton-Raphson-Verfahrens (Full-Newton-Verfahren) dargestellt wird. Die Tangentensteifigkeitsmatrix, die auch Tangentenoperator, HESSE-, JACOBI- oder auch Tangentenmatrix genannt wird – siehe [Wriggers, 2001] – wird als konsistent bezeichnet, wenn dessen Herleitung konsistent zum Zeitintegrationsverfahren und damit vollständig und ohne vereinfachende Annahmen erfolgt.

2.5.1 Der Tangentenoperator im Newton-Raphson-Verfahren

Die inkrementelle Vorgehensweise zur Bestimmung nichtlinearer Lösungen geht von der Annahme aus, dass für einen bestimmten Zeitpunkt t die Lösung bekannt ist und dass sie für den nächsten Zeitpunkt $t + \Delta t$ gesucht wird. Im Falle nichtlinearer Finite-Elementen-Gleichungen betrifft das die Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}(\mathbf{u}^*) - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}(\mathbf{u}^*) \quad (2.5-1)$$

zwischen dem Vektor ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}(\mathbf{u}^*)$ für die äußeren Knotenpunktkräfte und dem Vektor ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}(\mathbf{u}^*)$ für die inneren Knotenpunktkräfte, die den Element-Spannungen entsprechen. Für die Gleichgewichtsbedingung wird mithilfe des iterativen Lösungsprozesses die Lösung \mathbf{u}^* gesucht, die

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0} \quad (2.5-2)$$

erfüllt. Wenn im vorherigen Iterationsschritt ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i-1}$ berechnet worden ist, liefert eine Taylorsche Reihenentwicklung

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{f}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i-1}) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right] \Big|_{{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i-1}} (\mathbf{u}^* - {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i-1}), \quad (2.5-3)$$

bei der Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden. Wird angenommen, dass die äußeren Lasten ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}(\mathbf{u}^*)$ unabhängig von \mathbf{u}^* sind, erhält man durch Einsetzen von Gleichung 2.5-1 in 2.5-3 und Verwendung von $\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right] \Big|_{{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i-1}} (\mathbf{u}^* - {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i-1}) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{i-1}. \quad (2.5-4)$$

Wird nun

$$\Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{u}^* - {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i-1} \quad (2.5-5)$$

als Korrektur des Verschiebungsinkrements und

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i-1}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{i-1} \quad (2.5-6)$$

als Tangentensteifigkeitsmatrix im $(i-1)$ ten Iterationsschritt definiert, lässt sich Gleichung 2.5-4 nach

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{i-1} \Delta \mathbf{u}^i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{i-1} \quad (2.5-7)$$

überführen. Da die Taylorreihenentwicklung nach dem linearen Term abgebrochen worden ist, stellt Gleichung 2.5-3 nur eine Näherung dar. Deshalb wird die zuvor definierte Korrektur des Verschiebungsinkrements dazu genutzt, die nächste Verschiebungsnäherung

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i-1} + \Delta \mathbf{u}^i \quad (2.5-8)$$

zu berechnen [Bathe, 1986].

2.5.2 Zusammenfassung des Newton-Raphson-Verfahrens als iterativer Prozess

Zusammengefasst ergibt sich folgender Iterationsprozess, bei dem die Tangentensteifigkeitsmatrix, speziell im Full-Newton-Verfahren, für jeden Iterationsschritt berechnet werden muss: Zu Beginn eines Zeitschrittes $t + \Delta t$ stehen aus dem letzten Zeitschritt die Lösungen ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^0 = {}^t\mathbf{F}$ und ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^0 = {}^t\mathbf{u}$ als Anfangsbedingungen zur Verfügung. Nach Aufstellen der Tangentensteifigkeitsmatrix ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^1$ auf Grundlage der Anfangswerte wird mithilfe des vorgegebenen Lastinkrements ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ und Gleichung 2.5-7 die Korrektur der Verschiebungsinkrements ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^1$ berechnet. Mithilfe der in Gleichung 2.5-8 berechneten neuen Verschiebungsnäherung ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^1$ kann nun vor Abschluss des Iterationsschrittes noch der Vektor der inneren Knotenpunktkräfte ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^1({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^1)$ ausgewertet werden.

Der soeben beschriebene Iterationsvorgang kann mehrfach wiederholt werden bis geforderte Werte für die Konvergenztoleranzen erreicht werden. Anschließend wird im nächsten Zeitschritt mithilfe des nächsten Lastinkrements abermals bis zum Erfüllen der Konvergenztoleranzen iteriert. Dies wird solange fortgesetzt, bis das nichtlineare Problem bis zum letzten

Zeitinkrement gelöst worden ist oder es aufgrund nicht erreichbarer Forderung bezüglich der Konvergenztoleranzen zum Abbruch des Lösungsverfahrens kommt.

3 Implementierung der Schädigung

Die zur Verfügung gestellte UMAT-Subroutine des Thermoviskoplastizitätsmodells aus [Bröcker, 2014] soll im Rahmen dieser Arbeit um eine Erfassung von Schädigung erweitert werden. Dieses Kapitel beschreibt die Überführung aus dem effektiven Modellzustand in den geschädigten Modellzustand des Materialmodells. Neben dem Konzept der effektiven Spannung und der Berechnung der dazu notwendigen Schädigungsvariablen D werden die daraus resultierenden Anpassungen der dissipierten Arbeit in Bezug auf die Modellgleichungen sowie auf die Umsetzung in der Implementierung erläutert.

3.1 Konzept der effektiven Spannung

3.1.1 Erfassung Zug-/Druckasymmetrie

Beim etablierten Konzept der effektiven Spannungen – siehe [Lemaitre, 1996], bei dem die Beziehung

$${}^a\mathbf{T} = (1 - D) \mathbf{T} \quad (3.1-1)$$

für die nominelle (geschädigte) Spannung ${}^a\mathbf{T}$ und die effektive Spannung \mathbf{T} über die Schädigungsvariable D hergestellt wird, erfolgt die Erweiterung um eine Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand mithilfe der Heaviside-Funktion

$$H(-p) = \begin{cases} 1 & : p < 0 \\ 0 & : p > 0 \end{cases} \quad (3.1-2)$$

zu

$${}^a\mathbf{T} = (1 - D) \mathbf{T}^D + (1 - DH(-p)) \mathbf{T}^K. \quad (3.1-3)$$

Dadurch ist gewährleistet, dass im Falle positiven hydrostatischen Druckes p nur der deviatorische Anteil des effektiven Spannungstensors vermindert wird.

3.1.2 Hinweise zur Implementierung

Die Spannungen werden im Spannungsalgorithmus im effektiven Modellzustand berechnet, womit der Spannungsalgorithmus nach [Bröcker, 2014], abgesehen von der Berechnung der Schädigungsvariablen D und den Anpassungen bezüglich der dissipierten Arbeit w_d , weitestgehend erhalten bleibt. Erst am Ende der UMAT-Subroutine wird Gleichung 3.1-3 angewendet, um LS-DYNA den geschädigten Spannungstensor als Spannungsantwort zu übergeben. Die effektiven Spannungen werden als History-Variablen gespeichert, um im nächsten Zeitschritt als Berechnungsgrundlage im effektiven Modellzustand zu dienen.

Um eine genauere Auswertung und Vergleichbarkeit aller Spannungsanteile zu ermöglichen,

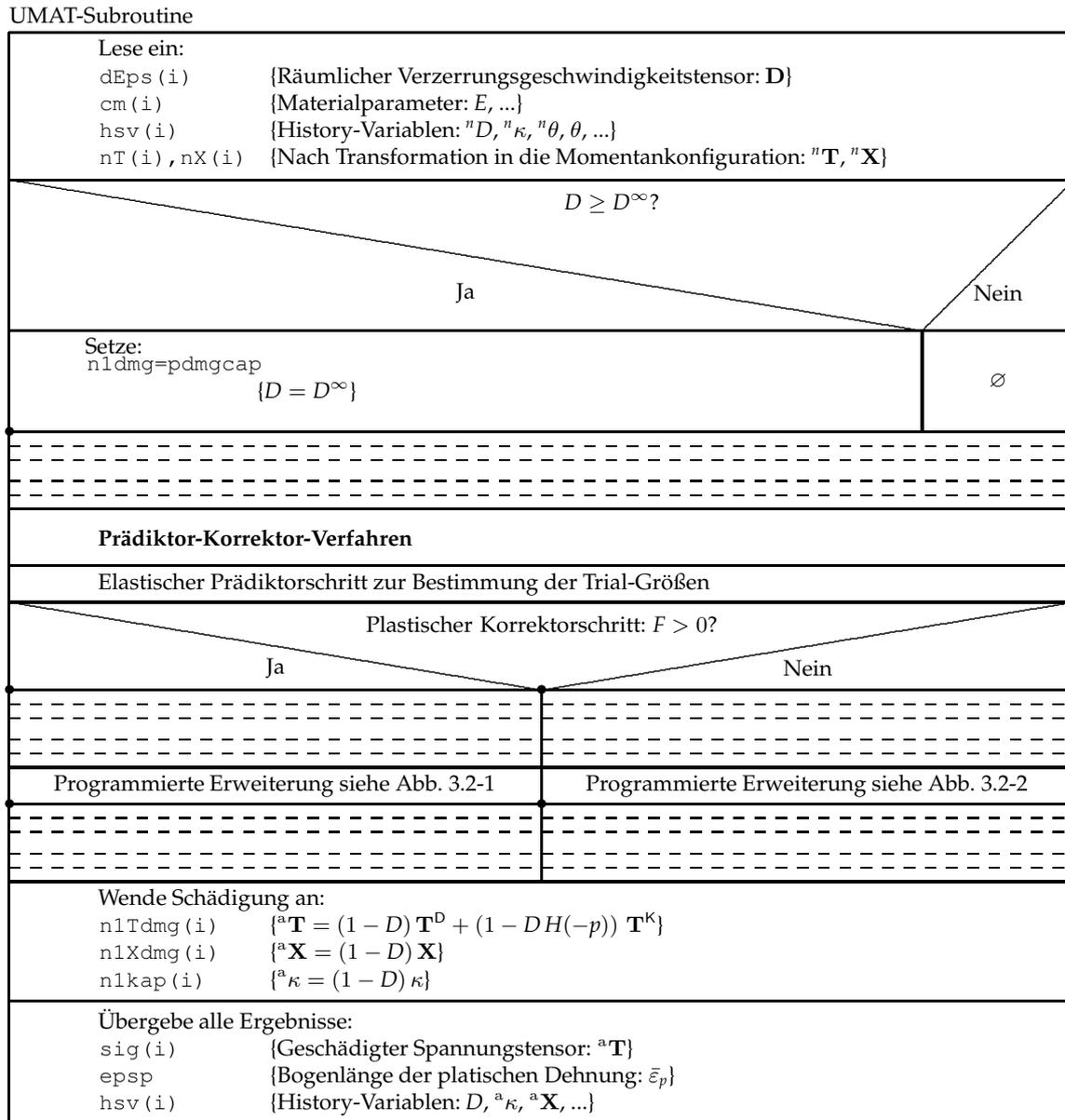


Abb. 3.1-1: Algorithmus der angepassten UMAT-Subroutine mit Erfassung von Schädigung

wird das Konzept der effektiven Spannung auch auf die als History-Variablen gespeicherten Ergebnisse für die isotrope und kinematische Verfestigung, äquivalent zu Gleichung 3.1-1, gemäß

$${}^a\mathbf{X} = (1 - D) \mathbf{X} \tag{3.1-4}$$

$${}^a\kappa = (1 - D) \kappa \tag{3.1-5}$$

angewendet, auch wenn das für die Bestimmung des Spannungsdeviators \mathbf{T}^D nicht notwendig ist.

Die soeben erläuterten Anpassungen an der ursprünglich zur Verfügung gestellten UMAT-Subroutine können mithilfe Abb. 3.1-1 nachvollzogen werden. Das Struktogramm dient zur Orientierung und Einordnung der programmierten Erweiterungen, für eine genaue Beschreibung und Erläuterung des ursprünglichen Spannungsalgorithmus, siehe [Bröcker, 2014].

3.2 Berechnung der Schädigungsvariable

3.2.1 Schädigungsentwicklung

Damit das Konzept der effektiven Spannungen, wie in Abschnitt 3.1.1 beschrieben, angewendet werden kann, muss die Schädigungsvariable D in der UMAT-Subroutine berechnet werden. Die Grundlage für dessen Entwicklungsgleichung bildet der Schädigungsansatz

$$D = \left\langle \frac{\bar{E}_{vp} - \varepsilon_{c0}}{\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0}} \right\rangle^{n_D}, \quad (3.2-1)$$

in dem der Exponent n_D die Krümmung des Entwicklungsverlaufes vorgibt, in dem mithilfe des Materialparameters ε_{c0} der Schädigungsbeginn sowie mithilfe ε_{f0} das Schädigungsende definiert werden – siehe [Bröcker und Matzenmiller, 2012].

Für die Diskretisierung der Schädigungsvariablen D wird das implizite EULER-Verfahren entsprechend

$$D = {}^n D + \Delta D, \quad \Delta D = \Delta t \dot{D} \quad (3.2-2)$$

eingesetzt, bei dem die zeitliche Ableitung von Gleichung 3.2-1 benötigt wird:

$$\dot{D} = \frac{n_D}{\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0}} \left\langle \frac{\bar{E}_{vp} - \varepsilon_{c0}}{\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0}} \right\rangle^{n_D - 1} \dot{\bar{E}}_{vp}. \quad (3.2-3)$$

Um eine temperatur- und dehnratenabhängige Schädigungsentwicklung mit Berücksichtigung des hydrostatischen Spannungszustands zu erzielen, wird für Gleichung 3.2-3 das Schädigungskriterium nach [Johnson und Cook, 1985] gemäß

$$\dot{D} = \frac{n_D}{\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0}} \left\langle \frac{\bar{E}_{vp} / \hat{g}(\dot{\bar{E}}_{vp}, T, \theta) - \varepsilon_{c0}}{\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0}} \right\rangle^{n_D - 1} \dot{\bar{E}}_{vp} / \hat{g}(\dot{\bar{E}}_{vp}, T, \theta). \quad (3.2-4)$$

eingeführt, wobei die Funktion

$$\hat{g} = \left(1 + d_2 e^{(d_3 T)}\right) \left(1 + d_4 \ln(\dot{\bar{E}}_{vp} / \dot{\varepsilon}_0)\right) (1 + d_5 \theta). \quad (3.2-5)$$

in leichter Veränderung zu [Bröcker und Matzenmiller, 2013a] und [Johnson und Cook, 1985] angesetzt ist. Der hydrostatische Spannungszustand wird durch die Triaxialität nun gemäß

$$T = \frac{I_1}{\sigma_v}, \quad I_1 = \frac{1}{3} \text{sp}(\mathbf{T}), \quad \sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{T}^D\| \quad (3.2-6)$$

ausgedrückt [Bröcker, 2015].

3.2.2 Hinweise zur Implementierung

Bei der Berechnung der Schädigungsvariablen ist es entscheidend, dass sich die Schädigung nur aufgrund viskoplastischer Dehnungen $\dot{\bar{E}}_{vp}$ entwickelt. In Bezug auf den Spannungsalgorithmus nach [Bröcker, 2014] kann dies durch eine korrekte Platzierung im Prädiktor-Korrektor-Verfahren sehr leicht erreicht werden: Findet keine plastische Deformation statt – siehe Abb. 3.2-2 – wird der Wert der Schädigungsvariablen aus dem vorherigen Zeitschritt verwendet. Wird hingegen der plastische Korrektorschritt durchgeführt, wird die Schädigung entspre-

Plastischer Korrektorschritt: $F > 0? \rightarrow \text{JA}$

Berechnung der Schädigungsvariablen D	
Berechne: hgdmg $\{\hat{g}(\dot{\bar{E}}_{vp}, T, \theta)$ (Gleichung 3.2-5)	
$\bar{E}_{vp}/\hat{g} > \varepsilon_{c0}$ und $D < D^\infty$?	
Ja	Nein
Berechne: ddmg $\{\Delta D$ (siehe Gleichung 3.2-4) n1dmg $\{D = {}^n D + \Delta D\}$	Keine Schädigungsentwicklung: ddmg=0 $\{\Delta D = 0\}$ n1dmg=dmg $\{D = {}^n D\}$
$D \geq D^\infty$?	
Ja	Nein
Setze: ddmg=pdmgcap-dmg $\{\Delta D = D^\infty - {}^n D\}$ n1dmg=pdmgcap $\{D = D^\infty\}$	\emptyset
\rightarrow Schädigungsvariable D	
Berechnung: Viskoplastische und dissipierte Arbeit, sowie gespeicherte Energie	
Berechne viskoplastische Arbeit: dwp $\{\Delta^a w_{vp} = \Delta t \lambda (1 - D) \mathbf{T}^D \mathbf{N} (\mathbf{T}^D - \mathbf{X})\}$ n1wp $\{^a w_{vp} = {}^n \{^a w_{vp}\} + \Delta^a w_{vp}\}$	
Berechne Dissipationsanteil der viskoplastischen Arbeit: dwdp $\{\Delta t \delta_{vp}$ (Gleichung 3.3-10) dwdpdmg $\{\Delta t^a \delta_{vp} = (1 - D) \Delta t \delta_{vp}\}$	
Berechne freie Energie: psi_... $\{\psi_{el}^D, \psi_{el}^K, \psi_{\kappa_0}, \psi_{\kappa}, \psi_X\}$	
$p \geq 0$	
Ja	Nein
Berechne dissipierte Arbeit infolge Schädigung: dwddmg $\{\Delta t^a \delta_D$ (Gleichung 3.3-13)	Berechne dissipierte Arbeit infolge Schädigung: dwddmg $\{\Delta t^a \delta_D$ (Gleichung 3.3-13)
Berechne insgesamt dissipierte Arbeit: n1wd = nwd + dwdpdmg + dwddmg $\{^a w_d = {}^n \{^a w_d\} + \Delta t^a \delta_{vp} + \Delta t^a \delta_D\}$	
Berechne durch plastische Deformation gespeicherte Energie: n1es $\{^a e_s = (1 - D)(\psi_{\kappa_0} + \psi_{\kappa} + \psi_X)\}$	
\rightarrow Viskoplastische Arbeit ${}^a w_{vp}$, dissipierte Arbeit ${}^a w_d$ und gespeicherte Energie ${}^a e_s$	

Abb. 3.2-1: Algorithmus der angepassten UMAT-Subroutine zur Erfassung von Schädigung

Plastischer Korrektorschritt: $F > 0?$ → NEIN

Berechnung der Schädigungsvariablen D	
Keine Entwicklung der Schädigung: $n1dmg = ndmg \quad \{D = {}^nD\}$	
→ Schädigungsvariable D	
Berechnung: Viskoplastische und dissipierte Arbeit, sowie gespeicherte Energie	
Keine Entwicklung der viskoplastischen Arbeit: $n1wvp = nwvp \quad \{{}^a w_{vp} = {}^n \{{}^a w_{vp}\}\}$	
Berechne Dissipationsanteil der viskoplastischen Arbeit infolge Erholung: $dwdp \quad \{\Delta t \delta_{vp} \text{ (Gleichung 3.3-10)}\}$ $dwdpdmg \quad \{\Delta t {}^a \delta_{vp} = (1 - D) \Delta t \delta_{vp}\}$	
Berechne insgesamt dissipierte Arbeit: $n1wd = nwd + dwdpdmg$ $\{{}^a w_d = {}^n \{{}^a w_d\} + \Delta t {}^a \delta_{vp}\}$	
Berechne freie Energie: $psl_{...} \quad \{\psi_{\kappa_0}, \psi_{\kappa}, \psi_{\chi}\}$	
Berechne Änderung der gespeicherten Energie infolge Erholung: $n1es \quad \{{}^a e_s = (1 - D)(\psi_{\kappa_0} + \psi_{\kappa} + \psi_{\chi})\}$	
→ Viskoplastische Arbeit ${}^a w_{vp}$, dissipierte Arbeit ${}^a w_d$ und gespeicherte Energie ${}^a e_s$	

Abb. 3.2-2: Algorithmus der angepassten UMAT-Subroutine zur Erfassung von Schädigung

chend den Gleichungen 3.2-4 und 3.2-2 berechnet – siehe Struktogramm in Abb. 3.2-1.

Die Berechnung der Schädigungsentwicklung verfügt über zwei zusätzliche Erweiterungen, die sich in den Untersuchungen als hilfreich und notwendig herausgestellt haben. In der ersten Erweiterung kann der Schädigung mithilfe des Materialparameters D^∞ ($pdmgcap$) ein Maximalwert zugeordnet werden, der in der Berechnung von D nicht überschritten werden darf, es gilt $D \leq D^\infty$. Diese Maßnahme dient neben der Vorgabe, auch mit Werten $D^\infty < 1$ rechnen zu können, vor allem auch der Anwendung der Nonlocal-Formulierung für die Schädigungsvariable – siehe Abschnitt 4.4. Für diese kann in diesem Input-Deck `MAT_NONLOCAL` kein Maximalwert vorgegeben werden, bis zu dem die angegebene Variable angepasst werden darf. Dadurch können außerhalb des Spannungsalgorithmus Werte $D > 1$ definiert werden, die durch die Abfrage am Anfang der UMAT-Subroutine abgefangen werden – siehe Abb. 3.1-1. So kommt es bei Verwendung der Nonlocal-Formulierung in LS-DYNA zu keinem Berechnungsfehler der geschädigten Spannungen aufgrund zu großer Werte für D .

In der zweiten Erweiterung besteht mithilfe des Parameters `asymplag` die Möglichkeit, für die Schädigungsentwicklung einen asymptotischen Verlauf gegen die vollständige Schädigung ($D \rightarrow 1$) zu definieren – vgl. Abb. 4.2-1(a) mit 7.2-2(d). Die Gleichung 3.2-4 ändert sich hierfür zu:

$$\dot{D} = \frac{n_D}{\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0}} \left\langle \frac{\bar{E}_{vp}/\hat{g}(\dot{E}_{vp}, T, \theta) - \varepsilon_{c0}}{\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0}} \right\rangle^{n_D-1} \dot{E}_{vp}/\hat{g}(\dot{E}_{vp}, T, \theta) (1 - {}^nD) . \quad (3.2-7)$$

Mit dieser Erweiterung können Berechnungsprobleme, die durch den unstetigen Verlauf der Schädigungsvariablen D entstehen, verhindert werden.

3.3 Anpassungen zur Energiespeicherung

3.3.1 Viskoplastische Arbeit

Im effektiven Modellzustand ist die gesamte viskoplastische Arbeit – vgl. [Bröcker, 2014] – definiert als:

$$w_{vp} = \int_0^t p_{vp} d\tau \quad , \quad p_{vp} = \mathbf{T}^D \dot{\mathbf{E}}_{vp} . \quad (3.3-1)$$

Der viskoplastische Deformationsgeschwindigkeitstensor $\dot{\mathbf{E}}_{vp}$ kann mithilfe der Frobenius-Norm – siehe [Bröcker, 2014] – gemäß

$$\dot{\mathbf{E}}_{vp} = \left\| \dot{\mathbf{E}}_{vp} \right\| \mathbf{N} \left(\dot{\mathbf{E}}_{vp} \right) \quad , \quad \left\| \dot{\mathbf{E}}_{vp} \right\| = \lambda \quad (3.3-2)$$

zerlegt werden. Da der viskoplastische Deformationsgeschwindigkeitstensor $\dot{\mathbf{E}}_{vp}$ in der Subroutine nicht vorliegt, werden dessen richtungsbezogenen Informationen mithilfe der Frobenius-Norm des Spannungsdeviators \mathbf{T}^D abzüglich der kinematischen Verfestigung \mathbf{X} ersetzt:

$$\mathbf{N} \left(\dot{\mathbf{E}}_{vp} \right) = \mathbf{N} \left(\mathbf{T}^D - \mathbf{X} \right) . \quad (3.3-3)$$

Somit ergibt sich durch Anwendung des impliziten Euler-Verfahrens die gesamte viskoplastische Arbeit im effektiven Modellzustand zu:

$$w_{vp} = {}^n w_{vp} + \underbrace{\Delta t p_{vp}}_{\Delta w_{vp}} \quad , \quad p_{vp} = \lambda \mathbf{T}^D \mathbf{N} \left(\mathbf{T}^D - \mathbf{X} \right) . \quad (3.3-4)$$

Die Überführung in den geschädigten Modellzustand erfolgt mithilfe des nominellen (geschädigten) Spannungsdeviators ${}^a \mathbf{T}^D = (1 - D) \mathbf{T}^D$ nach:

$${}^a w_{vp} = {}^n \{ {}^a w_{vp} \} + \underbrace{\Delta t {}^a p_{vp}}_{\Delta {}^a w_{vp}} \quad , \quad {}^a p_{vp} = \lambda (1 - D) \mathbf{T}^D \mathbf{N} \left(\mathbf{T}^D - \mathbf{X} \right) . \quad (3.3-5)$$

3.3.2 Dissipierte Arbeit

Die dissipierte Arbeit wird im effektiven Modellzustand mithilfe des impliziten Euler-Verfahrens gemäß

$$w_d = {}^n w_d + \Delta w_d \quad , \quad \Delta w_d = \Delta t \delta_M \quad (3.3-6)$$

berechnet. Nach Überführung in den geschädigten Modellzustand nach

$${}^a w_d = {}^n \{ {}^a w_d \} + \Delta {}^a w_d \quad , \quad \Delta {}^a w_d = \Delta t {}^a \delta_M \quad (3.3-7)$$

besteht die mechanische Dissipationsleistung ${}^a \delta_M$ aus zwei Anteilen – vgl. [Bröcker und Matzenmiller, 2013a]:

$${}^a \delta_M = {}^a \delta_{vp} + {}^a \delta_D \quad (3.3-8)$$

Der erste Anteil ${}^a \delta_{vp}$ entspricht dabei der dissipierten Leistung, die durch viskoplastische Deformation sowie der Erholung des Materials entsteht. Für diesen gilt:

$${}^a \delta_{vp} = (1 - D) \delta_{vp} \geq 0 \quad (3.3-9)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{vp}} = & \frac{1}{\rho} \left[F + (1 - \hat{\beta}(\theta)) \hat{\kappa}_0(\theta) + (\beta(\theta) \hat{\kappa}_0(\theta) + \kappa) \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}_\infty(\theta)} \right)^{n_\kappa} + \|\mathbf{X}\| \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}_\infty(\theta)} \right)^{n_X} \right] \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\left(\hat{\kappa}_0(\theta) \left(\frac{\varepsilon_{\kappa_0}}{\varepsilon_\infty} \right)^{n_{\kappa_s}} + \kappa \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}_\infty(\theta)} \right)^{n_{\kappa_s}} \right) \hat{\varepsilon}_{\kappa_s}^*(\theta) + \|\mathbf{X}\| \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}_\infty(\theta)} \right)^{n_{X_s}} \hat{\varepsilon}_{X_s}^*(\theta) \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3-10)$$

Der zweite Summand aus Gleichung 3.3-8 ist auf die infolge von Schädigung freigesetzte Energie zurückzuführen, die in Form von Verfestigung und Gestaltänderung im Material gespeichert worden ist. In Erweiterung zu [Bröcker und Matzenmiller, 2013a] wird dieser, um die Abhängigkeit der Schädigung vom hydrostatischen Spannungszustand zu gewährleisten, aus den Grundelementanteilen der gespeicherten freien Energie

$$\psi_M = \psi_{\text{el}}^D + \psi_{\text{el}}^K + \psi_{\kappa_0} + \psi_\kappa + \psi_X \quad (3.3-11)$$

$$\psi_M = \frac{1}{2\rho} \left(2 \hat{G}(\theta) \mathbf{E}_{\text{el}}^D \cdot \mathbf{E}_{\text{el}}^D + \hat{K}(\theta) \text{sp}(\mathbf{E}_{\text{el}})^2 + 2 \hat{\kappa}_0(\theta) \varepsilon_{\kappa_0} + \hat{E}_\kappa(\theta) \varepsilon_\kappa^2 + \hat{E}_X(\theta) \mathbf{E}_X \cdot \mathbf{E}_X \right) \quad (3.3-12)$$

gemäß

$${}^a \delta_D = \dot{D} \left(\psi_{\text{el}}^D + \psi_{\kappa_0} + \psi_\kappa + \psi_X \right) + \dot{D} H(-p) \psi_{\text{el}}^K \geq 0 \quad (3.3-13)$$

definiert.

3.3.3 Gespeicherte Energie

Die als freie Energie gespeicherte plastische Arbeit wird im implementierten Materialmodell als gespeicherte Energie erfasst:

$$e_s = \psi_{\kappa_0} + \psi_\kappa + \psi_X. \quad (3.3-14)$$

Die in Analogie zum Konzept der effektiven Spannung stehenden Verminderung der einzelnen Spannungsanteile liefert:

$${}^a e_s = (1 - D)(\psi_{\kappa_0} + \psi_\kappa + \psi_X). \quad (3.3-15)$$

3.3.4 Anmerkungen zur Implementierung

Der implementierte Berechnungsalgorithmus der gesamten viskoplastischen Arbeit ${}^a w_{\text{vp}}$, der dissipierten Arbeit w_d sowie der gespeicherten Energie ${}^a e_s$ ist im Falle plastischer Deformationen in Abb. 3.2-1, und für elastische Deformationen in Abb. 3.2-2 als Struktogramm dargestellt. Dabei wird die Struktur des bereits implementierten Prädiktor-Korrektor-Verfahrens – siehe [Bröcker, 2014] – in Analogie zur Berechnung der Schädigungsvariablen D ausgenutzt. In der Berechnung der dissipierten Arbeit w_d gilt zu beachten, dass diese auch während eines elastischen Zeitschrittes ausgewertet werden muss: Die im zweiten Summanden von Gleichung 3.3-10 definierte statische Erholung findet unabhängig von der im ausgewerteten Zeitraum stattfindenden Deformation statt. Das Gleiche gilt für die gespeicherte Energie ${}^a e_s$, die infolge statischer Erholung neu berechnet werden muss. Für die gesamte viskoplastische Arbeit

^a w_{vp} wird im Falle rein elastischer Deformation der Wert des vorherigen Zeitschrittes verwendet, da sich diese nur bei plastischen Deformationen entwickelt.

Die zur Verfügung gestellte UMAT-Subroutine nach [Bröcker, 2014] ist neben den in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen und in den Struktogrammen dargestellten Anpassungen auch um die Energiespeicherung im Reibelement erweitert worden. Dazu ist die Subroutine um die Berechnung der temperaturabhängigen Funktion $\hat{\beta}(\theta)$ – siehe Anhang A.3 – erweitert worden.

3.4 Zusammenfassung

Die in diesem Kapitel hergeleiteten Konstitutivgleichungen des Materialmodells im geschädigten Modellzustand werden im Anhang A.2 nochmals zusammengefasst aufgeführt.

4 Studien am Materialmodell mit implementierter Schädigung

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse unterschiedlicher Untersuchungen vorgestellt, anhand derer gezeigt werden soll, dass die in der UMAT-Subroutine implementierte Schädigung physikalisch plausible Ergebnisse liefert und somit zur Berechnung von schädigenden Materialien verwendet werden kann. Außerdem wird gezeigt, dass die in LS-DYNA verfügbare Nonlocal-Formulierung erfolgreich verwendet werden kann.

4.1 Druck-Zug-Druck-Versuch bei konstanter Starttemperatur

4.1.1 Beschreibung des FE-Modells

Zur Plausibilitätsuntersuchung wird auf die Unterkante eines zylindrischen Körpers – siehe Abb. 4.1-1(a), dessen Symmetrie durch geeignete Symmetrierandbedingungen ausgenutzt wird, der in Abb. 4.1-1(b) dargestellte Verschiebungs-Zeit-Verlauf aufgebracht. Die Oberkante ist dabei fest eingespannt, wodurch es zur Deformation des Körpers kommt. Bei der durchgeführten Simulation handelt es sich somit um einen Druck-Zug-Druck-Versuch, der bei Raumtemperatur durchgeführt wird. Der Viertelzylinder hat eine Höhe sowie einen Radius von 100 mm und besteht aus 390 Solid-Elementen.

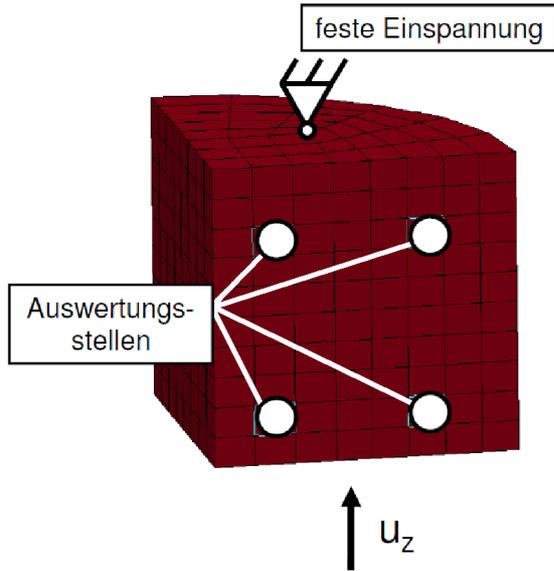
4.1.2 Ergebnisauswertung hinsichtlich physikalischer Plausibilität

Plastische Dehnung

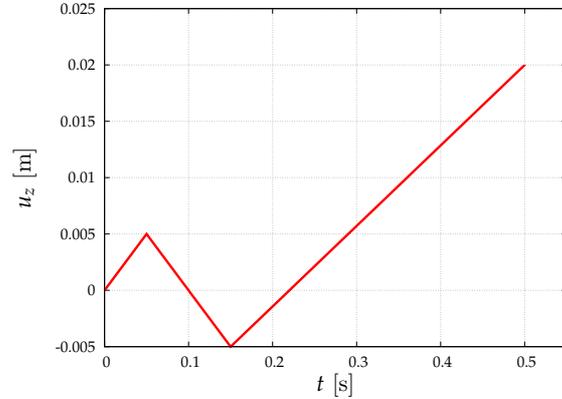
In Abb. 4.1-2 sind die Ergebnisse für die Bogenlänge der viskoplastischen Dehnung $\bar{\varepsilon}_{vp}$ dargestellt. Ein genauere Vergleich der Simulationen ohne und mit Schädigung zeigt, dass sich die viskoplastischen Bogenlängen im späteren Simulationsverlauf unterschiedlich entwickeln. Das weitere Voranschreiten der viskoplastischen Bogenlänge konzentriert sich im späteren Verlauf tendenziell im unteren Bereich des Modells, dies wird auch als Lokalisierung bezeichnet. Den Grund für diese Entwicklung zeigt Abb. 4.1-3, in welcher der Zeitverlauf der Schädigungsvariable D dargestellt ist. Die strukturell bedingt höhere viskoplastische Bogenlänge im unteren Bereich des Modells treibt die Schädigungsentwicklung im Vergleich zum oberen Bereich schneller voran, womit es durch das Aufweichen der Elemente zu einer weiter begünstigten Entwicklung der viskoplastischen Bogenlänge kommt. Somit kommt es zu einer leichten Lokalisierung der berechneten Schädigung im unteren Bereich des Modells.

Spannung und Verfestigungsanteile

Die Abb. 4.1-4 bis 4.1-6 zeigen die Vergleichsspannung σ_v , die isotrope Verfestigung κ und die z-Komponente X_{zz} des Tensors der kinematischen Verfestigung \mathbf{X} an den ausgewerteten Ele-

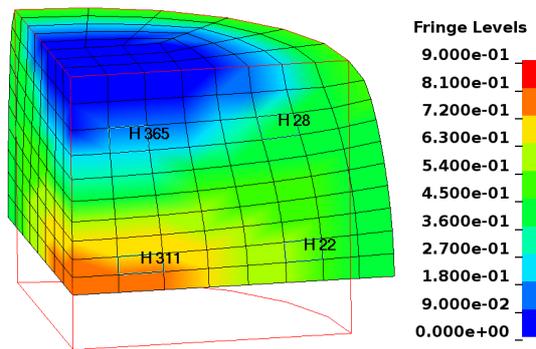


(a) FE-Modell mit eingetragener Verschiebungsrichtung

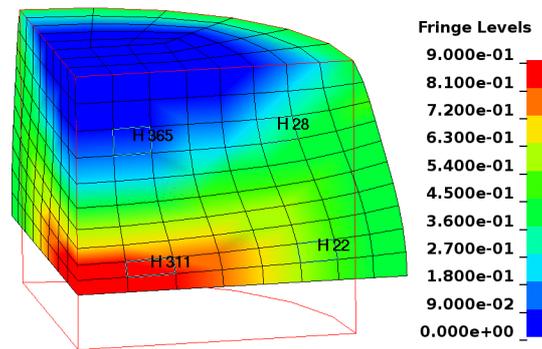


(b) Verschiebungs-Zeit-Verlauf

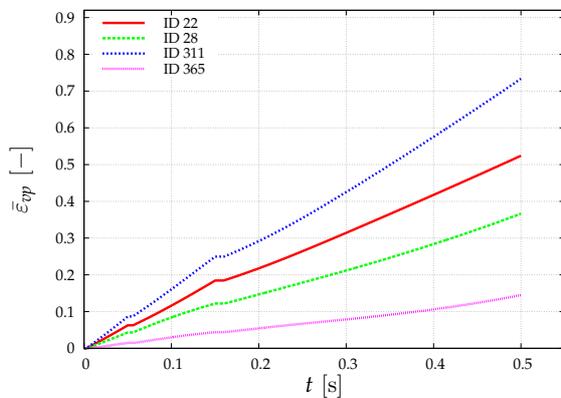
Abb. 4.1-1: Verschiebungsgesteuerter Druck-Zug-Druck-Versuch an einem zylindrischen Körper



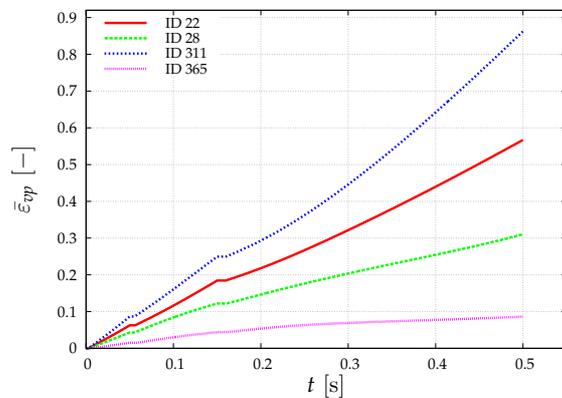
(a) Konturplot ohne Schädigung



(b) Konturplot mit Schädigung



(c) Verlaufdiagramm ohne Schädigung



(d) Verlaufdiagramm mit Schädigung

Abb. 4.1-2: Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für die viskoplastische Bogenlänge $\bar{\epsilon}_{vp}$

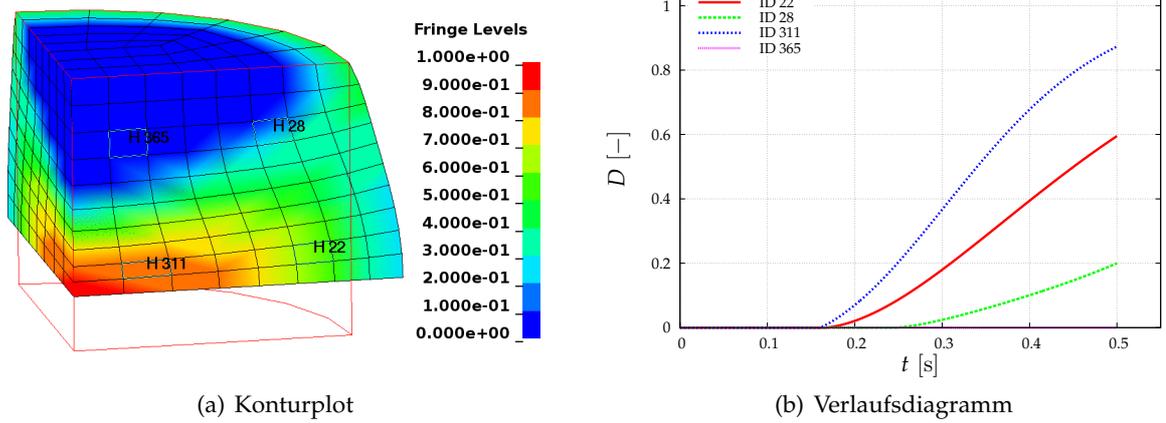


Abb. 4.1-3: Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für die Schädigungsvariable D

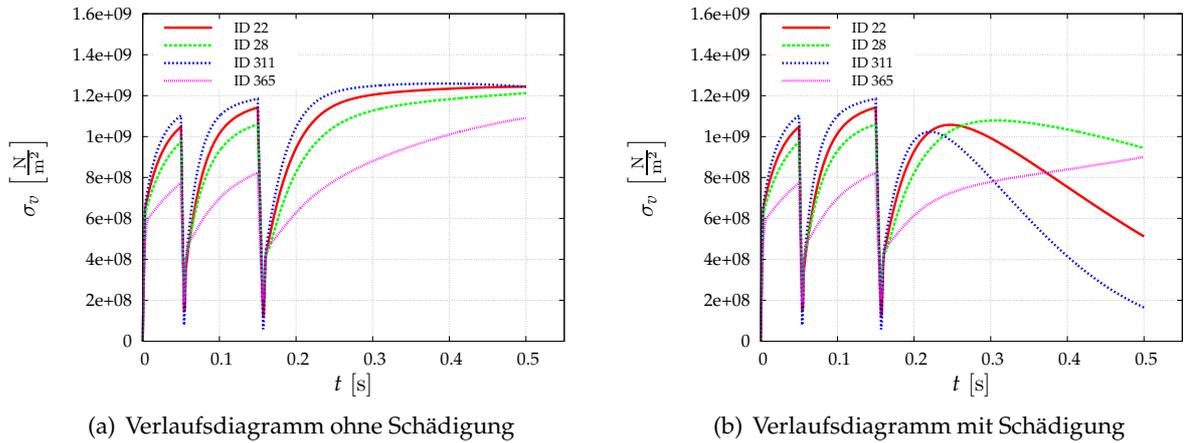


Abb. 4.1-4: Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für die Vergleichsspannung σ_v

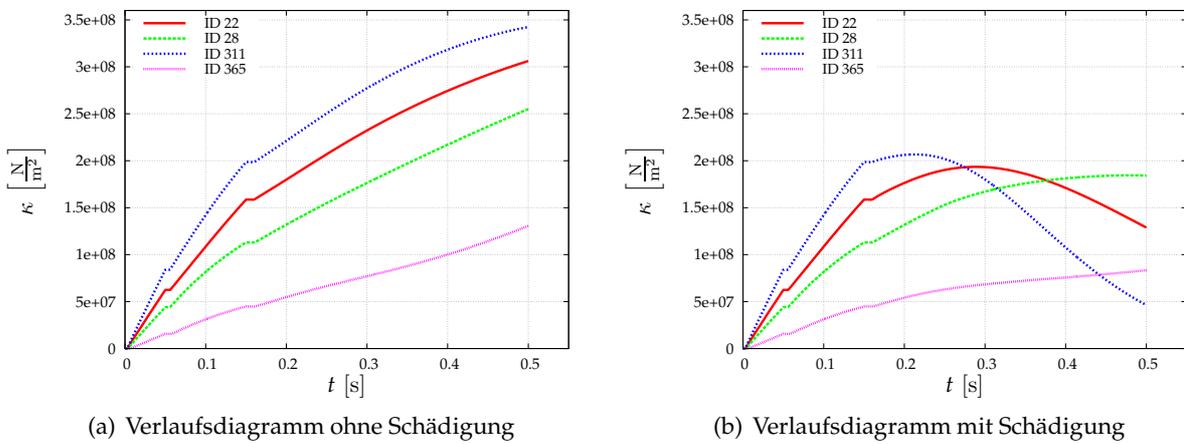
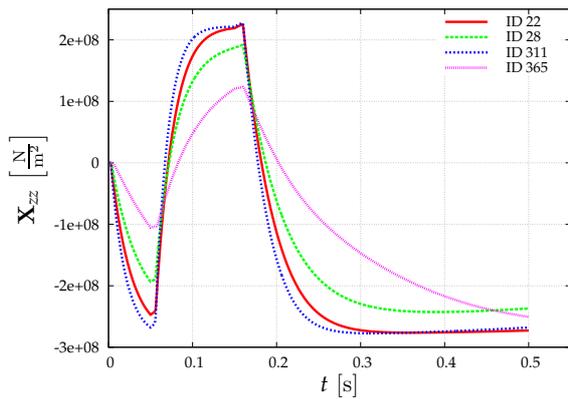
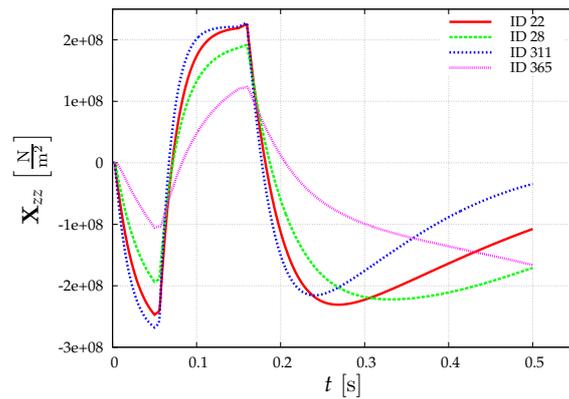


Abb. 4.1-5: Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für die isotrope Verfestigung κ

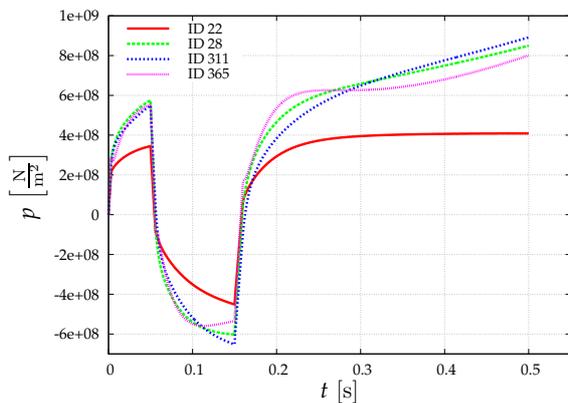


(a) Verlaufsdiagramm ohne Schädigung

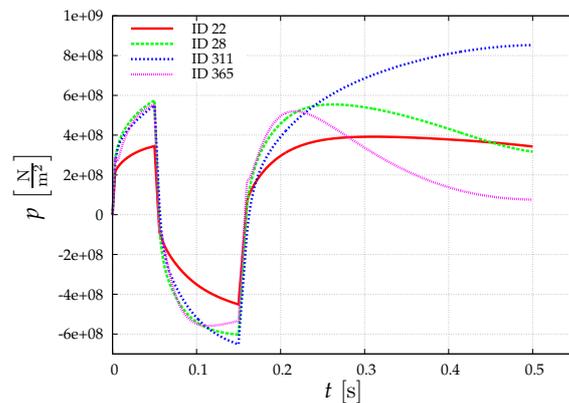


(b) Verlaufsdiagramm mit Schädigung

Abb. 4.1-6: Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für die z-Komponente X_{zz} des Tensors der kinematischen Verfestigung \mathbf{X}

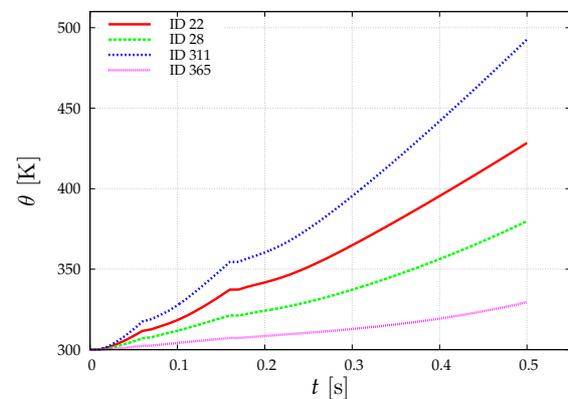


(a) Verlaufsdiagramm ohne Schädigung

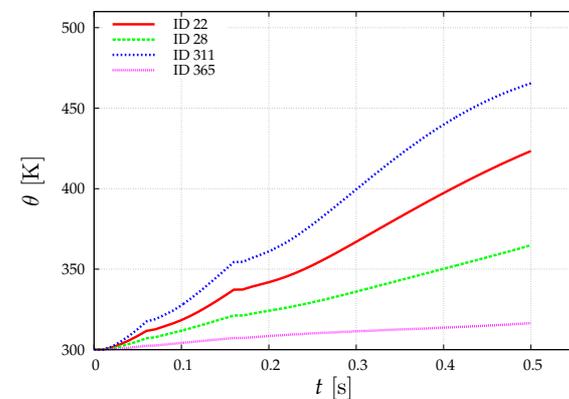


(b) Verlaufsdiagramm mit Schädigung

Abb. 4.1-7: Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für den hydrostatischen Druck p



(a) Verlaufsdiagramm ohne Schädigung



(b) Verlaufsdiagramm mit Schädigung

Abb. 4.1-8: Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für die Temperatur θ

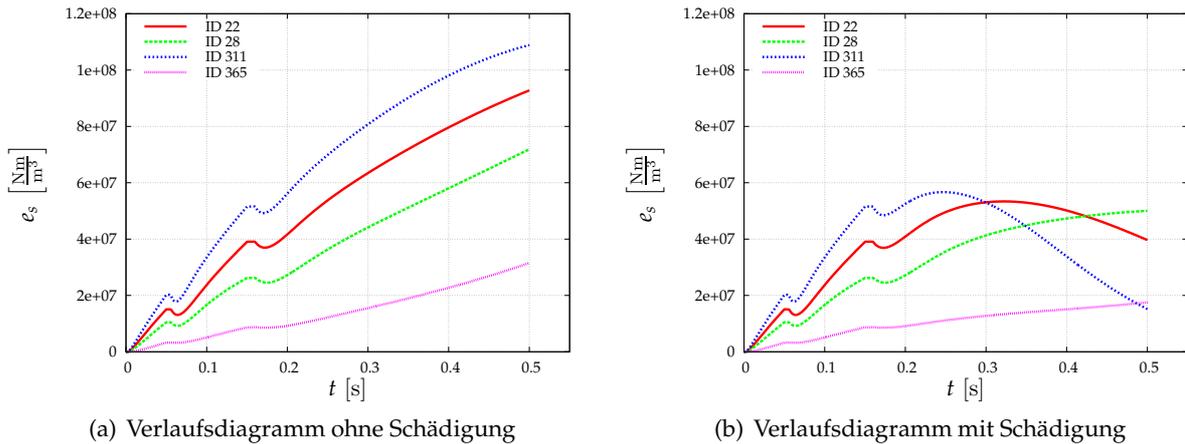


Abb. 4.1-9: Druck-Zug-Druck-Versuch: Ergebnisse für die gespeicherte Energie e_s

menten. Passend zum Konzept der effektiven Spannungen und den Gleichungen 3.1-1 bis 3.1-3 kommt es beim Voranschreiten der Schädigungsentwicklung zu einer Verminderung der Spannungen.

Hydrostatischer Druck

Die im Materialmodell formulierte Schädigung wirkt sich je nach hydrostatischen Spannungszustand, also ob hydrostatischer Druck oder Zug vorliegt, unterschiedlich aus – siehe Gleichung 3.1-1. Die erfolgreiche Umsetzung dieser Abhängigkeit des Schädigungseinflusses lässt sich in der Abb. 4.1-7 erkennen: In den geschädigten Elementen „ID 22“ und „ID 311“ findet keine Reduzierung des dort vorliegenden positiven Druckes p infolge der Schädigung statt. Der in den beiden übrigen Elementen herrschende Druckabfall ist auf den veränderten Deformationszustand des Gesamtmodells aufgrund der Schädigung zurückzuführen.

Temperatur und Energie

Die Temperaturentwicklung ohne äußere thermische Einflüsse wird im Materialmodell durch den dissipierten Anteil der im Zuge von plastischer Deformation verrichteten Arbeit bestimmt. Daneben beeinflusst die Schädigung durch Umwandlung von als freie Energie ψ_M gespeicherter Arbeit in thermische Energie die Temperaturentwicklung.

Abb. 4.1-8 zeigt, dass es aufgrund der Schädigung zu einer unterschiedlichen Temperaturentwicklung in den ausgewerteten Elementen kommt. Dies hat mehrere Ursachen: Zum einen führt die verminderte Entwicklung der viskoplastischen Bogenlänge in Element „ID 365“ (vgl. Abb. 4.1-2) dazu, dass an diesem Element weniger Arbeit verrichtet wird, die zu einer Temperaturerhöhung infolge von dissipierter Energie führen könnte. Zum anderen wird am Material verrichtete Arbeit, die abzüglich des dissipativen Anteils in Form von Verfestigung und Gestaltänderung gespeichert worden ist, durch die Schädigung wieder freigesetzt – siehe „ID 311“ in Abb. 4.1-9. Die freigesetzte Energie führt in diesem Element zu einem fortschreitenden Temperaturanstieg in ähnlicher Größenordnung des ungeschädigten Versuchs, auch wenn aufgrund der stark fortgeschrittenen Schädigung im Vergleich wesentlich weniger Arbeit verrichtet wird.

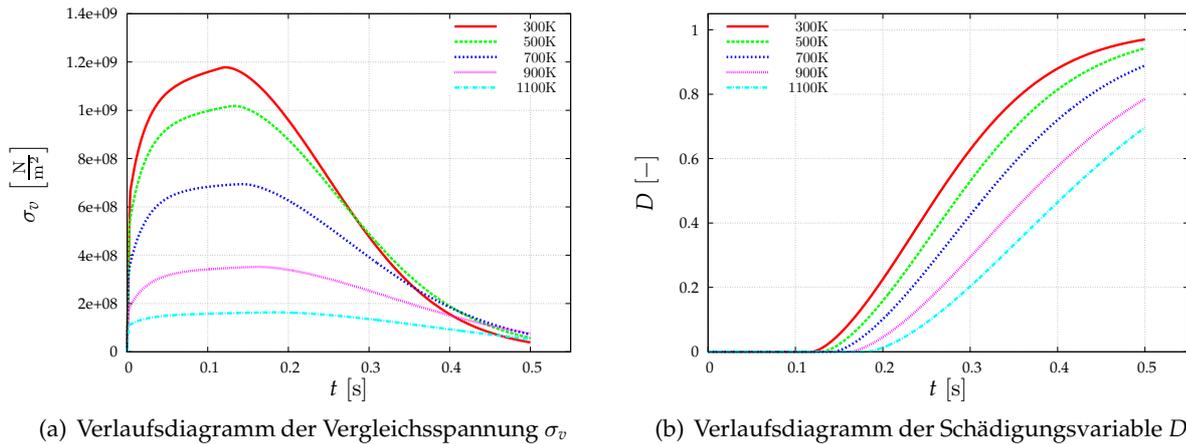


Abb. 4.2-1: Auswertungsergebnisse am Element mit der größten Schädigung für unterschiedliche Starttemperaturen θ

4.2 Versuch mit monotoner Belastung bei veränderlicher Starttemperatur

Zur Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der Schädigungsentwicklung wird auf das in Abschnitt 4.1.1 vorgestellte FE-Modell eine monoton steigende Verschiebung bei veränderlicher Starttemperatur aufgebracht.

Die Gleichungen 3.2-4 und 3.2-5 für die Schädigungsentwicklung bewirken, dass bei höheren Temperaturen die Entwicklung der Schädigung später einsetzt und außerdem langsamer voranschreitet.

Die Ergebnisse aus Abb. 4.2-1 zeigen zum einen den zu erwartenden Abfall der Vergleichsspannung infolge der Schädigung, zum anderen die von der Starttemperatur abhängige Schädigungsentwicklung. Wird für die Schädigungsvariable D ein kritischer Wert vorgegeben, bei dem Bruch erfolgen soll, käme es somit bei höherer Temperatur zu einer größeren Bruchdehnung. Die Ergebnisse dieser Studie zeigen, dass das Schädigungskriterium nach Johnson und Cook [Johnson und Cook, 1985] in Bezug auf die Temperaturabhängigkeit erfolgreich in das Materialmodell implementiert worden ist.

4.3 Versuch mit monotoner Belastung bei veränderlicher Dehnrates

Zur Untersuchung der Dehnratenabhängigkeit der Schädigungsentwicklung wird auf den in Abb. 4.1-1(a) dargestellten Viertelzylinder, äquivalent zu Abschnitt 4.2, eine monoton steigende Verschiebung aufgebracht. Der Zeitraum, in dem sich die Verschiebung entwickelt, wird dabei variiert. Daraus ergeben sich unterschiedliche Verschiebungsgeschwindigkeiten und Dehnraten.

Anhand Abb. 4.3-1(a) wird die im Materialmodell formulierte Viskoplastizität deutlich. Bei höherer Dehnrates steigt die Vergleichsspannung σ_v an. Der Vergleich von Abb. 4.3-1(a) und 4.3-1(b) bei $\bar{\epsilon}_{vp} = 0.2$ für die Verschiebungsgeschwindigkeiten 0.008 mm/s und 8 mm/s zeigt, dass die Vergleichsspannung σ_v , wie zu erwarten, um die Differenz der viskosen Überspannungen σ_{ov} zunimmt.

Aus den Gleichungen 3.2-4 und 3.2-5 zur Schädigungsentwicklung geht hervor, dass die Schädigung bei höheren Dehnrates später einsetzt und dass dessen Entwicklung langsamer als bei niedrigen Dehnrates voranschreitet – siehe Auswertung der Funktion \hat{g} in Abb. 4.3-2(b). Abb.

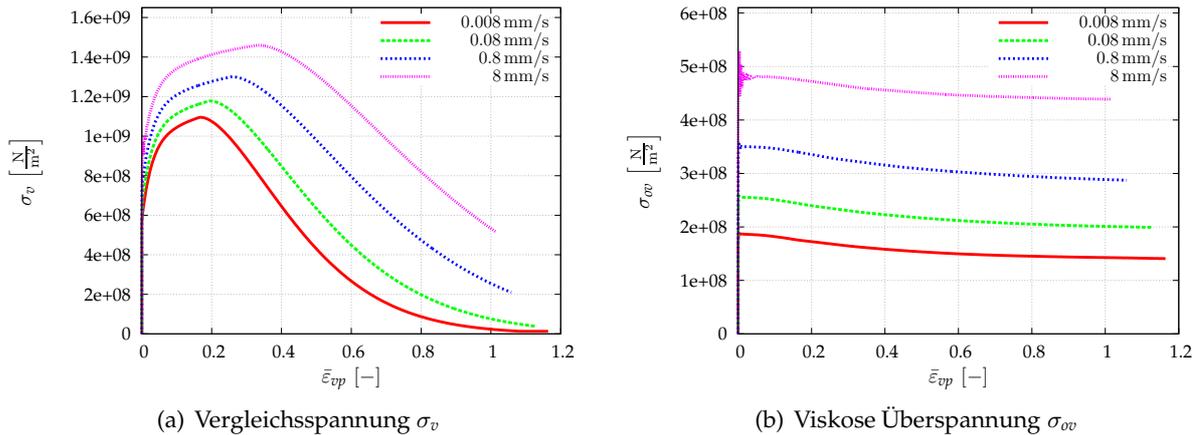


Abb. 4.3-1: Auswertungsergebnisse am Element mit der größten Schädigung für unterschiedliche Verschiebungsgeschwindigkeiten \dot{u}

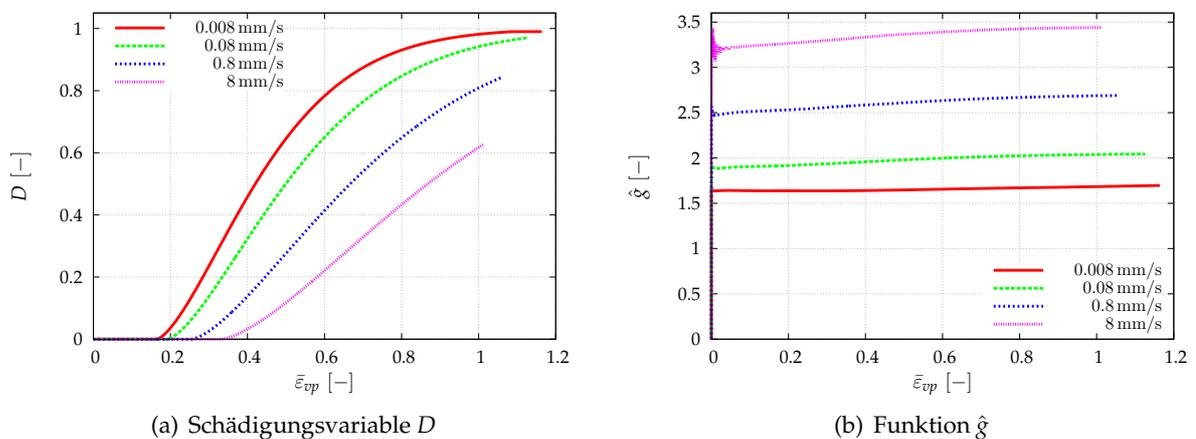


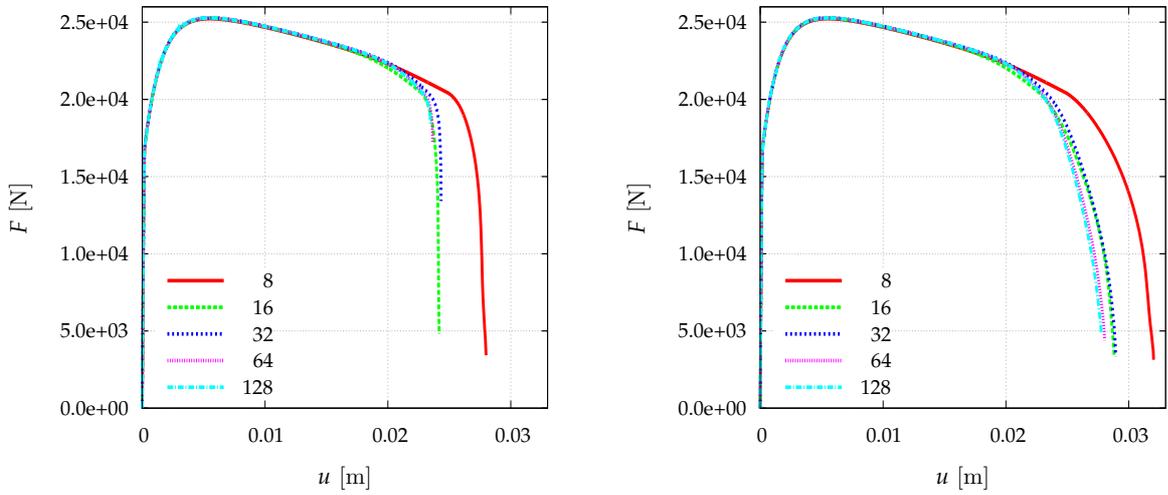
Abb. 4.3-2: Auswertungsergebnisse am Element mit der größten Schädigung für unterschiedliche Verschiebungsgeschwindigkeiten \dot{u}

4.3-2(a) zeigt den dazu passenden Verlauf der Schädigungsvariable D .

4.4 Verwendung der Nonlocal-Formulierung in LS-DYNA

LS-DYNA bietet die Möglichkeit, lokale Konstitutivmodelle in nicht-lokale Konstitutivmodelle zu überführen. So kann eine sich lokal entwickelnde Historyvariable, die zu unphysikalischen und netzabhängigen Ergebnissen führt, mithilfe von MAT_NONLOCAL in eine approximative nicht-lokale Variablenentwicklung umgewandelt werden. Dessen Verwendung bietet sich für die Schädigungsvariable D an, da dessen Entwicklung zu einer Lokalisierung in einzelnen Elementen tendiert.

Die in diesem Abschnitt vorgestellte Untersuchung soll zeigen, dass die Schädigungsimplementierung derart vorgenommen worden ist, dass der in LS-DYNA standardmäßig verfügbare Nonlocal-Algorithmus verwendet werden kann. Die dazu getroffenen Maßnahmen im Spannungsalgorithmus sind in Abschnitt 3.2.2 erläutert worden. Die fehlerfreie Verwendung des Nonlocal-Algorithmus wird anhand eines auf Zug beanspruchten Stabes untersucht, an dessen unterem Ende eine konstant ansteigende Verschiebung aufgebracht wird. Die Knoten der Oberkante des Zugstabes sind in Zugrichtung fest eingespannt, können jedoch, bis auf einen



(a) Verlaufdiagramm ohne Nonlocal-Formulierung (b) Verlaufdiagramm mit Nonlocal-Formulierung

Abb. 4.4-1: Ergebnisverläufe bei veränderlicher Elementanzahl in der Untersuchung zur Verwendung der Nonlocal-Formulierung

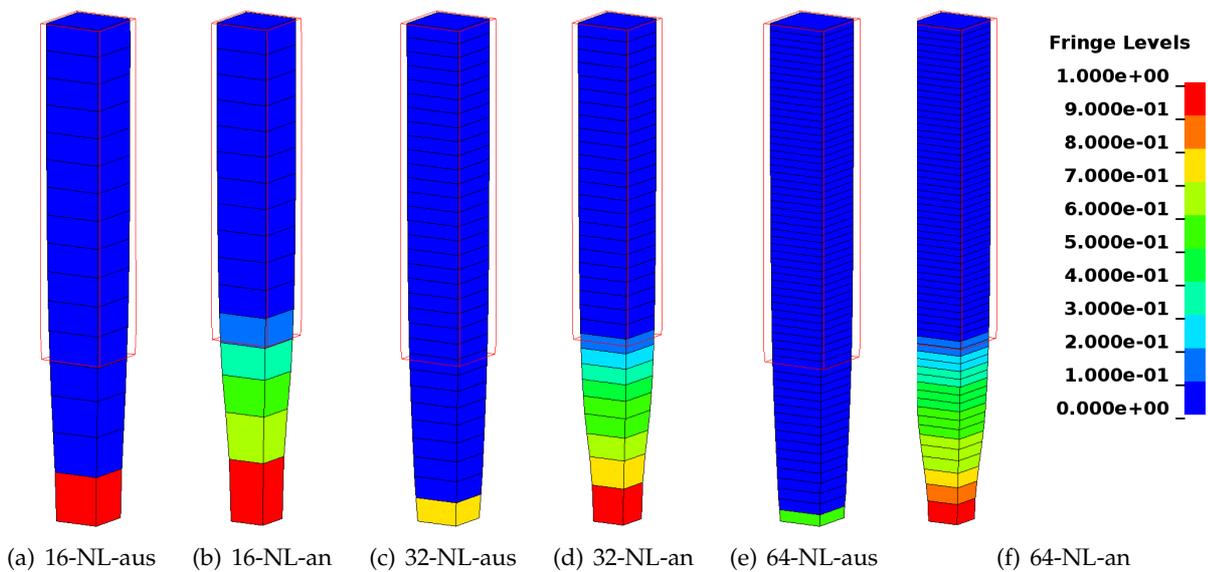


Abb. 4.4-2: Konturplots bei veränderlicher Elementanzahl in der Untersuchung zur Verwendung der Nonlocal-Formulierung

der Knoten, in Ebenenrichtung verschoben werden. Dadurch stellt sich ein näherungsweise einaxialer Spannungszustand ein. Die Knoten der Unterkante, an denen die Verschiebung in Zugrichtung wirkt, sind in negativer Normalenrichtung der Stabachse verschoben worden, um die Probeneinschnürung am untersten Element zu provozieren.

Mithilfe der Nonlocal-Formulierung für die Schädigungsvariable D soll nun erreicht werden, dass sich keine Netzabhängigkeit im Ergebnis zeigt. Dazu wird der Zugstab mit veränderlicher Elementanzahl berechnet, diese variiert zwischen 8 und 128 Elementen. Es wird die Zugkraft F über der Verschiebung u ausgewertet.

In Abb. 4.4-1(a) lässt sich erkennen, wie der Zugkraftverlauf in Abhängigkeit der Elementanzahl variiert. Es findet eine Lokalisierung der Schädigung im jeweils untersten Element statt – siehe Abb 4.4-2. Durch Anwendung der Nonlocal-Formulierung stellen sich die in Abb. 4.4-1(b) dargestellten Zugkraftverläufe ein, die eine wesentlich geringere Netzabhängigkeit aufweisen. Abb. 4.4-2 zeigt, wie bei verwendeter Nonlocal-Formulierung die Schädigungsentwicklung auf mehrere Elemente verteilt worden ist.

Diese Untersuchung hat gezeigt, dass MAT_NONLOCAL durch die in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Maßnahmen in der Verwendung des Thermoviskoplastizitätsmodells mit Schädigungserfassung erfolgreich und ohne Fehler angewendet werden kann.

4.5 Ergebnis

Die Ergebnisse der in diesem Kapitel durchgeführten Untersuchungen haben gezeigt, dass die Schädigung, sowie ihre Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand (Zug-/Druckasymmetrie), von der Temperatur und von der Dehnrates erfolgreich implementiert worden ist. Außerdem ist gezeigt worden, dass die in LS-DYNA verfügbare Nonlocal-Formulierung bei Bedarf fehlerfrei verwendet werden kann.

Die noch ausbleibende Abhängigkeit der Entwicklung der Schädigungsvariablen vom hydrostatischen Spannungszustand, ausgedrückt durch die Triaxialität in Gleichung 3.2-5, wird noch nachträglich in Abschnitt 7.2.4 untersucht.

5 Implementierung des konsistenten Tangentenoperators

In diesem Kapitel werden zunächst die der Implementierung zugrunde liegenden Gleichungen der konsistenten Tangente zusammengefasst und hergeleitet. Dabei wird für die konsistente Tangente im Modellzustand mit Schädigung die Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand berücksichtigt. Abschließend wird nach allgemeiner Beschreibung der UTAN-Subroutine, der darin nicht umsetzbaren konsistenten Formulierung der Tangente, sowie der verwendeten Voigtschen Notation der programmierte Algorithmus mithilfe eines Struktogramms ausführlich erläutert.

5.1 Konsistente Tangente im Modellzustand ohne Schädigung

Der konsistente Tangentenoperator $\hat{\mathcal{C}}_k$ im Modellzustand ohne Schädigung wird in [Bröcker, 2014] mathematisch hergeleitet und kann mittels

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{C}}_k &= \hat{\mathcal{C}}^* \left[\mathbf{1} + \hat{\mathcal{C}}_3 + \left[\hat{\mathbf{A}}_4 \otimes \hat{\mathbf{Q}}_2 \right] + \left[\hat{\mathbf{A}}_6 \otimes \hat{\mathbf{Q}}_3 \right] \right] \\ &= \hat{K}(\theta) [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] + 2\hat{G}(\theta) (1 - \hat{a}_{22}) \mathcal{C}^D \\ &\quad + 2\hat{G}(\theta) \left[\hat{a}_{22} \left[\mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) \otimes \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) \right] + \left[\hat{\mathbf{A}}_4 \otimes \hat{\mathbf{Q}}_2 \right] + \left[\hat{\mathbf{A}}_6 \otimes \hat{\mathbf{Q}}_3 \right] \right]\end{aligned}\quad (5.1-1)$$

berechnet werden. Die darin enthaltenen Abkürzungen sind in den Abb. 5.1-1 und 5.1-2 aufgeführt.

5.2 Konsistente Tangente im Modellzustand mit Schädigung

Der Spannungstensor ${}^a\mathbf{T}$ unter Berücksichtigung von Schädigung und des hydrostatischen Drucks p resultiert nach [Bröcker, 2015] mithilfe der Heaviside-Funktion $H(x)$ aus der effektiven Spannung \mathbf{T} und gemäß der Beziehung

$${}^a\mathbf{T} = (1 - D) \mathbf{T}^D + (1 - D H(-p)) \mathbf{T}^K, \quad (5.2-1)$$

wobei für die Integration der skalaren Schädigungsvariablen D in dem als UMAT50-Subroutine implementierten Spannungsalgorithmus das implizite EULER-Verfahren eingesetzt wird:

$$D = {}^nD + \Delta D \quad , \quad \Delta D = \Delta t \dot{D} = \frac{n_D}{\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0}} \langle \hat{\gamma} \rangle^{n_D-1} \frac{\dot{\bar{E}}_{vp}}{\hat{g}} \Delta t, \quad (5.2-2)$$

mit

$$\hat{\gamma} := \frac{\bar{E}_{vp}/\hat{g} - \varepsilon_{c0}}{\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0}} \quad , \quad \bar{E}_{vp} = {}^n\bar{E}_{vp} + \Delta \bar{E}_{vp} \quad , \quad \Delta \bar{E}_{vp} = \Delta t \dot{\bar{E}}_{vp} \quad (5.2-3)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{C}}^*(\theta) &= 2\hat{G}(\theta) \mathbf{C}^D + \hat{K}(\theta)[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \quad , \quad \mathbf{C}^D = \left[\mathbf{1} - \frac{1}{3}[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \right] = \mathbf{C}^{D^T} \\
 \hat{\mathbf{C}}_3(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= -\hat{a}_{22} \left[\mathbf{C}^D - \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) \otimes \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) \right] = \hat{\mathbf{C}}_3^T \\
 \hat{a}_{22}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= \lambda \Delta t 2\hat{G}(\theta) \frac{1}{\|\hat{\mathbf{A}}_1\|} \\
 \hat{\mathbf{A}}_4(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= -\Delta t \left(\mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) + \lambda \frac{\hat{a}_{13}}{\|\hat{\mathbf{A}}_1\|} (\mathbf{X}_{\text{th}} - (\mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) \cdot \mathbf{X}_{\text{th}}) \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1)) \right) = \hat{\mathbf{A}}_4^D = \hat{\mathbf{A}}_4^T \\
 \hat{\mathbf{A}}_6(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= \lambda \Delta t \frac{\hat{a}_{12}}{\|\hat{\mathbf{A}}_1\|} (\mathbf{X}_{\text{th}} - (\mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) \cdot \mathbf{X}_{\text{th}}) \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1)) = \hat{\mathbf{A}}_6^D = \hat{\mathbf{A}}_6^T \\
 \hat{\mathbf{A}}_7(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda, \kappa) &= \sqrt{6} \hat{G}(\theta) \hat{a}_{15} \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) = \hat{\mathbf{A}}_7^D = \hat{\mathbf{A}}_7^T \\
 \hat{\mathbf{A}}_8(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= -2 \Delta t \lambda \hat{G}(\theta) \hat{E}_X(\theta) \frac{1}{\|\hat{\mathbf{A}}_1\|} (\mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_2) - (\mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) \cdot \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_2)) \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1)) = \hat{\mathbf{A}}_8^D = \hat{\mathbf{A}}_8^T \\
 \hat{\mathbf{Q}}_2 &= \frac{F_{11}}{\hat{a}_{23}} \hat{\mathbf{A}}_7 - \frac{\hat{a}_{24}}{\hat{a}_{23}} \hat{\mathbf{Q}}_3 \\
 \hat{\mathbf{Q}}_3 &= \frac{F_{11}}{\hat{a}_{27}} \left(\frac{1}{\hat{a}_{23}} \hat{\mathbf{A}}_7 - \frac{1}{\hat{a}_{25}} \hat{\mathbf{A}}_8 \right) \\
 \hat{a}_{23} &:= F_{22}F_{11} - F_{12}F_{21} \quad , \quad \hat{a}_{24} := F_{23}F_{11} - F_{13}F_{21} \\
 \hat{a}_{25} &:= F_{32}F_{11} - F_{12}F_{31} \quad , \quad \hat{a}_{26} := F_{33}F_{11} - F_{13}F_{31} \\
 \hat{a}_{27} &:= \frac{\hat{a}_{24}}{\hat{a}_{23}} - \frac{\hat{a}_{26}}{\hat{a}_{25}}
 \end{aligned}$$

Abb. 5.1-1: Abkürzungen aus [Bröcker, 2014] für den konsistenten Tangentenoperator in Gleichung 5.1-1

und

$$\hat{g} = \left(1 + d_2 e^{(d_3 T)} \right) \left(1 + d_4 \ln \left(\frac{\dot{E}_{\text{vp}}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right) (1 + d_5 \theta) . \quad (5.2-4)$$

Für die Herleitung der konsistenten Tangente wird die Spannungsbeziehung aus Gleichung 5.2-1 unter Berücksichtigung der Berechnungsvorschrift für Deviator- und Kugelanteil gemäß

$$\mathbf{T}^D = \left[\mathbf{1} - \frac{1}{3}[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \right] \mathbf{T} = \mathbf{1}^D \mathbf{T} \quad (5.2-5)$$

$$\mathbf{T}^K = \frac{1}{3}[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \mathbf{T} = \mathbf{1}^K \mathbf{T} \quad (5.2-6)$$

nach

$${}^a \mathbf{T} = \left[(1 - D) \mathbf{1}^D + (1 - D H(-p)) \mathbf{1}^K \right] \mathbf{T} = \mathbf{D} \mathbf{T} \quad (5.2-7)$$

überführt. Somit ergibt sich die konsistente Tangente zu

$${}^a \hat{\mathbf{C}}_k = \frac{d {}^a \mathbf{T}}{d \Delta \epsilon} = \frac{d \mathbf{D} \mathbf{T}}{d \Delta \epsilon} = \mathbf{D} \frac{d \mathbf{T}}{d \Delta \epsilon} + \frac{\partial {}^a \mathbf{T}}{\partial D} \otimes \frac{d D}{d \Delta \epsilon} = \mathbf{D} \hat{\mathbf{C}}_k + \frac{\partial {}^a \mathbf{T}}{\partial D} \otimes \frac{d \Delta D}{d \Delta \epsilon} \quad (5.2-8)$$

mit dem Tangentenoperator $\hat{\mathbf{C}}_k$ des effektiven Modells im ersten Term – siehe Gleichung 5.1-1 – sowie dem zweiten Summanden infolge der Schädigung.

$$\begin{aligned}
 \hat{b}_1(\kappa, \theta) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{E}_\kappa(\theta) \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}^\infty(\theta)} \right)^{n_\kappa} & \hat{b}_2(\kappa, \theta) &= \hat{E}_\kappa(\theta) \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}^\infty(\theta)} \right)^{n_{\kappa S}} \hat{e}_{\kappa S}^*(\theta) \\
 \hat{b}_3(\kappa, \theta) &= \frac{\partial_\theta \hat{E}_\kappa(\theta)}{\hat{E}_\kappa(\theta)} \kappa & \hat{b}_4(\kappa, \theta) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{E}_\kappa(\theta) - \hat{b}_1(\kappa, \theta) \\
 \hat{b}_5(\kappa, \theta, \lambda) &= \hat{b}_4(\kappa, \theta) \lambda - \hat{b}_2(\kappa, \theta) \\
 \hat{a}_1(\|\mathbf{X}\|, \theta) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{E}_X(\theta) \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}^\infty(\theta)} \right)^{n_X} & \hat{a}_2(\|\mathbf{X}\|, \theta) &= \hat{E}_X(\theta) \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}^\infty(\theta)} \right)^{n_{X S}} \hat{e}_{X S}^*(\theta) \\
 \hat{a}_3(\|\mathbf{X}\|, \theta) &= \frac{\partial_\theta \hat{E}_X(\theta)}{\hat{E}_X(\theta)} \|\mathbf{X}\| & \hat{a}_4(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= \hat{a}_1(\|\mathbf{X}\|, \theta) \lambda + \hat{a}_2(\|\mathbf{X}\|, \theta) \\
 \hat{a}_5(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= \|\mathbf{X}\| + \Delta t \hat{a}_4(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) & \hat{a}_6(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= \frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{a}_5(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda)} \\
 \hat{\mathbf{A}}_1(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= {}^T \mathbf{T}^D - \hat{a}_6(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) \mathbf{X}_{\text{th}} = \hat{\mathbf{A}}_1^D = \hat{\mathbf{A}}_1^T \\
 \hat{\mathbf{A}}_2(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= \mathbf{X}_{\text{th}} + \Delta t \hat{E}_X(\theta) \lambda \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda)) = \hat{\mathbf{A}}_2^D = \hat{\mathbf{A}}_2^T \\
 \hat{F}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda, \kappa) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\|\hat{\mathbf{A}}_1(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda)\| - (\hat{\kappa}_0(\theta) + \kappa) - (2\hat{G}(\theta) + \hat{a}_6(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) \hat{E}_X(\theta)) \Delta t \lambda \right) \\
 \hat{b}_6(\kappa, \theta, \lambda) &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{n_\kappa}{\varepsilon_\kappa^\infty} \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}^\infty(\theta)} \right)^{n_\kappa - 1} \lambda - \frac{n_{\kappa S}}{\varepsilon_\kappa^\infty} \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}^\infty(\theta)} \right)^{n_{\kappa S} - 1} \hat{e}_{\kappa S}^*(\theta) \\
 \hat{a}_{11}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{n_X}{\varepsilon_X^\infty} \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}^\infty(\theta)} \right)^{n_X - 1} \lambda + \frac{n_{X S}}{\varepsilon_X^\infty} \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}^\infty(\theta)} \right)^{n_{X S} - 1} \hat{e}_{X S}^*(\theta) \\
 \hat{a}_{12}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= \frac{1}{\hat{a}_5(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda)} \left(1 - \hat{a}_6(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) (1 + \Delta t \hat{a}_{11}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda)) \right) \\
 \hat{a}_{13}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= \Delta t \hat{a}_1(\|\mathbf{X}\|, \theta) \frac{\hat{a}_6(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda)}{\hat{a}_5(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda)} \\
 \hat{a}_{14}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda, \kappa) &= -\frac{1}{\hat{\eta}(\theta)} \left\langle \frac{\hat{F}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda, \kappa)}{\hat{D}(\kappa, \theta)} \right\rangle^{\hat{m}(\theta)} \frac{\hat{m}(\theta)}{\hat{D}(\kappa, \theta)} \\
 \hat{a}_{15}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda, \kappa) &= \frac{1}{\hat{\eta}(\theta)} \left\langle \frac{\hat{F}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda, \kappa)}{\hat{D}(\kappa, \theta)} \right\rangle^{\hat{m}(\theta) - 1} \frac{\hat{m}(\theta)}{\hat{D}(\kappa, \theta)} \\
 \hat{a}_{16}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_2) \cdot \mathbf{X}_{\text{th}} - \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) \cdot \mathbf{X}_{\text{th}} \quad \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) \cdot \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_2) \\
 \hat{a}_{17}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= \text{sgn}(\hat{a}_5(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda)) (1 + \Delta t \hat{a}_{11}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda)) \\
 &\quad + \frac{\hat{E}_X(\theta) \Delta t \lambda}{\|\hat{\mathbf{A}}_1\|} \hat{a}_{12}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) \hat{a}_{16}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) \\
 \hat{a}_{18}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) &= \text{sgn}(\hat{a}_5(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda)) \Delta t \hat{a}_1(\|\mathbf{X}\|, \theta) - \Delta t \hat{E}_X(\theta) \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) \cdot \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_2) \\
 &\quad - \frac{\hat{E}_X(\theta) \Delta t \lambda}{\|\hat{\mathbf{A}}_1\|} \hat{a}_{13}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) \hat{a}_{16}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) \\
 \hat{a}_{19}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda, \kappa) &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \hat{a}_{15}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda, \kappa) \hat{a}_{12}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) \left(\mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) \cdot \mathbf{X}_{\text{th}} + \hat{E}_X(\theta) \Delta t \lambda \right) \\
 \hat{a}_{20}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda, \kappa) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{a}_{15}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda, \kappa) \left(\left(\mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) \cdot \mathbf{X}_{\text{th}} + \hat{E}_X(\theta) \Delta t \lambda \right) \hat{a}_{13}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) \right. \\
 &\quad \left. - (2\hat{G}(\theta) + \hat{a}_6(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda) \hat{E}_X(\theta)) \Delta t \right) - 1 \\
 \hat{a}_{21}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda, \kappa) &= -\hat{a}_{15}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda, \kappa) + \hat{a}_{14}(\|\mathbf{X}\|, \theta, \lambda, \kappa) D_1
 \end{aligned}$$

Abb. 5.1-2: Abkürzungen aus [Bröcker, 2014] für die Gleichungen aus Abb. 5.1-1

Die partielle Ableitung des geschädigten Spannungstensors ${}^a\mathbf{T}$ im dyadischen Produkt des zweiten Summanden aus Gleichung 5.2-8 ergibt sich zu

$$\frac{\partial {}^a\mathbf{T}}{\partial D} = - \left(\mathbf{T}^D + H(-p) \mathbf{T}^K \right). \quad (5.2-9)$$

Die Ableitung des Schädigungsinkrements ΔD wird mit dem Tensor $\hat{\mathbf{Q}}_2$ aus Abb. REF mithilfe der Kettenregel zu

$$\begin{aligned} \frac{d \Delta D}{d \Delta \varepsilon} &= \frac{d \Delta D}{d \lambda} \frac{d \lambda}{d \Delta \varepsilon} + \left[\frac{d \mathbf{T}}{d \Delta \varepsilon} \right]^T \frac{\partial \Delta D}{\partial \mathbf{T}} = \frac{d \Delta D}{d \lambda} \hat{\mathbf{Q}}_2 + \hat{\mathbf{C}}_k^T \frac{\partial \Delta D}{\partial \mathbf{T}} \\ &= (\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \hat{u}_3) \hat{\mathbf{Q}}_2 + \hat{u}_2 \hat{u}_4 \hat{\mathbf{C}}_k^T \hat{\mathbf{B}}_1 \end{aligned} \quad (5.2-10)$$

bestimmt, wobei die Ableitungen von ΔD nach λ und \mathbf{T} gemäß

$$\frac{d \Delta D}{d \lambda} = \frac{\partial \Delta D}{\partial \lambda} + \frac{\partial \Delta D}{\partial \hat{g}} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \lambda} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 \hat{u}_3 \quad (5.2-11)$$

und

$$\frac{\partial \Delta D}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial \Delta D}{\partial \hat{g}} \frac{\partial \hat{g}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{T}} = \hat{u}_2 \hat{u}_4 \hat{\mathbf{B}}_1 \quad (5.2-12)$$

unter Einführung der Abkürzungen

$$\hat{u}_1 := \frac{\partial \Delta D}{\partial \lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta t n_D}{\hat{g} (\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0})} \left(\langle \hat{\gamma} \rangle^{n_D-1} + \frac{\Delta \bar{E}_{vp} (n_D - 1)}{\hat{g} (\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0})} \langle \hat{\gamma} \rangle^{n_D-2} \right), \quad (5.2-13)$$

$$\hat{u}_2 := \frac{\partial \Delta D}{\partial \hat{g}} = - \frac{\Delta \bar{E}_{vp} n_D}{\hat{g}^2 (\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0})} \left(\langle \hat{\gamma} \rangle^{n_D-1} + \frac{\bar{E}_{vp} (n_D - 1)}{\hat{g} (\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0})} \langle \hat{\gamma} \rangle^{n_D-2} \right), \quad (5.2-14)$$

$$\hat{u}_3 := \frac{\partial \hat{g}}{\partial \lambda} = \left(1 + d_2 e^{(d_3 T)} \right) \left(1 + d_5 \theta \right) \left(1 + \frac{d_4}{\lambda} \right), \quad (5.2-15)$$

$$\hat{u}_4 := \frac{\partial \hat{g}}{\partial T} = d_2 d_3 e^{(d_3 T)} \left(1 + d_4 \ln(\dot{\bar{E}}_{vp} / \dot{\varepsilon}_0) \right) \left(1 + d_5 \theta \right), \quad (5.2-16)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_1 := \frac{\partial T}{\partial \mathbf{T}} = \frac{1}{\|\mathbf{T}^D\|} \left(-T \mathbf{N}(\mathbf{T}^D) + \sqrt{\frac{2}{27}} \mathbf{1} \right) \quad (5.2-17)$$

ermittelt werden. Somit lautet die konsistente Tangente des Modells mit Schädigung

$$\begin{aligned} {}^a\hat{\mathbf{C}}_k &= \mathbf{D} \hat{\mathbf{C}}_k - (\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \hat{u}_3) \left(\mathbf{T}^D + H(-p) \mathbf{T}^K \right) \otimes \hat{\mathbf{Q}}_2 \\ &\quad - \hat{u}_2 \hat{u}_4 \left(\mathbf{T}^D + H(-p) \mathbf{T}^K \right) \otimes \hat{\mathbf{C}}_k^T \hat{\mathbf{B}}_1. \end{aligned} \quad (5.2-18)$$

und ergibt sich, mithilfe des deviatorischen Anteils

$$\hat{\mathbf{C}}_k^D = 2\hat{G}(\theta) \left[(1 - \hat{a}_{22}) \mathbf{C}^D + \hat{a}_{22} \left[\mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) \otimes \mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1) \right] + \left[\hat{\mathbf{A}}_4 \otimes \hat{\mathbf{Q}}_2 \right] + \left[\hat{\mathbf{A}}_6 \otimes \hat{\mathbf{Q}}_3 \right] \right], \quad (5.2-19)$$

sowie dem Kugelanteil

$$\hat{\mathbf{C}}_k^K = \hat{K}(\theta) [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] . \quad (5.2-20)$$

der konsistenten Tangente im Modellzustand ohne Schädigung aus Gleichung 5.1-1, je nach hydrostatischem Spannungszustand p zu:

$$p < 0 \Rightarrow {}^a\hat{\mathbf{C}}_k = (1 - D) \hat{\mathbf{C}}_k - (\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \hat{u}_3) \mathbf{T} \otimes \hat{\mathbf{Q}}_2 - \hat{u}_2 \hat{u}_4 \mathbf{T} \otimes \hat{\mathbf{C}}_k^T \hat{\mathbf{B}}_1 \quad (5.2-21)$$

$$p > 0 \Rightarrow {}^a\hat{\mathbf{C}}_k = (1 - D) \hat{\mathbf{C}}_k^D + \hat{\mathbf{C}}_k^K - (\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \hat{u}_3) \mathbf{T}^D \otimes \hat{\mathbf{Q}}_2 - \hat{u}_2 \hat{u}_4 \mathbf{T}^D \otimes \hat{\mathbf{C}}_k^T \hat{\mathbf{B}}_1 . \quad (5.2-22)$$

5.3 Implementierung als UTAN-Subroutine

5.3.1 Beschreibung der UTAN-Subroutine

Mithilfe der UTAN-Subroutine von LS-DYNA werden die jeweiligen Elementanteile der gesamten Tangentensteifigkeitsmatrix bereitgestellt, die für den impliziten Lösungsalgorithmus notwendig ist. Dessen Konvergenzverhalten und die daraus resultierende numerische Effizienz der Berechnung kann optimiert werden, indem der zum Zeitintegrationsverfahren *konsistente* Tangentenoperator $\hat{\mathbf{C}}_k$ übergeben wird.

Die UTAN-Subroutine bietet Zugriff auf alle für die Berechnung benötigten Größen der konsistenten Tangente gemäß Gleichung 5.1-1 und 5.2-18. Der in den Gleichungen eigentlich vierstufige Tensor wird in Voigtscher Notation berechnet und danach über den zweidimensionalen Array $es(i, j)$ mit sechs Zeilen und Spalten übergeben – siehe Abschnitt 5.3.2.

Da LS-DYNA zum Zeitpunkt dieser Arbeit nur einen symmetrischen Solver besitzt, muss die eigentlich unsymmetrische Tangente als symmetrische (6×6) -Matrix übergeben werden – vgl. [LSTC, 2013, A.42-13], womit sie in der letztendlich implementierten Form nicht als konsistent bezeichnet werden kann. Somit ist die quadratische Konvergenz im Full-Newton-Verfahren nicht zu erzielen – siehe Konvergenzstudien in Kapitel 6.

5.3.2 Verwendung der Voigt-Notation

Die Implementierung der Tangente erfolgt in Voigtscher Notation, einer abkürzenden Schreibweise, bei der die Symmetrie von Tensoren ausgenutzt wird. Tensoren zweiter und vierter Stufe, zum Beispiel der Spannungstensor \mathbf{T} und die Tangentensteifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{C}}_k$, können so aufgrund ihrer vorliegenden Symmetrie auf (6×1) - bzw. (6×6) -Matrizen reduziert werden. So gilt beispielsweise für den Spannungstensor \mathbf{T} in Voigtscher Notation:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ & T_{22} & T_{23} \\ \text{sym} & & T_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \{\mathbf{T}\} := \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{23} \\ T_{31} \end{pmatrix} . \quad (5.3-1)$$

Durch diese Schreibweise erhält man nach [Hartmann, 2003] das dyadische Produkt zweier symmetrischer Tensoren mit Einführung der Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.3-2)$$

zu

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \quad \Longrightarrow \quad \{\mathbf{C}\} = \{\mathbf{A}\} \{\mathbf{B}\}^T \mathbf{M}. \quad (5.3-3)$$

Die Anwendung dieser Überführungsvorschrift auf Gleichung 5.1-1 liefert mithilfe des Deviatoroperators in Voigtscher Notation – vgl. [Hartmann, 2003] –

$$\{\mathbf{C}^D\} = \mathbf{I}_6 - \frac{1}{3} \{\mathbf{1}\} \{\mathbf{1}\}^T \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.3-4)$$

wobei

$$\mathbf{I}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3-5)$$

gilt, die Gleichung

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathbf{C}}_k\} &= \hat{K}(\theta) \{\mathbf{1}\} \{\mathbf{1}\}^T \mathbf{M} + 2\hat{G}(\theta) (1 - \hat{a}_{22}) \{\mathbf{C}^D\} \\ &\quad + 2\hat{G}(\theta) \left[\hat{a}_{22} \{\mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1)\} \{\mathbf{N}(\hat{\mathbf{A}}_1)\}^T \mathbf{M} + \{\hat{\mathbf{A}}_4\} \{\hat{\mathbf{Q}}_2\}^T \mathbf{M} + \{\hat{\mathbf{A}}_6\} \{\hat{\mathbf{Q}}_3\}^T \mathbf{M} \right] \end{aligned} \quad (5.3-6)$$

als konsistente Tangente im effektiven Modellzustand in Voigtscher Notation. Für die konsistente Tangente im Modellzustand mit Schädigung wird mithilfe der Gleichungen 5.2-5 bis 5.2-7 erkannt, dass

$$\left\{ \hat{\mathbf{D}} \right\} = (1 - D) \left[\mathbf{I}_6 - \frac{1}{3} \{\mathbf{1}\} \{\mathbf{1}\}^T \mathbf{M} \right] + (1 - DH(-p)) \frac{1}{3} \{\mathbf{1}\} \{\mathbf{1}\}^T \mathbf{M} \quad (5.3-7)$$

gilt, und somit die Gleichung 5.2-18 nach

$$\begin{aligned} \left\{ {}^a\hat{\mathbf{C}}_k \right\} = \left\{ \hat{\mathbf{D}} \right\} \left\{ \hat{\mathbf{C}}_k \right\} - (\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \hat{u}_3) \left\{ \mathbf{T}^D + H(-p) \mathbf{T}^K \right\} \left\{ \hat{\mathbf{Q}}_2 \right\}^T \mathbf{M} \\ - \hat{u}_2 \hat{u}_4 \left\{ \mathbf{T}^D + H(-p) \mathbf{T}^K \right\} \left\{ \hat{\mathbf{C}}_k^T \hat{\mathbf{B}}_1 \right\}^T \mathbf{M} \end{aligned} \quad (5.3-8)$$

überführt.

Die Berechnungsvorschrift aus Gleichung 5.3-3 ist für die Implementierung der Tangente in einer Subroutine programmiert worden. Dessen Anwendung, neben anderen üblichen Matrixoperationen und die Überführung aller tensorieller Beiträge in die Voigtsche Notation, liefert den konsistenten Tangentenoperator als (6×6) -Matrix, in Äquivalenz zu den Gleichung 5.3-6 und 5.3-8.

5.3.3 Beschreibung des Programmalgorithmus

Der als UTAN-Subroutine programmierte Algorithmus zur Berechnung des Tangentenoperators ist in dem in Abb. 5.3-1 dargestellten Struktogramm zusammengefasst. Mit dessen Hilfe soll nun der prinzipielle Programmablauf nachvollzogen werden. Man beachte, dass für alle Tensoren und Tensoroperationen die Voigtsche Notation verwendet wird.

In einem ersten Schritt werden die benötigten Materialparameter sowie die als History-Variablen gespeicherten Evolutionsgrößen aus den im Programmkopf übergebenen Arrays $cm(i)$ und $hsv(i)$ ausgelesen. Anschließend werden die Materialparameter entsprechend ihrer zugehörigen Temperaturfunktionen der aktuell vorliegenden Temperatur angepasst. Danach wird mithilfe der in Abschnitt 5.3.2 erwähnten Subroutine für das dyadische Produkt und zuvor berechneten Einheitstensoren der Deviatoroperator \mathbf{C}^D aufgestellt.

Ist im Spannungsalgorithmus in der UMAT-Subroutine ein elastischer Zeitschritt durchgeführt worden, genügen die Anteile des Elastizitätstensors $\hat{\mathbf{C}}^*$ zur Berechnung des Tangentenoperators. Ist ein plastischer Zeitschritt durchgeführt worden oder findet zumindest Schädigung statt, werden alle in Abb. 5.1-1 und 5.1-2 dargestellten Abkürzungen berechnet. Bei tatsächlich vorliegendem plastischen Zeitschritt erfolgt nun die Berechnung aller Anteile der konsistenten Tangente gemäß Gleichung 5.1-1. Für den elastischen sowie plastischen Zeitschritt ist die Tangente bis jetzt als Deviator- sowie Kugelanteil getrennt behandelt worden, um im weiteren Verlauf die Schädigung in Abhängigkeit des hydrostatischen Spannungszustands korrekt berücksichtigen zu können.

Wenn keine Schädigung vorliegt, können der deviatorische Anteil der Tangente sowie der Kugelanteil addiert und dem von LS-DYNA vorgegebenen Ausgabe-Array $es(i, j)$ übergeben werden. Findet Schädigung statt, werden die in Abschnitt 5.2 eingeführten Abkürzungen berechnet, die Gleichung 5.2-21 oder 5.2-22 in Abhängigkeit des hydrostatischen Spannungszustands angewendet und anschließend die berechnete Tangente in den Array $es(i, j)$ kopiert. Abschließend wird die bis dahin konsistente Tangente aufgrund der in Abschnitt 5.3.1 erwähnten Einschränkung seitens LS-DYNA symmetrisiert.

UTAN-Subroutine

Lese ein: cm (i) {Materialparameter: E, ...} hsv (i) {History-Variablen: D, θ, ...}	
An Temperatur anpassen: hE {Materialparameter mittels temperaturabhängiger Funktionen anpassen: E → $\hat{E}(\theta)$ } ... {Für alle benötigten Materialparameter fortfahren}	
Berechne: CD (i, j) {Deviatoroperator \mathcal{C}^D }	
Elastischer Zeitschritt?	
Ja	Nein
Berechne Anteile der Elastizitätstensors $\hat{\mathcal{C}}^*$: hCCk (i, j) {Deviatoranteil der elastischen Tangente $\hat{\mathcal{C}}_k^D$ } hCCkhk (i, j) {Kugelanteil der Tangente $\hat{\mathcal{C}}_k^K$ }	∅
Plastischer Zeitschritt oder D > 1?	
Ja	Nein
Berechne: ha1 - ha27 {Abkürzungen des konsistenten Tangentenoperators} ... {Für alle weiteren benötigten Abkürzungen fortfahren}	∅
Plastischer Zeitschritt?	
Ja	Nein
Berechne alle Anteile der Tangente $\hat{\mathcal{C}}_k$: hCCk (i, j) {Alle Deviatoranteile der Tangente $\hat{\mathcal{C}}_k^D$ } hCCkhk (i, j) {Kugelanteil der Tangente $\hat{\mathcal{C}}_k^K$ }	∅
D > 1 ?	
Ja	Nein
Berechne: hu1 - hu4 {Abkürzungen des Schädigungsanteils der konsistenten Tangente} ... {Für alle weiteren benötigten Abkürzungen fortfahren}	Berechne: es (i, j) { $\hat{\mathcal{C}}_k = \hat{\mathcal{C}}_k^D + \hat{\mathcal{C}}_k^K$ }
p > 0 ?	
Ja	Nein
Berechne: es (i, j) {Gleichung 5.2-22}	Berechne: es (i, j) {Gleichung 5.2-21}
Symmetrisiere: es (i, j) { ${}^a\hat{\mathcal{C}}_k^{sym} = \frac{1}{2}({}^a\hat{\mathcal{C}}_k + {}^a\hat{\mathcal{C}}_k^T)$ }	

Abb. 5.3-1: Algorithmus der UTAN-Subroutine

6 Konvergenzstudien

In diesem Kapitel wird untersucht, ob mithilfe der als UTAN-Subroutine implementierten Tangente FE-Berechnungen zuverlässig und effizient durchgeführt werden können. Dazu werden unterschiedliche Problemstellungen unter veränderlichen Bedingungen berechnet, ausgewertet und dessen numerisches Verhalten in Relation zueinander bewertet.

6.1 Vorgehensweise

Zur Überprüfung der implementierten Tangente wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels zum einen das Konvergenzverhalten der Simulation, zum anderen die Güte der Näherungslösung unterschiedlicher Problemstellungen untersucht und diskutiert. Die Implementierung der Tangente soll dabei unter veränderlichen Rahmenbedingungen für die Lösung mittels impliziter Zeitintegration bewertet werden.

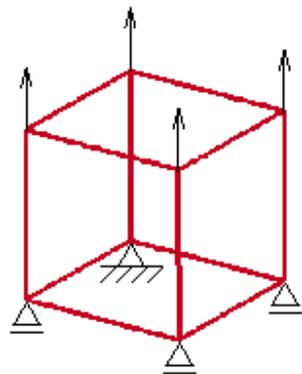
Für den iterativen Gleichungslöser wird u. a. das Full-Newton-Verfahren verwendet, mit dem unter bestimmten Voraussetzungen bei der Nullstellenbestimmung einer Funktion lokale quadratische Konvergenz erreicht werden kann – siehe dazu [Hanke-Bourgeois, 2006, S.159]. Es gilt zu beachten, dass mithilfe des Full-Newton-Verfahrens im analytischen Idealfall quadratische Konvergenz erreicht werden kann. Werden die in [Hanke-Bourgeois, 2006] definierten Voraussetzungen verletzt, so ist für das Full-Newton-Verfahren auch lineare Konvergenz durchaus üblich. Inwiefern diese Voraussetzungen für die in diesem Kapitel durchgeführten Untersuchungen eingehalten werden können, ist in Hinblick auf vorhandene Geometrie-, Material-, Strukturnichtlinearitäten und den symmetrisierten konsistenten Tangentenoperator kritisch zu betrachten. Es soll festgehalten werden, dass das Ausbleiben quadratischer Konvergenz nicht die fehlerhafte Implementierung der Tangente impliziert.

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine pragmatische und anwenderorientierte Untersuchungsweise gewählt, bei der die Bewertung des Konvergenzverhaltens der Tangente anhand der Berechnungszeit, der Iterationsanzahl und des Iterationsverlaufs unterschiedlicher Problemstellungen erfolgt. Für diese werden unterschiedliche Lösungsverfahren wie das Full-Newton-Verfahren oder das modifizierte Newton-Verfahren verwendet – siehe [LSTC, 2013], die Zeitschrittweite Δt und dessen Steuerung variiert und außerdem sowohl quasi-statisch als auch implizit-dynamisch gerechnet. Als Vergleich dient die jeweilige Problemlösung mittels expliziter Zeitintegration ohne Massenskalierung, außer wenn anders vermerkt.

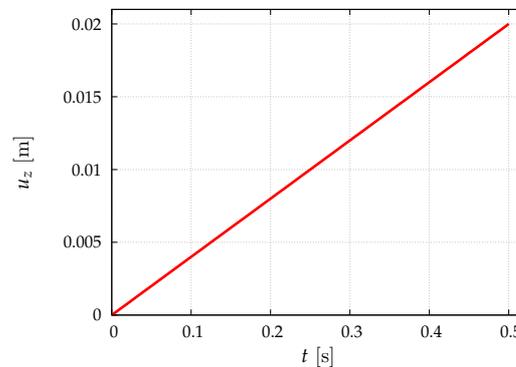
6.2 Ein-Element-Untersuchung

6.2.1 FE-Modell

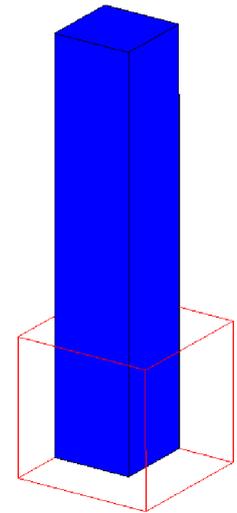
Zur Untersuchung möglichst optimalen Konvergenzverhaltens bei impliziter Zeitintegration einer rein strukturmechanischen Simulation soll das in Abb. 6.2-1(a) dargestellte Ein-Element-Modell dienen. Drei der unteren vier Knoten des Elements sind in der Ebene der unteren Ele-



(a) FE-Modell der Ein-Element-Untersuchung



(b) Verschiebungs-Zeit-Verlauf



(c) Kontur des deformierten Ein-Element-Modells

Abb. 6.2-1: Verschiebungsgesteuerter Zug-Versuch an einem Ein-Element-Modell

mentfläche verschiebbar, wohingegen der vierte Knoten in allen Raumrichtungen fest gelagert ist. Auf die vier oberen Knoten wird eine monoton ansteigende Verschiebung in Pfeilrichtung aufgebracht – siehe Abb. 6.2-1(b).

Um einen Einfluss der Temperaturentwicklung auf das Konvergenzverhalten auszuschließen, wird die Berechnung isotherm durchgeführt. Außerdem findet keine Schädigungsentwicklung statt, um auch diesbezüglich optimale Bedingungen für schnellstmögliche Konvergenz zu schaffen. Die Lösung erfolgt quasi-statisch mithilfe des Full-Newton-Verfahrens und veränderlichen äquidistanten Zeitschritten Δt_0 , und stellt, wie bereits oben beschrieben, einen verschiebungsgesteuerten Versuch dar.

6.2.2 Güte der Näherungslösungen

Wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, werden unterschiedliche Einstellungsvarianten für den impliziten Löser verwendet, um eine Aussage über das Konvergenzverhalten der implementierten Tangente treffen zu können. Für alle Varianten stellt sich für das deformierte Ein-Element-Modell die in Abb. 6.2-1(c) dargestellte Kontur als Resultat des aufgebrachten Verschiebungsverlaufs aus Abb. 6.2-1(b) ein.

In Abb. 6.2-2 sind die Ergebnisse der unterschiedlichen Lösungsvarianten dargestellt. Wie zu erwarten zeigt sich, dass die Näherungsgüte der Lösung von der Zeitschrittweite Δt_0 abhängt. Die vorgegebenen Zeitinkremente und die daraus resultierende grobe Auflösung des Zeitverlaufs geben unmittelbar vor, an welchen Stellen eine Auswertung erfolgt. Selbstverständlich kann durch die Auswertung eines einzelnen Endpunkts des Verschiebungsverlauf, wie in der Variante „Impl. 500 ms“, kein nichtlinearer Lösungsverlauf abgebildet werden. Folglich muss ausschließlich bewertet werden, wie exakt die Lösung an den jeweiligen Auswertungspunkten der Untersuchungsvarianten übereinstimmen.

Abb. 6.2-2(b) zeigt die berechnete Axialkraft F_z über der Verschiebung u_z , die zur Deformation des Elements notwendig ist. Diese hängt mit den entscheidenden Bewertungsgrößen der Gleichgewichtssiterationen unmittelbar zusammen – siehe Abschnitt 2.5. An den Auswertungs-

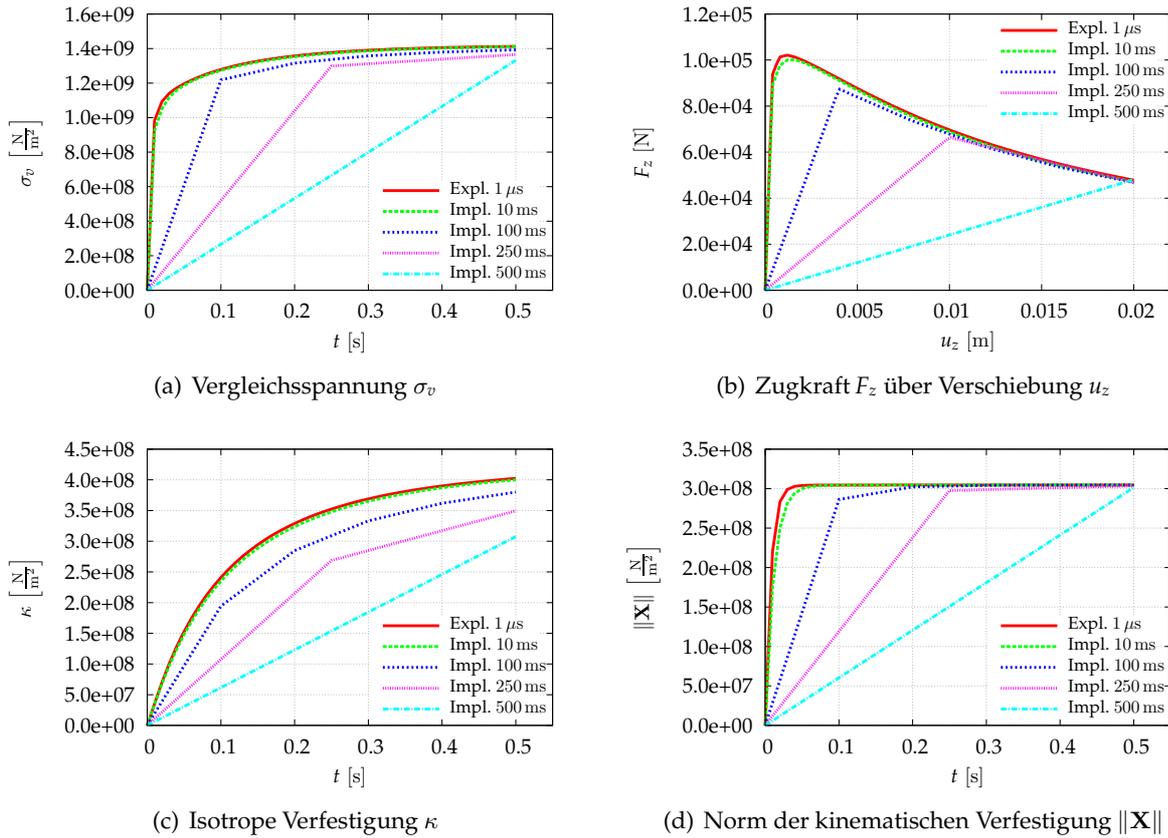


Abb. 6.2-2: Ergebnisverläufe der Ein-Element-Untersuchung

punkten herrscht zwischen allen Varianten, von „Expl. 1 μs “ bis „Impl. 500 ms“, fast völlige Übereinstimmung. Die Abweichungen der Auswertungspunkte für die Vergleichsspannung σ_v ist letztlich auf den im untersuchten Zeitraum ausschließlich nichtlinearen Verlauf der isotropen Verfestigung κ zurückzuführen. Würde diese schneller in ihren Sättigungswert übergehen, äquivalent zur Norm der kinematischen Verfestigung $\|\mathbf{X}\|$, und damit einen zum größten Teil linearen Entwicklungsverlauf im untersuchten Zeitraum haben, würde an den Auswertungspunkten eine größere Übereinstimmung zwischen den Untersuchungsvarianten vorliegen. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Näherungslösung auch für große Zeitschrittweiten eine hohe Güte aufweisen. Jedoch muss für die Lösung nichtlinearer Problemstellungen mithilfe eines Lösungsverfahrens, dem eine Linearisierung zur Gleichungslösung zugrunde liegt, eine hinreichend feine zeitliche Auflösung zur Verfügung gestellt werden, sofern die Bestimmung des genauen Verlaufs der gesuchten Größen erforderlich ist.

6.2.3 Numerische Effizienz der Näherungslösungen

Die Auswertung der numerischen Effizienz der Tangente am Beispiel des Ein-Element-Versuchs zeigt, dass der numerische Aufwand mit zunehmender Zeitschrittgröße Δt abnimmt – vgl. Tab. 6.2-1, „Problem cycles“. Mittels „Total CPU time“ lässt sich die numerische Effizienz der implizit gelösten Varianten nicht vergleichen, allerdings kann die Berechnungsdauer im Vergleich zur expliziten Lösung ohne Massenskalierung („Expl. 1 μs “) selbst bei fein aufgelöstem Zeitverlauf stark verkürzt werden – vgl. „Impl. 10 ms“, Tab. 6.2-1.

Der Wert Δt_{krit} gibt die erforderliche Zeitschrittgröße an, die von der automatischen Zeitschritt-

Bezeichnung					Explizit
Δt_0	10 ms	100 ms	250 ms	500 ms	$\approx 1 \mu s$
Problem cycles	376	51	24	17	473858
Total CPU time	1 s	0 s	0 s	0 s	17 s
max. Iterationen pro Zeitschritt	4	5	5	7	-
Δt_{krit}	-	-	-	-	-

Tab. 6.2-1: Vergleich des numerischen Aufwands für die Berechnung mit veränderlichen Zeitschrittgrößen Δt_0

Iteration	Verschiebung	Energie	Residuum
1	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00
2	2.388E-01	3.815E-02	3.530E-01
3	8.430E-02	4.755E-03	4.518E-02
4	1.079E-02	7.786E-05	3.163E-03
5	7.554E-04	3.818E-07	2.001E-04
6	4.778E-05	1.527E-09	1.256E-05
7	2.999E-06	6.018E-12	7.881E-07
Konvergenz- toleranz	1.000E-05	1.000E-10	1.000E-02

Tab. 6.2-2: Verlaufstabelle der Konvergenzwerte bei Zeitschrittgröße $\Delta t_0 = 500ms$

steuerung des Lösungsalgorithmus zur Lösung eingestellt worden ist. Tab. 6.2-1 zeigt, dass alle Varianten mit äquidistanten Zeitschritten gelöst worden sind.

Für die Variante „Impl. 500 ms“ wird nun der genaue Verlauf der Konvergenzwerte untersucht. Tab. 6.2-2 zeigt in tabellarischer Form die Werte für die Verschiebungs-, Energie- und Residuumkonvergenz sowie dessen Toleranzwerte. Diese Werte liefern in doppelt logarithmischer Auftragung die in Abb. 6.2-3 dargestellten Verläufe. Sie zeigen, dass das Ein-Element-Modell im Full-Newton-Verfahren mit einer superlinearen Konvergenzgeschwindigkeit gelöst werden kann – vgl. [Hanke-Bourgeois, 2006].

Die Rahmenbedingungen der in diesem Abschnitt durchgeführten Untersuchung lassen den Schluss zu, dass im Full-Newton-Verfahren keine weitere Steigerung der Konvergenzgeschwindigkeit oder der Konvergenzordnung möglich ist. An welchen Ursachen dies zu erklären ist, kann im Rahmen dieser Arbeit nicht beantwortet werden. Allerdings liegt der Verdacht nahe, dass die in der UTAN-Subroutine erforderliche Symmetrisierung der Tangente eine optima-

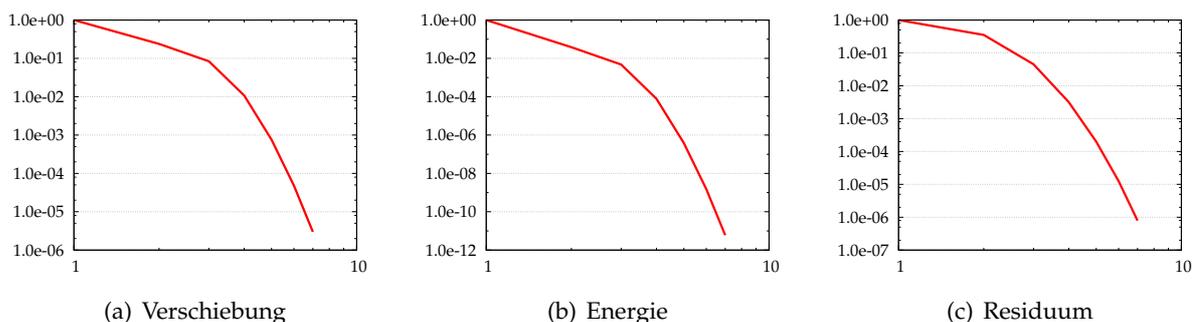


Abb. 6.2-3: Verlaufsdiagramme der Konvergenzwerte bei Zeitschrittgröße $\Delta t_0 = 500ms$

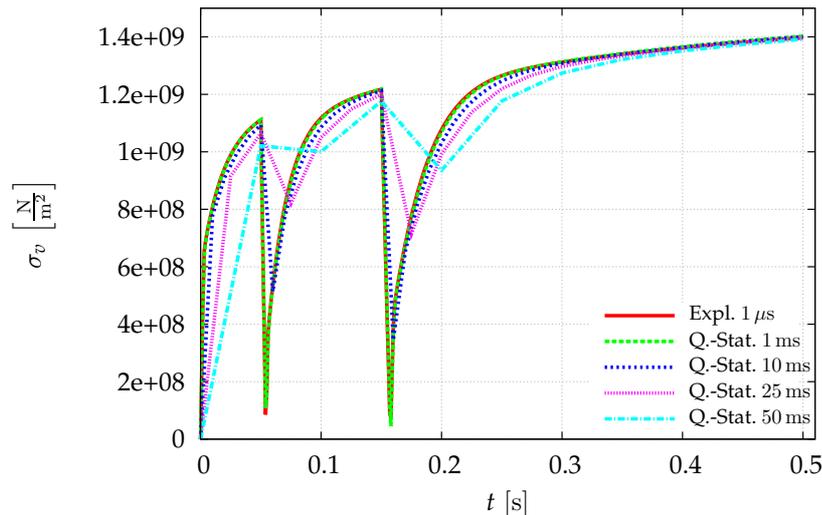


Abb. 6.3-1: Verlauf der Vergleichsspannung σ_v für die isotherme Berechnung des Viertelzylinders ohne Schädigung – Auswertung: Element ID 311

le Konvergenzgeschwindigkeit von vornherein ausschließt. Relativ betrachtet, kann dennoch selbst für diese einfache Untersuchung ein großes Ersparnis der Rechenzeit erzielt werden.

6.3 Konvergenzverhalten des Viertelzylinders bei optimalen Rahmenbedingungen

6.3.1 FE-Modell

In Anlehnung an die Vorgehensweise aus Abschnitt 6.2 soll nun eine Untersuchung eines komplexeren Modells durchgeführt werden, in der die Rahmenbedingungen für optimale Konvergenzgeschwindigkeit ungünstiger als im Falle des Ein-Element-Modells ausfallen. Dazu wird das in Abschnitt 4.1 eingeführte Viertelzylinder-Modell mit gleichem Verschiebungsverlauf berechnet. Es handelt sich somit, wie zuvor, um einen Druck-Zug-Druck-Versuch. Da der Verschiebungsverlauf nicht monoton ist – siehe Abb. 4.1-1(b) – muss der Zeitverlauf in kleineren Zeitschritten aufgelöst werden. Der größt mögliche Zeitschritt ist somit $\Delta t_0 = 50$ ms.

Ansonsten werden wieder möglichst optimale Voraussetzungen für eine schnelle Konvergenzgeschwindigkeit geschaffen: Die Berechnung erfolgt abermals isotherm und ohne Schädigungsentwicklung. Die Lösungen für unterschiedliche Zeitschrittgrößen Δt sollen sowohl für eine quasi-statische als auch für eine implizit-dynamische Berechnung verglichen werden. Um eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit treffen zu können, wird das Full-Newton-Verfahren zur Problemlösung verwendet.

6.3.2 Güte der Näherungslösungen

In Abb. 6.3-1 ist die Vergleichsspannung σ_v für die untersuchten Berechnungsvarianten dargestellt. Die Berechnung des Viertelzylinder-Modells liefert bezüglich der Näherungsgüte ein zum Ein-Element-Modell aus Abschnitt 6.2 vergleichbares Ergebnis. An den Auswertungspunkten der jeweiligen Berechnungsvarianten kann im stark nichtlinearen Verlauf eine umso bessere Näherungslösung erzielt werden, je kleiner die Zeitschrittgröße Δt ist. Je weiter sich

Simulation	Bezeichnung					Explizit
quasi-statisch	Δt_0	1 ms	10 ms	25 ms	50 ms	$\approx 1 \mu s$
	Problem cycles	7718	938	404	228	459489
	Total CPU time	260 s	37 s	17 s	11 s	881 s
	max. Iterationen pro Zeitschritt	11	14	12	12	-
	Δt_{krit}	-	-	-	-	-
implizit dynamisch	Δt_0	1 ms	10 ms	25 ms	50 ms	$\approx 1 \mu s$
	Problem cycles	7862	938	404	228	459489
	Total CPU time	266 s	37 s	17 s	11 s	881 s
	max. Iterationen pro Zeitschritt	11	14	12	12	-
	Δt_{krit}	-	-	-	-	-

Tab. 6.3-1: Vergleich des numerischen Aufwands für die isothermen Berechnungen des Viertelzylinders ohne Schädigung

Iteration	$\Delta t_0 = 1ms$			$\Delta t_0 = 10ms$		
	Verschiebung	Energie	Residuum	Verschiebung	Energie	Residuum
1	2.106E-02	1.000E+00	1.000E+00	2.071E-01	1.000E+00	1.000E+00
2	1.059E-03	9.400E-06	1.893E-01	5.761E-03	2.774E-05	2.251E-01
3	8.765E-05	2.004E-07	6.173E-02	6.877E-04	8.976E-07	7.210E-02
4	2.568E-05	1.841E-08	2.424E-02	2.139E-04	8.785E-08	2.816E-02
5	8.735E-06	2.415E-09	1.021E-02	7.859E-05	1.297E-08	1.176E-02
6	3.456E-06	3.984E-10	4.484E-03	3.380E-05	2.296E-09	5.092E-03
7	1.472E-06	7.419E-11	2.025E-03	1.509E-05	4.421E-10	2.268E-03
8	-	-	-	6.826E-06	8.891E-11	1.030E-03
Konvergenz-toleranz	1.000E-05	1.000E-10	1.000E-02	1.000E-05	1.000E-10	1.000E-02

Tab. 6.3-2: Verlaufstabelle der Konvergenzwerte auf $t = 0.05 s$ bei quasi-statischer Simulation

die nichtlinearen Verfestigungsanteile entwickelt haben, umso besser fällt die Näherungslösung am Auswertungspunkt aus.

Es lässt sich festhalten, dass auch für ein komplexeres Modell mit nicht-monotonem Verschiebungsverlauf eine sehr gute Näherungslösung erzielt werden kann. Die Berechnung des genauen Verlaufs der Ergebnisgrößen erfordert allerdings eine feinere zeitliche Auflösung der Berechnung.

6.3.3 Numerische Effizienz der Näherungslösungen

Passend zu den Schlussfolgerungen aus Abschnitt 6.2.3 bezüglich des Ein-Element-Modells zeigt Tab. 6.3-1, dass der numerische Aufwand mit steigender Zeitschrittgröße Δt abnimmt. Wird der Spannungsverlauf für die Berechnungsvariante „Q.-stat. 10 ms“ als ausreichend genau betrachtet, ergibt sich im Vergleich zur expliziten Berechnung ohne Massenskalierung ein Zeitersparnis von 95.8 %. Im Iterationsverlauf des Löser kommt es zu keinen Konvergenzproblemen, wodurch für alle Varianten die jeweiligen Startwerte der Zeitschrittgröße Δt_0 beibehalten worden sind – vgl. 6.3-1.

Die Konvergenzwerte in Tab. 6.3-2 und deren Verläufe in Abb. 6.3-2 zeigen, dass im Vergleich

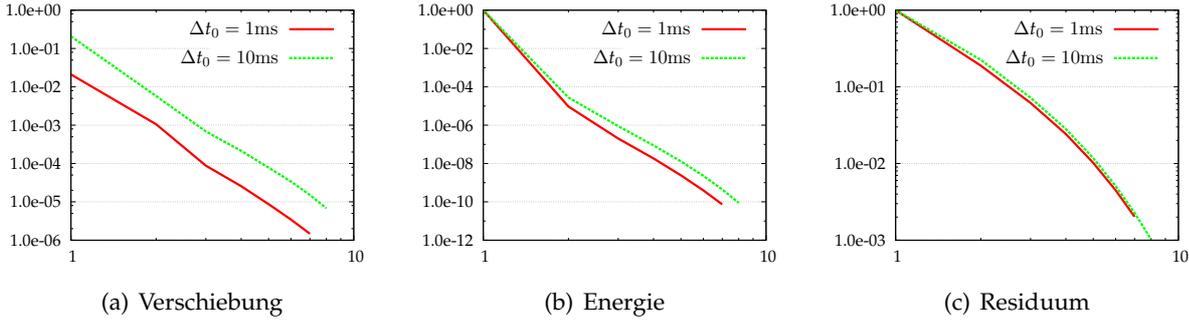


Abb. 6.3-2: Verlaufsdiagramme der Konvergenzwerte des Iterationsverlaufs auf $t = 0.05$ s

zur 1-Element-Untersuchung schlechtere Konvergenzgeschwindigkeiten für die Verschiebungs-, Energie- und Residuumkonvergenz erreicht worden sind. Allerdings geben diese Verläufe das Konvergenzverhalten des iterativen Lösungsprozesses auf den Zeitpunkt $t = 0.05$ s vom jeweils vorherigen Zeitpunkt wieder. In diesem Zeitraum findet noch stark nichtlineares Materialverhalten statt, das optimale Konvergenzgeschwindigkeit erschwert. Im untersuchten Zeitraum liegt damit nur eine lineare Konvergenzgeschwindigkeit vor.

Für das hier untersuchte Problem lässt sich weder im Konvergenzverhalten, noch im numerischen Aufwand, der Stabilität oder im Ergebnis ein Unterschied zwischen quasi-statischer und implizit-dynamischer Berechnung feststellen.

6.4 Konvergenzstudien der Tangente mit Schädigung am Viertelzylinder

6.4.1 Vorbemerkungen zur Untersuchung

Für die nachfolgende Untersuchung wird die exakt gleiche Problemstellung (Viertelzylinder im Druck-Zug-Druck-Versuch) wie aus Abschnitt 6.3 verwendet. Die im weiteren Verlauf verwendeten Berechnungsvarianten dienen zur Untersuchung der Einsatztauglichkeit der vollständigen Tangente bei Berücksichtigung von Schädigung. In Abschnitt 5.3.3 wurde beschrieben, dass die konsistente Tangente in der UTAN-Subroutine in Abhängigkeit von auftretender Schädigung aufgebaut wird. In den vorangegangenen Untersuchung ist bisher keine Schädigungsentwicklung berücksichtigt worden, weswegen bisher nur ein Teil der implementierten Tangente angewendet worden ist. Die je nach hydrostatischen Spannungszustand hinzukommenden Terme in den Gleichungen der konsistenten Tangente werden im weiteren Verlauf als „Schädigungsanteil“ bezeichnet:

$$p < 0 \Rightarrow {}^a \hat{\mathbf{C}}_k = (1 - D) \hat{\mathbf{C}}_k - \underbrace{(\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \hat{u}_3) \mathbf{T} \otimes \hat{\mathbf{Q}}_2 - \hat{u}_2 \hat{u}_4 \mathbf{T} \otimes \hat{\mathbf{C}}_k^T \hat{\mathbf{B}}_1}_{\text{Schädigungsanteil}} \quad (6.4-1)$$

$$p > 0 \Rightarrow {}^a \hat{\mathbf{C}}_k = (1 - D) \hat{\mathbf{C}}_k^D + \hat{\mathbf{C}}_k^K - \underbrace{(\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \hat{u}_3) \mathbf{T}^D \otimes \hat{\mathbf{Q}}_2 - \hat{u}_2 \hat{u}_4 \mathbf{T}^D \otimes \hat{\mathbf{C}}_k^T \hat{\mathbf{B}}_1}_{\text{Schädigungsanteil}} \quad (6.4-2)$$

Neben der Anwendung der Tangente mit und ohne Schädigungsanteil wird in den nachfolgenden Untersuchungen zwischen eingeschalteter und ausgeschalteter Schädigungsentwicklung sowie zwischen isothermer und nicht isothermer Berechnung unterschieden. Es wird ausschließlich quasi-statisch gerechnet.

6.4.2 Güte der Näherungslösungen

Da für die hier untersuchten Berechnungsvarianten schwächere Konvergenztoleranzen verwendet worden sind, darf nicht mit der gleichen Genauigkeit der Näherungslösungen an den Auswertungspunkten gerechnet werden, wie sie in den in Abschnitt 6.2 und 6.3 durchgeführten Untersuchungen erreicht worden ist. Trotzdem fällt auf, dass ein im Vergleich zu den vorherigen Untersuchungen größer ausfallender Unterschied nur in den Berechnungsvarianten mit eingeschalteter Schädigung zu finden ist.

Der Verlauf der Vergleichsspannung σ_v in Abb. 6.4-1(a) zeigt, dass sich die Auswertungspunkte der Untersuchungsvarianten im Zeitverlauf immer weiter voneinander entfernen. Die Ursache dafür liegt an der Art und Weise, wie die Schädigung in ihrer implementierten Form berechnet wird: Die Berechnung der Schädigungsentwicklung erfolgt mithilfe des impliziten EULER-Verfahrens, und wird, wie zu erwarten, mit steigender Zeitschrittgröße ungenauer. Den Beweis dafür zeigen die Ergebnisverläufe der Schädigungsvariablen D in Abb. 6.4-1(b), der viskoplastischen Bogenlänge in Abb. 6.4-1(e) und der Temperatur in Abb. 6.4-1(f): Obwohl sich die Schädigungsvariable D in Abhängigkeit der Temperatur, des hydrostatischen Spannungszustands und der Dehnrates entwickelt – siehe Gleichung 3.2-4 und 3.2-5 – sind deren Verläufe nicht die Ursache der schneller fortschreitenden Schädigung. Die Verläufe der viskoplastischen Bogenlänge zeigen bei eintretender Schädigung keinerlei nennenswerten Unterschied zwischen den Berechnungsvarianten, wodurch diese als Ursache ausgeschlossen werden können. Auch wenn eine niedrigere Temperatur, wie sie für die Berechnungsvarianten mit größerer Zeitschrittweite vorliegt, zu einer schnelleren Entwicklung der Schädigung D führt, ist auch diese nicht für den Spannungsunterschied in Abhängigkeit der Zeitschrittgröße verantwortlich, da sich dieser auch bei den isotherm durchgeführten Berechnungen in gleichem Maße erkennen lässt – vgl. Abb. 6.4-2. Somit zeigt sich, dass das Berechnungsverfahren der Schädigung die alleinige Ursache für die voneinander abweichenden Auswertungspunkte der Berechnungsvarianten ist.

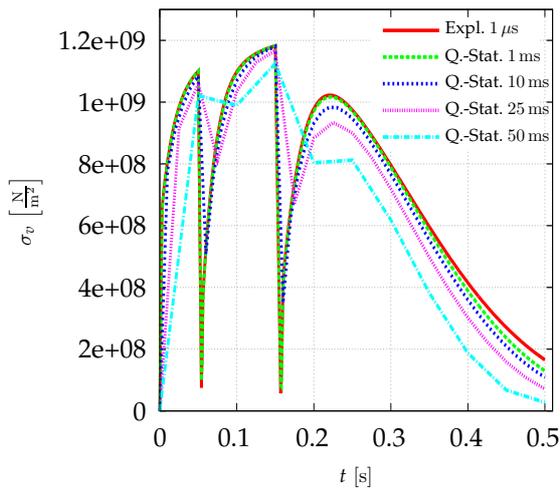
Die oben bereits angesprochene unterschiedliche Temperaturentwicklung wird durch die „Staggered-Solution-Strategie“ – siehe [Bröcker, 2014, S.195] – ausgelöst. In diesem Lösungsverfahren werden Temperatur- und Verschiebungsfeld sequenziell nacheinander gelöst. Der iterative Lösungsprozess des Verschiebungsfelds pro Zeitschritt Δt findet somit isotherm statt was sich bei großen Zeitschritten, wie in Abb. 6.4-1(f) sichtbar, bemerkbar macht.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass auch mit eingeschalteter Schädigung genaue Näherungslösungen mithilfe quasi-statischer Berechnung erzielt worden sind. Allerdings wird anhand der Ergebnisse deutlich, dass sowohl in der Näherungsgüte der Temperaturberechnung, als auch der Schädigungsberechnung eine Abhängigkeit von der Zeitschrittgröße vorliegt.

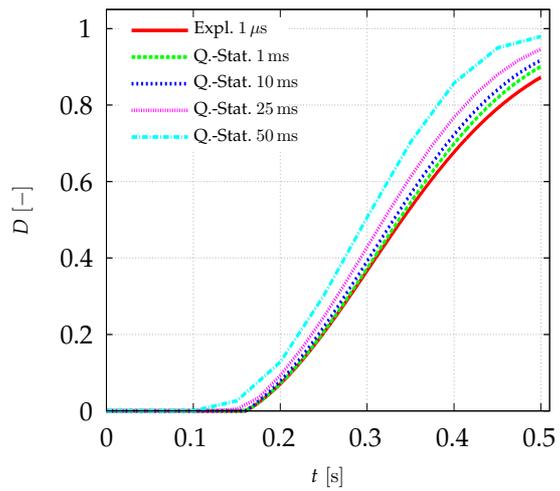
6.4.3 Numerische Effizienz der Näherungslösungen

Die Tabellen 6.4-1 und 6.4-2 zeigen die Ergebnisse für eine Vielzahl an Untersuchungen, die für den Viertelzylinder mit unterschiedlichen Berechnungseinstellungen durchgeführt worden sind. Aus ihnen lassen sich bezüglich der Validierung der Tangente wichtige Schlüsse ziehen.

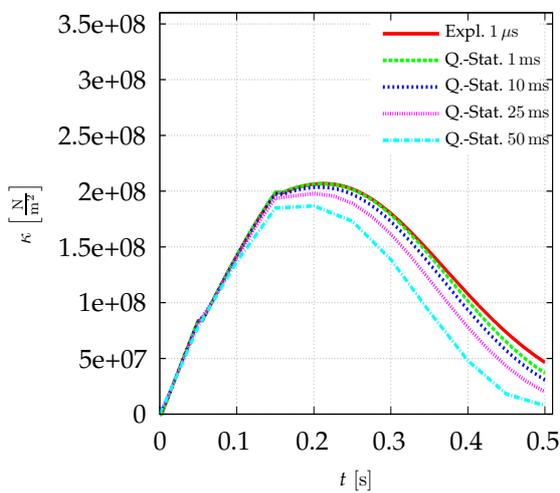
Die Ergebnisse zeigen durchgehend, dass es für den numerischen Aufwand keinen wesentlichen Unterschied macht, ob isotherm oder mit Temperaturentwicklung gerechnet wird. Für die nicht-isothermen Berechnung mit eingeschalteter Schädigungsentwicklung kann sogar eine leichte, aber vernachlässigbar kleine Steigerung der numerischen Effizienz verzeichnet werden – siehe Tab. 6.4-2. Außerdem steigt der numerische Aufwand mit berechneter Schädigung im



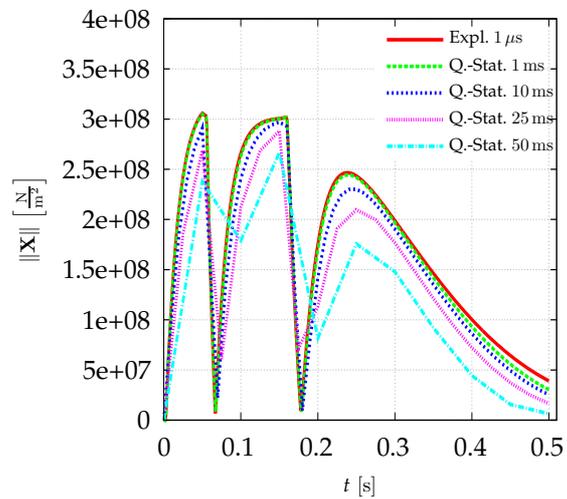
(a) Vergleichsspannung σ_v



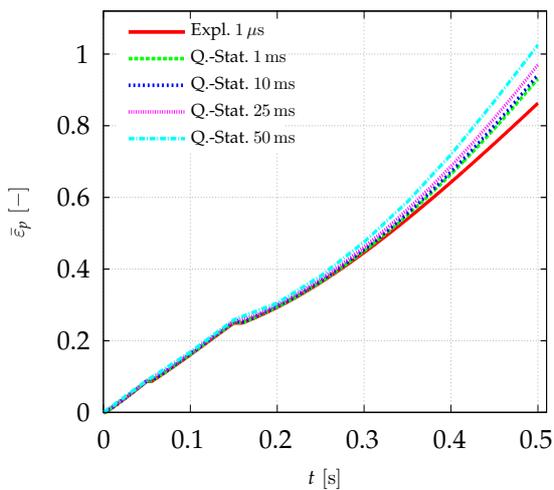
(b) Schädigungsvariable D



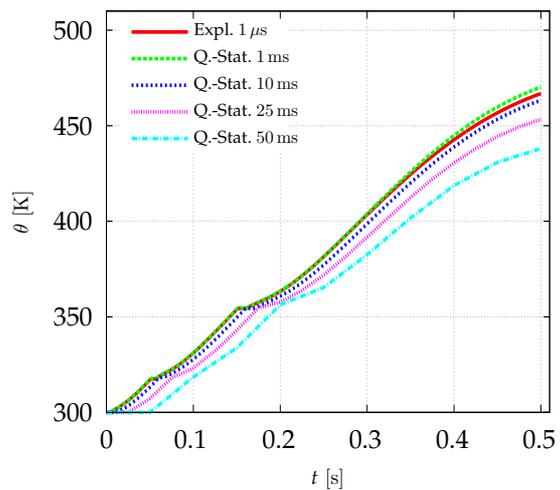
(c) Isotrope Verfestigung κ



(d) Norm der kinematischen Verfestigung $\|\mathbf{X}\|$



(e) Viskoplastische Bogenlänge $\bar{\epsilon}_{vp}$



(f) Temperatur θ

Abb. 6.4-1: Ergebnisverläufe für die nicht-isotherme Berechnung mit Schädigungsentwicklung und ohne Schädigungsanteile in der UTAN-Subroutine – Auswertung: Element ID 311

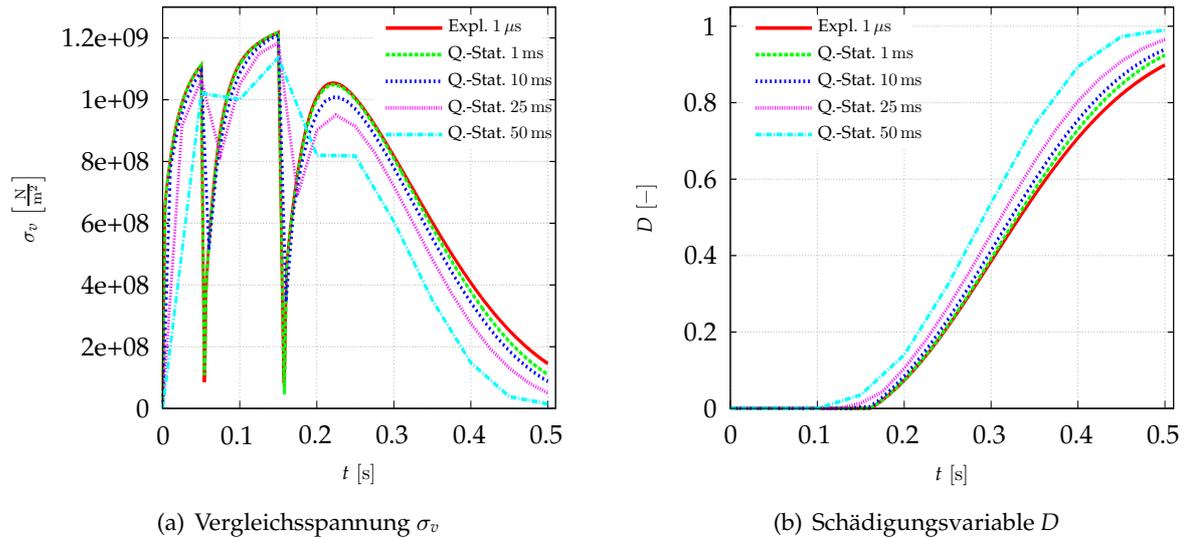


Abb. 6.4-2: Ergebnisverläufe für die isotherme Berechnung mit Schädigungsentwicklung und ohne Schädigungsanteile in der UTAN-Subroutine – Auswertung: Element ID 311

Vergleich zur Berechnung ohne Schädigung nur leicht an – vgl. Tab. 6.4-1 und 6.4-2. Allerdings gelten beide Ergebnisse nicht für diejenigen Berechnungsvarianten, bei denen Konvergenzprobleme durch die automatische Zeitschrittsteuerung behoben worden sind.

Bei Verwendung der Schädigungsanteile der Tangente – siehe Gleichung 6.4-1 und 6.4-2 – lässt sich erkennen, dass sich sowohl für die isotherme als auch die nicht-isotherme Berechnung an zumindest einem Zeitpunkt des Lösungszeitraums eine kritische Zeitschrittweite Δt_{krit} ergibt, die für das Erfüllen der Konvergenztoleranzen notwendig ist – siehe Tab. 6.4-2. Deren Vergleich macht abermals deutlich, dass Konvergenz in der nicht-isotherm gerechneten Variante leichter erreicht werden kann.

Als besonders bemerkenswert stellt sich heraus, dass die Verwendung der Schädigungsanteile der Tangente ein schlechteres Ergebnis für die numerische Effizienz liefert, als wenn diese ignoriert und somit nicht verwendet werden. Wie bereits in Abschnitt 5.3.1 beschrieben, kann aufgrund der von LS-DYNA vorgegebenen Einschränkungen für die Implementierung keine tatsächlich konsistente Tangente an den impliziten Lösungsalgorithmus übergeben werden. Das Ergebnis aus Tab. 6.4-2 zeigt, dass mithilfe der vereinfachten Tangente ohne Schädigungsanteil ein besseres Ergebnis für die numerische Effizienz erreicht werden kann als mit dem Tangentenoperator mit Schädigungsanteil.

6.4.4 Anmerkung zur Implementierung der Tangente

Die vorangegangene Untersuchung hat gezeigt, dass die aufgrund der Einschränkungen seitens LS-DYNA nicht-konsistent implementierte Tangente aus numerischer Sicht ein besseres Ergebnis liefert, wenn auf die Berechnung der Schädigungsanteile (siehe Gleichung 6.4-1 und 6.4-2) verzichtet wird. Ob sich dieses Ergebnis letztlich auf die erzwungene Symmetrisierung in der Implementierung zurückführen lässt oder die Ursache in einer möglicherweise fehlerhaften Implementierung oder sogar Herleitung zu suchen ist, kann im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr beantwortet werden.

Trotzdem muss die Implementierung als erfolgreicher Schritt betrachtet werden: Im Vergleich

Einstellungen	Bezeichnung	Quasi-Statisch				Explizit
		1 ms	10 ms	25 ms	50 ms	
isotherm	Δt_0	1 ms	10 ms	25 ms	50 ms	$\approx 1 \mu s$
	Problem cycles	3544	388	186	115	459489
	Total CPU time	112 s	14 s	8 s	5 s	881 s
	max. Iterationen pro Zeitschritt	5	7	7	6	-
	Δt_{krit}	-	-	-	-	-
nicht isotherm	Δt_0	1 ms	10 ms	25 ms	50 ms	$\approx 1 \mu s$
	Problem cycles	3544	386	188	117	460950
	Total CPU time	118 s	15 s	8 s	5 s	899 s
	max. Iterationen pro Zeitschritt	5	7	7	6	-
	Δt_{krit}	-	-	-	-	-

Tab. 6.4-1: Vergleich des numerischen Aufwands bei veränderlichen Berechnungseinstellungen und ohne Schädigungsentwicklung

```

$ curve for implicit timestep DTMAX
$
*DEFINE_CURVE
$#      lcid      sidr      sfa      sfo      offa      offo      dattyp
        24         0  1.000000  1.000000  0.000      0.000         0
$#
        a1         o1
        0.000         0.500000
        23.800000         0.500000
        24.000000         0.005000
        27.000000         0.050000
        28.000000         0.500000
        60.000000         0.500000

```

Abb. 6.5-1: Auszug des LS-DYNA-Input-Decks: Vorgabe von Δt_{max}

zur expliziten Zeitintegration ohne Massenskalierung kann mit einem Rechenzeitersparnis von ca. 98.2% ein zufriedenstellendes Ergebnis für den Ergebnisverlauf mithilfe der Untersuchungsvariante „Q.-Stat. 10 ms“ erzielt werden.

Als Konsequenz wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit in allen Berechnungen auf die Berücksichtigung der Schädigungsanteile der Tangente verzichtet.

6.5 Validierung durch Simulation des Kalt-/Warmumformungsprozesses der Flanschswelle

6.5.1 Modellbeschreibung

Auf eine ausführliche Modell- und Prozessbeschreibung wird an dieser Stelle aufgrund der bereits vorhandenen detaillierten Beschreibungen verzichtet – siehe [Matzenmiller et al., 2009], [Matzenmiller und Bröcker, 2012] sowie [Bröcker, 2014]. Allerdings sollen hier die wichtigsten Merkmale der Prozessberechnung der Flanschswelle mittels impliziter Zeitintegration erwähnt werden, die für eine Optimierung der numerischen Effizienz ausgenutzt worden sind.

Der Produktionsprozess der Flanschswelle wird mit automatischer Zeitschrittsteuerung berechnet, bei der die maximale Größe des Zeitschrittes Δt_{max} in Abhängigkeit des Prozessverlaufs

Einstellungen	Bezeichnung	Quasi-Statistisch				Explizit
Ohne Schädigungsanteile (Gleichung 6.4-1)	Δt_0	1 ms	10 ms	25 ms	50 ms	$\approx 1 \mu s$
	Problem cycles	3544	434	236	161	475786
	Total CPU time	112 s	16 s	10 s	7 s	914 s
	max. Iterationen pro Zeitschritt	5	7	7	10	-
	Δt_{krit}	-	-	-	-	-
	Δt_0	1 ms	10 ms	25 ms	50 ms	$\approx 1 \mu s$
	Problem cycles	3544	432	222	157	475621
	Total CPU time	118 s	17 s	9 s	7 s	929 s
	max. Iterationen pro Zeitschritt	5	7	7	9	-
	Δt_{krit}	-	-	-	-	-
Mit Schädigungsanteile (Gleichung 6.4-1)	Δt_0	1 ms	10 ms	25 ms	50 ms	$\approx 1 \mu s$
	Problem cycles	3544	447	414	332	475786
	Total CPU time	112 s	17 s	16 s	13 s	914 s
	max. Iterationen pro Zeitschritt	5	7	19	11	-
	Δt_{krit}	-	4.642 ms	5.386 ms	5 ms	-
	Δt_0	1 ms	10 ms	25 ms	50 ms	$\approx 1 \mu s$
	Problem cycles	3544	400	376	402	475621
	Total CPU time	118 s	15 s	15 s	16 s	929 s
	max. Iterationen pro Zeitschritt	5	7	21	21	-
	Δt_{krit}	-	-	11.604 ms	10.772 ms	-

Tab. 6.4-2: Vergleich des numerischen Aufwands bei veränderlichen Berechnungseinstellungen und mit Schädigungsentwicklung

Konvergenztoleranz	Konvergenzwert
Verschiebung	1.000E-03
Energie	1.000E-05
Residuum	1.000E-01

Tab. 6.5-1: Konvergenztoleranzwerte für die untersuchten Berechnungsvarianten der Flanschwellen

vorgegeben ist – siehe dazu Abb. 6.5-1. So wird gewährleistet, dass weniger Gleichgewichtssiterationen durchgeführt werden, bei denen bereits im voraus abgeschätzt werden kann, dass diese aufgrund einer zu großen Zeitschrittweite nicht konvergieren werden. Unnötige Gleichgewichtssiterationen, die zwangsweise durchgeführt werden bis die automatische Zeitschrittsteuerung die kritische Zeitschrittgröße Δt_{krit} zum Erfüllen der Konvergenztoleranzen erreicht, sollen so miniert werden. Diese Maßnahme liegt vor allem während des Deformationsvorgangs nahe, da es dort zu einem massiven Einfluss von Geometrie-, Material- und Strukturnichtlinearitäten in sehr kurzer Zeit kommt.

Für die Konvergenztoleranzen werden die in Tab. 6.5-1 zusammengefassten Werte verwendet, außerdem ist im LS-DYNA-Input-Deck die minimal erlaubte Zeitschrittgröße zu $\Delta t_{min} = 1$ ns definiert worden, um dem Lösungsalgorithmus auch im Falle prozessbedingt schlechten Konvergenzverhaltens die Möglichkeit zu geben, mit hohem numerischen Aufwand eine Lösung zu finden.

In der Untersuchung wird der Produktionsprozess der Flanschwellen implizit-dynamisch im Full-Newton-Verfahren sowie im modifizierten Newton-Verfahren gerechnet. Quasi-statische Berechnungen werden nicht untersucht, da die Flanschwellen mit unerfüllten Kontaktbedingungen statisch unbestimmt ist. Zum Vergleich für die implizit-dynamischen Rechnungen dient die explizite Lösung des simulierten Prozesses, die mit einer automatischen Massenskalierung

durchgeführt wird, sodass für die Zeitschrittweite $\Delta t = 11.1 \mu s$ eingehalten werden kann. Damit ergibt sich im Berechnungsverlauf bei einer Ausgangsmasse von $m \approx 3 \text{ kg}$ eine Massenerhöhung von $1393 \text{ kg} < \Delta m < 11860 \text{ kg}$. Außerdem wird eine Variante vorgestellt, bei der in der Erwärmungs- sowie Abkühlungsphase implizit dynamisch und in der Formgebungsphase explizit gerechnet worden ist.

6.5.2 Bemerkung zur Optimierung numerischer Effizienz

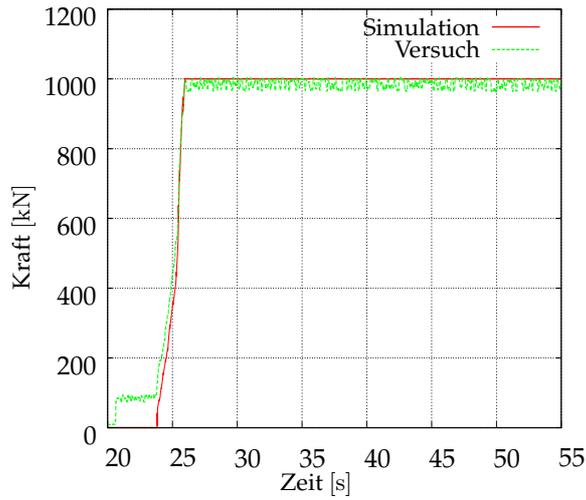
Wie bereits in Abschnitt 6.5.1 erläutert, kann durch die Vorgabe der maximal erlaubten Zeitschrittgröße Δt_{max} die Berechnungszeit der Flanschwellen massiv beeinflusst werden. Je näher die maximal erlaubte Zeitschrittgröße Δt_{max} an der kritischen Zeitschrittgröße Δt_{krit} des zu lösenden Zeitpunktes liegt, umso mehr unnötige Gleichgewichtsiterationen können eingespart werden. Wird diese Obergrenze allerdings zu niedrig angesetzt, werden mehr Gleichgewichtsiterationen durchgeführt, als zum Erfüllen der Konvergenztoleranzen notwendig wäre. Diese Überlegungen machen deutlich, dass es einen optimalen Kurvenverlauf für $\Delta t_{max}(t)$ gibt, mit dem sich eine optimale numerische Effizienz für die ausgewählten Konvergenztoleranzen erreichen lässt.

6.5.3 Auswertung der Berechnungsvarianten

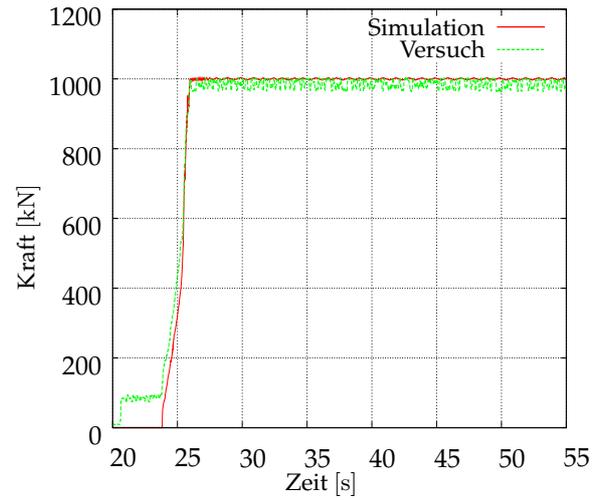
Die in Abb. 6.5-2 über der Zeit aufgetragene Umformkraft zeigt, dass für alle Berechnungsvarianten vergleichbare Ergebnisse erzielt worden sind. Auch die in Tab. 6.5-2 aufgeführten Ergebnisse für die geometrischen Maße machen deutlich, dass die berechneten Untersuchungsvarianten in Bezug auf die Näherungsgüte qualitativ gleichwertig sind.

Allerdings zeigt eine genaue Betrachtung der Umformkraft im Anschluss der Formgebungsphase, dass diese für die implizit dynamischen Rechnungen im Vergleich zur expliziten Berechnung leicht oszilliert. Die Variante, in der implizite Zeitintegration mit expliziter Zeitintegration während der Formgebungsphase kombiniert worden ist – siehe Abb. 6.5-2(d), macht deutlich, dass die Oszillationen der rein implizit gerechneten Varianten als Ergebnis der Formgebungsphase resultieren. Wird die Formgebungsphase, wie in der kombinierten Variante, explizit gerechnet, findet auch bei daraufhin folgender impliziter Zeitintegration keine Oszillation der Umformkraft statt – siehe Abb. 6.5-2(d). Somit hängt diese weder direkt mit der thermischen Übertragung zwischen Werkstück und Gesenk, den daraus resultierenden Spannungsänderungen oder der statischen Erholung während der Abkühlphase zusammen. Auch die implementierte Tangente ist als Ursache auszuschließen, da diese bei vermeintlich fehlerhafter Implementierung nur die Konvergenzgeschwindigkeit beeinflusst und schlimmstenfalls verhindert, dass überhaupt Konvergenz erzielt werden kann. Die Ursache sind die verwendeten Werte der Konvergenztoleranzen: Es sind während der Formgebungsphase Lösungen akzeptiert worden, die zwar die vorgegebenen Konvergenzkriterien erfüllen, aber nicht der stabilsten Gleichgewichtslage entsprechen. Niedrigere Konvergenzwerte führen zu stabileren Gleichgewichtslagen, mit denen allerdings auch ein Mehraufwand an Rechenzeit erforderlich wird. Diesen Zusammenhang beweist Abb. 6.5-2(e) in der mit größeren Werten für die Konvergenztoleranzen gerechnet worden ist.

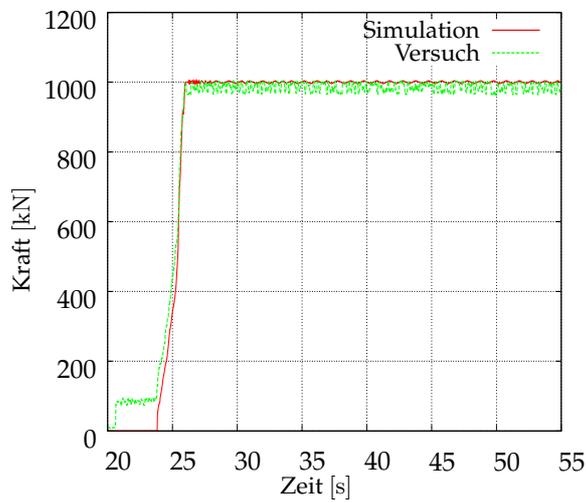
Die in Tab. 6.5-2 dargestellten Werte für die CPU-Time zeigen, dass mithilfe der implementierten Tangente auch bei einem derart aufwändigen FE-Modell ein enormes Rechenzeiterparnis erzielt werden kann. Dieses beträgt bei Verwendung des modifizierten Newton-Verfahrens



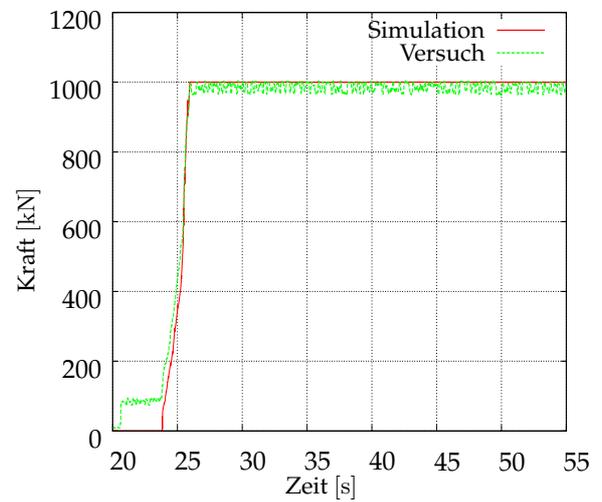
(a) Explizit



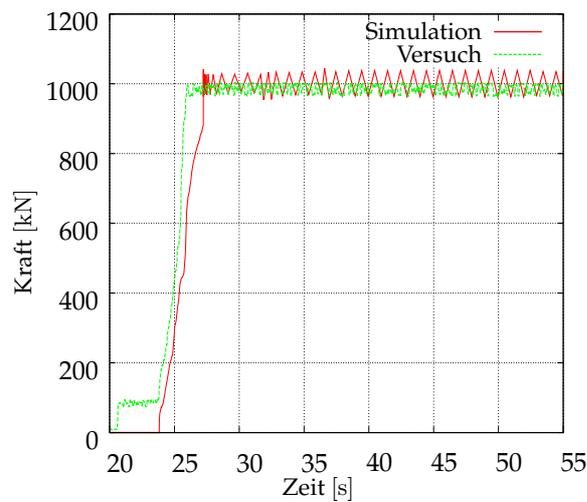
(b) Full-Newton-Verfahren



(c) Modifiziertes Newton-Verfahren

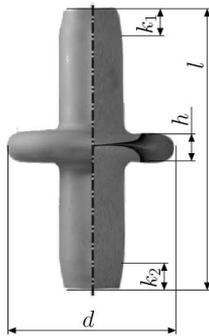


(d) Kombination: Mod. Newton-Verf. & Explizit



(e) Full-Newton-Verfahren; höhere Konvergenzwerte

Abb. 6.5-2: Ausgewertete Umformkraft für die berechneten Varianten des Kalt-/Warmumformungsprozesses



	Explizit	Full-Newton	Mod.-Newton	Komb.				
Problem cycles	5500056	34653	38115	321059				
Total CPU time	80h 27min	35h 28min	4h 48min	6h 44min				
Sim. Abw.	[mm]	[%]	[mm]	[%]	[mm]	[%]	[mm]	[%]
k_1	13.4	11.7	13.2	10.0	13.6	13.3	13.4	11.7
k_2	13.3	-5.0	13.2	-5.7	13.7	-2.1	13.4	-4.3
h	13.6	0.0	13.6	0.0	13.6	0.0	13.6	0.0
d	77.8	1.3	77.7	1.2	77.7	1.2	77.8	1.3
l	130.3	-0.2	130.1	-0.4	130.9	0.2	130.3	-0.2

Abb. 6.5-3: Endgeometrie der Flanschschwelle [Bröcker, 2014]

Tab. 6.5-2: Ergebnisvergleich der berechneten Varianten des Kalt-/Warmumformungsprozesses

94%. Hierbei sollte auch noch beachtet werden, dass die explizite Berechnung mit sehr großer Massenskalierung erfolgt ist, auch wenn diese keinen bedeutenden Einfluss auf die Lösung hat – siehe Abb. 6.5-2.

Es lässt sich festhalten, dass sich die implementierte Tangente auch in der Berechnung des Kalt-/Warmumformungsprozesses der Flanschschwelle als wertvolles Werkzeug erweist, mit dem effizient Rechenzeit gespart werden kann.

6.6 Validierungsergebnis

In den vorangegangenen Abschnitten ist die implementierte Tangente in unterschiedlichen FE-Modellen mit verschiedenen Berechnungsvarianten untersucht worden. Deren Auswertung hat gezeigt, dass die mithilfe der Tangente berechneten Lösungen stets konvergieren, solange in den Solver-Einstellungen mithilfe angemessener Zeitschrittgröße oder automatischer Zeitschrittsteuerung die richtigen Maßnahmen getroffen werden.

Die seitens LS-DYNA erzwungene Symmetrisierung des Tangentenoperators ist vermutlich die Ursache eines unvorhersehbaren Ergebnisses: Das Konvergenzverhalten von Berechnungen mit Schädigung fällt für eine vereinfachte Formulierung der Tangente günstiger aus. Das Weglassen der in der konsistenten Tangentenformulierung zusätzlich hinzukommenden Schädigungsanteile – siehe Gleichung 6.4-1 und 6.4-2 – ermöglicht ein schnelleres Konvergenzverhalten der Lösungen.

Die implementierte Tangente erweist sich in allen Untersuchungen ausnahmslos als zuverlässige und effiziente Ergänzung zur FE-Berechnung mit dem Thermoviskoplastizitätsmodell, mit dessen Hilfe viel Rechenzeit gespart werden kann.

7 Identifikation der Schädigungsparameter

Die Materialparameter des Thermoviskoplastizitätsmodells nach Bröcker und Matzenmiller für den Stahlwerkstoff 51CrV4 sind für den effektiven Modellzustand in [Szczepaniak, 2012] sowie [Bröcker, 2014] bestimmt worden. Dieses Kapitel behandelt die Identifikation der Schädigungsparameter für den Werkstoff 51CrV4, die mit der implementierten Schädigungserfassung hinzugekommen sind. Zunächst werden im Folgenden der Schädigungsansatz nochmals kurz zusammengefasst und der Einfluss der Materialparameter erläutert. Anschließend wird die verwendete Identifikationsstrategie sowie deren Durchführung beschrieben. Das Kapitel schließt mit dem Identifikationsergebnis und der Auflistung aller Materialparameter der Schädigung ab.

7.1 Erläuterungen zu den Schädigungsparametern

Der im Materialmodell implementierte Schädigungsansatz ist wie folgt formuliert:

$$\dot{D} = \frac{n_D}{\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0}} \left\langle \frac{\bar{E}_{vp}/\hat{g}(\dot{\bar{E}}_{vp}, T, \theta) - \varepsilon_{c0}}{\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0}} \right\rangle^{n_D-1} \dot{\bar{E}}_{vp}/\hat{g}(\dot{\bar{E}}_{vp}, T, \theta) \quad (7.1-1)$$

$$\hat{g}(\dot{\bar{E}}_{vp}, T, \theta) = \left(1 + d_2 e^{d_3 T}\right) \left(1 + d_4 \ln(\dot{\bar{E}}_{vp}/\dot{\varepsilon}_0)\right) (1 + d_5 \theta) \quad (7.1-2)$$

Die verwendeten Materialparameter ε_{c0} und ε_{f0} definieren, in linearer Abhängigkeit zur Funktion $\hat{g}(\dot{\bar{E}}_{vp}, T, \theta)$, ab welcher viskoplastischen Bogenlänge $\bar{\varepsilon}_{vp}$ die Schädigungsentwicklung beginnt (ε_{c0}) und endet (ε_{f0}). Mithilfe des Exponenten n_D wird die Krümmung des Verlaufes der Schädigungsentwicklung vorgegeben.

Durch die Funktion $\hat{g}(\dot{\bar{E}}_{vp}, T, \theta)$ – siehe Gleichung 7.1-2 – wird der Schädigungsentwicklung \dot{D} die Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand, der Dehnrates und der Temperatur hinzugefügt. Die Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand, der durch die Triaxialität T ausgedrückt wird, wird durch die Materialparameter d_2 und d_3 definiert. Der Materialparameter d_4 definiert die Dehnratenabhängigkeit der Schädigungsentwicklung, der Materialparameter d_5 die Temperaturabhängigkeit.

7.2 Identifikation

7.2.1 Strategie

Zu einer eindeutigen Identifikation der Materialparameter für die Schädigungsentwicklung \dot{D} des Stahlwerkstoff 51CrV4 liegen keine Versuchsdaten vor, mithilfe derer die Abhängigkeit des hydrostatischen Spannungszustands sowie der Dehnrates identifiziert werden kann. Die temperaturabhängige Entwicklung der Schädigung hingegen, kann mithilfe experimenteller Ergebnisse aus [Scholtes und Grüning, 2009] identifiziert werden. Hierbei handelt es sich

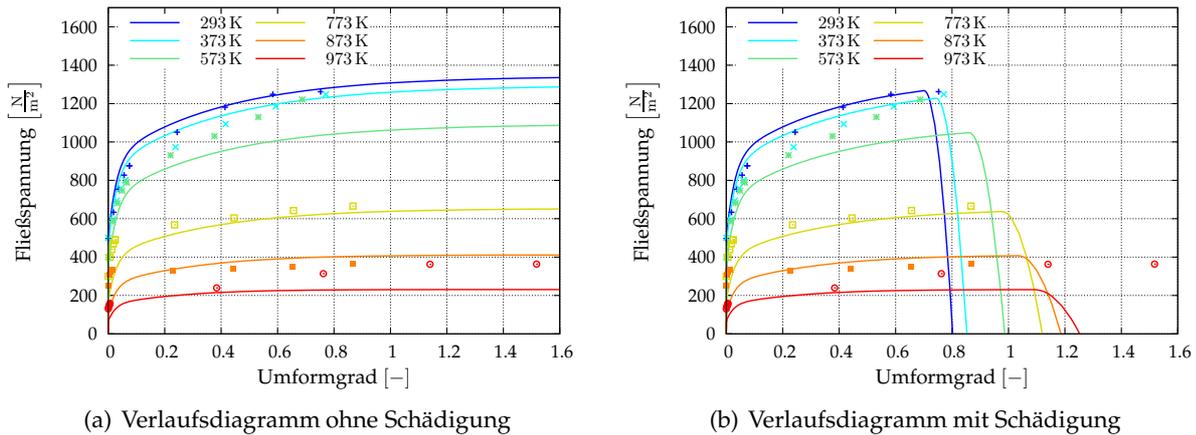


Abb. 7.2-1: Vergleich zwischen experimentellen Stützstellen (Punkte) und Simulationsergebnissen (Kurven) [Scholtes und Grüning, 2009]

um Zugversuche bei unterschiedlichen Temperaturen, die bei einer nominellen Dehnrates von $\dot{\epsilon}_0 = 0.025 \text{ s}^{-1}$ durchgeführt wurden – vgl. [Bröcker, 2014, S. 167]

Die Parameteridentifikation erfolgt schrittweise: Zunächst wird mithilfe einer eindimensionalen MATLAB-Implementierung des Materialmodells (ohne Berücksichtigung der Triaxialität) und der experimentellen Daten aus [Scholtes und Grüning, 2009] ein vorläufiges Ergebnis für die Materialparameter der Temperaturabhängigkeit, des Schädigungsbeginns und des Schädigungsendes bestimmt. Anschließend wird für die fehlenden Materialparameter der LS-DYNA-Implementierung des Materialmodells der Materialparametersatz des Werkstoffes 4340 STEEL aus [Johnson und Cook, 1985] verwendet und gegebenenfalls überführt. Abschließend werden die zuvor am Versuch identifizierten Materialparameter angepasst, um ein vergleichbares Ergebnis zur MATLAB-Implementierung bezüglich der Temperaturabhängigkeit des Werkstoffes 51CrV4 zu erhalten.

7.2.2 Parameteridentifikation in Matlab

Die Identifikation vorläufiger Werte für die Materialparameter ϵ_{c0} , ϵ_{f0} und d_5 erfolgt mithilfe einer eindimensionalen MATLAB-Implementierung des Materialmodells anhand der Versuchsergebnisse aus [Scholtes und Grüning, 2009]. Die Funktion $\hat{g}(\dot{E}_{vp}, \theta)$ ist für den eindimensionalen Fall, abweichend zu Gleichung 7.1-2, wie folgt definiert:

$$\hat{g}(\dot{E}_{vp}, \theta) = \left(1 + d_4 \ln\left(\frac{\dot{E}_{vp}}{\dot{\epsilon}_0}\right)\right) (1 + d_5 \theta). \tag{7.2-1}$$

Aus Mangelung experimenteller Daten bezüglich der Dehnratenabhängigkeit wird für den Materialparameter d_4 der Wert 0.002 des Werkstoffes 4340 STEEL aus [Johnson und Cook, 1985] verwendet. Äquivalent dazu wird für $\dot{\epsilon}_0$ der Wert 1.0 gewählt.

Um den Materialparameter d_5 , der die Temperaturabhängigkeit der Schädigungsentwicklung definiert, zu bestimmen, werden zweckmäßige Werte für die plastische Dehnung $\epsilon_c(\theta)$ ausgewählt, bei der die Schädigung für $\theta = 293 \text{ K}$ und $\theta = 973 \text{ K}$ einsetzt. Dazu wird die Schädigungsentwicklung um den letzten und vorletzten experimentellen Datenpunkt, der das Versagen der Probe darstellt, platziert. Dies liefert – vgl. Abb. 7.2-1(a) – die Werte $\epsilon_c(298 \text{ K}) = 0.7$

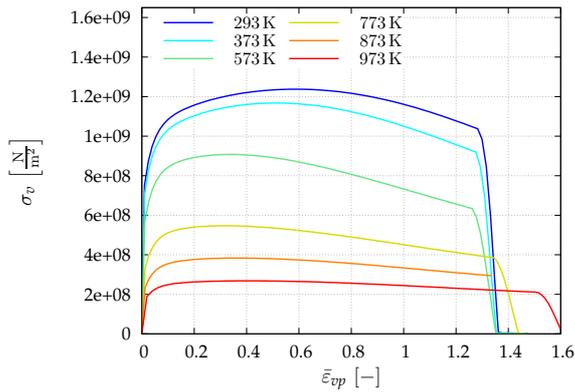
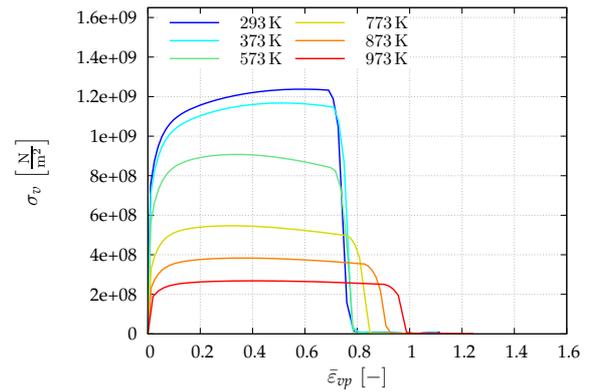
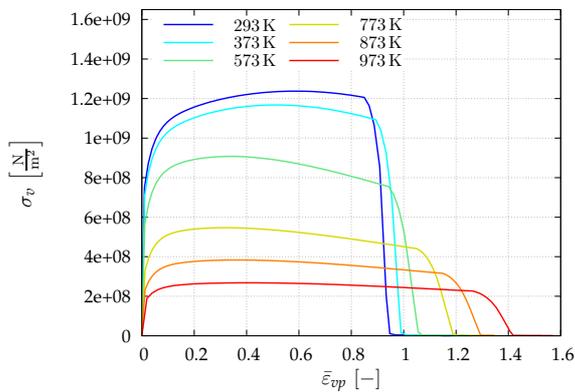
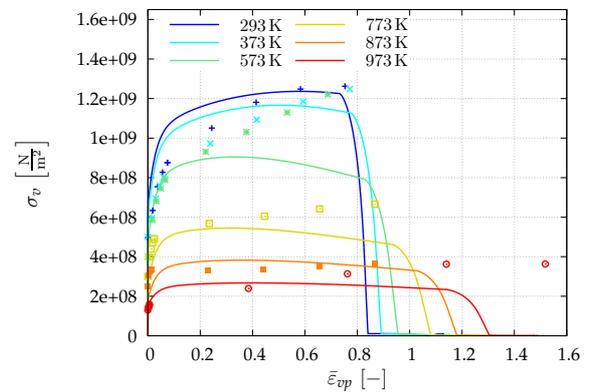
(a) Auswertung nach Bestimmung von d_2 (b) Auswertung nach Anpassung von ε_{c0} und ε_{f0} (c) Auswertung nach Anpassung von d_5 , ε_{c0} und ε_{f0} (d) Identifikationsergebnis (Anpassung von ε_{c0} und ε_{f0})

Abb. 7.2-2: Verlauf der Parameteridentifikation: Spannungsverläufe über der viskoplastischen Bogenlänge $\bar{\varepsilon}_{vp}$ für unterschiedliche Starttemperaturen

und $\varepsilon_c(973 \text{ K}) = 1.1$. Mithilfe Gleichung 7.2-1 und

$$\varepsilon_c(\dot{\bar{\mathbf{E}}}_{vp}, \theta) = \varepsilon_{c0} \hat{g}(\dot{\bar{\mathbf{E}}}_{vp}, \theta) \quad (7.2-2)$$

geht unter Annahme einer im Versuch konstant gehaltenen Dehnrates von $\dot{\varepsilon} = 0.025 \text{ s}^{-1}$ folgender funktionaler Zusammenhang als Gleichungssystem hervor:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(298 \text{ K}) &= 0.7 = \varepsilon_{c0}(1 + d_5 \cdot 298 \text{ K}) \\ \varepsilon_c(973 \text{ K}) &= 1.1 = \varepsilon_{c0}(1 + d_5 \cdot 973 \text{ K}) . \end{aligned} \quad (7.2-3)$$

Die Lösung des Gleichungssystems 7.2-3 liefert die gesuchten Materialparameter zu $\varepsilon_{c0} = 0.523$ und $d_5 = 0.00113$. Ein einfaches Abschätzen des Materialparameters ε_{f0} in Abhängigkeit von ε_{c0} liefert den Wert 0.6 und den in Abb. 7.2-1(b) dargestellten Spannungsverlauf infolge Schädigung.

7.2.3 Parameteridentifikation in LS-DYNA

Im Gegensatz zum vereinfachten Schädigungsansatz der MATLAB-Implementierung sieht der vollständige Ansatz, so wie er in LS-DYNA implementiert wurde, eine Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand vor – siehe dazu Gleichung 7.1-1 und 7.1-2. Allerdings muss

Bezeichnung	Wert	Einheit	Definiert
ε_{c0}	0.055	–	Schädigungsbeginn
ε_{f0}	0.074	–	Schädigungsende
n_D	1.5	–	Verlaufskrümmung von D (Annahme)
$\dot{\varepsilon}_0$	1.0	–	Dehnratenabhängigkeit
d_2	6.57	–	Abh. hydrostat. Spannungszustand
d_3	–2.12	–	Abh. hydrostat. Spannungszustand
d_4	0.002	–	Dehnratenabhängigkeit
d_5	0.01	K ⁻¹	Temperaturabhängigkeit

Tab. 7.2-1: Identifizierte Materialparameter der Schädigung für den Werkstoff 51CrV4

der Materialparameter d_2^* aus [Johnson und Cook, 1985] zunächst umgerechnet werden, da sich der implementierte Schädigungsansatz von dem dort formulierten Ansatz leicht unterscheidet. Die Überführung des dort verwendeten Schädigungsansatz mit $\varepsilon_{c0} = d_1$ gemäß

$$\hat{\varepsilon}_c(\dot{E}_{vp}, T, \theta) = (\varepsilon_{c0} + d_2^* e^{d_3 T}) \left(1 + d_4 \ln(\dot{E}_{vp}/\dot{\varepsilon}_0)\right) (1 + d_5 \theta) \quad (7.2-4)$$

nach

$$\hat{\varepsilon}_c(\dot{E}_{vp}, T, \theta) = \varepsilon_{c0} \underbrace{\left(1 + \frac{d_2^*}{\varepsilon_{c0}} e^{d_3 T}\right) \left(1 + d_4 \ln(\dot{E}_{vp}/\dot{\varepsilon}_0)\right) (1 + d_5 \theta)}_{\hat{g}(\dot{E}_{vp}, T, \theta)} \quad (7.2-5)$$

macht deutlich, dass der Materialparameter $d_2^* = 3.44$ aus [Johnson und Cook, 1985] durch $\varepsilon_{c0} = 0.523$ dividiert werden muss. Dies liefert $d_2 = 6.57$ für die LS-DYNA-Implementierung der Schädigungsansatzes gemäß Gleichung 7.1-2.

Zur Anpassung der bereits identifizierten Materialparameter wird auf das in Abschnitt 4.1 beschriebene FE-Modell bei unterschiedlichen Starttemperaturen eine monoton steigende Verschiebung in Zugrichtung aufgebracht. Dabei wird für alle Temperaturstufen in dem Element, dass prozessbedingt die größte Schädigung erfährt, die Vergleichsspannung σ_v über der viskoplastischen Bogenlänge $\bar{\varepsilon}_{vp}$ ausgewertet. Durch diese Maßnahmen wird gewährleistet, dass bei den unterschiedlichen Starttemperaturen ein möglichst vergleichbarer Einfluss des hydrostatischen Spannungszustands und der Dehnratenabhängigkeit auf die Funktion $\hat{g}(\dot{E}_{vp}, T, \theta)$ resultiert.

Eine erste Auswertung zeigt, dass der Schädigungsbeginn und das Schädigungsende aufgrund des nun vorhandenen Einflusses des hydrostatischen Spannungszustands auf $\hat{g}(\dot{E}_{vp}, T, \theta)$ angepasst werden müssen – siehe Abb. 7.2-2(a). Durch Anpassung auf $\varepsilon_{c0} = 0.2$ und $\varepsilon_{f0} = 0.26$ wird für $\theta = 293$ K ein korrekter Schädigungsverlauf erreicht – siehe Abb. 7.2-2(b). Allerdings zeigt sich bei höheren Temperaturen, dass die temperaturabhängige Abnahme der Schädigung zu gering ausfällt. Die Schätzung des Wertes $d_5 = 0.01$ liefert durch den antiproportionalen Zusammenhang

$$\varepsilon_{co,neu} = \varepsilon_{co,alt} \frac{1 + d_{5,alt} \theta}{1 + d_{5,neu} \theta} \quad (7.2-6)$$

die Werte $\varepsilon_{c0} = 0.068$ und $\varepsilon_{f0} = 0.088$ – siehe Abb. 7.2-2(c). Eine letzte Anpassung des Schädigungsbeginns und Schädigungsendes liefert die Spannungsverläufe aus Abb. 7.2-2(d) als abschließendes Identifikationsergebnis mit den in Tab. 7.2-1 zusammengefassten Materialpara-

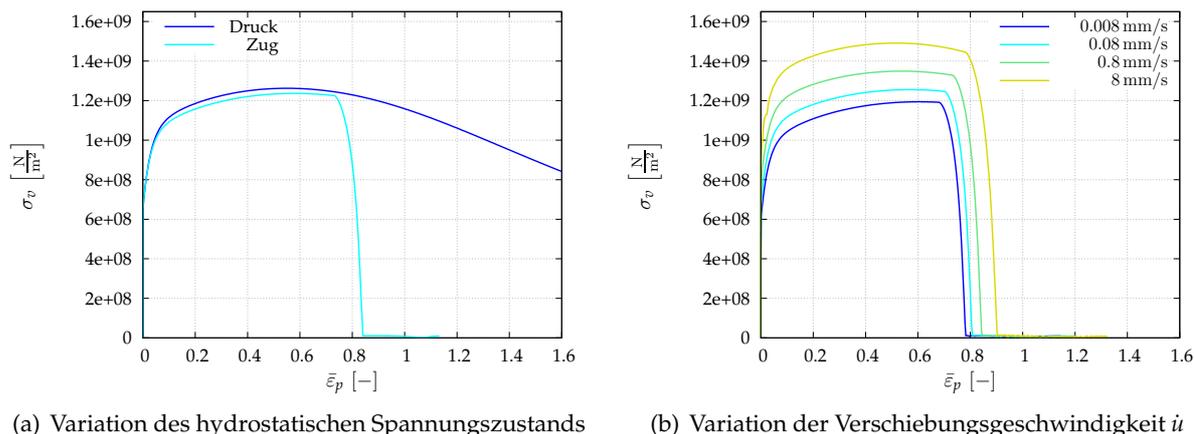


Abb. 7.2-3: Validierung der übernommenen Materialparameter aus [Johnson und Cook, 1985]

metern für die Schädigung.

7.2.4 Identifikationsergebnis

Abschließend wird das Schädigungsverhalten des in Tab. 7.2-1 zusammengefassten Materialparametersatzes in Bezug auf die Abhängigkeit des hydrostatischen Spannungszustandes und der Dehnrates untersucht. Abb. 7.2-2(d) zeigt, dass die temperaturabhängigen Spannungsverläufe für den Werkstoff 51CrV4 mithilfe der Versuchsdaten aus [Scholtes und Grüning, 2009] qualitativ sowie quantitativ gut identifiziert werden konnten. Für die Abhängigkeit des hydrostatischen Spannungszustandes und der Dehnrates ist lediglich eine qualitative Einschätzung möglich.

„The results indicate fracture is very dependent on the state of hydrostatic pressure, and less dependent on the strain rate and temperature.“ [Johnson und Cook, 1985, S.48]

Abb. 7.2-3(a) zeigt zwei Versuche mit monoton steigender Verschiebung – vgl. FE-Modell aus Abschnitt 4.1, die zur Untersuchung des Einflusses des hydrostatischen Spannungszustandes dienen. Die Verschiebung entwickelt sich zum einen in Druckrichtung, zum anderen in Zugrichtung. Aus Abb. 7.2-3(a) folgt, dass bei positiver hydrostatischer Spannung, im Gegensatz zur negativen, keine Schädigung stattfindet¹. Durch die Parameter d_2 und d_3 kann diese extreme Fallunterscheidung abgeschwächt werden, jedoch fehlen zu einer eindeutigen Bestimmung, wie bereits erläutert, die Versuchsdaten.

Das Ergebnis für das dehnratenabhängige Materialverhalten, dass sich durch die Verwendung des Materialparameters d_4 und $\dot{\epsilon}_0$ aus [Johnson und Cook, 1985] ergibt, ist in Abb. 7.2-3(b) dargestellt. Es wird deutlich, dass es trotz stark variiertes Verschiebungsgeschwindigkeit, und damit stark variiertes Dehnrates, zu einer vergleichsweise geringen Änderung des Schädigungsbeginns und der Schädigungsentwicklung kommt.

¹Die für den Druckfall sichtbare geringe Spannungsabnahme wird nicht durch eine geringe Schädigung, sondern durch Strukturveränderungen des FE-Modells im Deformationsverlauf verursacht.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Das zur Berechnung von komplexen, temperaturabhängigen Prozessen entwickelte Thermoviskoplastizitätsmodell ist in der vorliegenden Arbeit um die Erfassung von Schädigung erweitert worden. Dies erfolgte am bereits als UMAT-Subroutine umgesetzten Materialmodell unter Verwendung des Konzepts der effektiven Spannungen unter Berücksichtigung der Zug-/Druckasymmetrie des Spannungszustands und einer prozessabhängigen Schädigungsformulierung nach dem Johnson-Cook Ansatz [Johnson und Cook, 1985]. Darüber hinaus konnte eine Erfassung der infolge von Schädigung auftretenden Dissipation umgesetzt werden. Die entwickelte Erweiterung ist zur Verifikation anhand geeigneter Berechnungsbeispiele erfolgreich überprüft sowie auf Plausibilität untersucht worden.

Um das Thermoviskoplastizitätsmodell in Berechnungen mit impliziter Zeitintegration verwenden zu können, ist im Rahmen dieser Arbeit der konsistente Tangentenoperator für den effektiven und den geschädigten Modellzustand als UTAN-Subroutine implementiert worden. Durchgeführte Konvergenzstudien haben erwiesen, dass diese fehlerfrei und zuverlässig, jedoch nicht mit quadratischer Konvergenzgeschwindigkeit im Full-Newton-Verfahren konvergieren. Außerdem hat sich gezeigt, dass eine vereinfachte Formulierung für die konsistente Tangente im geschädigten Modellzustand ein schnelleres Konvergenzverhalten der Lösung liefert. Durch die Bereitstellung des konsistenten Tangentenoperators in der UTAN-Subroutine konnte beim simulierten Kalt-/Warmumformungsprozess der Flanschwellen mittels impliziter Zeitintegration 94% der bei expliziter Zeitintegration mit Massenskalierung notwendigen Rechenzeit eingespart werden.

Die durch die Erweiterung hinzugekommenen Schädigungsparameter sind für die Temperaturabhängigkeit anhand experimenteller Daten identifiziert und für die Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand sowie der Dehnrates aus [Johnson und Cook, 1985] überführt worden. Anhand passender Fließkurven konnte gezeigt werden, dass das dort beschriebene Verhalten der Schädigungsentwicklung von Stahlwerkstoffen qualitativ gut wiedergegeben wird.

Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit ist die Aufgabenstellung vollständig erfüllt und vielversprechende Ergebnisse mithilfe des um eine Schädigungserfassung erweiterten Thermoviskoplastizitätsmodells vorgestellt worden. Daneben hat sich der bereitgestellte konsistente Tangentenoperator als zuverlässiges und effizientes Werkzeug zum Sparen von Rechenzeit erwiesen. Jedoch bleiben zwei Fragen offen, die sich im Laufe der Arbeit ergeben haben und denen im Rahmen weiterer wissenschaftlicher Untersuchungen nachgegangen werden kann.

In den durchgeführten Konvergenzstudien hat sich gezeigt, dass bei impliziten Berechnungen mit Schädigungsentwicklung eine direkte Abhängigkeit der Schädigungsentwicklung von der Zeitschrittweite besteht, die dafür sorgt, dass sich die Schädigung mit größer werdender Zeitschrittweite schneller entwickelt. Es bleibt zu klären, ob dies, wie vermutet, mit der Zei-

tintegration durch das implizite Euler-Verfahren zusammenhängt und sich durch Verwendung anderer Zeitintegrationsverfahren vermindern oder vermeiden lässt.

Desweiteren bleibt offen, warum mithilfe einer vereinfachten Formulierung der Tangente für den geschädigten Modellzustand ein besseres Konvergenzverhalten in der Lösung festzustellen ist, als sie mit einer vollständigen Formulierung erreicht wird. Die Vermutung liegt nahe, dass dies entweder mit der in der UMAT-Subroutine geforderten Symmetrisierung des Tangentenoperators, oder mit einer möglicherweise fehlerhaften Herleitung oder Implementierung zusammenhängt.

Schrifttum

- [Bammann, 1990] Bammann, D. (1990). Modeling temperature and strain rate dependent large deformations of metals. In *Appl. Mech. Rev.* 43(5), pages 312 – 319.
- [Bathe, 1986] Bathe, K.-J. (1986). *Finite-Elemente-Methoden*. Springer Verlag.
- [Bröcker, 2014] Bröcker, C. (2014). *Materialmodellierung für die simultane Kalt-/ Warmumformung auf Basis erweiterter rheologischer Modelle*. Dissertation, Universität Kassel, Fachbereich Maschinenbau, Institut für Mechanik, Fachgebiet Numerische Mechanik. Bericht 1/2014.
- [Bröcker, 2015] Bröcker, C. (2015). Persönliche Mitteilung zur Herleitung der konsistenten Tangente im Modellzustand mit Schädigung. Ehemals Universität Kassel, Fachbereich Maschinenbau, Institut für Mechanik, Fachgebiet Numerische Mechanik.
- [Bröcker und Matzenmiller, 2012] Bröcker, C. und Matzenmiller, A. (2012). Thermomechanically consistent material modeling with damage for simultaneous hot/cold forming based on enhanced rheological models. In Eberhardsteiner, J., Böhm, H., und Rammerstorfer, F., editors, *CD-ROM Proc. of 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)*. Vienna University of Technology, Austria. ISBN: 978-3-9502481-9-7.
- [Bröcker und Matzenmiller, 2013a] Bröcker, C. und Matzenmiller, A. (2013a). A thermoviscoplastic model with damage for simultaneous hot/cold forging analysis. In Onate, E., Owen, D., Peric, D., und Suarez, B., editors, *Proc. of 12th International Conference on Computational Plasticity — Fundamentals and Applications (COMPLAS XII)*. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona, Spain.
- [Bröcker und Matzenmiller, 2013b] Bröcker, C. und Matzenmiller, A. (2013b). An enhanced concept of rheological models to represent nonlinear thermoviscoplasticity and its energy storage behavior. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 25(6):749 – 778.
- [Bröcker und Matzenmiller, 2014] Bröcker, C. und Matzenmiller, A. (2014). An enhanced concept of rheological models to represent nonlinear thermoviscoplasticity and its energy storage behavior – part 2: Spatial generalization for small strains. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*.
- [Hanke-Bourgeois, 2006] Hanke-Bourgeois, M. (2006). *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*, volume 2. Teubner Verlag. ISBN: 3-8351-0090-4.
- [Hartmann, 2003] Hartmann, S. (2003). *Finite-Elemente Berechnung inelastischer Kontinua – Interpretation als Algebro-Differentialgleichungssysteme*. Habilitation, Universität Kassel, Fachbereich Maschinenbau, Fachgebiet Mechanik.
- [Johnson und Cook, 1985] Johnson, G.-R. und Cook, W.-H. (1985). Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. *Engineering Fracture Mechanics*, 21:31–48.
- [Lemaitre, 1996] Lemaitre, J. (1996). *A Course on Damage Mechanics*. Springer Verlag, 2. edition. ISBN: 3-540-60980-6.

- [LSTC, 2013] LSTC (2013). *LS-DYNA® KEYWORD USER'S MANUAL, VOLUME I*. LSTC, (LIVERMORE SOFTWARE TECHNOLOGY CORPORATION). Version 971.
- [Marin et al., 2006] Marin, E., Bammann, D., Regueiro, R., und Johnson, G. (2006). On the Formulation, Parameter Identification and Numerical Integration of the EMMI Model: Plasticity and Isotropic Damage. In *Sandia Report SAND2006-0200*. Sandia National Laboratories, California, USA.
- [Matzenmiller und Bröcker, 2012] Matzenmiller, A. und Bröcker, C. (2012). Thermo-mechanically coupled FE analysis and sensitivity study of simultaneous hot/cold forging process with local inductive heating and cooling. *Int. J. Mater. Form.*, 5(4):275 – 300.
- [Matzenmiller et al., 2009] Matzenmiller, A., Bröcker, C., und Gerlach, S. (2009). FE-Analysis of Simultaneous Hot/Cold Forging. *Steel Research Int.*, 80(2):130 – 136.
- [Scholtes und Grüning, 2009] Scholtes, B. und Grüning, A. (2009). Persönliche Mitteilung von Versuchsdaten des Stahls 51CrV4. Universität Kassel, Institut für Werkstofftechnik, Fachgebiet metallische Werkstoffe.
- [Szczepaniak, 2012] Szczepaniak, A. (2012). Materialparameteridentifikation eines Thermo-viskoplastizitätsmodells für simultane Kalt-/Warmumformungsprozesse von metallischen Werkstoffen. Studienarbeit, Universität Kassel, Fachbereich Maschinenbau, Institut für Mechanik, Fachgebiet Numerische Mechanik.
- [Weidig et al., 2008] Weidig, U., Hübner, K., und Steinhoff, K. (2008). Bulk steel products with functionally graded properties produced by differential thermo-mechanical processing. *Steel Research Int.*, 79(1):59–65.
- [Wriggers, 2001] Wriggers, P. (2001). *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer Verlag.

A Anhang

A.1 Materialmodell in 3D-Formulierung im effektiven Modellzustand

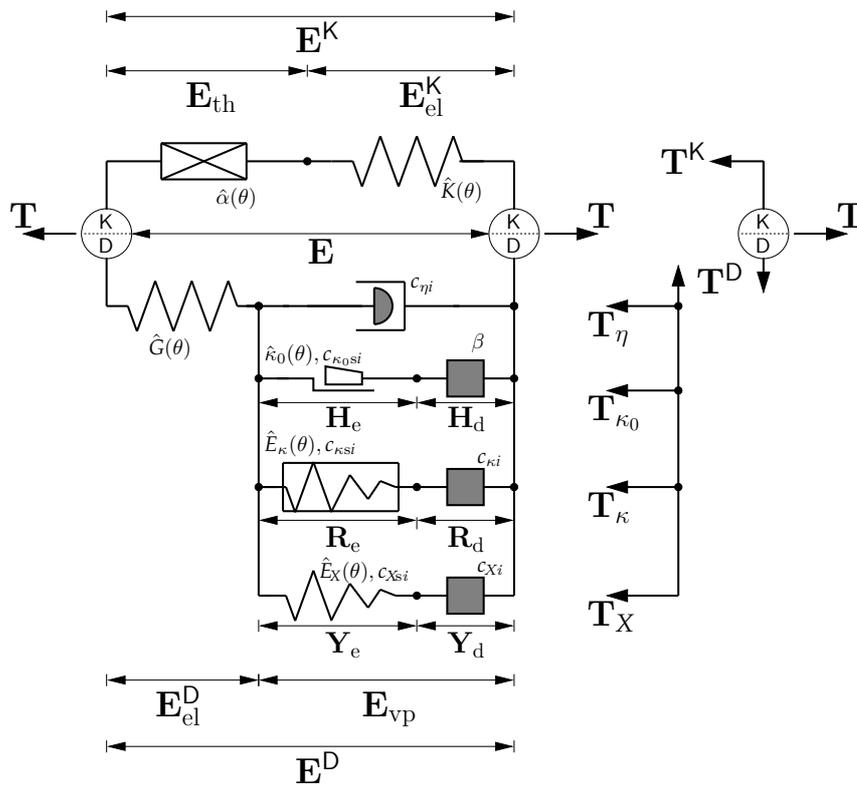


Abb. A.1-1: Tensorielle Darstellung des rheologischen Modells der Thermoviskoplastizität mit nichtlinearer Verfestigung, statischer Erholung und temperaturabhängigen Materialparametern [Bröcker, 2014]

Kinematik:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{th}} + \mathbf{E}_{\text{el}} + \mathbf{E}_{\text{vp}} \quad , \quad \dot{\mathbf{E}}_{\text{th}} = \hat{\alpha}(\theta) \dot{\theta} \mathbf{1} \quad (\text{A.1-1})$$

$$\mathbf{E}_{\text{vp}} = \mathbf{H}_e + \mathbf{H}_d = \mathbf{R}_e + \mathbf{R}_d = \mathbf{Y}_e + \mathbf{Y}_d \quad (\text{A.1-2})$$

Freie Energie:

$$\psi = \psi_{\text{th}} + \psi_{\text{M}} \quad , \quad \psi_{\text{th}} = \hat{Q}(\theta) \quad (\text{A.1-3})$$

$$\psi_{\text{M}} = \frac{1}{2\rho} \left(2\hat{G}(\theta) \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{D}} \cdot \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{D}} + \hat{K}(\theta) \text{sp}(\mathbf{E}_{\text{el}})^2 + 2\hat{\kappa}_0(\theta) \varepsilon_{\kappa_0} + \hat{E}_{\kappa}(\theta) \varepsilon_{\kappa}^2 + \hat{E}_X(\theta) \mathbf{E}_X \cdot \mathbf{E}_X \right) \quad (\text{A.1-4})$$

Elastizitätsbeziehung:

$$\mathbf{T} = 2 \hat{G}(\theta) \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{D}} + \hat{K}(\theta) \text{sp}(\mathbf{E}_{\text{el}}) \mathbf{1} \quad (\text{A.1-5})$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{el}} &= \psi_{\text{el}}^{\text{D}} + \psi_{\text{el}}^{\text{K}} \quad , \quad \psi_{\text{el}}^{\text{D}} = \frac{1}{2\rho} \left(2 \hat{G}(\theta) \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{D}} \cdot \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{D}} \right) \\ \psi_{\text{el}}^{\text{K}} &= \frac{1}{2\rho} \left(\hat{K}(\theta) \text{sp}(\mathbf{E}_{\text{el}})^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1-6})$$

Fließfunktion:

$$F = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \mathbf{T}^{\text{D}} - \mathbf{X} \right\| - (\hat{\kappa}_0(\theta) + \kappa) \quad (\text{A.1-7})$$

Fließregel:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} &= \lambda \mathbf{N}(\mathbf{T}^{\text{D}} - \mathbf{X}) \quad , \quad \lambda = \frac{1}{\hat{\eta}(\theta)} \left\langle \frac{F}{\hat{D}(\kappa, \theta)} \right\rangle^{\hat{m}(\theta)} \\ \mathbf{N}(\mathbf{T}^{\text{D}} - \mathbf{X}) &= \frac{\mathbf{T}^{\text{D}} - \mathbf{X}}{\left\| \mathbf{T}^{\text{D}} - \mathbf{X} \right\|} \end{aligned} \quad (\text{A.1-8})$$

Isotrope Verfestigung:

$$\kappa = \hat{E}_{\kappa}(\theta) \varepsilon_{\kappa} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_{\kappa} = \left(1 - \left(\frac{\varepsilon_{\kappa}}{\varepsilon_{\kappa}^{\infty}} \right)^{n_{\kappa}} \right) \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} - \hat{\varepsilon}_{\kappa\text{S}}^*(\theta) \left(\frac{\varepsilon_{\kappa}}{\varepsilon_{\kappa}^{\infty}} \right)^{n_{\kappa\text{S}}} \quad (\text{A.1-9})$$

$$\dot{\kappa} = \hat{E}_{\kappa}(\theta) \left[\left(1 - \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}^{\infty}(\theta)} \right)^{n_{\kappa}} \right) \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} - \hat{\varepsilon}_{\kappa\text{S}}^*(\theta) \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}^{\infty}(\theta)} \right)^{n_{\kappa\text{S}}} \right] + \frac{\partial_{\theta} \hat{E}_{\kappa}(\theta)}{\hat{E}_{\kappa}(\theta)} \kappa \dot{\theta} \quad (\text{A.1-10})$$

$$\psi_{\kappa} = \frac{1}{2\rho} \left(\hat{E}_{\kappa}(\theta) \varepsilon_{\kappa}^2 \right) \quad (\text{A.1-11})$$

Kinematische Verfestigung:

$$\mathbf{X} = \hat{E}_{\text{X}}(\theta) \mathbf{E}_{\text{X}} \quad , \quad \dot{\mathbf{E}}_{\text{X}} = \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} - \left(\frac{\left\| \mathbf{E}_{\text{X}} \right\|}{\varepsilon_{\text{X}}^{\infty}} \right)^{n_{\text{X}}} \mathbf{N}(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} - \hat{\varepsilon}_{\text{X}\text{S}}^*(\theta) \left(\frac{\left\| \mathbf{E}_{\text{X}} \right\|}{\varepsilon_{\text{X}}^{\infty}} \right)^{n_{\text{X}\text{S}}} \mathbf{N}(\mathbf{E}_{\text{X}}) \quad (\text{A.1-12})$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \hat{E}_{\text{X}}(\theta) \left[\dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} - \left(\frac{\left\| \mathbf{X} \right\|}{\hat{X}^{\infty}(\theta)} \right)^{n_{\text{X}}} \mathbf{N}(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} - \hat{\varepsilon}_{\text{X}\text{S}}^*(\theta) \left(\frac{\left\| \mathbf{X} \right\|}{\hat{X}^{\infty}(\theta)} \right)^{n_{\text{X}\text{S}}} \mathbf{N}(\mathbf{X}) \right] + \frac{\partial_{\theta} \hat{E}_{\text{X}}(\theta)}{\hat{E}_{\text{X}}(\theta)} \mathbf{X} \dot{\theta} \quad (\text{A.1-13})$$

$$\psi_{\text{X}} = \frac{1}{2\rho} \left(\hat{E}_{\text{X}}(\theta) \mathbf{E}_{\text{X}} \cdot \mathbf{E}_{\text{X}} \right) \quad (\text{A.1-14})$$

Energiespeicherung Reibelement:

$$\dot{\varepsilon}_{\kappa_0} = \hat{\beta}(\theta) \left(1 - \left(\frac{\varepsilon_{\kappa}}{\varepsilon_{\kappa}^{\infty}} \right)^{n_{\kappa}} \right) \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} - \hat{\varepsilon}_{\kappa\text{S}}^*(\theta) \left(\frac{\varepsilon_{\kappa_0}}{\varepsilon_{\kappa}^{\infty}} \right)^{n_{\kappa\text{S}}} \quad (\text{A.1-15})$$

$$\psi_{\kappa_0} = \frac{1}{2\rho} (2 \hat{\kappa}_0(\theta) \varepsilon_{\kappa_0}) \quad (\text{A.1-16})$$

Mechanische Dissipation und Wärmeleitungsgleichung

Entropie:

$$\begin{aligned} s = \frac{1}{\rho} & \left(3\hat{K}(\theta) \hat{\alpha}(\theta) \text{sp}(\mathbf{E}_{\text{el}}) - \partial_\theta \hat{G}(\theta) \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{D}} \cdot \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{D}} - \frac{1}{2} \partial_\theta \hat{K}(\theta) \text{sp}(\mathbf{E}_{\text{el}})^2 \right) \\ & - \partial_\theta \hat{Q}(\theta) - \frac{1}{\rho} \left(\partial_\theta \hat{\kappa}_0(\theta) \varepsilon_{\kappa_0} + \frac{1}{2} \partial_\theta \hat{E}_\kappa(\theta) \varepsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2} \partial_\theta \hat{E}_X(\theta) \mathbf{E}_X \cdot \mathbf{E}_X \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1-17})$$

Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} \hat{c}_{\text{def}} \dot{\theta} = \frac{1}{\rho} & \underbrace{\left(\partial_\theta \hat{K}(\theta) \text{sp}(\mathbf{E}_{\text{el}}) \mathbf{1} - 3\hat{K}(\theta) \hat{\alpha}(\theta) \mathbf{1} + 2 \partial_\theta \hat{G}(\theta) \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{D}} \right)}_{p_{\text{te}}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{\text{el}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{\rho} \hat{k}(\theta) \text{div} \vec{g} + b + \delta_{\text{M}}}_{p_{\text{Q}}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \theta \left(\partial_\theta \hat{\kappa}_0(\theta) \dot{\varepsilon}_{\kappa_0} + \partial_\theta \hat{E}_\kappa(\theta) \varepsilon_\kappa \dot{\varepsilon}_\kappa + \partial_\theta \hat{E}_X(\theta) \mathbf{E}_X \cdot \dot{\mathbf{E}}_X \right)}_{p_{\text{tp}}} \end{aligned} \quad (\text{A.1-18})$$

Annahme thermoelastischer/thermoinelastischer Kopplungsterm:

$${}^a p_{\text{te}} \approx 0 \quad , \quad {}^a p_{\text{ti}} \approx 0 \quad (\text{A.1-19})$$

Mechanische Dissipation:

$$\begin{aligned} \delta_{\text{M}} = \frac{1}{\rho} & \left[F + (1 - \hat{\beta}(\theta)) \hat{\kappa}_0(\theta) + (\beta(\theta) \hat{\kappa}_0(\theta) + \kappa) \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}_\infty(\theta)} \right)^{n_\kappa} + \|\mathbf{X}\| \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}_\infty(\theta)} \right)^{n_X} \right] \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\left(\hat{\kappa}_0(\theta) \left(\frac{\varepsilon_{\kappa_0}}{\varepsilon_\kappa^\infty} \right)^{n_{\kappa\text{S}}} + \kappa \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}_\infty(\theta)} \right)^{n_{\kappa\text{S}}} \right) \hat{\varepsilon}_{\kappa\text{S}}^*(\theta) + \|\mathbf{X}\| \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}_\infty(\theta)} \right)^{n_{X\text{S}}} \hat{\varepsilon}_{X\text{S}}^*(\theta) \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1-20})$$

A.2 Materialmodell in 3D-Formulierung mit Erfassung von Schädigung

Kinematik:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{th}} + \mathbf{E}_{\text{el}} + \mathbf{E}_{\text{vp}} \quad , \quad \dot{\mathbf{E}}_{\text{th}} = \hat{\alpha}(\theta) \dot{\theta} \mathbf{1} \quad (\text{A.2-1})$$

$$\mathbf{E}_{\text{vp}} = \mathbf{H}_e + \mathbf{H}_d = \mathbf{R}_e + \mathbf{R}_d = \mathbf{Y}_e + \mathbf{Y}_d \quad (\text{A.2-2})$$

Freie Energie:

$${}^a\psi = \psi_{\text{th}} + {}^a\psi_{\text{M}} \quad , \quad \psi_{\text{th}} = \hat{Q}(\theta) \quad (\text{A.2-3})$$

$${}^a\psi_{\text{M}} = \frac{1}{2\rho} \left(2 {}^a\hat{G}(\theta) \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{D}} \cdot \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{D}} + {}^a\hat{K}(\theta) \text{sp}(\mathbf{E}_{\text{el}})^2 + 2 {}^a\hat{\kappa}_0(\theta) \varepsilon_{\kappa_0} + {}^a\hat{E}_{\kappa}(\theta) \varepsilon_{\kappa}^2 + {}^a\hat{E}_{\text{X}}(\theta) \mathbf{E}_{\text{X}} \cdot \mathbf{E}_{\text{X}} \right) \quad (\text{A.2-4})$$

Beziehung zwischen geschädigter und effektiver Spannung:

$${}^a\mathbf{T} = (1 - D) \mathbf{T}^{\text{D}} + (1 - DH(-p)) \mathbf{T}^{\text{K}} \quad , \quad H(-p) = \begin{cases} 1 & : p < 0 \\ 0 & : p > 0 \end{cases} \quad (\text{A.2-5})$$

Elastizitätsbeziehung:

$${}^a\mathbf{T} = 2 {}^a\hat{G}(\theta) \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{D}} + {}^a\hat{K}(\theta) \text{sp}(\mathbf{E}_{\text{el}}) \mathbf{1} \quad , \quad \begin{aligned} {}^a\hat{G}(\theta) &= (1 - D) \hat{G}(\theta) \\ {}^a\hat{K}(\theta) &= (1 - DH(-p)) \hat{K}(\theta) \end{aligned} \quad (\text{A.2-6})$$

$${}^a\psi_{\text{el}} = (1 - D) \psi_{\text{el}}^{\text{D}} + (1 - DH(-p)) \psi_{\text{el}}^{\text{K}} \quad , \quad \begin{aligned} \psi_{\text{el}}^{\text{D}} &= \frac{1}{2\rho} \left(2 \hat{G}(\theta) \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{D}} \cdot \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{D}} \right) \\ \psi_{\text{el}}^{\text{K}} &= \frac{1}{2\rho} \left(\hat{K}(\theta) \text{sp}(\mathbf{E}_{\text{el}})^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2-7})$$

Fließfunktion:

$${}^aF = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| {}^a\mathbf{T}^{\text{D}} - {}^a\mathbf{X} \right\| - ({}^a\hat{\kappa}_0(\theta) + {}^a\kappa) = (1 - D)F \quad , \quad {}^a\hat{\kappa}_0(\theta) = (1 - D)\hat{\kappa}_0(\theta) \quad (\text{A.2-8})$$

Fließregel:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} &= \lambda \mathbf{N}(\mathbf{T}^{\text{D}} - \mathbf{X}) \quad , \quad \lambda = \frac{1}{\hat{\eta}(\theta)} \left\langle \frac{F}{\hat{D}(\kappa, \theta)} \right\rangle^{\hat{m}(\theta)} \\ \mathbf{N}(\mathbf{T}^{\text{D}} - \mathbf{X}) &= \frac{\mathbf{T}^{\text{D}} - \mathbf{X}}{\| \mathbf{T}^{\text{D}} - \mathbf{X} \|} \end{aligned} \quad (\text{A.2-9})$$

Isotrope Verfestigung:

$${}^a\kappa = {}^a\hat{E}_{\kappa}(\theta) \varepsilon_{\kappa} = (1 - D)\kappa \quad , \quad {}^a\hat{E}_{\kappa}(\theta) = (1 - D)\hat{E}_{\kappa}(\theta) \quad (\text{A.2-10})$$

$$\dot{\varepsilon}_{\kappa} = \left(1 - \left(\frac{\varepsilon_{\kappa}}{\varepsilon_{\kappa}^{\infty}} \right)^{n_{\kappa}} \right) \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} - \hat{\varepsilon}_{\kappa s}^*(\theta) \left(\frac{\varepsilon_{\kappa}}{\varepsilon_{\kappa}^{\infty}} \right)^{n_{\kappa s}} \quad , \quad \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda \quad (\text{A.2-11})$$

$$\dot{\kappa} = \hat{E}_\kappa(\theta) \left[\left(1 - \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}_\infty(\theta)} \right)^{n_\kappa} \right) \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} - \hat{\varepsilon}_{\kappa\text{S}}^*(\theta) \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}_\infty(\theta)} \right)^{n_{\kappa\text{S}}} \right] + \frac{\partial_\theta \hat{E}_\kappa(\theta)}{\hat{E}_\kappa(\theta)} \kappa \dot{\theta} \quad (\text{A.2-12})$$

$${}^a\psi_\kappa = (1 - D)\psi_\kappa \quad , \quad \psi_\kappa = \frac{1}{2\rho} \left(\hat{E}_\kappa(\theta) \varepsilon_\kappa^2 \right) \quad (\text{A.2-13})$$

Kinematische Verfestigung:

$${}^a\mathbf{X} = {}^a\hat{E}_X(\theta) \mathbf{E}_X = (1 - D)\mathbf{X} \quad , \quad {}^a\hat{E}_X(\theta) = (1 - D)\hat{E}_X(\theta) \quad (\text{A.2-14})$$

$$\dot{\mathbf{E}}_X = \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} - \left(\frac{\|\mathbf{E}_X\|}{\varepsilon_X^\infty} \right)^{n_X} \mathbf{N}(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} - \hat{\varepsilon}_{X\text{S}}^*(\theta) \left(\frac{\|\mathbf{E}_X\|}{\varepsilon_X^\infty} \right)^{n_{X\text{S}}} \mathbf{N}(\mathbf{E}_X) \quad (\text{A.2-15})$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \hat{E}_X(\theta) \left[\dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} - \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}^\infty(\theta)} \right)^{n_X} \mathbf{N}(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} - \hat{\varepsilon}_{X\text{S}}^*(\theta) \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}^\infty(\theta)} \right)^{n_{X\text{S}}} \mathbf{N}(\mathbf{X}) \right] + \frac{\partial_\theta \hat{E}_X(\theta)}{\hat{E}_X(\theta)} \mathbf{X} \dot{\theta} \quad (\text{A.2-16})$$

$${}^a\psi_X = (1 - D)\psi_X \quad , \quad \psi_X = \frac{1}{2\rho} \left(\hat{E}_X(\theta) \mathbf{E}_X \cdot \mathbf{E}_X \right) \quad (\text{A.2-17})$$

Energiespeicherung Reibelement:

$$\dot{\varepsilon}_{\kappa_0} = \hat{\beta}(\theta) \left(1 - \left(\frac{\varepsilon_\kappa}{\varepsilon_\kappa^\infty} \right)^{n_\kappa} \right) \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}} - \hat{\varepsilon}_{\kappa\text{S}}^*(\theta) \left(\frac{\varepsilon_{\kappa_0}}{\varepsilon_\kappa^\infty} \right)^{n_{\kappa\text{S}}} \quad (\text{A.2-18})$$

$${}^a\psi_{\kappa_0} = (1 - D)\psi_{\kappa_0} \quad , \quad \psi_{\kappa_0} = \frac{1}{2\rho} (2 \hat{\kappa}_0(\theta) \varepsilon_{\kappa_0}) \quad (\text{A.2-19})$$

Schädigungsentwicklung:

$$\dot{D} = \frac{n_D}{\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0}} \left\langle \frac{\bar{E}_{\text{vp}}/\hat{g}(\dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}}, T, \theta) - \varepsilon_{c0}}{\varepsilon_{f0} - \varepsilon_{c0}} \right\rangle^{n_D-1} \dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}}/\hat{g}(\dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}}, T, \theta) \quad (\text{A.2-20})$$

$$\hat{g}(\dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}}, T, \theta) = \left(1 + d_2 e^{(d_3 T)} \right) \left(1 + d_4 \ln(\dot{\mathbf{E}}_{\text{vp}}/\dot{\varepsilon}_0) \right) (1 + d_5 \theta) \quad (\text{A.2-21})$$

Triaxialität:

$$T = \frac{I_1}{\sigma_v} \quad , \quad I_1 = \frac{1}{3} \text{sp}(\mathbf{T}) \quad , \quad \sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{T}^D\| \quad (\text{A.2-22})$$

Mechanische Dissipation und Wärmeleitungsgleichung

Wärmeleitungsgleichung:

$${}^a\hat{c}_{\text{def}} \dot{\theta} = {}^a p_{\text{te}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \hat{k}(\theta) \text{div} \vec{g}}_{p_Q} + b + {}^a \delta_M + {}^a p_{\text{ti}} \quad (\text{A.2-23})$$

Annahme thermoelastischer/thermoinelastischer Kopplungsterm:

$${}^a p_{te} \approx 0 \quad , \quad {}^a p_{ti} \approx 0 \quad (A.2-24)$$

Mechanische Dissipation:

$${}^a \delta_M = {}^a \delta_{vp} + {}^a \delta_D \quad (A.2-25)$$

viskoplastische Dissipation:

$${}^a \delta_{vp} = (1 - D)\delta_{vp} \geq 0 \quad (A.2-26)$$

$$\begin{aligned} \delta_{vp} = & \frac{1}{\rho} \left[F + (1 - \hat{\beta}(\theta))\hat{\kappa}_0(\theta) + (\beta(\theta)\hat{\kappa}_0(\theta) + \kappa) \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}^\infty(\theta)} \right)^{n_\kappa} + \|\mathbf{X}\| \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}^\infty(\theta)} \right)^{n_X} \right] \dot{\hat{\mathbf{E}}}_{vp} \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\left(\hat{\kappa}_0(\theta) \left(\frac{\varepsilon_{\kappa_0}}{\varepsilon_{\kappa}^\infty} \right)^{n_{\kappa s}} + \kappa \left(\frac{\kappa}{\hat{\kappa}^\infty(\theta)} \right)^{n_{\kappa s}} \right) \hat{\varepsilon}_{\kappa s}^*(\theta) + \|\mathbf{X}\| \left(\frac{\|\mathbf{X}\|}{\hat{X}^\infty(\theta)} \right)^{n_{Xs}} \hat{\varepsilon}_{Xs}^*(\theta) \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (A.2-27)$$

Dissipation infolge der Schädigung:

$${}^a \delta_D = \dot{D} \left(\psi_{el}^D + \psi_{\kappa_0} + \psi_\kappa + \psi_X \right) + \dot{D} H(-p) \psi_{el}^K \geq 0 \quad (A.2-28)$$

A.3 Temperaturabhängige Materialparameter

Elastizitätsbeziehung:

$$\hat{G}(\theta) = \frac{\hat{E}(\theta)}{2(1+\nu)} \quad , \quad \hat{K}(\theta) = \frac{\hat{E}(\theta)}{3(1-2\nu)}$$

$$\hat{E}(\theta) = \frac{1}{2} E (1 + \tanh(Q_E(\theta_E - \theta)))$$

Anfangsfließspannung und Energiespeicherung im Reibelement:

$$\hat{\kappa}_0(\theta) = \kappa_0 \frac{1}{2} \left(1 + \tanh(Q_{\kappa_0}(\theta_{\kappa_0}^{n_{\kappa_0}} - \theta^{n_{\kappa_0}})) \right) \quad , \quad \hat{\beta}(\theta) = \frac{\hat{\kappa}_0(\theta)}{\kappa_0} \beta$$

Dehnratensensitivität:

$$\hat{\eta}(\theta) = \eta e^{Q_\eta/\theta} \quad , \quad \hat{m}(\theta) = m_0 + \frac{m_1}{\theta}$$

$$\hat{D}(\kappa, \theta) = D_0 + D_1(\hat{\kappa}_0(\theta) + \kappa)$$

Isotrope Verfestigung:

$$\hat{E}_\kappa(\theta) = \frac{1}{2} E_\kappa (1 + \tanh(Q_\kappa(\theta_\kappa - \theta))) \quad , \quad \hat{\kappa}^\infty(\theta) = \hat{E}_\kappa(\theta) \varepsilon_\kappa^\infty$$

$$\hat{\varepsilon}_{\kappa S}^*(\theta) = \varepsilon_{\kappa S}^* e^{-Q_{\kappa S}/\theta}$$

Kinematische Verfestigung:

$$\hat{E}_X(\theta) = \frac{1}{2} E_X (1 + \tanh(Q_X(\theta_X - \theta))) \quad , \quad \hat{X}^\infty(\theta) = \hat{E}_X(\theta) \varepsilon_X^\infty$$

$$\hat{\varepsilon}_{X S}^*(\theta) = \varepsilon_{X S}^* e^{-Q_{X S}/\theta}$$

Schädigung:

$$\hat{g}(\dot{\mathbf{E}}_{VP}, T, \theta) = \left(1 + d_2 e^{(d_3 T)} \right) \left(1 + d_4 \ln(\dot{\mathbf{E}}_{VP}/\dot{\varepsilon}_0) \right) (1 + d_5 \theta) \quad (\text{A.3-1})$$

Auflistung der Materialparameter:

Elastizitätsbeziehung (4):	E, ν, Q_E, θ_E
Anfangsfließspannung + Energiespeicherung (5):	$\kappa_0, Q_{\kappa_0}, \theta_{\kappa_0}, n_{\kappa_0}, \beta$
Dehnratensensitivität (6):	$\eta, Q_\eta, m_0, m_1, D_0, D_1$
Isotrope Verfestigung (8):	$E_\kappa, Q_\kappa, \theta_\kappa, \varepsilon_\kappa^\infty, n_\kappa, \varepsilon_{\kappa S}^*, Q_{\kappa S}, n_{\kappa S}$
Kinematische Verfestigung (8):	$E_X, Q_X, \theta_X, \varepsilon_X^\infty, n_X, \varepsilon_{X S}^*, Q_{X S}, n_{X S}$
Thermische Ausdehnung/WLG (5):	$\hat{\alpha}(\theta), \rho, \hat{c}_{def}(\theta), \hat{k}(\theta), b$
Schädigung (8):	$\varepsilon_{c0}, \varepsilon_{f0}, n_D, \dot{\varepsilon}_0, d_2, d_3, d_4, d_5$

A.4 Auflistung der Materialparameter

Elastizitätsbeziehung											
E	210000	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	ν	0.3	[-]	Q_E	0.0035	[-]	θ_E	1000	K
Anfangsfließspannung und Energiespeicherung											
κ_0	392.6	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Q_{κ_0}	0.6	[-]	θ_{κ_0}	700	K	n_{κ_0}	0.4	[-]
β	0.4	[-]									
Dehnratensensitivität											
η	1465.7	s	Q_η	9833.9	K	m_0	2.336	[-]	m_1	1500	K
D_0	1.0	[-]	D_1	0.0	[-]						
Isotrope Verfestigung											
E_κ	1096.6	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Q_κ	0.00391	[-]	θ_κ	821.9	K	$\varepsilon_\kappa^\infty$	0.4	[-]
n_κ	1.0	[-]	$\dot{\varepsilon}_{\kappa S}^*$	147.7	$\frac{1}{\text{s}}$	$Q_{\kappa S}$	8865.0	K	$n_{\kappa S}$	3.0	[-]
Kinematische Verfestigung											
E_X	9591.0	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Q_X	0.00391	[-]	θ_X	821.9	K	ε_X^∞	0.0268	[-]
n_X	1.0	[-]	$\dot{\varepsilon}_{X S}^*$	14.77	$\frac{1}{\text{s}}$	$Q_{X S}$	8865.0	K	$n_{X S}$	3.0	[-]
Schädigung											
ε_{c0}	0.055	[-]	ε_{f0}	0.074	[-]	n_D	1.5	[-]	$\dot{\varepsilon}_0$	1.0	[-]
d_2	6.57	[-]	d_3	-2.12	[-]	d_4	0.002	[-]	d_5	0.01	K^{-1}

Tab. A.4-1: Identifizierte und vorgegebene Materialparameter des Stahls 51CrV4

A.5 Auszüge verwendeter LS-DYNA-Input-Decks

```
*PARAMETER
R qe      0.003500
R thetae  1000.0000
R ne      1.000000
R ek      1.0966E+9
R qk      0.003910
R thetak  821.85999
R epskinf 0.400000
R nk      1.000000
R depsks  147.70000
R qks     8865.0000
R nks     3.000000
R ex      9.5910E+9
R qx      0.003910
R thetax  821.85999
R epsxinf 0.026800
R nx      1.000000
R depsxs  14.770000
R qxs     8865.0000
R nxs     3.000000
R k0      3.9256E+8
R qk0     0.600000
R thetak0 700.00000
R nk0     0.400000
R beta    0.400000
R eta     1465.7000
R qeta    9833.9404
R d0      1.0000E+6
R d1      0.000
R m0      2.336000
R m1      1500.0000
R epsc    0.0550000
R epsf    0.0740000
R nd      1.5000000
R dmgsap  0.9900000
R dmgsd1  1.0000000
R dmgsd2  6.57
R dmgsd3  -2.12
R dmgsd4  0.002
R dmgsd5  0.01
R asympflg 0.000000
R rateflg  3.000000
R eltanflg 0.000000
R symflg  1.000000
R dt0     1.000E-3
$
```

Abb. A.5-1: Auszug eines LS-DYNA-Input-Decks: Definition der Parameter

```

*MAT_USER_DEFINED_MATERIAL_MODELS
$#      mid      ro      mt      lmc      nhv      iortho      ibulk      ig
      11 7890.0000      50      48      59      0      1      2
$#      ivect      ifail      itherm      ihyper      ieos      lmca      unused      unused
      0      0      1      0      0      0      0      0
$      B      G      E      QE      thetaE      nE      NU      TAYQ
$#      p1      p2      p3      p4      p5      p6      p7      p8
      175.0e9      80.0e9      210e9      &QE      &thetaE      &nE      0.3      -1.0
$#      p1      p2      p3      p4      p5      p6      p7      p8
      &Ek      &Qk      &thetaK      &epskinf      &nk      &depsks      &Qks      &nks
$#      p1      p2      p3      p4      p5      p6      p7      p8
      &EX      &QX      &thetaX      &epsXinf      &nX      &depsXs      &QXs      &nXs
$#      p1      p2      p3      p4      p5      p6      p7      p8
      &k0      &Qk0      &thetak0      &nk0      &beta      &eta      &Qeta      &D0
$#      p1      p2      p3      p4      p5      p6      p7      p8
      &D1      &m0      &m1      &epsc      &epsf      &nd      &dmgcap      &dmgd1
$#      p1      p2      p3      p4      p5      p6      p7      p8
      &dmgd2      &dmgd3      &dmgd4      &dmgd5      &asypflg      &rateflg      &eltanflg      &symflg
$
*MAT_THERMAL_USER_DEFINED
$#      mid      ro      mt      lmc      nhv      aopt      iortho      ihve
      11 7890.0000      11      8      5      0.000      0      1
$      cp0      cp1      k      rho_r      #wd
$      450.0      45.0      1.0e2      4
$#      p1      p2      p3      p4      p5      p6      p7      p8
      450.00000      0.000      45.000000      0.000      4.000000      0.000      0.000      0.000
$

```

Abb. A.5-2: Auszug eines LS-DYNA-Input-Decks: Definition der Materialmodelle