

# Methoden zur Beurteilung der statischen Brauchbarkeit von Tragwerken

Jens Wackerfuß, Jonas Boungard

*Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Kassel*

**Zusammenfassung:** Fehler in der Tragwerksplanung können zu kinematischen (beweglichen) Tragwerken führen, die aus statischer Sicht unbrauchbar sind. Mit dem Ziel, den Statiker beim Auffinden und Beheben derartiger Fehler zu unterstützen, müssen spezielle Methoden entwickelt werden. Dieser Beitrag enthält einen Überblick über klassische und moderne Methoden. Dabei erfolgt eine Klassifizierung in indirekte, direkte, Ursachen-spezifische und akademische Methoden.

## 1 Einleitung

Für die baustatische Analyse von Ingenieurtragwerken (z.B. Hochhäusern, Brücken und Stadien) stehen heutzutage moderne Baustatik-Programme zur Verfügung. Immer leistungsfähiger werdende Computer ermöglichen es, dass selbst komplexeste Tragwerke mit einem immer höheren Detaillierungsgrad analysiert werden können (Statik am Gesamtsystem). Bei der Entwicklung moderner Baustatik-Programme wurden große Anstrengungen unternommen, den Prozess der baustatischen Analyse zu automatisieren, um so den Tragwerksplaner bestmöglich zu unterstützen. Ein Beispiel hierfür ist das aus den Architektenplänen automatisch generierte Rechenmodell (i.d.R. FE-Netz), das dann als Ausgangspunkt für die eigentliche baustatische Berechnung dient.

Auf der anderen Seite gibt es Prozesse in der baustatischen Analyse, die (noch) nicht automatisiert werden können. Dies betrifft in erster Linie Aspekte im Bereich Tragwerksidealisation, wie z.B. die Frage, wie die einzelnen Tragglieder miteinander verbunden werden sollen (gelenkig, biegesteif, usw.) und wo und wie das Tragwerk am besten zu lagern ist; beide Aspekte können die Abtragung der Lasten innerhalb des Tragwerks stark beeinflussen. Diese Fragen muss der Tragwerksplaner individuell für jedes Tragwerk beantworten, wobei dabei auch die örtlichen, statisch relevanten Randbedingungen (z.B. Tragfähigkeit des Baugrundes oder Einschränkungen durch angrenzende Bebauung) berücksichtigt werden müssen.

Vor diesem Hintergrund werden im vorliegenden Beitrag Methoden vorgestellt, die den Tragwerksplaner dabei unterstützen sollen, das vom Programm vorgeschlagene oder das von ihm selbst gewählte/veränderte Rechenmodell hinsichtlich seiner *statischen Brauchbarkeit* zu überprüfen. Eine Überprüfung rein aus der Anschauung heraus, ist bei geometrisch und topologisch komplexen Tragwerken – selbst für erfahrene Tragwerksplaner – oftmals nicht möglich. Ein Tragwerk ist „statisch unbrauchbar“, wenn es kinematisch ist, d.h. im Sinne einer Starrkörperbewegung beweglich ist. Ein Tragwerk ist „statisch brauchbar“, wenn es nicht kinematisch ist. Statisch unbrauchbare Tragwerke sind nicht in der Lage allgemeine Lasten vom Ort ihres Auftretens bis in das Fundament abzuleiten. Die Beurteilung der statischen Brauchbarkeit eines Tragwerks ist – wie auch der Grad der statischen Bestimmtheit – grundsätzlich sowohl unabhängig von den jeweils auftretenden Lasten, als auch unabhängig von den Steifigkeitswerten (d.h. auch den Materialeigenschaften) der Tragglieder! Zwar ist es formal möglich, die Beurteilung nur auf die planmäßig auftretenden Lasten zu beziehen, dies ist jedoch aus baupraktischer Sicht nicht zu empfehlen, da dabei mögliche Planungs- und Nutzungsänderungen sowie unvorhersehbare Lasten unberücksichtigt bleiben. Tragwerke können i.A. eine oder auch mehrere Kinematiken (Starrkörperbewegungen) aufweisen, die sich entweder auf einzelne Tragglieder innerhalb des Tragwerks beschränken, oder das gesamte Tragwerk betreffen.

Im Rahmen einer umfangreichen Studie [1] wurden im Jahre 2017 eine Vielzahl von kommerziellen Baustatik-Programmen hinsichtlich ihres Umgangs mit statisch unbrauchbaren Tragwerken untersucht. Anhand der Fehlermeldungen lässt sich direkt oder indirekt ableiten, dass fast alle Programme das Auftreten eines „Nullelementes auf der Hauptdiagonalen“ während des Lösen des Gleichungssystems  $KV = F$  als Indikator für die Existenz eines kinematischen und somit statisch unbrauchbaren Systems verwenden (vgl. Kap. 3, Gleichungslöser). In einem der Programme wurde das im Kontext der Stabilitätsanalyse zu lösende Eigenwertproblem als Ausgangspunkt für die Beurteilung der statischen Brauchbarkeit herangezogen. Auch wenn es damit möglich ist, alle existierenden Kinematiken zu detektieren (vgl. Kap. 3, Eigenwertlöser), ist die Analyse hier auf das Detektieren einer einzelnen Kinematik beschränkt. Einige Programme führen zusätzlich Überprüfungen für das gezielte Aufspüren bestimmter Ursachen durch (vgl. Kap. 5). In der Studie konnte anhand ausgewählter Tragwerke gezeigt werden, dass bei einigen Programmen die Beurteilung der statischen Brauchbarkeit fälschlicherweise von der jeweils gewählten räumlichen Diskretisierung oder den jeweils wirkenden Lasten abhängig ist.

## 2 Ursachen

Ursachen für das Auftreten von Kinematiken und deren Folgen:

- Fehler bei der Festlegung des statischen Systems: Ein zentraler Schritt bei der Planung eines Tragwerks ist die Festlegung eines statischen Systems. Dabei muss der Tragwerksplaner sicherstellen, dass das statische System nicht kinematisch wird. Typische Fehler in diesem Kontext sind eine nicht ausreichende Lagerung des Gesamttragwerks (oder Tragwerksteile) und unzureichende Verbindungen zwischen den Traggliedern. Diese Kontrollen müssen auch für das im Rahmen der Tragwerksidealisation generierte Rechenmodell durchgeführt werden. Typische Fehler hierbei sind: unzulässige

Gelenkzuweisungen, die eine Kinematik des Einzeltragglieds verursacht, oder fehlerhafte Verbindungssituationen, die zu Knotenketten führen. Im Kontext der üblicherweise in kommerziellen Baustatik-Programmen eingesetzten Verschiebungsmethode führen statisch unbrauchbare Tragwerke zwangsläufig zu einer singulären Steifigkeitsmatrix.

- **Numerische Fehler:** Tragwerke, deren Tragglieder Steifigkeitsunterschiede von mehreren Größenordnungen aufweisen, führen zu schlecht konditionierten Steifigkeitsmatrizen. Beim computergestützten Lösen des resultierenden Gleichungssystems kann dies zu numerischen Problemen führen. Ursache dafür sind die sich infolge der Maschinengenauigkeit akkumulierenden Rundungsfehler, die dann zu einer singulären Steifigkeitsmatrix führen können. Wird die Singularität der Steifigkeitsmatrix als Indikator für die Existenz einer Kinematik verwendet, kann – aufgrund von Rundungsfehlern – ein statisch brauchbares Tragwerk fälschlicherweise als statisch unbrauchbar klassifiziert werden. Auf der anderen Seite können beim Lösen sehr großer Gleichungssysteme auch Rundungsfehler dazu führen, dass kinematische Tragwerke fälschlicherweise als statisch brauchbar klassifiziert werden.
- Neben den zuvor beschriebenen Fehlern im Bereich der Tragwerksplanung können auch Fehler im Kontext der daran anschließenden Ausführungsplanung (Konstruktionspläne etc.) oder im Kontext der abschließenden Bauausführung (auf der Baustelle) zu statisch unbrauchbaren Tragwerken führen. Aus baupraktischer Sicht ist das zuverlässige Erkennen und Vermeiden von statisch unbrauchbaren Tragwerken bereits in der frühen Phase der Tragwerkplanung von zentraler Bedeutung. Im Fall der Bauausführung können derartige Fehler katastrophale Folgen haben und eine Gefahr für Leib und Leben darstellen.

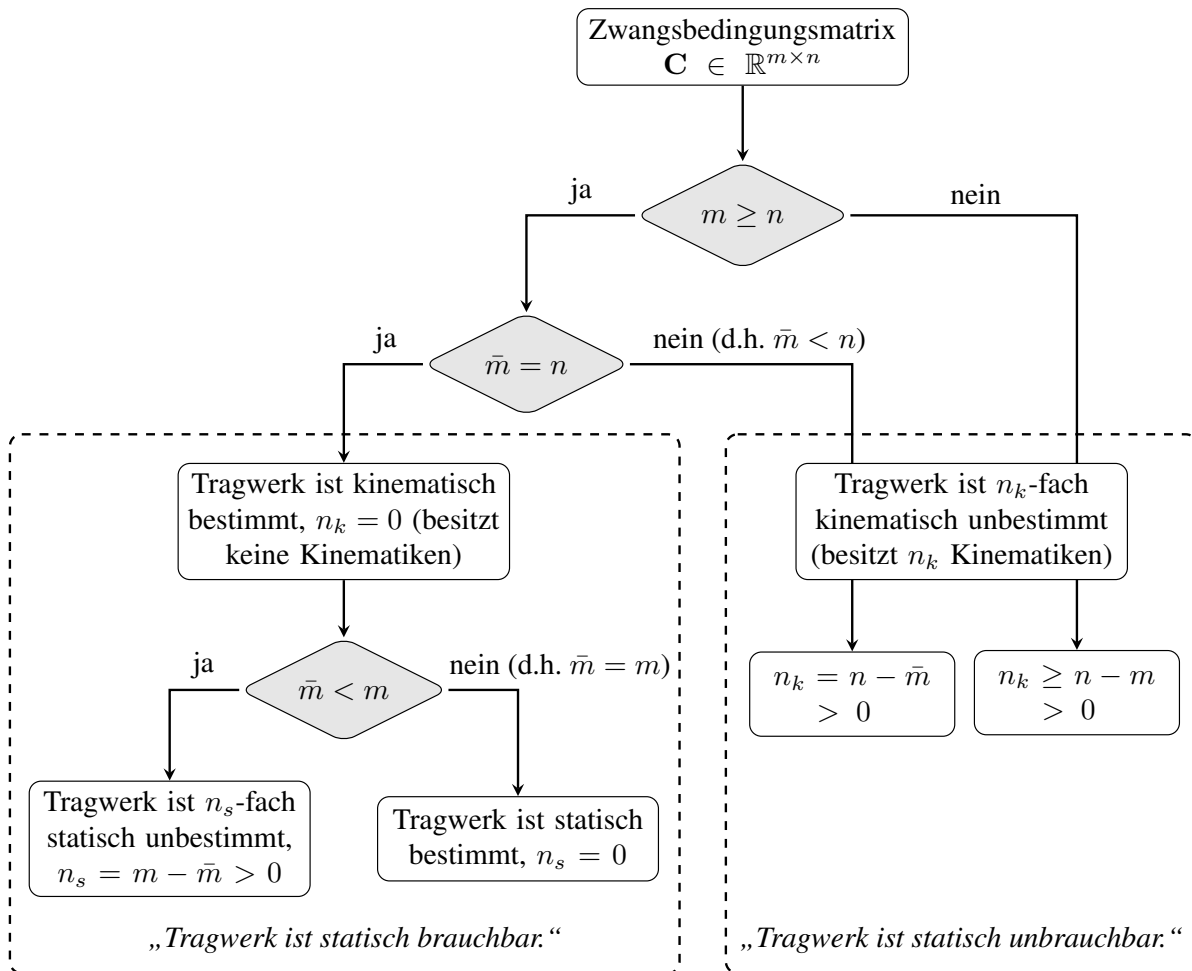
### 3 Indirekte Methode

Im vorliegenden Kontext werden solche Methoden als „indirekte Methode“ bezeichnet, deren intrinsische Aufgabe es nicht ist, die statische Brauchbarkeit eines Tragwerks zu beurteilen, jedoch dennoch dafür eingesetzt werden können. Dies führt i.d.R. auch dazu, dass diese Methoden Eigenschaften des Tragwerks berücksichtigen (u.a. Materialeigenschaften), die für die Beurteilung der statischen Brauchbarkeit nicht relevant sind. Ein Beispiel hierfür ist die Verschiebungsmethode, mit der durch Lösen des Gleichungssystems  $\mathbf{KV} = \mathbf{F}$  die unbekanntes Verschiebungen  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$  berechnet werden;  $n$  ist die Anzahl der Unbekannten. Zur Beurteilung der statischen Brauchbarkeit werden die Eigenschaften der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  analysiert, wobei dabei unterschiedliche Kriterien zum Einsatz kommen:

- **Eigenwertlöser:** Die Analyse erfolgt durch Lösen des Eigenwertproblems  $\mathbf{K}\varphi = \mathbf{0}$ : Das Tragwerk ist statisch brauchbar, wenn  $\mathbf{K}$  keine Nulleigenwerte besitzt. Das Tragwerk ist statisch unbrauchbar, wenn  $\mathbf{K}$  einen oder mehrere Nulleigenwerte besitzt; die Anzahl der Nulleigenwerte entspricht der Anzahl der im Tragwerk auftretenden Kinematiken. Die den Nulleigenwerten zugeordneten Eigenvektoren stellen die Kinematiken („kinematische Moden“) dar, die dann direkt grafisch dargestellt werden können. Bei der Lösung des Eigenwertproblems kann gewinnbringend ausgenutzt werden, dass

die Anzahl  $n_k$  der „zu erwartenden“ Kinematiken eines Tragwerks i.A. sehr viel kleiner ist, als die Anzahl der Unbekannten, d.h.  $n_k \ll n$ . Aus Gründen der Effizienz sollten daher Eigenwertlöser eingesetzt werden, die nicht alle  $n$  Eigenwerte, sondern nur die  $n_k$  kleinsten Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen (z.B. Lanczos). Da die Anzahl  $n_k$  i.A. vorab unbekannt ist, muss diese Zahl abgeschätzt werden.

- **Singulärwertzerlegung:** Die Analyse kann auf Basis der Singulärwertzerlegung erfolgen, d.h. die Steifigkeitsmatrix wird gemäß  $\mathbf{K} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$  zerlegt; mit den Matrizen  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbf{V}^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ; und der Diagonalmatrix  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Das Tragwerk ist statisch brauchbar, wenn alle Diagonalelemente von  $\mathbf{D}$  ungleich Null sind, d.h.  $D_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$ . Das Tragwerk ist statisch unbrauchbar, wenn ein oder mehrere Diagonalelemente von  $\mathbf{D}$  gleich Null (im Rahmen der Rechengenauigkeit) sind; die Anzahl der Nullelemente von  $\mathbf{D}$  entspricht der Anzahl der im Tragwerk auftretenden Kinematiken. Die zu den Nullelementen zugehörigen Spalten der Matrix  $\mathbf{U}$  (oder die Zeilen der Matrix  $\mathbf{V}^*$ ) stellen die Kinematiken selbst dar.
- **Zeilenstufenform:** Die Analyse kann erfolgen, indem die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  in eine Zeilenstufenform (engl. *row echelon form*)  $\bar{\mathbf{K}}$  überführt wird; d.h. in eine obere Dreiecksgestalt. Hierzu wird i.A. das Gaußsche Eliminationsverfahren eingesetzt. Das Tragwerk ist statisch brauchbar, wenn  $\bar{\mathbf{K}}$  keine Nullzeilen besitzt. Das Tragwerk ist hingegen statisch unbrauchbar, wenn  $\bar{\mathbf{K}}$  eine oder mehrere Nullzeilen besitzt; die Anzahl der Nullzeilen von  $\bar{\mathbf{K}}$  entspricht der Anzahl  $n_k$  der im Tragwerk auftretenden Kinematiken. In diesem Fall stellt  $\bar{\mathbf{K}}\mathbf{u} = \mathbf{0}$  ein  $n_k$ -fach unterbestimmtes Gleichungssystem dar. Erst durch die Wahl von  $n_k$  der insgesamt  $n$  Freiheitsgraden kann dieses Gleichungssystem mit Hilfe der Rücksubstitution gelöst werden [3]. Die dabei berechneten Lösungsvektoren stellen die  $n_k$  Kinematiken des Tragwerks dar.
- **Gleichungslöser:** In den meisten kommerziellen Baustatik-Programmen wird der Gleichungslöser zur Analyse eingesetzt, der auch zur Lösung des regulären Gleichungssystems  $\mathbf{KV} = \mathbf{F}$  vorgesehen ist. Liegt dem Löser beispielsweise eine Cholesky-Zerlegung gemäß  $\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T$  zugrunde, ist das Tragwerk dann statisch brauchbar, wenn alle Hauptdiagonalelemente der Diagonalmatrix  $\mathbf{D}$  positiv sind, d.h.  $D_{ii} = 0 \forall i = 1, \dots, n$ . Das Tragwerk ist statisch unbrauchbar, wenn während der Zerlegung in der  $k$ -ten Zeile der Matrix  $\mathbf{D}$  der Wert Null auf der Hauptdiagonalen festgestellt wird, d.h.  $D_{kk} = 0$ . In diesem Fall ist die Matrix  $\mathbf{K}$  singular. I.d.R. bricht dann das Programm seine Berechnung ab und es wird eine Fehlermeldung abgegeben; z.B. „Das statische System ist kinematisch.“, oder „Die Steifigkeitsmatrix ist singular.“ Oftmals wird dann zusätzlich auch der Knotenfreiheitsgrad angegeben, der der  $k$ -ten Unbekannten zugeordnet ist, wodurch der Anwender eine erste Hilfestellung zur Beseitigung der Kinematik erhält. Ob darüber hinaus noch weitere Kinematiken existieren, kann an dieser Stelle nicht festgestellt werden. Somit ist der Tragwerksplaner gezwungen, die Berechnung mit dem jeweils korrigierten statischen Systems so oft aufzurufen, bis alle Kinematiken beseitigt sind. Als kritisch zu bewerten ist das Vorgehen einzelner Programme, die beim Auffinden eines Nullwertes auf der Hauptdiagonalen durch Aufaddieren eines „kleinen positiven Werts“ die positive Definitheit der Steifigkeitsmatrix künstlich numerisch herstellt, um so den Abbruch des Löser zu verhindern. Die Größe der damit berechneten Verschiebungen ist direkt von der Wahl dieses Wertes abhängig.



**Abbildung 1:** Klassifizierung eines Tragwerks anhand der Eigenschaften der Zwangsbedingungsmatrix  $\mathbf{C}$ ; vgl. [3]; mit dem Rang der Matrix:  $\bar{m} := \text{Rang}(\mathbf{C})$ .

Wird der Wert sehr klein gewählt, sind die zur eigentlichen Kinematik zugehörigen, berechneten Verschiebungen vergleichbar groß, was dann als Fehlermeldung ausgegeben wird.

## 4 Direkte Methode

Eine direkte Methode verwendet nur solche Eigenschaften eines Tragwerks, die zur Beurteilung seiner statischen Brauchbarkeit benötigt werden. Eine derartige Methode kann auf Basis einer rein geometrischen (kinematischen) Betrachtung hergeleitet werden. Dazu wird das zu untersuchende Tragwerk mit Hilfe von  $m$  Zwangsbedingungen geometrisch beschrieben, die jeweils von den Knotenfreiheitsgraden  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  abhängen. Dies führt schlussendlich zu dem homogenen Gleichungssystem  $\mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , wobei  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  die s.g. Zwangsbedingungsmatrix ist, die sehr schwach besetzt und i.A. rechteckig ist. Die Beurteilung der statischen Brauchbarkeit erfolgt ausschließlich auf Basis der Matrix  $\mathbf{C}$ , s. Abb. 1. Mit Hilfe der Matrix  $\mathbf{C}$ , kann die Anzahl der Kinematiken mit  $n_k = n - \text{Rang}(\mathbf{C})$  berechnet werden. Das Tragwerk ist statisch brauchbar, wenn gilt  $n_k = 0$ ; für  $n_k > 0$  ist es statisch unbrauchbar.

Zusätzlich können aus  $\mathbf{C}$  auch die  $n_k$  Kinematiken berechnet werden, die dann grafisch dargestellt werden können. Zur Berechnung wird entweder das Gaußsche Eliminationsverfahren oder die Singulärwertzerlegung eingesetzt. In [3, 4] wird eine effiziente numerische Methode zur Beurteilung der statischen Brauchbarkeit von beliebigen Tragwerken vorgestellt und detailliert beschrieben. Dort befindet sich auch ein ausführlicher Literaturüberblick. Da diese Methode konzeptionell unabhängig von der FE-Methode ist, lässt sie sich sehr einfach als eigenständiges Modul in bereits bestehende Baustatik-Software implementieren.

## 5 Ursachen-spezifische Methoden

Ziel der ergänzenden Methoden ist die gezielte Überprüfung spezifischer Ursachen für die statische Unbrauchbarkeit von Tragwerken. Die Vorteile gegenüber den in den Kapiteln 3 und 4 vorgestellten Methoden sind einerseits, dass diese mit wesentlich geringerem Aufwand durchführbar sind und andererseits eine sehr präzise Fehlermeldung ermöglichen. Der Nachteil ist, dass damit nicht alle Ursachen detektiert werden können, d.h. eine abschließende Beurteilung der statischen Brauchbarkeit eines Tragwerk ist damit nicht möglich. Die im folgenden vorgestellten ergänzenden Methoden basieren rein auf Gleichgewichtsbetrachtungen, die entweder am Gesamtsystem, am Einzeltragglied oder am Knoten durchgeführt werden.

- **Gleichgewichtsbetrachtung am Gesamttragwerk:** Unabhängig von seinem inneren Aufbau ist ein Tragwerk *a priori* „äußerlich kinematisch“, wenn die vorhandenen Lager nicht ausreichen die 6 (3 bei ebenen Tragwerken) möglichen Starrkörperbewegungen zu verhindern. Mit Hilfe einer Gleichgewichtsbetrachtung am Gesamttragwerk kann überprüft werden, ob die vorhandenen Lager die Mindestanforderung für ein statisch brauchbares Tragwerk erfüllen. Die  $m = 6$  (bzw. 3) unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen führen zu  $\mathbf{G}\mathbf{s} = \mathbf{f}$ ; mit der i.A. nicht rechteckigen Gleichgewichtsmatrix  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und dem Vektor  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$  mit den Lagerkräften und -momente. Der Vektor  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m$  mit den äußeren Lasten spielt für die weiter Betrachtung keine Rolle. Die Mindestanforderung für ein ausreichend gelagertes Tragwerk ist erfüllt, wenn gilt:  $\text{Rang}(\mathbf{G}) = 6$  (bzw. 3). Es ist zu beachten, dass auch wenn diese Mindestanforderung erfüllt ist, es durch unzureichende Verbindungen zwischen einzelnen Traggliedern zu (weiteren) Kinematiken im Inneren des Tragwerks („innere Kinematiken“) kommen kann, die das Tragwerk insgesamt statisch unbrauchbar machen. Es wird darauf hingewiesen, dass eine Beurteilung auf Basis von Abzählformeln nicht allgemein möglich ist, da damit „ungünstige Lagerorientierungen“ nicht berücksichtigt werden können.
- **Gleichgewichtsbetrachtung am Einzeltragglied:** Ein einzelnes Tragglied eines Tragwerks ist *a priori* kinematisch, sofern es nicht ausreichend mit dem Resttragwerk verbunden bzw. gelagert ist. Mit dem Ziel, die Verbindungen zwischen den Traggliedern zu spezifizieren, hat der Anwender einiger Programmen die Möglichkeit, jedem Tragglied zusätzlich Gelenke (oder allgemein Mechanismen) zuzuordnen. Eine fehlerhafte Gelenkzuweisung führt zwangsläufig zu einem kinematischen Tragglied. Beispiel hierfür ist ein gerader Stab, dem am Anfang und am Ende jeweils ein Normalkraftgelenk zugeordnet wird. Mit Hilfe einer Gleichgewichtsbetrachtung am Einzelstab kann überprüft werden, ob eine fehlerhafte Gelenkzuweisung vorliegt. Dazu werden an dem zu untersuchenden Tragglied  $m = 6$  (3 bei ebenen Tragwerken) unabhängige

Gleichgewichtsbedingungen formuliert, die zu  $\mathbf{G}\mathbf{s} = \mathbf{f}$  führen; mit der i.A. rechteckigen Gleichgewichtsmatrix  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und dem Vektor  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$  mit den tatsächlich von den Knoten bzw. Gelenken des Tragglieds auftretenden Schnittgrößen. Der Vektor  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m$ , mit den auf das Tragglied wirkenden Lasten, spielt für die weitere Betrachtung keine Rolle. Ein Tragglied besitzt dann eine korrekte Gelenkzuweisung, wenn gilt:  $\text{Rang}(\mathbf{G}) = 6$  (bzw. 3), sonst ist die Gelenkzuweisung unzulässig, da das Tragglied  $n_k = 6 - \text{Rang}(\mathbf{G})$  Kinematiken aufweist. Alternativ dazu kann eine Überprüfung auch mit Hilfe einer Eigenwertanalyse der (die Gelenke berücksichtigenden) Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}^e$  durchgeführt werden: Die Gelenkzuweisung ist korrekt, sofern die Matrix  $\mathbf{k}^e$  genau  $m = 6$  (bzw. 3) Nulleigenwerte aufweist (diese repräsentieren die  $m$  möglichen Starrkörperbewegungen eines ungelagerten Tragglieds im Raum). Der Aufwand für diese Überprüfungen ist gering und kann im Kontext eines FE-Codes unmittelbar auf der Ebene der Elementberechnung durchgeführt werden.

- **Gleichgewichtsbetrachtung am Knoten:** Ein kinematischer Knoten innerhalb eines Tragwerks liegt vor, wenn sich ein Knoten im Sinne eines oder mehrerer seiner  $m$  Knotenfreiheitsgrade widerstandsfrei bewegen lässt. Ursache hierfür ist ein fehlerhafter Anschluss der an diesem Knoten miteinander verbundenen Tragglieder und/oder Lager. Ein kinematischer Knoten kann auf Basis der  $m$  unabhängigen Knotengleichgewichtsbedingungen  $\mathbf{G}\mathbf{s} = \mathbf{0}$  detektiert werden; mit der i.A. rechteckigen Gleichgewichtsmatrix  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und dem Vektor  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$  mit den an diesem Knoten von den anschließenden Traggliedern übertragenen Kräfte und Momente sowie Lagerkräfte und -momente. Knotenlasten spielen für diese Betrachtung keine Rolle. Die Anzahl der an diesem Knoten auftretenden Kinematiken beträgt  $n_k = m - \text{Rang}(\mathbf{G})$ .

## 6 Akademische Methoden

Zur Beurteilung der statischen Brauchbarkeit von „übersichtlichen“ Stabtragwerken können auch „akademische Methoden“ angewendet werden. Zu diesen Methoden zählen, neben dem „Aufbaukriterium“ und der auf Fachwerke beschränkte „Stabvertauschung“, auf die hier nicht näher eingegangen wird, die Folgenden:

- **Polplan:** Für den Sonderfall von ebenen Stabtragwerken kann die Beurteilung der statischen Brauchbarkeit mit Hilfe des Polplans (Methode der graphischen Statik) erfolgen. Ein Tragwerk ist statisch unbrauchbar, wenn sich der **Hauptpol** für mindestens eine seiner Scheiben ohne Widerspruch konstruieren lässt. Ein Tragwerk ist nur dann statisch brauchbar, wenn für jede seiner Scheiben die Konstruktion des Hauptpols zu Widersprüchen führt. Es wird darauf hingewiesen, dass in der Literatur dieses Kriterium oftmals unpräzise oder gar falsch formuliert wird. Für mehrfach kinematische Tragwerke liefert der Polplan i.A. keine Aussage zur statischen Brauchbarkeit.
- **Gleichgewichtsmatrix:** Werden alle Gelenke und Lager eines Tragwerk entfernt und zusätzlich alle „geschlossenen Zellen“ aufgeschnitten, erhält man insgesamt  $r$  offene Teilsysteme. Zur Bestimmung der  $n$  unbekannt Gelenk-, Lager- und Schnittgrößen  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$  stehen insgesamt  $m = 3r$  (bzw.  $6r$ ) unabhängige Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung, die sich im Gleichungssystem  $\mathbf{G}\mathbf{s} = \mathbf{f}$  zusammenfassen lassen.

Mit Hilfe der Gleichgewichtsmatrix  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , die i.A. rechteckig ist, kann die Anzahl der Kinematiken mit  $n_k = m - \text{Rang}(\mathbf{G})$  berechnet werden [2]. Das Tragwerk ist statisch brauchbar, wenn gilt  $n_k = 0$ ; für  $n_k > 0$  ist es statisch unbrauchbar. Das in der Literatur oftmals erwähnte „Determinantenkriterium“ kann nur für den Sonderfall einer quadratischen Matrix  $\mathbf{G}$  eingesetzt werden (d.h.  $n = m$ ) und ist somit nicht allgemein anwendbar! „Abzählformeln“ zur Bestimmung des Grads der statischen Unbestimmtheit  $n_s$  für Stabtragwerke sind ebenfalls nicht allgemein zur Beurteilung der statischen Brauchbarkeit anwendbar! Nur unter den Bedingungen  $n = \text{Rang}(\mathbf{G})$  und  $n_s < 0$  liefern sie mit  $n_k = -n_s$  die korrekte Anzahl der Kinematiken bzw. beurteilen die statische Brauchbarkeit korrekt, [2]. Zuvor wurde angenommen, dass die Gleichgewichtsbedingungen an den Teilsystemen formuliert werden. Alle zuvor gemachten Aussagen sind aber auch dann gültig, wenn die Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten formuliert werden, wobei sich Knoten an allen Gelenken und Auflagern sowie an Orten befinden, an denen mindestens 2 Stäbe biegesteif miteinander verbunden sind.

## Literatur

- [1] FIELBRAND, L. : *Kriterien zur Beurteilung der statischen Brauchbarkeit von Tragstrukturen – Kommerzielle Statikprogramme im Kontext von kinematischen Systemen*. Kassel, Universität Kassel, Masterarbeit am Fachgebiet Baustatik, 2017
- [2] WACKERFUSS, J. : *Manuskript zur Vorlesung Baustatik I – Teil: Statische Brauchbarkeit*. Kassel, Universität Kassel, Skript, 2015
- [3] WACKERFUSS, J. : On the detection, visualization and characterization of spurious kinematic modes in arbitrary plane structures. In: *International Journal of Solids and Structures* 164 (2019), S. 84–103
- [4] WACKERFUSS, J. : A direct numerical method to evaluate the geometric stability of arbitrary spatial structures. In: *International Journal of Solids and Structures* (in Begutachtung)