

Symmetrien von Differentialgleichungen via Vessiot-Theorie

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
am Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften
der Universität Kassel

vorgelegt von
Maxim Urich

Kassel, April 2021

Tag der mündlichen Prüfung

29. Juli 2021

Erstgutachter

Prof. Dr. Werner M. Seiler

Universität Kassel

Zweitgutachter

Prof. Dr. Dorothee Knees

Universität Kassel

Danksagung

Ich möchte mich sehr herzlich bedanken bei Professor Dr. Werner Markus Seiler für die Anregung zu dieser Arbeit und seine hervorragende Betreuung.

Mein Dank geht ebenfalls an Professorin Dr. Dorothee Knees für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Dem Otto-Braun-Fonds gebührt Dank, für die finanzielle Unterstützung der Arbeit.

Kassel, im April 2021

Maxim Urich

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	iii
1 Einführung	1
2 Formale Theorie	5
2.1 Jetbündel	5
2.2 Kontaktdistribution	8
2.3 Differentialgleichungen	9
2.4 Symbol	14
2.5 Vessiot-Distribution	15
3 Geometrische Symmetrien	19
3.1 Distributionen und Kodistributionen	19
3.2 Eigenschaften geometrischer Symmetrien	22
3.3 Projektion und Prolongation geometrischer Symmetrien	32
3.4 Infinitesimale geometrische Symmetrien	36
4 Kontaktsymmetrien	41
4.1 Kontakttransformationen	41
4.2 Theorem von Bäcklund	60
4.3 Infinitesimale Kontakttransformationen	66
4.4 Lie-Symmetrien von Differentialgleichungen	75
5 Innere Symmetrien	85
5.1 Symmetrien der Vessiot-Distribution	85
5.2 Eigenschaften innerer Symmetrien	88
5.3 Infinitesimale innere Symmetrien	102
6 Verallgemeinerte Symmetrien	113
6.1 Verallgemeinerte Vektorfelder	113
6.2 Eigenschaften verallgemeinerter Symmetrien	121
7 Zusammenfassung und Ausblick	125
Literaturverzeichnis	127
Index	129
Erklärung	131

Kapitel 1

Einführung

Methoden der Symmetrieanalyse stellen eines der umfassendsten Werkzeuge zur Konstruktion exakter Lösungen von Differentialgleichungen dar. Ihre historischen Ursprünge gehen auf die Arbeiten des norwegischen Mathematikers Sophus Lie in der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts zurück. Aufgrund des hohen Rechenaufwandes blieben diese Methoden jedoch lange Zeit ungenutzt. Seit zu Beginn der 1980er Jahre immer leistungsfähigere Rechner entwickelt wurden, fand die Symmetrieanalyse von Differentialgleichungen starke Beachtung. Das große Interesse an diesen Methoden ist leicht zu erklären, wenn man an die große Bedeutung von Symmetrien in allen Disziplinen der theoretischen Physik denkt. Diese Bedeutung wird auch durch den engen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen unterstrichen. In fast allen Differentialgleichungen der mathematischen Physik (Maxwell, Korteweg-de Vries, Burger, Wellen-, Potential-, Wärmeleitungs- und Schrödingergleichung, spezielle Relativitätstheorie und Elastizität) stehen die Symmetriegruppen mit physikalischen Effekten in Zusammenhang. Insbesondere bei nichtlinearen Gleichungen spielt die Symmetrieanalyse eine herausragende Rolle. Praktisch beruhen alle systematischen Ansätze und Techniken für nichtlineare partielle Differentialgleichungen auf Symmetriemethoden. In der Tat konnten für zahlreiche Probleme geschlossene Lösungen angegeben werden, nachdem ihre Symmetriegruppen bestimmt worden waren. Für gewöhnliche Differentialgleichungen erlaubt die Kenntnis der Symmetriegruppen eine Reduktion der Ordnung bis hin zur vollständigen Integrierbarkeit. Bei partiellen Differentialgleichungen kann die Anzahl der unabhängigen Variablen reduziert werden. Einen Überblick über den Nutzen des Symmetriebegriffs und deren Einführung bei Differentialgleichungen vermitteln die schon klassisch gewordenen Bücher von Bluman und Kumei [8], Cantwell [9], Olver [25], [26] und Ovsiannikov [27].

Die übliche Definition des Symmetriebegriffs einer Differentialgleichung lautet wie folgt: Symmetrien sind Transformationen, die Lösungen in Lösungen überführen. Modelliert man Differentialgleichungen als Untermannigfaltigkeiten eines Jetbündels, so lassen sich grundsätzlich zwei Arten von Symmetrien unterscheiden: *innere* und *äußere*. Der erste Fall entspricht einer Transformation, die ausschließlich auf der Differentialgleichung definiert ist. Im zweiten Fall ist die betrachtete Transformation auf dem gesamten umgebenden Jetbündel erklärt. Dabei stellt sich die naheliegende Frage, wann es mehr innere als äußere Symmetrien gibt. Es handelt sich um ein äußerst schwieriges Fortsetzungsproblem, da die Lösungen der betrachteten Differentialgleichung zudem praktisch unbekannt sind. Zur Klärung dieser Frage stellen wir in der vorliegenden Arbeit eine neue Formulierung der Symmetrietheorie mittels Distributionen auf, die zu einem tieferen Verständnis der Zusammenhänge verschiedener Symmetriearten beiträgt. Im Speziellen geben wir hinreichende und leicht verifizierbare Kriterien dafür an, wann jede innere Symmetrie zu einer äußeren fortgesetzt werden kann. Die Situation vereinfacht sich enorm, wenn wir ausschließlich infinitesimale Symmetrien betrachten. In diesem Fall können

wir die obige Frage vollständig beantworten.

Im Einzelnen gliedert sich die vorliegende Arbeit wie folgt:

Im zweiten Kapitel geben wir eine kurze Einführung in die formale Theorie von Differentialgleichungen. Es wird beschrieben, wie Differentialgleichungen als Untermannigfaltigkeiten eines Jetbündels modelliert werden können. Dabei werden wichtige Grundbegriffe wie Kontakt-distribution, formale Integrabilität, geometrisches Symbol, Vessiot-Distribution, ect. definiert und mit Beispielen erläutert. Die geometrische Interpretation von Differentialgleichungen erlaubt sofort in natürlicher Weise Symmetrien von Differentialgleichungen zu definieren: Symmetrien sind lokale Diffeomorphismen, welche die Vessiot-Distribution invariant lassen.

Im dritten Kapitel stellen wir eine neue geometrische Symmetrietheorie für Distributionen vor. Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der klassischen Symmetriekonzepte auf Mannigfaltigkeiten mit Distributionen. Unter einer geometrischen Symmetrie verstehen wir in diesem verallgemeinerten Kontext einen lokalen Diffeomorphismus, welcher die betrachtete Distribution invariant lässt. Unser hauptsächliches Ziel besteht, grob gesagt, darin, möglichst viele Informationen über geometrische Symmetrien aus den Struktureigenschaften der betrachteten Distribution zu gewinnen. Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der abgeleiteten Distribution ein. Diese entsteht aus einer gegebenen Distribution durch Hinzunahme von Lie-Klammern der beteiligten Vektorfeldern. Wir zeigen, dass die mehrfach abgeleiteten Distributionen invariant unter geometrischen Symmetrien sind. Mehr noch, es stellt sich heraus, dass die so konstruierten abgeleiteten Distributionen spezielle Subdistributionen enthalten, welche ausschließlich aus Cauchy-Cartan-Charakteristiken bestehen. Ihre strukturellen Eigenschaften stellen ein zentrales Werkzeug zur Symmetrieanalyse dar.

In Kapitel 4 wenden wir die ausgearbeitete geometrische Symmetrietheorie auf Kontakt-distributionen an. Dabei finden wir mehrere unterschiedliche Beweise des klassischen Bäcklund-Theorems für Kontakttransformationen, welche die dahinterstehende geometrische Struktur besonders deutlich aufzeigen. Im Speziellen beweisen wir eine verschärfte globale Version des Bäcklund-Theorems, die in Verbindung mit Eichsymmetrien eine wichtige Rolle spielt. Im Anschluss formulieren wir die klassischen (infinitesimalen) Lie-Kontaktsymmetrien von Differentialgleichungen. Symmetrien dieser Art bezeichnet man gemeinhin als äußere Symmetrien. Die Namensgebung orientiert sich an der Tatsache, dass die betrachteten Transformationen auf dem gesamten Jetbündel definiert sind.

In Kapitel 5 befassen wir uns mit (infinitesimalen) inneren Symmetrien von Differentialgleichungen. Dabei wenden wir die beschriebene geometrische Symmetrietheorie auf die Vessiot-Distribution an. Wir zeigen, dass die Einschränkung jeder (infinitesimalen) Lie-Kontaktsymmetrie stets eine (infinitesimale) innere Symmetrie liefert. Die weitaus interessantere Fragestellung ist algorithmisch zu entscheiden, unter welchen Bedingungen eine (infinitesimale) innere Symmetrie zu einer (infinitesimalen) äußeren Symmetrie fortgesetzt werden kann. Eine der wenigen Arbeiten, die sich mit dieser Frage beschäftigt, stammt von Anderson, Kamran und Olver [4]. Sie konnten zeigen, dass es für Systeme in der Cauchy-Kovalevskaya-Form keinen Unterschied zwischen infinitesimalen äußeren und infinitesimalen inneren Symmetrien gibt. Nach Krasilshchik, Lychagin und Vinogradov [18] rührt auch jede innere Symmetrie für diese Differentialgleichungen von einer Kontakttransformation her. Mit unseren Ergebnissen sind wir in der Lage alle aus der Literatur bekannten Resultate über innere Symmetrien nicht nur einfacher zu beweisen, sondern auch wesentlich vertieft und verallgemeinernd. Die inneren Symmetrien lassen sich im Wesentlichen dann zu äußeren Symmetrien fortsetzen, wenn die abgeleitete Vessiot-Distribution maximale Dimension besitzt. Im Fall von infinitesimalen inneren Symmetrien, nur solche sind für die praktische Anwendung relevant, können wir die obige Frage algorithmisch vollständig beantworten. Dies gelingt über

die geometrische Charakterisierung der infinitesimalen Lie-Kontaktsymmetrien innerhalb der Lie-Algebra der infinitesimalen inneren Symmetrien.

Im sechsten abschließenden Kapitel gehen wir auf die sogenannten (vertikalen) verallgemeinerten Symmetrien ein. Sie werden in der Regel in lokalen Koordinaten definiert und untersucht. Wir zeigen, dass jede infinitesimale innere Symmetrie eine verallgemeinerte Symmetrie festlegt. Vor diesem Hintergrund stellt sich die naheliegende Frage, unter welchen Bedingungen eine verallgemeinerte Symmetrie von einer infinitesimalen inneren Symmetrie herkommt. Zur Beantwortung dieser Frage stellen wir eine intrinsische Formulierung der verallgemeinerten Symmetrien auf.

Am Ende dieser Ausarbeitung befindet sich eine kurze Zusammenfassung. Zudem werden mögliche Fortsetzungen der vorliegenden Arbeit aufgeführt.

Kapitel 2

Formale Theorie

In diesem Kapitel wird eine kurze Einführung in die geometrische Behandlung allgemeiner Differentialgleichungssysteme mittels des Jetformalismus gegeben. Bei der Betrachtung von Differentialgleichungen treten bekanntlich neben den Lösungen die Ableitungen dieser Funktionen zur vollständigen Beschreibung hinzu. Eine geeignete Erweiterung der gefaserten Mannigfaltigkeit zur Beschreibung der Ableitungen führt auf Mannigfaltigkeiten von Jets. Jeder Differentialgleichung wird ein geometrisches Objekt im sogenannten Jetbündel zugeordnet. Das Jetbündel kann man sich als einen Raum vorstellen, der neben den abhängigen und unabhängigen Variablen der Differentialgleichung auch die Ableitungen der abhängigen Variablen nach den unabhängigen als zusätzliche Koordinaten besitzt. Die Bezeichnung „Jet“ geht auf C. Ehresmann [10],[11] zurück, der als erster Jetbündel formal einführte als Hilfsmittel zum Studium von Zusammenhängen auf gefaserten Mannigfaltigkeiten. Implizit wurde der Jetformalismus aber schon lange vorher in der geometrischen Theorie der Differentialgleichungen benutzt. Für ausführliche Darstellungen zur Geometrie von Jet-Mannigfaltigkeiten wird auf Pommaret [28], Saunders [30] und Seiler [31] verwiesen.

2.1 Jetbündel

Ein Tripel $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{X})$, bestehend aus zwei Mannigfaltigkeiten \mathcal{E} und \mathcal{X} und einer surjektiven Submersion $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$, d.h. die Tangentialabbildung $T_a\pi: T_a\mathcal{E} \rightarrow T_{\pi(a)}\mathcal{X}$ ist in jedem Punkt $a \in \mathcal{E}$ surjektiv, heißt *gefaserter Mannigfaltigkeit*. Hierbei wird \mathcal{E} als *totale Mannigfaltigkeit*, π als *Projektion* und \mathcal{X} als *Basismannigfaltigkeit* bezeichnet. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, gilt $\dim \mathcal{X} = n$ und $\dim \mathcal{E} = n + m$. Für jeden Punkt $p \in \mathcal{X}$ wird die Teilmenge $\pi^{-1}(\{p\}) \subset \mathcal{E}$ als *Faser über p* mit \mathcal{E}_p notiert. Jede Zusammenhangskomponente der Faser \mathcal{E}_p ist eine reguläre Untermannigfaltigkeit von \mathcal{E} . Ihre Dimension $\dim \mathcal{E}_p = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{X} = m$ nennen wir *Faserdimension*. Aufgrund der Surjektivität der Projektion π kann $\mathcal{E} = \bigsqcup_{p \in \mathcal{X}} \{p\} \times \mathcal{E}_p$ als disjunkte Vereinigung der Fasern geschrieben werden. Weiter ist die totale Mannigfaltigkeit \mathcal{E} lokal diffeomorph zum kartesischen Produkt. Etwas präziser formuliert, existiert zu jedem Punkt $a \in \mathcal{E}$ eine offene Umgebung $a \in U_a \subseteq \mathcal{E}$, eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit F_a und ein Diffeomorphismus $t_a: U_a \rightarrow \pi(U_a) \times F_a$ derart, dass $\text{pr}_1 \circ t_a = \pi|_{U_a}$ gilt, wobei pr_1 die Projektion auf den ersten Faktor bezeichnet.

$$\begin{array}{ccc} U_a & \xrightarrow{t_a} & \pi(U_a) \times F_a \\ & \searrow \pi|_{U_a} & \swarrow \text{pr}_1 \\ & \pi(U_a) & \end{array}$$

Üblicherweise wird bei komponentenweiser Betrachtung von Ausdrücken von *adaptierten* Koordinaten ausgegangen und man nutzt die Schreibweise (\mathbf{x}, \mathbf{u}) , um die Koordinaten eines Punktes $b \in U_a$ anzugeben. Hierbei bezeichnet $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ die Koordinaten von $\pi(b) \in \pi(U_a) \subseteq \mathcal{X}$ und $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$ die Koordinaten von $\text{pr}_2 \circ t_a(b) \in F_a$.

Als natürliche Verallgemeinerung von Graphen betrachten wir glatte Abbildungen $\sigma: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E}$ mit der Eigenschaft $\pi \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{O}}$, wobei \mathcal{O} eine beliebige offene Teilmenge von \mathcal{X} ist. Die Menge solcher Abbildungen, *lokale Schnitte von π* genannt, bezeichnen wir mit $\Gamma_{\text{lok}}(\pi)$. Jeder lokale Schnitt $\sigma \in \Gamma_{\text{lok}}(\pi)$ besitzt in adaptierten Koordinaten die Form $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}))$ mit $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = (\sigma^1(\mathbf{x}), \dots, \sigma^m(\mathbf{x}))$. Damit wir in der Formulierung der zu analysierenden Zusammenhänge etwas flexibler sind, führen wir noch folgende Spezifikationen ein:

$$\Gamma_{\mathcal{O}}(\pi) = \{\sigma \in \Gamma_{\text{lok}}(\pi) \mid \mathcal{O} = \text{dom } \sigma\} \quad \text{und} \quad \Gamma_p(\pi) = \{\sigma \in \Gamma_{\text{lok}}(\pi) \mid p \in \text{dom } \sigma\}.$$

In vielen Fällen ist die Idee einer gefaserten Mannigfaltigkeit zu allgemein, da verschiedene Fasern unterschiedliche topologische Strukturen besitzen können. Im Zusammenhang mit der Betrachtung von Differentialgleichungen ist es jedoch sinnvoll davon auszugehen bzw. zu verlangen, dass alle Fasern dieselbe Topologie aufweisen und dahingehend einer ausgezeichneten, der sogenannten *typischen Faser*, gleichen. Die Suche nach einer solchen charakterisierenden Eigenschaft führt uns auf den Begriff der *lokalen Trivialisierung*.

Definition 2.1.1. Es sei $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{X})$ eine gefaserte Mannigfaltigkeit. Unter einer *lokalen Trivialisierung von π in einer Umgebung $p \in \mathcal{O}_p \subseteq \mathcal{X}$* verstehen wir ein Tripel $(\mathcal{O}_p, F_p, t_p)$, in dem F_p eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit und $t_p: \pi^{-1}(\mathcal{O}_p) \rightarrow \mathcal{O}_p \times F_p$ ein Diffeomorphismus ist, derart, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\mathcal{O}_p) & \xrightarrow{t_p} & \mathcal{O}_p \times F_p \\ & \searrow \pi|_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_p)} & \swarrow \text{pr}_1 \\ & \mathcal{O}_p & \end{array}$$

Falls die zusammenhängende Basismannigfaltigkeit \mathcal{X} um jeden Punkt $p \in \mathcal{X}$ lokale Trivialisierungen $(\mathcal{O}_p, F_p, t_p)$ besitzt, dann sind alle Mannigfaltigkeiten $F_p \cong \mathcal{E}_p$ diffeomorph zueinander und somit diffeomorph zu einer ausgezeichneten Mannigfaltigkeit F . Eine gefaserte Mannigfaltigkeit $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{X})$ mit dieser Eigenschaft wird *Faserbündel mit typischer Faser F* , kurz *Bündel*, genannt. Wir benötigen ferner Vektorbündel, deren Fasern eine lineare Struktur tragen. Ein wichtiges Beispiel ist neben dem Tangentialbündel $(T\mathcal{E}, \tau_{\mathcal{E}}, \mathcal{E})$ vor allem das *Vertikalbündel* $(V\pi, \tau_{\mathcal{E}}|_{V\pi}, \mathcal{E})$ mit

$$V\pi = \bigcup_{a \in \mathcal{E}} \{a\} \times \ker T_a \pi \subset T\mathcal{E}. \quad (2.1)$$

Die zugehörige Faser über $a \in \mathcal{E}$ wird mit $V_a \pi$ notiert. Das Vertikalbündel trägt seinen Namen dank der Vektorraumisomorphie $V_a \pi \cong T_a(\mathcal{E}_{\pi(a)})$.

Definition 2.1.2. Es sei $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{X})$ eine gefaserte Mannigfaltigkeit. Zwei lokale Schnitte $\sigma, \phi \in \Gamma_p(\pi)$ heißen *äquivalent von der Ordnung $q \in \mathbb{N}_0$ im Punkt $p \in \mathcal{X}$* , wenn in adaptierten Koordinaten (\mathbf{x}, \mathbf{u}) auf \mathcal{E} ihre partiellen Ableitungen im Entwicklungspunkt p mit Koordinaten $\hat{\mathbf{x}}$ bis zur Ordnung q übereinstimmen:

$$\frac{\partial^{|\mu|} \sigma^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\mu}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial^{|\mu|} \phi^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\mu}(\hat{\mathbf{x}}), \quad 1 \leq \alpha \leq m, \quad 0 \leq |\mu| \leq q.$$

Für partielle Ableitungen nutzen wir die übliche Multiindexnotation der Analysis. Für jeden Multiindex $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}_0^n$ bezeichnet $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$ seine Länge und es gilt $\mathbf{x}^\mu = (x^1)^{\mu_1} \dots (x^n)^{\mu_n}$, $\mu! = \mu_1! \dots \mu_n!$. Man überzeugt sich leicht davon, dass diese Definition eine wohldefinierte Äquivalenzrelation beschreibt. Die zugehörige Äquivalenzklasse eines lokalen Schnittes $\sigma \in \Gamma_p(\pi)$ wird als q -Jet von σ in p bezeichnet und mit $[\sigma]_p^{(q)}$ notiert. Insbesondere enthält $[\sigma]_p^{(q)}$ stets einen lokalen Schnitt, der in adaptierten Koordinaten ein Polynom vom Grad nicht höher als q ist – dies entspricht dem Taylorpolynom von $\sigma(\mathbf{x})$ um $\hat{\mathbf{x}}$ vom Grad q :

$$T_q \sigma^\alpha(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}) = \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} \frac{\partial^{|\mu|} \sigma^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\mu}(\hat{\mathbf{x}}) \frac{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^\mu}{\mu!}, \quad 1 \leq \alpha \leq m.$$

Vermöge der Vorschrift $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, T_q \sigma(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}))$ erhalten wir einen lokalen Schnitt $T_q \sigma \in \Gamma_p(\pi)$, der ebenfalls der Klasse $[\sigma]_p^{(q)}$ angehört. In diesem Sinn lässt sich das Taylorpolynom als lokaler Repräsentant eines Schnittes nutzen.

Definition 2.1.3. Das Jetbündel der Ordnung $q \in \mathbb{N}_0$ ist die Menge aller q -Jets

$$J_q \pi = \left\{ [\sigma]_p^{(q)} \mid p \in \mathcal{X} \text{ und } \sigma \in \Gamma_p(\pi) \right\}.$$

Vereinfacht ausgedrückt ist das Jetbündel $J_q \pi$ nichts anderes als die Menge aller Taylorpolynome der Ordnung q . Aus dieser Beobachtung folgt sofort, dass wir es mit einer endlich dimensionalen Mannigfaltigkeit zu tun haben. Elementare Kombinatorik ergibt

$$\dim J_q \pi = n + m \binom{n+q}{q}.$$

Ein lokales Koordinatensystem auf $J_q \pi$ mit Definitionsbereich $\{[\sigma]_p^{(q)} \in J_q \pi \mid \sigma(p) \in U_a\}$ ist gegeben durch die Koordinaten \mathbf{x} des Entwicklungspunktes $p \in \mathcal{X}$ sowie die Werte u_μ^α der partiellen Ableitungen $\partial^{|\mu|} \sigma^\alpha / \partial \mathbf{x}^\mu(\mathbf{x})$ mit $1 \leq \alpha \leq m$ und $0 \leq |\mu| \leq q$. Der Übersicht halber bezeichnet $\mathbf{u}_{(r)}$ alle Jetvariablen u_μ^α einer festen Ordnung $|\mu| = r$ und $\mathbf{u}^{(r)}$ steht für alle Variablen u_μ^α mit $0 \leq |\mu| \leq r$ bis zur Ordnung r . Lokale Koordinaten auf $J_q \pi$ sind also $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$. Die Jetvariablen u_μ^α seien erst nach Ordnung und dann lexikografisch geordnet:

$$u_\mu^\alpha \prec u_\nu^\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{falls } |\mu| < |\nu|, \\ \text{falls } |\mu| = |\nu| \text{ und } \mu_i - \nu_i > 0 \text{ für } i = \min\{j \mid \mu_j - \nu_j \neq 0\}, \\ \text{falls } \mu = \nu \text{ und } \alpha < \beta. \end{cases} \quad (2.2)$$

Die Jetbündel unterschiedlicher Ordnung bilden eine natürliche Hierarchie: für $q \geq r$ existiert eine kanonische Projektion $\pi_r^q: J_q \pi \rightarrow J_r \pi$ definiert durch $\pi_r^q([\sigma]_p^{(q)}) = [\sigma]_p^{(r)}$. Im Spezialfall $q = r$ gilt $\pi_r^q = \text{id}_{J_q \pi}$. Weiter ist $\pi^q: J_q \pi \rightarrow \mathcal{X}$ mit $\pi^q([\sigma]_p^{(q)}) = p$ eine surjektive Submersion. Durch die angegebenen Projektionen erhält $J_q \pi$ folgende zusätzliche Struktur:

Proposition 2.1.4. Es sei $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{X})$ eine gefaserte Mannigfaltigkeit. Dann gilt:

- (i) Das Tripel $(J_q \pi, \pi^q, \mathcal{X})$ ist eine gefaserte Mannigfaltigkeit.
- (ii) Ist $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{X})$ ein Bündel, dann ist auch $(J_q \pi, \pi^q, \mathcal{X})$ ein Bündel.
- (iii) Für $0 \leq r \leq q$ ist $(J_q \pi, \pi_r^q, J_r \pi)$ ein Bündel.

Einen detaillierten Beweis findet man zusammen mit weiteren Eigenschaften von $J_q \pi$ in Saunders [30, Chapter 6]. Im Folgenden setzen wir voraus, dass $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{X})$ ein Bündel ist. Des Weiteren identifizieren wir $(J_0 \pi, \pi^0, \mathcal{X})$ mit $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{X})$ vermöge der Zuordnung $[\sigma]_p^{(0)} \mapsto \sigma(p)$.

2.2 Kontaktdistribution

Jeder Schnitt $\sigma \in \Gamma_{\mathcal{O}}(\pi)$ lässt sich zu einem Schnitt $j_q\sigma \in \Gamma_{\mathcal{O}}(\pi^q)$ prolongieren; seine q -te Prolongation wird punktweise durch $j_q\sigma(p) := [\sigma]_p^{(q)}$ definiert. Insbesondere ist das Bild im $j_q\sigma$ eine n -dimensionale reguläre Untermannigfaltigkeit von $J_q\pi$ mit der Eigenschaft $\pi^q(\text{im } j_q\sigma) = \mathcal{O}$. Hinsichtlich der Elemente in $\Gamma_{lok}(\pi^q)$ stellen wir fest, dass diese nicht nur Prolongationen von Schnitten sind, wie es für die spätere Betrachtung von Lösungen von Differentialgleichungen wünschenswert wäre. Tatsächlich ist ein lokaler Schnitt $\psi \in \Gamma_{lok}(\pi^q)$ genau dann q -te Prolongation eines lokalen Schnittes von π , wenn $\psi = j_q(\pi_0^q \circ \psi)$ gilt. Zur geometrischen Interpretation dieser Beobachtung führen wir den Begriff der *Kontaktdistribution* ein.

Definition 2.2.1. Es sei \mathfrak{D} die Menge aller Distributionen $\mathcal{D} \subseteq TJ_q\pi$ mit der Eigenschaft, dass für alle lokalen Schnitte $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$ die Inklusion $T(\text{im } j_q\sigma) \subseteq \mathcal{D}$ gilt. Die bezüglich der Mengeninklusion kleinste Distribution $\mathcal{C}_q := \bigcap_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \mathcal{D}$ in \mathfrak{D} heißt *Kontaktdistribution*.

Die Kontaktdistribution $\mathcal{C}_q \subseteq TJ_q\pi$ ordnet jedem Punkt $\rho \in J_q\pi$ einen linearen Unterraum

$$(\mathcal{C}_q)_\rho = \langle \{T_\rho(\text{im } j_q\sigma) \subset T_\rho J_q\pi \mid \sigma \in \Gamma_{lok}(\pi) \text{ und } \rho \in \text{im } j_q\sigma\} \rangle \subseteq T_\rho J_q\pi$$

zu. Im Spezialfall der Ordnung $q = 0$ erhalten wir hieraus $\mathcal{C}_0 = T\mathcal{E}$. Die nächste Proposition zeigt explizit, welche (lokale) Vektorfelder in \mathcal{C}_q enthalten sind.

Proposition 2.2.2. Die Kontaktdistribution $\mathcal{C}_q \subseteq TJ_q\pi$ wird lokal durch die Vektorfelder

$$\mathcal{C}_i^{(q)} = \partial_{x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| < q} u_{\mu+1_i}^\alpha \partial_{u_\mu^\alpha}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.3a)$$

$$\mathcal{C}_\alpha^\mu = \partial_{u_\mu^\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq m, \quad |\mu| = q \quad (2.3b)$$

aufgespannt. Es gilt $\dim \mathcal{C}_q = n + m \binom{n+q-1}{q}$. Ein lokaler Schnitt $\psi \in \Gamma_{lok}(\pi^q)$ ist genau dann q -te Prolongation eines lokalen Schnittes von π , wenn $T(\text{im } \psi) \subset \mathcal{C}_q|_{\text{im } \psi}$ gilt.

Hierbei bezeichnet $\mu + 1_i$ den Multiindex, der entsteht, wenn man den i -ten Eintrag μ_i von $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ um Eins erhöht. Wir verzichten an dieser Stelle auf die Beweisführung und verweisen auf Seiler [31, Chapter 2] für eine ausführliche Argumentation. Wir halten fest, dass eine n -dimensionale π^q -transversale Untermannigfaltigkeit im $\psi \subset J_q\pi$ genau dann das Bild eines prolongierten Schnittes $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$ ist, wenn im ψ eine *Integralmannigfaltigkeit* der Kontaktdistribution \mathcal{C}_q ist. Jedes lokal definierte *Kontaktvektorfeld* $X \in \mathcal{C}_q$ hat in lokalen Koordinaten $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ auf $J_q\pi$ die Form

$$X = \sum_{i=1}^n a^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \mathcal{C}_i^{(q)} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} b_\mu^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \mathcal{C}_\alpha^\mu.$$

Diese Darstellung beweist bereits das nächste Korollar.

Korollar 2.2.3. Die Kontaktdistribution $\mathcal{C}_q \subset TJ_q\pi$ zerfällt lokal in zwei Subdistributionen $\mathcal{H} \oplus V\pi_{q-1}^q$. Das transversale Komplement \mathcal{H} ist n -dimensional und nicht eindeutig bestimmt.

Im Gegensatz zu einem π^q -transversalen Komplement \mathcal{H} ist das Vertikalbündel $V\pi_{q-1}^q$ unabhängig von den verwendeten Koordinaten, vgl. (2.1). Es besteht ferner folgender Zusammenhang zwischen Kontaktdistributionen unterschiedlicher Ordnung:

$$(\mathcal{C}_q)_\rho = \left\langle \bigcup_{\hat{\rho} \in (\pi_q^{q+r})^{-1}(\{\rho\})} T_{\hat{\rho}} \pi_q^{q+r}((\mathcal{C}_{q+r})_{\hat{\rho}}) \right\rangle. \quad (2.4)$$

Es gibt verschiedene Wege Kontaktstrukturen einzuführen. Bezeichnet $\iota: \text{im } j_q\sigma \hookrightarrow J_q\pi$ die Inklusionsabbildung für einen lokalen Schnitt $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$, so definiert man beispielsweise die *Kontaktkodistribution* $\mathcal{C}_q^0 \subset T^*J_q\pi$ im Fall $q \geq 1$ durch

$$\mathcal{C}_q^0 := \left\langle \left\{ \omega \in \Gamma_{lok}(\tau_{J_q\pi}^*) \mid \iota^*\omega = 0 \text{ für alle } \sigma \in \Gamma_{lok}(\pi) \right\} \right\rangle.$$

Der Pullback einer *Kontaktform* $\omega \in \mathcal{C}_q^0$ verschwindet somit auf dem Bild jedes prolongierten Schnittes $j_q\sigma$. Es gilt $\dim \mathcal{C}_q^0 = \dim J_q\pi - \dim \mathcal{C}_q = m \binom{n+q-1}{q-1}$. Die Kontaktkodistribution \mathcal{C}_q^0 wird lokal durch die Einsformen

$$\omega_\mu^\alpha = du_\mu^\alpha - \sum_{i=1}^n u_{\mu+1,i}^\alpha dx^i, \quad 0 \leq |\mu| < q$$

aufgespannt. In Analogie zu Proposition 2.2.2 ist ein lokaler Schnitt $\psi \in \Gamma_{lok}(\pi^q)$ genau dann q -te Prolongation eines lokalen Schnittes von π , wenn im $\psi \subset J_q\pi$ eine Integralmannigfaltigkeit der Kontaktkodistribution \mathcal{C}_q^0 ist. Für eine genauere Diskussion der verschiedenen alternativen Varianten von Kontaktstrukturen verweisen wir auf Seiler [31, Chapter 2].

2.3 Differentialgleichungen

Dieser Abschnitt ist der geometrischen Definition von Differentialgleichungen und ihren Lösungen gewidmet. Unsere Notation legt schon nahe, dass wir die Jetvariablen mit Ableitungen identifizieren wollen. Eine Differentialgleichung kann im Jetbündel somit als eine *algebraische* Gleichung angesehen werden, zu der natürlich eine Nullstellenmenge gehört.

Definition 2.3.1. Eine reguläre Untermannigfaltigkeit $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ heißt *Differentialgleichung der Ordnung* $q \geq 1$, wenn das Tripel $(\mathcal{R}_q, \pi^q \circ \iota, \mathcal{X})$ eine gefaserte Mannigfaltigkeit ist und $\mathcal{R}_q \neq (\pi_{q-1}^q)^{-1}(\pi_{q-1}^q(\mathcal{R}_q))$ gilt. Ein lokaler Schnitt $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$ heißt (*lokale*) *Lösung der Differentialgleichung* \mathcal{R}_q , wenn das Bild der q -ten Prolongation $j_q\sigma$ vollständig in \mathcal{R}_q liegt.

Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $\hat{\pi}^q := \pi^q \circ \iota$, wobei $\iota: \mathcal{R}_q \hookrightarrow J_q\pi$ die kanonische Einbettung bezeichnet. Man beachte, dass in diesem geometrischen Zugang nicht zwischen einer skalaren Gleichung und einem System unterschieden wird. Daher werden wir von jetzt an immer einfach von einer Differentialgleichung reden, auch wenn es sich meistens um ein System handeln wird. In Abhängigkeit der Dimension der Basismannigfaltigkeit \mathcal{X} ist \mathcal{R}_q entweder eine *gewöhnliche* Differentialgleichung, wenn $\dim \mathcal{X} = 1$ gilt, oder eine *partielle* Differentialgleichung, wenn $\dim \mathcal{X} > 1$ gilt. Der Zusammenhang zwischen der geometrischen Definition und dem herkömmlichen Bild wird in lokalen Koordinaten $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ auf $J_q\pi$ besonders deutlich: Als reguläre Untermannigfaltigkeit kann $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ lokal als Nullstellenmenge einer glatten Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{V}_q \subseteq J_q\pi \longrightarrow \mathbb{R}^t \\ (\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \longmapsto \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \end{cases}$$

dargestellt werden, sodass $\mathcal{V}_q \cap \mathcal{R}_q = \Phi^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ das Urbild eines *regulären* Wertes $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^t$ ist. Hierbei ist \mathcal{V}_q eine offene Teilmenge des Gültigkeitsbereichs der betrachteten lokalen Karte auf $J_q\pi$ und $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^t)$ eine vektorwertige Funktion. Nach dem Satz vom regulären Wert gilt dann $T_\rho \mathcal{R}_q = \ker T_\rho \Phi$ für alle $\rho \in \mathcal{V}_q \cap \mathcal{R}_q$. Die in Definition 2.3.1 angegebene Bedingung $\mathcal{R}_q \neq (\pi_{q-1}^q)^{-1}(\pi_{q-1}^q(\mathcal{R}_q))$ besagt, dass die lokale Darstellung $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = \mathbf{0}$ von Jetvariablen der Ordnung q abhängt. Man beachte aber, dass die lokale Repräsentation

von \mathcal{R}_q nicht eindeutig ist. Für jeden Diffeomorphismus $\Psi: \mathcal{V}_q \rightarrow \mathcal{V}_q$ mit der Eigenschaft $\Psi(\mathcal{V}_q \cap \mathcal{R}_q) = \mathcal{V}_q \cap \mathcal{R}_q$ ist die Verkettung $\Phi \circ \Psi$ wieder eine lokale Repräsentation von \mathcal{R}_q . Wegen $\pi^q(\mathcal{R}_q) = \mathcal{X}$ gibt es keine Relationen zwischen *unabhängigen* Variablen x^1, \dots, x^n . Wenn wir umgekehrt ein System von Differentialgleichungen der Ordnung q im herkömmlichen Sinn vorliegen haben, dann interpretieren wir es als ein System algebraischer Gleichungen in $J_q\pi$ und die zugehörigen Nullstellen bilden die Untermannigfaltigkeit \mathcal{R}_q . Eine solche geometrische Modellierung von Differentialgleichungen besitzt viele Vorteile: Bei den meisten Problemen aus Anwendungen sollen die Ergebnisse unabhängig von den verwendeten Koordinaten sein; dies ist bei einer intrinsischen geometrischen Formulierung automatisch gewährleistet.

Mit Hilfe der lokalen Repräsentation $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = \mathbf{0}$ von \mathcal{R}_q können wir leicht einen Zusammenhang zur klassischen Definition einer glatten Lösung herstellen. Jeder prolongierte Schnitt $j_q\sigma: \mathcal{O} \rightarrow J_q\pi$ besitzt lokal die Form $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \partial^{|\mu|}\sigma(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}^\mu)$, wobei μ über alle Multiindizes mit $0 \leq |\mu| \leq q$ läuft. Wir schreiben dafür abkürzend $(\mathbf{x}, j_q\sigma(\mathbf{x}))$. Die Bedingung im $j_q\sigma \subseteq \mathcal{R}_q$ ist äquivalent dazu, dass die Funktionen $\sigma(\mathbf{x})$ und ihre Ableitungen in die lokale Repräsentation von \mathcal{R}_q eingesetzt werden. Die Gleichungen $\Phi(\mathbf{x}, j_q\sigma(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ sind dann für alle \mathbf{x} aus dem Definitionsbereich von σ automatisch erfüllt. Folglich ist $\sigma(\mathbf{x})$ eine klassische Lösung des Differentialgleichungssystems $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = \mathbf{0}$.

In vielen Situationen ist es vorteilhaft die Untermannigfaltigkeit $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ durch angepasste Wahl der Koordinaten auf \mathcal{R}_q zu beschreiben. Definitionsgemäß ist $(\mathcal{R}_q, \hat{\pi}^q, \mathcal{X})$ eine gefaserte Mannigfaltigkeit. Dementsprechend lassen sich auf \mathcal{R}_q lokal adaptierte Koordinaten $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})$ einführen. Die zugehörige Einbettung $\iota: \mathcal{R}_q \hookrightarrow J_q\pi$ hat bezüglich dieser Koordinaten die Form $\iota(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}) = (\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{u}^{(q)}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}))$. Man bestätigt leicht, dass ein lokaler Schnitt $\bar{\sigma} \in \Gamma_{lok}(\hat{\pi}^q)$ mit Darstellung $\bar{\mathbf{x}} \mapsto (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}))$ genau dann eine Lösung von \mathcal{R}_q ist, wenn $\iota \circ \bar{\sigma} = j_q(\pi_0^q \circ \iota \circ \bar{\sigma})$ gilt.

Wir weisen ausdrücklich daraufhin, dass ein Punkt $\rho = [\sigma]_p^{(q)} \in \mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ im Allgemeinen *keine* Lösung von \mathcal{R}_q enthält. Bezeichnet $\Theta \subset \Gamma_{lok}(\pi)$ den Lösungsraum von \mathcal{R}_q , so ist die Vereinigung der prolongierten Schnitte $\sigma \in \Theta$, in Zeichen

$$\text{Sol}(\mathcal{R}_q) := \bigcup_{\sigma \in \Theta} \text{im } j_q\sigma \subseteq \mathcal{R}_q,$$

im Allgemeinen eine *echte* Teilmenge von \mathcal{R}_q . Der Grund hierfür ist die mögliche Existenz versteckter Integrabilitätsbedingungen, die von jeder Lösung erfüllt werden. Im Spezialfall $\text{Sol}(\mathcal{R}_q) = \mathcal{R}_q$ sprechen wir von einer *lokal lösbaren* Differentialgleichung. Die natürliche Hierarchie der Jetbündel erlaubt uns einen rein geometrischen Zugang zu Integrabilitätsbedingungen ohne auf konkrete Rechenvorschriften zurückgreifen zu müssen. Grundlage sind zwei natürliche Operationen mit einer Differentialgleichung: *Projektion* und *Prolongation*.

Definition 2.3.2. Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine Differentialgleichung der Ordnung q und $0 < r \leq q$ eine natürliche Zahl. Die Teilmenge $\mathcal{R}_{q-r}^{(r)} := \pi_{q-r}^q(\mathcal{R}_q) \subseteq J_{q-r}\pi$ heißt *r-te Projektion der Differentialgleichung \mathcal{R}_q auf $J_{q-r}\pi$* .

Die Notation $\mathcal{R}_{q-r}^{(r)}$ ist so zu interpretieren: der untere Index $q-r$ gibt an, dass es sich um eine Teilmenge des Jetbündels $J_{q-r}\pi$ handelt; der obere Index r besagt, dass diese Teilmenge durch eine Projektion über r Ordnungen gewonnen wurde. Obwohl die Projektion sich geometrisch elementar beschreiben lässt, ist sie rechnerisch oft nichttrivial auszuführen: wir müssen aus den Gleichungen $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = \mathbf{0}$, die \mathcal{R}_q lokal beschreiben, alle Jetvariablen einer Ordnung größer als $q-r$ eliminieren; die übrigbleibenden Gleichungen beschreiben $\mathcal{R}_{q-r}^{(r)}$. Das Ergebnis einer Projektion ist im Allgemeinen *keine* Untermannigfaltigkeit. Als einfaches Beispiel betrachten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\mathcal{R}_1 : \left\{ u(u')^2 + u - x = 0. \right.$$

Die Projektionsmenge $\pi_0^1(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{E}$ lässt sich am einfachsten an der Darstellung $u = x/(1+(u')^2)$ erkennen. Die Steigungen dieser Geraden nehmen beliebige Werte aus dem Intervall $(0, 1]$ an, weshalb der so entstandene „Doppelkegel“ keine Untermannigfaltigkeit von \mathcal{E} ist. Falls aber die Projektion $\hat{\pi}_{q-r}^q = \pi_{q-r}^q \circ \iota: \mathcal{R}_q \rightarrow J_{q-r}\pi$ konstanten Rang hat und $\hat{\pi}_{q-r}^q$ offen (oder abgeschlossen) auf ihr Bild ist, dann ist das Tripel $(\mathcal{R}_{q-r}^{(r)}, \hat{\pi}_{q-r}^q, \mathcal{X})$ laut *Subimmersionstheorem*, vgl. Abraham *et al.* [1, Theorem 3.5.18], eine gefaserte Untermannigfaltigkeit von $J_{q-r}\pi$. Besitzt die Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine lokale Repräsentation der Form

$$\mathcal{R}_q : \begin{cases} \Phi_q^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = 0, & t_{q-1} < \tau \leq t_q = t, \\ \Phi_{q-1}^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q-1)}) = 0, & t_{q-2} < \tau \leq t_{q-1}, \\ \dots & \\ \Phi_0^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, & 1 \leq \tau \leq t_0 \end{cases}$$

derart, dass alle Matrizen $\partial \Phi_r / \partial \mathbf{u}_{(r)}$ maximalen Rang haben, dann sind alle Projektionsmengen $\mathcal{R}_{q-r}^{(r)}$ Untermannigfaltigkeiten von $J_{q-r}\pi$. In diesem Fall existieren auf \mathcal{R}_q lokal adaptierte Koordinaten $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}_0, \dots, \bar{\mathbf{v}}_q)$ derart, dass die Einbettung $\iota: \mathcal{R}_q \hookrightarrow J_q\pi$ die Form

$$\iota(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}_0, \dots, \bar{\mathbf{v}}_q) = (\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{u}_{(0)}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}_0), \mathbf{u}_{(1)}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}_0, \bar{\mathbf{v}}_1), \dots, \mathbf{u}_{(q)}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}_0, \dots, \bar{\mathbf{v}}_q))$$

hat. Insbesondere sind $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}_0, \dots, \bar{\mathbf{v}}_{q-r})$ lokale Koordinaten auf $\mathcal{R}_{q-r}^{(r)}$. Streng genommen ist $\mathcal{R}_{q-r}^{(r)} = J_{q-r}\pi$ keine Differentialgleichung im Sinn der Definition 2.3.1. Um später Fallunterscheidungen zu vermeiden, sprechen wir auch in diesem Spezialfall von einer (trivialen) Differentialgleichung der Ordnung $q - r \geq 0$.

Eine intrinsische Definition der *Prolongation* ist dagegen etwas verwickelt. Nach Proposition 2.1.4 ist $(J_q\pi, \pi^q, \mathcal{X})$ eine gefaserte Mannigfaltigkeit. Folglich können wir zu jeder natürlichen Zahl r das iterierte Jetbündel $J_r\pi^q = \{[\psi]_p^{(r)} \mid p \in \mathcal{X} \text{ und } \psi \in \Gamma_p(\pi^q)\}$ konstruieren. Dann ist $\iota_{q,r}: J_{q+r}\pi \hookrightarrow J_r\pi^q$ mit $\iota_{q,r}([\sigma]_p^{(q+r)}) = [j_q\sigma]_p^{(r)}$ die kanonische Einbettung mit der Eigenschaft $\iota_{q,r} \circ j_{q+r}\sigma = j_r(j_q\sigma)$ für alle $\sigma \in \Gamma_{\text{lok}}(\pi)$. Insbesondere ist $\iota_{q,r}(J_{q+r}\pi)$ eine gefaserte Untermannigfaltigkeit von $J_r\pi^q$. In Analogie dazu bilden wir das Jetbündel $J_r\hat{\pi}^q = \{[\bar{\sigma}]_p^{(r)} \mid p \in \mathcal{X} \text{ und } \bar{\sigma} \in \Gamma_p(\hat{\pi}^q)\}$ und betrachten die kanonische Einbettung $\hat{\iota}_{q,r}: J_r\hat{\pi}^q \hookrightarrow J_r\pi^q$ definiert durch $\hat{\iota}_{q,r}([\bar{\sigma}]_p^{(r)}) = [\iota \circ \bar{\sigma}]_p^{(r)}$. Dann ist $\hat{\iota}_{q,r}(J_r\hat{\pi}^q)$ ebenfalls eine gefaserte Untermannigfaltigkeit von $J_r\pi^q$.

Definition 2.3.3. Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine Differentialgleichung der Ordnung q und $r > 0$ eine natürliche Zahl. Die Teilmenge $\mathcal{R}_{q+r} := \iota_{q,r}^{-1}(\hat{\iota}_{q,r}(J_r\hat{\pi}^q) \cap \iota_{q,r}(J_{q+r}\pi)) \subset J_{q+r}\pi$ heißt *r-te Prolongation der Differentialgleichung \mathcal{R}_q nach $J_{q+r}\pi$* .

Wenn \mathcal{R}_q lokal durch Gleichungen $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = \mathbf{0}$ beschrieben wird, so entsteht eine lokale Repräsentation von $\mathcal{R}_{q+1} \subset J_{q+1}\pi$ dadurch, dass wir zu diesen Gleichungen alle Gleichungen hinzufügen, die wir durch Ableiten nach einer unabhängigen Variablen erhalten. Natürlich können wir diesen Vorgang beliebig oft wiederholen und so Gleichungen für $\mathcal{R}_{q+r} \subset J_{q+r}\pi$ produzieren. Dabei wird das Differenzieren einer glatten Funktion $\Psi \in \mathcal{F}(J_q\pi) = C^\infty(J_q\pi, \mathbb{R})$ mit lokaler Darstellung $\Psi = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ nach einer unabhängigen Variablen x^i durch die sogenannte *formale Ableitung* $D_i: \mathcal{F}(J_q\pi) \rightarrow \mathcal{F}(J_{q+1}\pi)$ beschrieben,

$$D_i \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q+1)}) = \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} u_{\mu+1_i}^\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial u_\mu^\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}),$$

die einfach die Kettenregel im Jetformalismus wiedergibt. Eine lokale Darstellung von \mathcal{R}_{q+r} ist

$$\mathcal{R}_{q+r} : \begin{cases} \Phi^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = 0, \\ D_\nu \Phi^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q+|\nu|)}) = 0, \end{cases} \quad 1 \leq \tau \leq t, 1 \leq |\nu| \leq r,$$

wobei $D_\nu = (D_1)^{\nu_1} \circ \dots \circ (D_n)^{\nu_n}$ die Hintereinanderausführung der Operatoren D_i bezeichnet. Die so entstandene Teilmenge $\mathcal{R}_{q+r} \subset J_{q+r}\pi$ ist im Allgemeinen *keine* Untermannigfaltigkeit von $J_{q+r}\pi$. Als Beispiel betrachten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\mathcal{R}_1 : \{ (u')^2 - u = 0. \}$$

Ihre erste Prolongation $\mathcal{R}_2 \subset J_2\pi$ wird durch die Gleichungen

$$\mathcal{R}_2 : \begin{cases} (u')^2 - u = 0, \\ u'(2u'' - 1) = 0 \end{cases}$$

beschrieben. Folglich liegt \mathcal{R}_2 in der Vereinigung von zwei Hyperebenen $u' = 0$ und $u'' = 1/2$. Anhand der zugehörigen Jacobi-Matrix bestätigt man sofort, dass die Teilmenge $\mathcal{R}_2 \subset J_2\pi$ in der Umgebung von $\rho = (x, 0, 0, 1/2) \in \mathcal{R}_2$ keine Untermannigfaltigkeit ist. Wir müssen an dieser Stelle zwei Differentialgleichungen separat untersuchen:

$$\bar{\mathcal{R}}_2 : \begin{cases} (u')^2 = u, \\ u' = 0, \\ u'' = 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{R}}_2 : \begin{cases} (u')^2 = u, \\ u'' = 1/2. \end{cases}$$

Im ersten Fall besteht der Lösungsraum aus der Nullfunktion $u(x) = 0$, im zweiten Fall aus der Familie $u(x) = 1/4x^2 + cx + c^2$ mit $c \in \mathbb{R}$. Es gilt $\text{Sol}(\bar{\mathcal{R}}_2) \cup \text{Sol}(\tilde{\mathcal{R}}_2) = \text{Sol}(\mathcal{R}_2) \subsetneq \mathcal{R}_2$.

Um verschiedene Formen singulären Verhaltens auszuschließen, gehen wir der Einfachheit halber davon aus, dass alle Prolongationen und Projektionen der in dieser Arbeit betrachteten Differentialgleichungen auf gefaserte Mannigfaltigkeiten führen. Solche Differentialgleichungen nennen wir *regulär*. Diese Voraussetzung ist nach geeigneter Einschränkung der Mannigfaltigkeit \mathcal{R}_q auf eine Teilmenge von \mathcal{R}_q stets erfüllt.

Beispiel 2.3.4. Auf den ersten Blick scheinen Prolongation und Projektion zueinander inverse Operationen zu sein; dem ist aber im Allgemeinen nicht so und eine Erklärung dieses Effekts führt automatisch zu dem geometrischen Bild von Integrabilitätsbedingungen. Wir betrachten ein System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\mathcal{R}_2 : \begin{cases} u_{xy} - u = 0, \\ u_{xx} - u_x = 0 \end{cases}$$

für eine unbekannte Funktion $u(x, y)$. Um die erste Prolongation $\mathcal{R}_3 \subset J_3\pi$ zu berechnen, müssen wir jede Gleichung nach x und y (formal) ableiten und erhalten das System

$$\mathcal{R}_3 : \begin{cases} u_{xy} - u = 0, & u_{xxy} - u_x = 0, & u_{xyy} - u_y = 0, \\ u_{xx} - u_x = 0, & u_{xxx} - u_{xx} = 0, & u_{xxy} - u_{xy} = 0. \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass die Differenz der Überkreuzableitungen $D_x(u_{xy} - u) - D_y(u_{xx} - u_x) = u_{xy} - u_x = 0$ eine „versteckte“ Gleichung zweiter Ordnung produziert. Wenn wir \mathcal{R}_3 zurückprojizieren nach $J_2\pi$, erhalten wir anstelle der Ausgangsgleichung \mathcal{R}_2 die Untermannigfaltigkeit $\mathcal{R}_2^{(1)} \subsetneq \mathcal{R}_2$ beschrieben durch die *drei* Gleichungen

$$\mathcal{R}_2^{(1)} : \begin{cases} u_{xy} - u = 0, \\ u_{xx} - u_x = 0, \\ u_{xy} - u_x = 0. \end{cases}$$

Wiederholte Prolongation mit anschließender Projektion führt uns zu den Gleichungen

$$\tilde{\mathcal{R}}_2 := \pi_2^3((\pi_2^3((\mathcal{R}_2^{(1)})_{+1}))_{+1}) : \begin{cases} u_{xy} - u = 0, & u_{xy} - u_y = 0, \\ u_{xx} - u_x = 0, & u_{yy} - u_y = 0, \\ u_{xy} - u_x = 0, & \end{cases}$$

Für die so gewonnene Differentialgleichung $\tilde{\mathcal{R}}_2$ gilt nach Konstruktion $\text{Sol}(\mathcal{R}_2) \subseteq \tilde{\mathcal{R}}_2 \subsetneq \mathcal{R}_2$. Wir erwähnten bereits, dass die lokale Repräsentation einer Differentialgleichung nicht eindeutig ist. Ein Übergang zu einer anderen Repräsentation kann häufig das System vereinfachen. An der Darstellung

$$\tilde{\mathcal{R}}_2 : \begin{cases} D_x(u_x - u) = 0, & D_y(u_y - u) = 0, \\ D_y(u_x - u) = 0, & u_x - u = 0, \\ D_x(u_y - u) = 0, & u_y - u = 0 \end{cases}$$

erkennt man sofort, dass das System $\tilde{\mathcal{R}}_2 = (\tilde{\mathcal{R}}_1)_{+1}$ in der Tat die erste Prolongation eines inhomogenen linearen Systems erster Ordnung ist:

$$\tilde{\mathcal{R}}_1 : \begin{cases} u_x - u = 0, \\ u_y - u = 0. \end{cases}$$

Insbesondere haben \mathcal{R}_2 und $\tilde{\mathcal{R}}_1$ denselben Lösungsraum $\Theta \subset \Gamma_{lok}(\pi)$. Man bestätigt leicht, dass die $(r-1)$ -te Prolongation von $\tilde{\mathcal{R}}_1$ nach $J_r\pi$ durch die Gleichungen

$$\tilde{\mathcal{R}}_r : \left\{ u_\mu - u = 0, \quad 1 \leq |\mu| \leq r \right. \quad (2.5)$$

beschrieben wird und es gilt $\tilde{\mathcal{R}}_r = \tilde{\mathcal{R}}_r^{(s)}$ für alle $r, s \geq 1$. Ausgehend von dieser Repräsentation von $\tilde{\mathcal{R}}_r$ ist es besonders leicht formale Potenzreihenlösungen zu konstruieren. Wir wählen einen beliebigen Entwicklungspunkt $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ und machen den üblichen Ansatz für eine formale Potenzreihenlösung um (\hat{x}, \hat{y}) :

$$u(x, y) = \sum_{|\mu|=0}^{\infty} a_{(\mu_1, \mu_2)} \frac{(x - \hat{x})^{\mu_1} (y - \hat{y})^{\mu_2}}{\mu_1! \mu_2!}$$

mit reellen Koeffizienten $a_\mu = a_{(\mu_1, \mu_2)} \in \mathbb{R}$. Da wir weder Anfangs- noch Randbedingungen vorgegeben haben, dürfen wir keine eindeutige Lösung erwarten. Wir können aber Relationen zwischen den Koeffizienten a_μ angeben. Dazu setzen wir unseren Ansatz in die Darstellung (2.5) ein und werten die entstehenden Gleichungen am Entwicklungspunkt (\hat{x}, \hat{y}) aus. Wir erhalten $a_{(\mu_1, \mu_2)} - a_{(0,0)} = 0$ für alle $|\mu| \geq 1$. Dementsprechend ist

$$u(x, y) = a_{(0,0)} \cdot \sum_{|\mu|=0}^{\infty} \frac{(x - \hat{x})^{\mu_1} (y - \hat{y})^{\mu_2}}{\mu_1! \mu_2!} = a_{(0,0)} e^{-\hat{x}-\hat{y}} e^{x+y} \in \Theta$$

eine (überall konvergente) formale Potenzreihenlösung von $\tilde{\mathcal{R}}_1$. Insbesondere ist $\tilde{\mathcal{R}}_r \subset J_r\pi$ eine lokal lösbare Differentialgleichung der Ordnung $r \geq 1$. \triangleleft

Versteckte Integritätsbedingungen gibt es genau dann, wenn für irgendeine Prolongationsordnung $r \geq 0$ gilt, dass eine weitere Prolongation mit nachfolgender Projektion zu einer echten Untermannigfaltigkeit führt, in Zeichen $\mathcal{R}_{q+r}^{(1)} \subsetneq \mathcal{R}_{q+r}$.

Definition 2.3.5. Eine reguläre Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ der Ordnung q heißt *formal integrabel*, wenn für alle ganzen Zahlen $r \geq 0$ gilt $\mathcal{R}_{q+r}^{(1)} = \mathcal{R}_{q+r}$.

Man beachte, dass die Integrabilitätsbedingungen für partielle Differentialgleichungen von höherer Ordnung als das Ausgangssystem sein können, siehe Beispiel 5.2.4. Die systematische Suche nach Integrabilitätsbedingungen wird *Vervollständigung* genannt. Die Bezeichnung „formal integrabel“ rührt daher, dass für ein formal integrables System formale Potenzreihenlösungen systematisch Ordnung für Ordnung konstruiert werden können. Daher gilt für analytische, formal integrable Systeme ein sehr allgemeiner Existenzsatz (*Cartan-Kähler-Theorem*), da dann die Konvergenz der formalen Potenzreihenlösungen gezeigt werden kann. Solange wir nur formale Potenzreihenlösungen betrachten, gibt es somit keinen Unterschied zwischen der formalen Integrabilität und der lokalen Lösbarkeit.

2.4 Symbol

Die Einführung des Symbols wird durch den Wunsch motiviert, bestimmte Eigenschaften von Differentialgleichungen an den Gleichungen höchster Ordnung abzulesen.

Definition 2.4.1. Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine Differentialgleichung und $\rho \in \mathcal{R}_q$ ein Punkt. Der Untervektorraum $(\mathcal{N}_q)_\rho \subset T_\rho\mathcal{R}_q$, implizit definiert durch $T_{\rho\iota}((\mathcal{N}_q)_\rho) = T_{\rho\iota}(T_\rho\mathcal{R}_q) \cap V_\rho\pi_{q-1}^q$, heißt (*geometrisches*) *Symbol der Differentialgleichung \mathcal{R}_q im Punkt ρ* . Die disjunkte Vereinigung dieser Vektorräume

$$\mathcal{N}_q = \bigcup_{\rho \in \mathcal{R}_q} \{\rho\} \times (\mathcal{N}_q)_\rho \subset T\mathcal{R}_q$$

heißt (*geometrisches*) *Symbol der Differentialgleichung \mathcal{R}_q* .

Definitionsgemäß ist $\mathcal{N}_q = V\hat{\pi}_{q-1}^q$ der zur Projektion $\hat{\pi}_{q-1}^q$ vertikale Anteil des Tangentialbündels $T\mathcal{R}_q$. In lokalen Koordinaten $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}; \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{u}}^{(q)})$ auf $TJ_q\pi$ erhalten wir folgendes Bild: Ein vertikaler Vektor $\mathbf{v} \in V_\rho\pi_{q-1}^q$ an einem Punkt $\rho \in \mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ ist von der Form

$$\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} \dot{u}_\mu^\alpha \partial_{u_\mu^\alpha}$$

mit reellen Koeffizienten $\dot{u}_\mu^\alpha \in \mathbb{R}$. Wird \mathcal{R}_q lokal durch Gleichungen $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = \mathbf{0}$ beschrieben, so ist \mathbf{v} genau dann tangential zu $\iota(\mathcal{R}_q) = \mathcal{R}_q$, d.h. $\mathbf{v} \in T_{\rho\iota}((\mathcal{N}_q)_\rho)$, wenn seine Koeffizienten \dot{u}_μ^α das homogene lineare Gleichungssystem

$$\sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} \frac{\partial \Phi^\tau}{\partial u_\mu^\alpha}(\rho) \dot{u}_\mu^\alpha = 0, \quad 1 \leq \tau \leq t$$

erfüllen. Die zugehörige Matrix nennen wir *Symbolmatrix* $M_q(\rho)$, sie besitzt eine Zeile für jede Gleichung $\Phi^\tau = 0$ und eine Spalte für jede Ableitung u_μ^α der Ordnung q . Hängt eine Gleichung $\Phi^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q-1)}) = 0$ nicht von $\mathbf{u}_{(q)}$ ab, so ist sie irrelevant für die Berechnung des Symbols und wird aus der Betrachtung herausgenommen. Der Rang der so definierten Distribution \mathcal{N}_q ,

$$\dim(\mathcal{N}_q)_\rho = m \binom{n+q-1}{q} - \text{rang } M_q(\rho),$$

hängt im Allgemeinen vom betrachteten Punkt $\rho \in \mathcal{R}_q$ ab. Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass dies nicht der Fall ist und verzichten sogleich auf die explizite Angabe von ρ in der Notation der zugehörigen Symbolmatrix $M_q = M_q(\rho)$. Ist der Rang des Symbols Null, so sprechen wir von einer *Differentialgleichung vom endlichen Typ*, da ihr formaler

Lösungsraum endlich dimensional ist. Die in Beispiel 2.3.4 betrachtete Differentialgleichung $\tilde{\mathcal{R}}_r$ ist beispielsweise vom endlichen Typ. Wenn wir die Differentialgleichung \mathcal{R}_q prolongieren, dann besitzt auch jede der erhaltenen Differentialgleichungen \mathcal{R}_{q+r} ein Symbol \mathcal{N}_{q+r} . Seine Dimension gibt die Anzahl der frei wählbaren Taylorkoeffizienten der Ordnung $q+r$ eines Potenzreihenansatzes an.

Zum Nachweis der formalen Integrabilität müssen definitionsgemäß unendlich viele Bedingungen überprüft werden. Es ist daher unklar, wie wir effektiv feststellen sollen, dass eine gegebene Differentialgleichung formal integrabel ist. Aus diesem Grund wird in der formalen Theorie das starke Konzept der *Involution* eingeführt. Der Begriff einer involutiven Differentialgleichung basiert auf den algebraischen Eigenschaften des Symbols bzw. der Symbolmatrix. Wir begnügen uns hier mit einem rechnerischen Zugang. Zu diesem Zweck ordnen wir die Spalten, indiziert durch \dot{u}_μ^α , der Symbolmatrix M_q absteigend nach ihrer Klasse an. Die Klasse $\text{cl } \mu := \min\{i \mid \mu_i > 0\}$ eines Multiindex $\mu \neq (0, \dots, 0)$ entspricht dabei dem Index des ersten nichtverschwindenden Eintrages von $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Verallgemeinernd ordnen wir jedem Objekt (z.B. Jetvariablen u_μ^α , Zeilen oder Spalten, Pivotelemente), das durch μ indiziert ist, die Klasse $\text{cl } \mu$ zu. Eine mögliche Sortierung der Spalten von M_q ist gegeben durch die Umkehrung der in (2.2) beschriebenen Totalordnung. Anschließend bringen wir die Symbolmatrix M_q auf die Zeilenstufenform. Mit $\beta_q^{(k)}$ bezeichnen wir die Anzahl der Zeilen in M_q , deren Pivotelemente von der Klasse k sind, und weisen jeder solchen Zeile ihre *multiplikativen Variablen* x^1, \dots, x^k zu. Mit Hilfe der formalen Ableitung bestätigt man leicht, dass die Prolongation jeder Gleichung bezüglich ihrer multiplikativen Variablen zu (funktional) unabhängigen Gleichungen der Ordnung $q+1$ führt. Daher gilt

$$|\{\text{multiplikative Variablen von } M_q\}| = \sum_{k=1}^n k\beta_q^{(k)} \leq \text{rang } M_{q+1}.$$

Die Konstruktion der *Indizes* $\beta_q^{(k)}$ scheint wesentlich von den gewählten Koordinaten \mathbf{x} abzuhängen. Man kann aber zeigen, dass man nach einer *generischen* Koordinatentransformation immer dasselbe Ergebnis erhält. Diese Beobachtung motiviert folgende Begriffsbildung.

Definition 2.4.2. Das Symbol \mathcal{N}_q einer Differentialgleichung \mathcal{R}_q heißt *involutiv*, wenn gilt

$$\text{rang } M_{q+1} = \sum_{k=1}^n k\beta_q^{(k)}. \quad (2.6)$$

Eine formal integrable Differentialgleichung \mathcal{R}_q heißt *involutiv*, wenn ihr Symbol involutiv ist.

Es stellt sich heraus, dass eine Differentialgleichung $\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_q^{(1)}$ genau dann involutiv ist, wenn (2.6) gilt. Das *Cartan-Kuranishi-Theorem* garantiert zudem, dass jede konsistente Differentialgleichung durch endlich viele Prolongationen und Projektionen in ein lösungsäquivalentes, involutives System überführt werden kann.

2.5 Vessiot-Distribution

Nach Definition der Kontaktdistribution $\mathcal{C}_q \subseteq TJ_q\pi$ liegt der Tangentialraum $T_\rho(\text{im } j_q\sigma)$ jedes prolongierten Schnittes $\sigma \in \Gamma_{\text{lok}}(\pi)$ mit $\rho \in \text{im } j_q\sigma$ in $(\mathcal{C}_q)_\rho$. Insbesondere ist $\text{im } j_q\sigma \subset J_q\pi$ eine Integralmannigfaltigkeit der Kontaktdistribution \mathcal{C}_q . Ist $\sigma \in \Theta$ zusätzlich eine Lösung der Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$, so liegt $T_\rho(\text{im } j_q\sigma)$ im Tangentialraum $T_\rho\mathcal{R}_q$. Beide Inklusionen ergeben zusammen $T_\rho(\text{im } j_q\sigma) \subseteq T_\rho\mathcal{R}_q \cap (\mathcal{C}_q)_\rho$. Diese Beobachtung ist Grundlage der folgenden Definition.

Definition 2.5.1. Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine Differentialgleichung und $\iota: \mathcal{R}_q \hookrightarrow J_q\pi$ die zugehörige Inklusionsabbildung. Die *Vessiot-Distribution* $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] \subseteq T\mathcal{R}_q$ ist implizit definiert durch

$$T\iota(\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]) = T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap \mathcal{C}_q|_{\iota(\mathcal{R}_q)}. \quad (2.7)$$

Nach E. Vessiot benannt, folgen wir der Namensgebung durch Fackerell [12] und Vassiliou [36]. Vor allem in der russischen Literatur wie z.B. Vinogradov *et al.* [18], Kruglikov und Lychagin [19] spricht man häufig von der *Cartan-Distribution*. Da die Inklusionsabbildung $\iota: \mathcal{R}_q \hookrightarrow J_q\pi$ eine injektive Immersion ist, ist die Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] \subseteq T\mathcal{R}_q$ durch (2.7) eindeutig bestimmt. Als Durchschnitt zweier glatten Distributionen auf einer *regulären* Untermannigfaltigkeit ist die Vessiot-Distribution dann glatt, wenn sie auf jeder Zusammenhangskomponente von \mathcal{R}_q konstanten Rang hat. Üblicherweise wird $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ mit Hilfe des Pullbacks von Kontaktformen eingeführt.

Proposition 2.5.2. Für die Vessiot-Distribution gilt $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] = (\iota^*C_q^0)^0$.

Es sei $\iota(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}) = (\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{u}^{(q)}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}))$ eine Koordinatendarstellung der Einbettung $\iota: \mathcal{R}_q \hookrightarrow J_q\pi$ in lokalen Koordinaten $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})$ auf \mathcal{R}_q . Bezeichnet d die Faserdimension von \mathcal{R}_q , so ist der Pullback einer Kontaktform $\omega_\mu^\alpha \in C_q^0$ gegeben durch

$$\iota^*\omega_\mu^\alpha = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u_\mu^\alpha}{\partial \bar{x}^j}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}) - \sum_{i=1}^n u_{\mu+1_i}^\alpha(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}) \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}(\bar{\mathbf{x}}) \right) d\bar{x}^j + \sum_{k=1}^d \frac{\partial u_\mu^\alpha}{\partial \bar{v}^k}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}) d\bar{v}^k \in \iota^*C_q^0.$$

Falls die Vessiot-Distribution glatt ist, dann liegt ein Vektorfeld $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_q)$ mit Darstellung

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n a^i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}) \partial_{\bar{x}^i} + \sum_{k=1}^d b^k(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}) \partial_{\bar{v}^k}$$

genau dann in der Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$, wenn für alle Koordinatenindizes $1 \leq \alpha \leq m$ und alle Multiindizes μ mit $0 \leq |\mu| < q$ gilt $(\iota^*\omega_\mu^\alpha)(\bar{X}) = 0$. Ist die Vessiot-Distribution nicht glatt in $\rho \in \mathcal{R}_q$, dann liegt ein Vektor $\bar{\mathbf{v}} \in T_\rho\mathcal{R}_q$ genau dann in $\mathcal{V}_\rho[\mathcal{R}_q]$, wenn die Linearformen $(\iota^*\omega_\mu^\alpha)_\rho \in T_\rho^*\mathcal{R}_q$ bei Auswertung in $\bar{\mathbf{v}}$ verschwinden.

In der Praxis ist es oftmals schwierig eine (globale) Parametrisierung ι von \mathcal{R}_q zu finden. Besonders bei voll nichtlinearen Differentialgleichungen empfiehlt es sich die Berechnung der Vessiot-Distribution $T\iota(\mathcal{V}[\mathcal{R}_q])$ in lokalen Koordinaten $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}; \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{u}}^{(q)})$ auf $TJ_q\pi$ durchzuführen. Nach Proposition 2.2.2 besitzt jedes Kontaktvektorfeld $\iota_*\bar{X} \in \mathcal{C}_q|_{\iota(\mathcal{R}_q)}$ die Form

$$\iota_*\bar{X} = \sum_{i=1}^n a^i C_i^{(q)} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} b_\mu^\alpha C_\mu^\alpha$$

mit Koeffizientenfunktionen $a^i, b_\mu^\alpha \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_q)$. Wird \mathcal{R}_q lokal durch Gleichungen $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = \mathbf{0}$ beschrieben, so folgt aus $\iota_*\bar{X} \in T\iota(T\mathcal{R}_q)$ unmittelbar, dass die Koeffizienten a^i, b_μ^α des Ansatzes für $\iota_*\bar{X}$ das homogene lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^n C_i^{(q)}(\Phi^\tau) a^i + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} C_\mu^\alpha(\Phi^\tau) b_\mu^\alpha = 0, \quad 1 \leq \tau \leq t \quad (2.8)$$

erfüllen. Wir können dieses System nach gewissen Koeffizienten b_μ^α auflösen und das Ergebnis in unseren Ansatz für $\iota_*\bar{X}$ einsetzen. Im Speziellen gilt $\iota_*\bar{X} \in T\iota(\mathcal{N}_q)$, wenn die Koeffizienten a^i verschwinden. Ist die Vessiot-Distribution nicht glatt in $\rho \in \mathcal{R}_q \subset J_q\pi$, dann wird das obige Gleichungssystem (2.8) punktweise ausgewertet.

Beispiel 2.5.3. Wir betrachten ein parameterabhängiges System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung für eine unbekannte Funktion $u(x, y)$:

$$\mathcal{R}_2 : \begin{cases} u_{xx} - \alpha u = 0, \\ u_{yy} - \beta u = 0 \end{cases}$$

mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Da die Gleichungen der angegebenen Repräsentation von $\mathcal{R}_2 \subset J_2\pi$ nach den höchsten Ableitungen direkt auflösbar sind, liegt es nahe \mathcal{R}_2 durch $\iota(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_{xy}) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y, \alpha\bar{u}, \bar{u}_{xy}, \beta\bar{u})$ zu parametrisieren. In globalen Koordinaten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_{xy})$ auf \mathcal{R}_2 finden wir

$$\begin{aligned} \iota^*(du_x - u_{xx}dx - u_{xy}dy) &= d\bar{u}_x - \alpha\bar{u}d\bar{x} - \bar{u}_{xy}d\bar{y}, \\ \iota^*(du_y - u_{xy}dx - u_{yy}dy) &= d\bar{u}_y - \bar{u}_{xy}d\bar{x} - \beta\bar{u}d\bar{y}, \\ \iota^*(du - u_xdx - u_ydy) &= d\bar{u} - \bar{u}_xd\bar{x} - \bar{u}_y d\bar{y}. \end{aligned}$$

Die zugehörige Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_2] = (\iota^*\mathcal{C}_2^0)^0$ wird durch die drei Vektorfelder

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \partial_{\bar{x}} + \bar{u}_x\partial_{\bar{u}} + \alpha\bar{u}\partial_{\bar{u}_x} + \bar{u}_{xy}\partial_{\bar{u}_y}, \\ \bar{X}_2 &= \partial_{\bar{y}} + \bar{u}_y\partial_{\bar{u}} + \bar{u}_{xy}\partial_{\bar{u}_x} + \beta\bar{u}\partial_{\bar{u}_y}, \\ \bar{Y} &= \partial_{\bar{u}_{xy}} \end{aligned}$$

aufgespannt, wobei das vertikale Vektorfeld \bar{Y} das Symbol $\mathcal{N}_2 = V\hat{\pi}_1^2 = \langle \bar{Y} \rangle$ erzeugt. Zur Berechnung der Vessiot-Distribution $T\iota(\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]) \subset TJ_2\pi$ machen wir alternativ den Ansatz

$$\iota_*\bar{X} = a^1\mathcal{C}_x^{(2)} + a^2\mathcal{C}_y^{(2)} + b^1\partial_{u_{xx}} + b^2\partial_{u_{xy}} + b^3\partial_{u_{yy}}$$

mit Koeffizienten $a^1, a^2, b^1, b^2, b^3 \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_2)$. Das lineare Gleichungssystem (2.8) liefert

$$\begin{aligned} b^1 &= \alpha u_x a^1 + \alpha u_y a^2, \\ b^3 &= \beta u_x a^1 + \beta u_y a^2. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieser Relationen in unseren Ansatz erhalten wir

$$\iota_*\bar{X} = a^1 \left(\mathcal{C}_x^{(2)} + \alpha u_x \partial_{u_{xx}} + \beta u_x \partial_{u_{yy}} \right) + a^2 \left(\mathcal{C}_y^{(2)} + \alpha u_y \partial_{u_{xx}} + \beta u_y \partial_{u_{yy}} \right) + b^2 \partial_{u_{xy}}.$$

Insbesondere wird $T\iota(\mathcal{V}[\mathcal{R}_2])$, als $\mathcal{F}(\mathcal{R}_2)$ -Modul betrachtet, durch die Vektorfelder

$$\begin{aligned} \iota_*\bar{X}_1 &= \mathcal{C}_x^{(2)} + \alpha u_x \partial_{u_{xx}} + \beta u_x \partial_{u_{yy}}, \\ \iota_*\bar{X}_2 &= \mathcal{C}_y^{(2)} + \alpha u_y \partial_{u_{xx}} + \beta u_y \partial_{u_{yy}}, \\ \iota_*\bar{Y} &= \partial_{u_{xy}} \end{aligned}$$

aufgespannt und es gilt $T\iota(\mathcal{N}_2) = \langle \iota_*\bar{Y} \rangle$. Der Vollständigkeit halber bemerken wir, dass das System \mathcal{R}_2 formal integrabel ist. Mittels des *Cartan-Tests* (2.6) bestätigt man leicht, dass das Symbol \mathcal{N}_3 involutiv ist und es gilt $\mathcal{R}_2^{(1)} = \mathcal{R}_2$ sowie $\mathcal{R}_3^{(1)} = \mathcal{R}_3$. \triangleleft

In der Regel ist die Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ nicht involutiv. Ausnahmen von dieser Regel stellen reguläre gewöhnliche nicht unterbestimmte Differentialgleichungen und partielle formal integrable Differentialgleichungen vom endlichen Typ dar. Als Folge von Korollar 2.2.3 zerfällt die Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ lokal in zwei Subdistributionen $\mathcal{H} \oplus \mathcal{N}_q$, wobei das $\hat{\pi}^q$ -transversale Komplement \mathcal{H} nicht eindeutig bestimmt ist. Generell können beide Subdistributionen \mathcal{H} und \mathcal{N}_q singular sein. Gilt $\dim \mathcal{H}_\rho < \dim \mathcal{X} = n$ in einem Punkt $\rho \in \mathcal{R}_q$, so

enthält die Äquivalenzklasse $\rho = [\sigma]_p^{(q)}$ keine Lösung von \mathcal{R}_q . Man kann zeigen, dass ein $\hat{\pi}^q$ -transversales Komplement \mathcal{H} genau dann n -dimensional ist, wenn es keine Integrabilitätsbedingungen in \mathcal{R}_q gibt, die durch Prolongation von Gleichungen niedriger Ordnung als q entstehen. Solche Bedingungen werden Integrabilitätsbedingungen *erster Art* genannt.

Die nächste Proposition zeigt, dass die Lösungen einer Differentialgleichung mit speziellen involutiven Subdistributionen der Vessiot-Distribution korrespondieren.

Proposition 2.5.4. Es sei $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine Differentialgleichung der Ordnung $q \geq 1$. Dann gilt:

- (i) Zu jeder Lösung $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$ von \mathcal{R}_q ist das Tangentialbündel $T(\text{im } j_q\sigma) \subseteq T\mathcal{R}_q$ eine n -dimensionale $\hat{\pi}^q$ -transversale involutive Subdistribution von $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]|_{\text{im } j_q\sigma}$.
- (ii) Jede Integralmannigfaltigkeit einer n -dimensionalen $\hat{\pi}^q$ -transversalen involutiven Subdistribution $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ besitzt lokal die Form $\text{im } j_q\sigma$ für eine Lösung $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$ von \mathcal{R}_q .

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus der Definition der Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ und der Tatsache, dass $\text{im } j_q\sigma$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathcal{R}_q ist. Die zweite Aussage ergibt sich leicht aus dem Theorem von Frobenius, siehe Abraham *et al.* [1, Theorem 4.4.7], und Proposition 2.2.2. \square

Dieses Ergebnis stellt den geometrischen Zugang zur Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen dar, siehe Fesser [13]. Die Hauptidee besteht hier darin, alle $\hat{\pi}^q$ -transversalen involutiven Subdistributionen $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ der Dimension $n = \dim \mathcal{X}$ schrittweise zu konstruieren. Zusammenfassend halten wir fest, dass alle relevanten Informationen über die Struktur des Lösungsraumes in den Eigenschaften der Vessiot-Distribution kodiert sind.

Kapitel 3

Geometrische Symmetrien

Die umfassendste Umschreibung des Symmetriebegriffs einer Differentialgleichung lautet wie folgt: Symmetrien sind Vorschriften, die (einige) Lösungen in (andere) Lösungen überführen. Bei dieser vagen Beschreibung ist zunächst offen, welche Art von Abbildungen bzw. Lösungen betrachtet werden. Es werden je nach Ansatz unterschiedliche Symmetriekonzepte eingeführt und untersucht: *Punktsymmetrien*, *Kontaktsymmetrien*, *innere Symmetrien*, *verallgemeinerte Symmetrien* etc. Im vorliegenden Kapitel wollen wir *Symmetrien von Distributionen* ausführlich beschreiben. Die zugrundeliegende geometrische Theorie ist eine Verallgemeinerung der klassischen Symmetriekonzepte. Sie ermöglicht in natürlicher Weise den Einsatz geometrischer Methoden, die zu einem tieferen Verständnis der oben aufgezählten Symmetriearten beitragen.

3.1 Distributionen und Kodistributionen

Unter einer *Distribution* auf einer glatten Mannigfaltigkeit \mathcal{M} verstehen wir eine Vorschrift $\mathcal{D}: \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ mit der Eigenschaft $\tau_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{D} = \text{id}_{\mathcal{M}}$, die jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ einen linearen Untervektorraum \mathcal{D}_p des Tangentialraumes $T_p\mathcal{M}$ zuordnet. Zwecks einfacher Notation identifizieren wir die Abbildung \mathcal{D} mit ihrem Bild im \mathcal{D} und schreiben

$$\mathcal{D} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \{p\} \times \mathcal{D}_p \subseteq T\mathcal{M}.$$

Wird eine Distribution $\mathcal{D} \subseteq T\mathcal{M}$ lokal von glatten Vektorfeldern aufgespannt, so sprechen wir von einer *glatten* Distribution. Etwas präziser formuliert, betrachten wir die Menge $\mathfrak{X}_{\mathcal{D}}$ aller lokalen Schnitte $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) = \Gamma_{\text{lok}}(\tau_{\mathcal{M}})$ mit der Eigenschaft $X_p \in \mathcal{D}_p$ für alle Punkte p des Definitionsbereichs von X und nennen \mathcal{D} *glatt*, wenn $\mathcal{D}_p = \langle \{X_p \mid X \in \mathfrak{X}_{\mathcal{D}}\} \rangle$ für alle Punkte $p \in \mathcal{M}$ gilt. Diese Definition impliziert nicht, dass alle Untervektorräume $\mathcal{D}_p \subseteq T_p\mathcal{M}$ die gleiche Dimension besitzen, wie es oft gefordert wird. Ein einfaches Gegenbeispiel ist eine glatte Distribution, welche von einem global definierten Vektorfeld mit Nullstellen erzeugt wird. Wenn im Folgenden von einer Distribution gesprochen wird, ist immer eine glatte Distribution gemeint, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird. Im Allgemeinen hängt die Dimension $\dim \mathcal{D}_p$ vom betrachteten Punkt $p \in \mathcal{M}$ ab. Falls die Rangabbildung $p \mapsto \dim \mathcal{D}_p$ konstant ist, so sprechen wir von einer *regulären* Distribution *vom konstanten Rang*, anderenfalls nennen wir \mathcal{D} *singulär*. Selbst wenn eine glatte Distribution konstanten Rang r hat, können wir nicht automatisch davon ausgehen, dass sie *global* durch r linear unabhängige Vektorfelder aufgespannt werden kann. Hierfür müssen zusätzlich bestimmte topologische Bedingungen erfüllt sein, welche die lineare Unabhängigkeit der betreffenden Vektorfelder garantieren. Lokal ist es hingegen immer möglich, Vektorfelder $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}_{\mathcal{D}} \cap \Gamma_U(\tau_{\mathcal{M}})$ zu wählen mit $\mathcal{D} = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$ auf $U \subseteq \mathcal{M}$, wobei U eine hinreichend kleine offene Menge ist.

Bemerkung 3.1.1. Wir wollen auf glatten Distributionen eine außerordentlich fruchtbare algebraische Struktur einführen: Die punktale Darstellung $\mathcal{D}_p = \langle \{X_p \mid X \in \mathfrak{X}_{\mathcal{D}} \cap \Gamma_p(\tau_{\mathcal{M}})\} \rangle$ und die elementare Tatsache, dass lokal definierte Vektorfelder auf ganz \mathcal{M} trivial fortgesetzt werden können, legen nahe, dass der Vektorraum $\mathfrak{X}_{\mathcal{D}} \cap \Gamma_{\mathcal{M}}(\tau_{\mathcal{M}}) = \mathcal{D}$ die Struktur eines $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -Moduls besitzt. Zu jedem lokalen Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}_{\mathcal{D}} \cap \Gamma_p(\tau_{\mathcal{M}})$ finden wir eine glatte Funktion $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ mit kompaktem Träger, sodass $fX \in \mathfrak{X}_{\mathcal{D}} \cap \Gamma_{\mathcal{M}}(\tau_{\mathcal{M}})$ global definiert ist und $X|_U = fX|_U$ gilt, wobei $U \subset \text{supp } f \subseteq \mathcal{M}$ eine hinreichend kleine Umgebung von p ist. Aus diesem Grund kann jede glatte Distribution \mathcal{D} als ein $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -Modul verstanden werden. Jede beliebige Linearkombination $fX + gY$ zweier Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{D}} \cap \Gamma_{\mathcal{M}}(\tau_{\mathcal{M}}) = \mathcal{D}$ mit $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ liegt vollständig in \mathcal{D} . Umgekehrt definiert jedes $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -Modul $\mathfrak{M} \subseteq \Gamma_{\mathcal{M}}(\tau_{\mathcal{M}})$ eine glatte Distribution $\mathcal{D}_p := \langle \{X_p \mid X \in \mathfrak{M}\} \rangle = \{X_p \mid X \in \mathfrak{M}\}$. Wenn der Kontext Verwechslungen mit dem Tangentialbündel $T\mathcal{M}$ als eine 2 dim \mathcal{M} -dimensionale Mannigfaltigkeit ausschließt, identifizieren wir die Distribution $T\mathcal{M}: p \mapsto \{p\} \times T_p\mathcal{M}$ mit dem $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -Modul $\Gamma_{\mathcal{M}}(\tau_{\mathcal{M}})$. \triangleleft

Auf ähnliche Weise werden *Kodistributionen* $\Gamma \subseteq T^*\mathcal{M}$ auf \mathcal{M} eingeführt. Es handelt sich um eine Vorschrift $\Gamma: \mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}$ mit der Eigenschaft $\tau_{\mathcal{M}}^* \circ \Gamma = \text{id}_{\mathcal{M}}$, die jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ einen linearen Untervektorraum Γ_p des Kotangentialraumes $T_p^*\mathcal{M}$ zuordnet. In Analogie zu Distributionen identifizieren wir die Abbildung Γ mit ihrem Bild im Γ und schreiben

$$\Gamma = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \{p\} \times \Gamma_p \subseteq T^*\mathcal{M}.$$

Es ist naheliegend, eine Kodistribution *glatt* zu nennen, wenn sie *lokal* durch Einsformen erzeugt werden kann. Insbesondere besitzt jede glatte Kodistribution die Struktur eines $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -Moduls. Wird eine glatte Kodistribution Γ vom Rang r von Einsformen $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\tau_{\mathcal{M}}^*)$ aufgespannt, so heißt sie klassisch *Pfaffsches System*.

Distributionen und Kodistributionen sind dual zueinander. Die zugehörige Korrespondenz wird durch Annihilatoren vermittelt. Zu jeder Distribution \mathcal{D} gehört eine duale Kodistribution \mathcal{D}^0 , welche *punktweise* durch

$$\mathcal{D}_p^0 := \{\omega_p \in T_p^*\mathcal{M} \mid \omega_p(\mathcal{D}_p) = 0\}$$

definiert ist. Auch umgekehrt können wir jeder Kodistribution Γ eine duale Distribution via

$$\Gamma_p^0 := \{X_p \in T_p\mathcal{M} \mid \Gamma_p(X_p) = 0\}$$

zuordnen. Allgemein gilt $\mathcal{D} = (\mathcal{D}^0)^0$ und $\Gamma = (\Gamma^0)^0$. Zwischen Distributionen und ihren Annihilatoren gelten einige interessante Beziehungen: Die Summe der Dimensionen von \mathcal{D}_p und \mathcal{D}_p^0 ist stets $\dim \mathcal{M}$. Sie hängt insbesondere nicht vom gewählten Punkt $p \in \mathcal{M}$ ab. Ferner gilt $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$ nur dann, wenn $\mathcal{D}_1^0 \supseteq \mathcal{D}_2^0$ gilt. Schließlich ist der Annihilator des Durchschnittes zweier Distributionen $(\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2)^0$ gleich der Summe der Annihilatoren $\mathcal{D}_1^0 + \mathcal{D}_2^0$. Eine weitere ähnliche Formel ist $(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)^0 = \mathcal{D}_1^0 \cap \mathcal{D}_2^0$. Man beachte aber, dass der Annihilator einer *glatten* (Ko-)Distribution im Allgemeinen *nicht* glatt ist, siehe Beispiel 3.2.2.

Dieser Ansatz erlaubt sofort in natürlicher Weise Symmetrien von (Ko-)Distributionen zu definieren. Grundlage sind zwei fundamentale Operatoren: Pushforward und Pullback.

Definition 3.1.2. Es seien \mathcal{M} eine Mannigfaltigkeit und \mathcal{D} (Γ) eine (Ko-)Distribution auf \mathcal{M} . Ein lokaler Diffeomorphismus $\phi: U \subseteq \mathcal{M} \rightarrow V \subseteq \mathcal{M}$ heißt *geometrische Symmetrie von \mathcal{D} (Γ)*, wenn für alle Punkte $p \in U$ gilt $T_p\phi(\mathcal{D}_p) = \mathcal{D}_{\phi(p)}$ ($T_p^*\phi(\Gamma_{\phi(p)}) = \Gamma_p$).

Um die Notation nicht übermäßig aufzublähen, werden wir darauf verzichten, solche Umgebungen explizit anzugeben und immer eine globale Schreibweise $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ benutzen

mit $T\phi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ bzw. $T^*\phi(\Gamma) = \Gamma$. Damit sind aber keine globalen Aussagen verbunden. Insbesondere besitzt nicht jede lokal definierte geometrische Symmetrie eine globale Fortsetzung auf ganz \mathcal{M} . Die Voraussetzungen in der obigen Definition sind durch den Wunsch motiviert, dass mit ϕ auch die Umkehrabbildung ϕ^{-1} eine geometrische Symmetrie von \mathcal{D} bzw. Γ ist. Man bestätigt leicht, dass die Menge der geometrischen Symmetrien eine Lie-Pseudogruppe bildet, die wir im distributionellen Fall mit $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D}) = \{\phi \in \text{Diff}_{lok}(\mathcal{M}) \mid T\phi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}\}$ bezeichnen. Die Identität id_U ist offenbar stets eine geometrische Symmetrie. Die Hintereinanderausführung zweier geometrischen Symmetrien ist nach eventueller Einschränkung der Definitionsbereiche wieder eine geometrische Symmetrie. Es gilt $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D}) = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \Gamma_p(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ mit $\Gamma_p(\mathcal{M}, \mathcal{D}) := \{\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D}) \mid p \in \text{dom } \phi\}$, wobei sich diese Teilmengen von Punkt zu Punkt sehr stark unterscheiden können. Man beachte weiter, dass in diesem geometrischen Zugang nicht zwischen einer regulären und einer singulären (Ko-)Distribution unterschieden wird. Diese Beobachtung impliziert, dass die Mengen $S_{\mathcal{D}}^{\ell} = \{p \in \mathcal{M} \mid \dim \mathcal{D}_p = \ell\}$ invariant unter geometrischen Symmetrien sind. Wegen $\dim T_p\phi(\mathcal{D}_p) = \dim \mathcal{D}_{\phi(p)}$ gilt $\text{dom } \phi \cap S_{\mathcal{D}}^{\ell} = \text{im } \phi \cap S_{\mathcal{D}}^{\ell}$ für alle $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$. Eine isolierte Singularität $S_{\mathcal{D}}^{\ell} = \{p\}$ ist stets ein Fixpunkt, d.h. es gilt $\phi(p) = p$ für alle $\phi \in \Gamma_p(\mathcal{M}, \mathcal{D})$. Des Weiteren bemerken wir die folgende natürliche Eigenschaft: Ist ϕ eine geometrische Symmetrie von \mathcal{D} , so ist ϕ eine geometrische Symmetrie von \mathcal{D}^0 und umgekehrt. Von diesem Standpunkt aus gibt es zunächst keinen Unterschied in der Formulierung der Symmetrien mittels Distributionen oder Kodistributionen. Der auf Vektorfeldern basierender Ansatz bringt dennoch diverse Vorteile mit sich. Einer dieser Vorteile beruht auf der folgenden Beobachtung: Bei einer glatten Distribution ist es nicht ausgeschlossen, dass es einen lokalen Abfall der Dimension gibt. An den betreffenden Punkten müsste sich die Dimension des Annihilators entsprechend erhöhen. In solchen Fällen wäre der Annihilator nicht mehr glatt, weshalb manche Konstruktionen nicht möglich sind.

Bemerkung 3.1.3. Ein eng mit Symmetrien verwandtes Thema ist das Äquivalenzproblem. Das allgemeine Äquivalenzproblem beinhaltet die Frage zu entscheiden, wann zwei Mannigfaltigkeiten \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 mit jeweils vorgegebenen Distributionen \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_2 durch eine Transformation ineinander überführbar sind. Ist die gesuchte Transformation ein globaler Diffeomorphismus $\psi: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ mit der Eigenschaft $T\psi(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$, so erkennen wir sofort die bijektive Korrespondenz

$$\kappa: \begin{cases} \Gamma(\mathcal{M}_1, \mathcal{D}_1) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{M}_2, \mathcal{D}_2) \\ \phi & \longmapsto & \psi \circ \phi \circ \psi^{-1} \end{cases}$$

der zugehörigen geometrischen Symmetrien. Wegen $\kappa(\phi \circ \varphi) = \kappa(\phi) \circ \kappa(\varphi)$ ist κ ein Isomorphismus von Lie-Pseudogruppen. Weiter bildet $T\psi$ jede involutive Subdistribution von \mathcal{D}_1 auf eine involutive Subdistribution von \mathcal{D}_2 ab, vgl. Korollar 3.2.10. Daher ist es nicht sonderlich überraschend, dass einige Konzepte, die im Rahmen des Äquivalenzproblems erarbeitet werden, im Zusammenhang mit Symmetrien ihre Anwendung finden. \triangleleft

Die Verbindung zur formalen Theorie der Differentialgleichungen liegt auf der Hand, wenn man bedenkt, dass Differentialgleichungen mittels gefaserner Mannigfaltigkeiten $\hat{\pi}^q: \mathcal{R}_q \rightarrow \mathcal{X}$ und ihrer Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ beschrieben werden. Definition 2.3.1 bekommt in unserem verallgemeinerten Kontext folgende Form:

Definition 3.1.4. Unter einer *Differentialgleichung* verstehen wir ein Paar $(\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{D})$, bestehend aus einer gefaserten Mannigfaltigkeit $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}$ und einer Distribution $\mathcal{D} \subseteq T\mathcal{M}$.

Gleichsam kann eine geometrische Interpretation für die Lösungen angegeben werden.

Definition 3.1.5. Es sei $(\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{D})$ eine Differentialgleichung. Eine $\dim \mathcal{X}$ -dimensionale zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit der Distribution \mathcal{D} heißt *Lösung*, wenn die betreffende Untermannigfaltigkeit transversal zur Projektion π ist.

Betrachten wir Integralmannigfaltigkeiten von \mathcal{D} als *verallgemeinerte Lösungen*, so finden wir das klassische Bild wieder, dass geometrische Symmetrien von \mathcal{D} verallgemeinerte Lösungen in verallgemeinerte Lösungen überführen. Man beachte aber, dass das Bild $\phi(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{M}$ einer Lösung \mathcal{N} im Allgemeinen *nicht* π -transversal ist. Gilt dagegen $T\phi(V\pi) = V\pi$, so ist $\phi(\mathcal{N})$ stets transversal zur Projektion π . Für eine *lokal lösbare* Differentialgleichung $(\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{D})$ muss folglich notwendigerweise $\dim T_p\pi(\mathcal{D}_p) = \dim \mathcal{X}$ gelten. Liegt eine geometrische Symmetrie hinreichend „nah“ an der Identität $\text{id}_{\mathcal{M}}$, so bildet sie auch Lösungen in Lösungen ab. Diese Beobachtung ist Grundlage der gesamten Lie-Symmetrietheorie von Differentialgleichungen.

3.2 Eigenschaften geometrischer Symmetrien

In diesem Abschnitt wollen wir einige Eigenschaften der Lie-Pseudogruppe $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ bei gegebenem Paar $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ untersuchen. Unser Ansatz besteht in der Konstruktion von Subdistributen $\mathcal{U} \subseteq T\mathcal{M}$ mit der Eigenschaft

$$T\phi(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U} \quad \text{für alle } \phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D}). \quad (3.1)$$

Solche Subdistributen wollen wir im Folgenden der Kürze halber *invariant* nennen. Sie spielen im Grunde die gleiche Rolle wie die invarianten Unterräume in der Linearen Algebra. In gewisser Weise stellen invariante Distributionen ein Pendant zu Integrabilitätsbedingungen dar. Auf diesen Zusammenhang werden wir am Ende des Abschnittes näher eingehen. Wir halten an dieser Stelle lediglich fest, dass die Existenz invarianter Distributionen keine zusätzlichen Einschränkungen auferlegt. Es liegt in der Natur der Bedingung (3.1), dass sie von jeder geometrischen Symmetrie automatisch erfüllt wird. Die umgekehrte Inklusion resultiert direkt aus der Tatsache, dass die Umkehrabbildung ϕ^{-1} ebenfalls eine geometrische Symmetrie ist. Offenbar sind \mathcal{D} und $T\mathcal{M}$ invariant. Generell sind invariante Distributionen weder glatt noch haben konstanten Rang, siehe Bemerkung 3.2.7. Ihr Vorhandensein erklärt in manchen Fällen, warum es Symmetrien mit bestimmten Eigenschaften nicht geben kann. So gibt es beispielsweise keine geometrische Symmetrie, welche die Mengen $S_{\mathcal{U}}^{\ell} = \{p \in \mathcal{M} \mid \dim \mathcal{U}_p = \ell\}$ *nicht* auf sich abbildet.

Die Suche nach invarianten Distributionen wird prinzipiell dadurch erschwert, dass praktisch nichts über die Struktur der Lie-Pseudogruppe $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ bekannt ist. Die folgende Proposition beschreibt, wie man aus bekannten invarianten Distributionen neue konstruiert.

Proposition 3.2.1. Es seien $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq T\mathcal{M}$ zwei glatte invariante Distributionen. Dann gilt:

- (i) Der Durchschnitt $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ ist eine invariante Distribution.
- (ii) Die Summe $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ ist eine invariante Distribution.
- (iii) Die gemischte Lie-Klammer $[\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ ist eine invariante Distribution mit $\mathcal{U} + \mathcal{V} \subseteq [\mathcal{U}, \mathcal{V}]$.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die ersten zwei Aussagen auch dann ihre Gültigkeit behalten, wenn die invarianten Distributionen \mathcal{U}, \mathcal{V} nicht glatt sind.

- (i) Der Durchschnitt $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ ist punktweise definiert durch

$$(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})_p := \mathcal{U}_p \cap \mathcal{V}_p = \{X_p \in T_p\mathcal{M} \mid X_p \in \mathcal{U}_p \text{ und } X_p \in \mathcal{V}_p\}.$$

Für jeden Vektor $X_p \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{V})_p$ und jede geometrische Symmetrie $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ gilt

$$T_p\phi(X_p) \in T_p\phi(\mathcal{U}_p) \subseteq \mathcal{U}_{\phi(p)} \quad \text{und} \quad T_p\phi(X_p) \in T_p\phi(\mathcal{V}_p) \subseteq \mathcal{V}_{\phi(p)}.$$

Folglich ist $T_p\phi(X_p) \in \mathcal{U}_{\phi(p)} \cap \mathcal{V}_{\phi(p)}$. Aus der Beliebigkeit von X_p folgt $T\phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Der Durchschnitt zweier glatten Distributionen ist im Allgemeinen nicht glatt. Als Beispiel betrachte man $\mathcal{U} = \langle \partial_x \rangle$ und $\mathcal{V} = \langle \partial_x + y\partial_y \rangle$ in Koordinaten (x, y) auf $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$.

(ii) Die Summe $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ ist in naheliegender Weise punktweise gegeben durch

$$(\mathcal{U} + \mathcal{V})_p := \mathcal{U}_p + \mathcal{V}_p = \{X_p + Y_p \in T_p\mathcal{M} \mid X_p \in \mathcal{U}_p \text{ und } Y_p \in \mathcal{V}_p\}.$$

Aufgrund der Linearität der Tangentialabbildung $T_p\phi: T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{\phi(p)}\mathcal{M}$ gilt

$$T_p\phi(X_p + Y_p) = T_p\phi(X_p) + T_p\phi(Y_p) \in T_p\phi(\mathcal{U}_p) + T_p\phi(\mathcal{V}_p) \subseteq \mathcal{U}_{\phi(p)} + \mathcal{V}_{\phi(p)}$$

für alle Vektoren $X_p \in \mathcal{U}_p$, $Y_p \in \mathcal{V}_p$ und alle geometrischen Symmetrien $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$. Folgerichtig erhalten wir $T\phi(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U} + \mathcal{V}$. Im Gegensatz zum Durchschnitt ist die Summe zweier glatten Distributionen stets glatt.

(iii) Die gemischte Lie-Klammer $[\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ wird *punktweise* definiert durch

$$[\mathcal{U}, \mathcal{V}]_p := \{[X, Y]_p \in T_p\mathcal{M} \mid X \in \mathcal{U} \text{ und } Y \in \mathcal{V}\}.$$

Aus der Vertauschbarkeit der Lie-Klammer mit dem Pushforward folgt

$$T_p\phi([X, Y]_p) = [T\phi(X), T\phi(Y)]_{\phi(p)} \in [T\phi(\mathcal{U}), T\phi(\mathcal{V})]_{\phi(p)} \subseteq [\mathcal{U}, \mathcal{V}]_{\phi(p)}$$

für beliebige Vektorfelder $X \in \mathcal{U}$, $Y \in \mathcal{V}$ und alle $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$. Aus diesem Grund ist $[\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ eine weitere invariante Distribution mit $T\phi([\mathcal{U}, \mathcal{V}]) \subseteq [\mathcal{U}, \mathcal{V}]$. Nach Bemerkung 3.1.1 sind \mathcal{U}, \mathcal{V} zwei $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -Module, daher lässt sich $[\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ *global* durch

$$[\mathcal{U}, \mathcal{V}] = \{[X, Y] \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\tau_{\mathcal{M}}) \mid X \in \mathcal{U} \text{ und } Y \in \mathcal{V}\}.$$

beschreiben. Insbesondere ist $[\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ stets eine *glatte* Distribution. An der Identität

$$Y(g)X + X(f)Y = [X, fY] - [gX, Y] + (g - f)[X, Y]$$

mit beliebigen $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ sehen wir ferner $\mathcal{U} + \mathcal{V} \subseteq [\mathcal{U}, \mathcal{V}]$.

Die gemischte Lie-Klammer $[\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ ist ausschließlich für *glatte* Distributionen definiert. \square

Die Inklusion $\mathcal{U} + \mathcal{V} \subseteq [\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ ist der Grund dafür, weshalb in der Literatur statt $[\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ häufig $\mathcal{U} + \mathcal{V} + [\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ geschrieben wird. An dieser Darstellung erkennt man besonders deutlich den trivialen Anteil $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ von $[\mathcal{U}, \mathcal{V}]$. Wir halten uns an diese Konvention, auch wenn sie die Notation an manchen Stellen unnötig verkompliziert. Die einzige bislang bekannte nichttriviale invariante Distribution ist \mathcal{D} . Falls \mathcal{D} glatt ist, so definieren wir die (stark) *abgeleitete* Distribution \mathcal{D}' durch

$$\mathcal{D}' := \mathcal{D} + [\mathcal{D}, \mathcal{D}].$$

Im Spezialfall $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$ handelt es sich um eine *involutive* Distribution. Wenn dies der Fall ist, liefert Proposition 3.2.1 keine neue Information. In der Regel gilt aber $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{D}' \subsetneq T\mathcal{M}$ und wir erhalten mit \mathcal{D}' eine zweite nichttriviale invariante Distribution. Es seien der Einfachheit halber $X_1, \dots, X_r \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\tau_{\mathcal{M}})$ glatte Vektorfelder mit $\mathcal{D} = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$, dann wird die abgeleitete

Distribution \mathcal{D}' zusätzlich durch die Lie-Klammern $[X_i, X_k] \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\tau_{\mathcal{M}})$ mit $i < k$ aufgespannt. Ihr Rang lässt sich grob abschätzen durch

$$\dim \mathcal{D}'_p \leq \dim \mathcal{D}_p + |\{(i, k) \mid 1 \leq i < k \leq r\}| = \frac{r(r+1)}{2},$$

wobei die Rangabbildung $\text{rang } \mathcal{D}': \mathcal{M} \mapsto \mathbb{N}_0$ unterhalbstetig ist, d.h. um jeden Punkt $p \in \mathcal{M}$ existiert eine offene Umgebung $p \in O$ derart, dass $\text{rang}_{\hat{p}} \mathcal{D}' \geq \text{rang}_p \mathcal{D}'$ für alle $\hat{p} \in O$ gilt.

Es gilt eine ähnliche Konstruktion für glatte Kodistributionen. Zur Definition der abgeleiteten Kodistribution $\Gamma' \subseteq \Gamma$ betrachten wir eine $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -lineare Abbildung

$$\delta: \begin{cases} \Gamma \longrightarrow \Omega^2(\mathcal{M})/(\Gamma \wedge \Omega^1(\mathcal{M})) \\ \omega \longmapsto d\omega \quad \text{mod } \Gamma \end{cases}$$

und setzen $\Gamma' := \ker \delta = \{\omega \in \Gamma \mid d\omega \equiv 0 \quad \text{mod } \Gamma\}$. Hierbei bezeichnet $d: \Omega^1(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^2(\mathcal{M})$ die äußere Ableitung von Einsformen und \wedge das Wedgeprodukt. Anhand der Formel

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) + \omega([X, Y])$$

erkennen wir leicht den zu erwartenden Zusammenhang zur dualen Beschreibung:

$$\Gamma' = \{\omega \in \Gamma \mid \omega([X, Y]) = 0 \text{ für alle } X, Y \in \Gamma^0\} = ((\Gamma^0)')^0.$$

Wir weisen ausdrücklich darauf hin, dass die Gleichheit $\Gamma' = ((\Gamma^0)')^0$ nur dann gelten kann, wenn sowohl Γ^0 als auch $((\Gamma^0)')^0$ glatt sind. Die Rechenregel $\phi^*(d\omega) = d(\phi^*(\omega))$ für Einsformen $\omega \in \Gamma$ impliziert $T^*\phi(\Gamma') = \Gamma'$. Wir verzichten an dieser Stelle auf die Details und verweisen hierfür auf Stormark [33, S. 24 ff.].

Beispiel 3.2.2. Ein einfaches Beispiel zeigt, dass die abgeleitete Distribution \mathcal{D}' im Allgemeinen singularär ist. Dazu betrachten wir $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$ mit globalen Koordinaten (x, y, u) und eine zweidimensionale reguläre Distribution $\mathcal{D} = \langle X, Y \rangle$, welche durch $X = \partial_x$ und $Y = \partial_y + xu\partial_u$ erzeugt wird. Wegen $Z = [X, Y] = u\partial_u$ erhalten wir $\mathcal{D}' = \langle X, Y, Z \rangle$ mit

$$\dim \mathcal{D}'_p = \begin{cases} 3, & \text{falls } p \neq (x, y, 0), \\ 2, & \text{falls } p = (x, y, 0) \end{cases} \quad \text{und} \quad (\mathcal{D}'_p)^0 = \begin{cases} \{0\}, & \text{falls } p \neq (x, y, 0), \\ \langle du_p \rangle, & \text{falls } p = (x, y, 0). \end{cases}$$

Im Gegensatz dazu gilt $\mathcal{D}^0 = \langle du - xu dy \rangle$ mit $(\mathcal{D}^0)' = \{0\}$. Außerhalb der xy -Ebene stimmen $(\mathcal{D}^0)'$ und $(\mathcal{D}')^0$ überein. Ohne eine einzige geometrische Symmetrie von \mathcal{D} bestimmt zu haben, wissen wir bereits, dass die Fläche $S_{\mathcal{D}'}^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \dim \mathcal{D}'_p = 2\}$ unter jeder geometrischen Symmetrie auf sich abgebildet wird. Man bestätigt leicht, dass die Diffeomorphismen

$$\phi(x, y, u) = \phi_f(x, y, u) = \left(\frac{x}{f'(y)}, f(y), u \right) \quad \text{mit } f'(y) \neq 0 \quad \forall y$$

eine Gruppe von geometrischen Symmetrien von \mathcal{D} bilden. Es gilt $\phi_g \circ \phi_f = \phi_{g \circ f}$. Die zugehörige Jacobi-Matrix $J\phi$ mit der Determinante $\det J\phi = 1$ ist invertierbar und wir finden

$$T_p\phi(X_p) = \frac{1}{f'(y)} X_{\phi(p)} \quad \text{und} \quad T_p\phi(Y_p) = -\frac{x f''(y)}{(f'(y))^2} X_{\phi(p)} + f'(y) Y_{\phi(p)}.$$

Des Weiteren erhalten wir direkt $T_p\phi(Z_p) = Z_{\phi(p)}$. Alternativ lässt sich $T_p\phi(Z_p)$ mit Hilfe der Lie-Ableitung $[T\phi(X), T\phi(Y)]_{\phi(p)}$ bestimmen. Der Pushforward ϕ_*X von X hat in Bildkoordinaten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) = \phi(x, y, u)$ auf $\phi(\mathcal{M})$ die Form

$$\phi_*X = T\phi \circ X \circ \phi^{-1} = (f^{-1})'(\bar{y})X.$$

Für den Pushforward ϕ_*Y von Y erhalten wir nach gleicher Überlegung die Form

$$\phi_*Y = T\phi \circ Y \circ \phi^{-1} = \frac{\bar{x}(f^{-1})''(\bar{y})}{((f^{-1})'(\bar{y}))^2}X + \frac{1}{(f^{-1})'(\bar{y})}Y.$$

Aus der Kommutativität der Lie-Klammer mit dem Pushforward ergibt sich

$$\begin{aligned}\phi_*Z &= T\phi \circ Z \circ \phi^{-1} = \phi_*([X, Y]) = [\phi_*X, \phi_*Y] \\ &= \frac{(f^{-1})''(\bar{y})}{(f^{-1})'(\bar{y})}X - \frac{1}{(f^{-1})'(\bar{y})}Y((f^{-1})'(\bar{y}))X + [X, Y] \\ &= [X, Y] = Z\end{aligned}$$

und somit das identische Ergebnis $T_p\phi(Z_p) = Z_{\phi(p)}$. Erneute Ableitung von \mathcal{D}' liefert $(\mathcal{D}')' = \mathcal{D}'$. Damit ist die (glatte) abgeleitete Distribution \mathcal{D}' singular und involutiv. \triangleleft

Sofern die Ausgangsdistribution \mathcal{D} glatt ist, lässt sich der Ableitungsprozess wiederholen. Die $(k+1)$ -fach (stark) abgeleitete Distribution $\mathcal{D}^{(k+1)} \subseteq T\mathcal{M}$ ist rekursiv definiert durch

$$\mathcal{D}^{(k+1)} := (\mathcal{D}^{(k)})' = \mathcal{D}^{(k)} + [\mathcal{D}^{(k)}, \mathcal{D}^{(k)}], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Auf diese Weise entsteht eine aufsteigende Kette von invarianten Distributionen auf \mathcal{M} :

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}'' \subseteq \dots \subseteq \mathcal{D}^{(k)} \subseteq \mathcal{D}^{(k+1)} \subseteq \dots \subseteq T\mathcal{M}.$$

In jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ wird die obige Kette nach endlich vielen Schritten stationär. Es existiert eine kleinste ganze Zahl $s_p \geq 0$ derart, dass $\mathcal{D}_p^{(s_p)} = \mathcal{D}_p^{(s_p+r)}$ für alle $r > 0$ gilt. Insbesondere kann die Zahl s_p vom Punkt $p \in \mathcal{M}$ abhängen. Der zugehörige Dimensionenvektor $t_{\mathcal{D}}(p) = (\dim \mathcal{D}_p, \dots, \dim \mathcal{D}_p^{(s_p)}) \in \mathbb{N}_0^{s_p+1}$ heißt *\mathcal{D} -Typ von p* . Ist die Zuordnung $p \mapsto s_p$ konstant, so ist $\mathcal{D}^{(s)}$ die kleinste *involutive* Distribution mit $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^{(s)}$. Man beachte ferner, dass die so konstruierte Kette von Distributionen im Allgemeinen nicht mit $T\mathcal{M}$ endet. Im Spezialfall $\mathcal{D}^{(s)} = T\mathcal{M}$ sprechen wir von einer *holomen* Distribution.

Die gleiche Prozedur liefert für glatte Kodistributionen Γ eine absteigende Kette

$$\Gamma \supseteq \Gamma' \supseteq \Gamma'' \supseteq \dots \supseteq \Gamma^{(k)} \supseteq \Gamma^{(k+1)} \supseteq \dots \supseteq \{0\}.$$

Solche Türme von (Ko-)Distributionen, auch *Fahnen* oder *Flaggen* genannt, werden häufig im Rahmen des lokalen Äquivalenzproblems betrachtet, sie haben auch Anwendungen in der Kontrolltheorie, siehe z.B. Isidori [16]. Spezielle Konstruktionen dieser Art findet man bereits in den Arbeiten von Engel, Goursat und Cartan. In der modernen Literatur z.B. Adachi [2], Montgomery und Zhitomirskii [22], Shibuya und Yamaguchi [32] werden überwiegend (Ko-)Distributionen vom speziellen Typ untersucht.

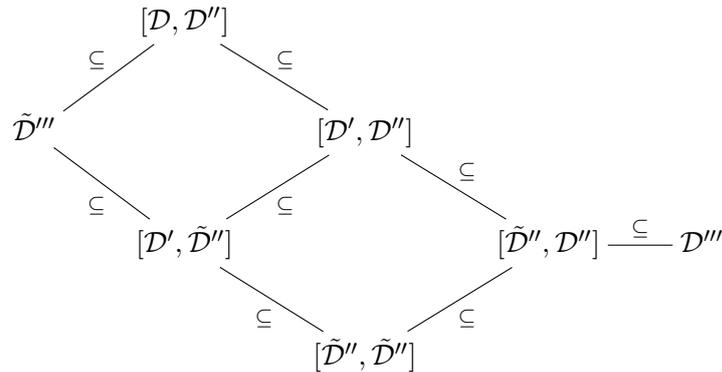
Ein Grund, weshalb wir an invarianten Distributionen interessiert sind, liegt in der folgenden Beobachtung: Es seien $\mathcal{U} \subseteq T\mathcal{M}$ eine beliebige (glatte) invariante Distribution und $S_{\mathcal{U}}^{\ell} = \{p \in \mathcal{M} \mid t_{\mathcal{U}}(p) = (\ell_1, \dots, \ell_s)\}$ die Menge aller Punkte vom \mathcal{U} -Typ ℓ . Dann ist $S_{\mathcal{U}}^{\ell} \subseteq \mathcal{M}$ nach Proposition 3.2.1(iii) invariant unter *jeder* geometrischen Symmetrie $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$, d.h. es gilt $\text{dom } \phi \cap S_{\mathcal{U}}^{\ell} = \text{im } \phi \cap S_{\mathcal{U}}^{\ell}$. Mit anderen Worten ist der \mathcal{U} -Typ eine *Invariante* mit der Eigenschaft $t_{\mathcal{U}}(\phi(p)) = t_{\mathcal{U}}(p)$.

Bemerkung 3.2.3. Wiederholte Anwendung von Proposition 3.2.1 produziert eine Vielzahl an invarianten Distributionen. So zum Beispiel lässt sich aus \mathcal{D} und \mathcal{D}' eine weitere invariante Distribution $\hat{\mathcal{D}}'' = \mathcal{D}' + [\mathcal{D}, \mathcal{D}']$ konstruieren mit $\mathcal{D}' \subseteq \hat{\mathcal{D}}'' \subseteq \mathcal{D}''$. Sie wird als die zweifach

schwach abgeleitete Distribution bezeichnet. Allgemein wird die k -fach *schwach* abgeleitete Distribution $\tilde{\mathcal{D}}^{(k)}$ definiert durch $\tilde{\mathcal{D}}' := \mathcal{D}'$ und

$$\tilde{\mathcal{D}}^{(k+1)} := \tilde{\mathcal{D}}^{(k)} + [\mathcal{D}, \tilde{\mathcal{D}}^{(k)}], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Offenbar gilt $\tilde{\mathcal{D}}^{(k)} \subseteq \mathcal{D}^{(k)}$. In vielen Fällen stimmen beide Ableitungsbegriffe – schwach und stark – überein. Generell sind sie aber verschieden. Zwischen schwach und stark abgeleiteten Distributionen können wiederum mehrere invariante Subdistributionen liegen:



Ist \mathcal{D} involutiv, so fallen alle Distributionen dieser Art zusammen. ◁

Wir halten für spätere Anwendungen folgendes Zwischenergebnis fest:

Korollar 3.2.4. *Es sei \mathcal{D} eine glatte Distribution auf \mathcal{M} . Dann gilt $T\phi(\mathcal{D}^{(k)}) = \mathcal{D}^{(k)}$ für alle geometrischen Symmetrien $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$.*

Falls die abgeleiteten Distributionen $\mathcal{D}^{(k)}$ regulär sind, so wird \mathcal{M} zu einer *filtrierten* Mannigfaltigkeit, deren Tangentialbündel $T\mathcal{M}$ eine Filtrierung

$$T^k \mathcal{M} := \begin{cases} \{0\}, & \text{falls } k \leq 0, \\ \mathcal{D}^{(k-1)}, & \text{falls } k \in \{1, \dots, s+1\}, \\ T\mathcal{M}, & \text{falls } k > s+1 \end{cases}$$

in Teilvektorbündel besitzt, die mit der Lie-Klammer von Vektorfeldern

$$[\cdot, \cdot] : \begin{cases} T^k \mathcal{M} \times T^\ell \mathcal{M} \longrightarrow T^{k+\ell} \mathcal{M} \\ (X, Y) \longmapsto [X, Y] \end{cases}$$

verträglich ist. Nach Korollar 3.2.4 erhalten geometrische Symmetrien die Filtrierung auf $T\mathcal{M}$.

Als Nächstes wollen wir *involutive* invariante Distributionen konstruieren. Zu diesem Zweck untersuchen wir die Eigenschaften des \mathbb{R} -Vektorraumes

$$\mathfrak{M} := \{X \in \mathcal{U} \mid [X, \mathcal{V}] \subseteq \mathcal{W}\} \subseteq \Gamma_{\mathcal{M}}(\tau_{\mathcal{M}}),$$

wobei \mathcal{U}, \mathcal{V} und \mathcal{W} drei beliebige glatte invariante Distributionen sind. Aufgrund der Linearität der Lie-Klammer im ersten Argument ist \mathfrak{M} tatsächlich ein \mathbb{R} -Vektorraum. Die nächste Proposition beschreibt weitere Eigenschaften des Vektorraumes \mathfrak{M} .

Proposition 3.2.5. *Es seien \mathcal{U}, \mathcal{V} und \mathcal{W} drei glatte invariante Distributionen. Dann gilt:*

- (i) \mathfrak{M} ist eine reelle Lie-Algebra, wenn \mathcal{U} involutiv ist und $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ gilt.

- (ii) \mathfrak{M} ist ein invarianter $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -Modul, wenn $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$ gilt.
 (iii) \mathfrak{M} ist eine involutive invariante Distribution, wenn $\mathcal{U} = \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ gilt.

Beweis. Es seien $X, Y \in \mathfrak{M}$ zwei beliebige Vektorfelder.

- (i) Da \mathcal{U} nach Voraussetzung involutiv ist, gilt $[X, Y] \in \mathcal{U}$. Mit Hilfe der Jacobi-Identität und der Inklusion $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} [[X, Y], \mathcal{V}] &= [X, [Y, \mathcal{V}]] + [[X, \mathcal{V}], Y] \\ &\subseteq [X, \mathcal{W}] + [\mathcal{W}, Y] \\ &\subseteq [X, \mathcal{V}] + [\mathcal{V}, Y] \subseteq \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Zusammenfassend folgt $[X, Y] \in \mathfrak{M}$. Im Spezialfall $\mathcal{U} = T\mathcal{M}$ und $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathcal{D}$ erhalten wir hieraus die infinitesimalen geometrischen Symmetrien, vgl. Proposition 3.4.2.

- (ii) Nach Bemerkung 3.1.1 ist \mathcal{U} ein $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -Modul. Daher gilt $fX + gY \in \mathcal{U}$ für alle $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$. Mit demselben Argument ist \mathcal{W} ein $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -Modul mit $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$. Es folgt

$$\begin{aligned} [fX + gY, \mathcal{V}] &= f[X, \mathcal{V}] + g[Y, \mathcal{V}] - \mathcal{V}(f)X - \mathcal{V}(g)Y \\ &\subseteq \mathcal{W} + \mathcal{W} - \mathcal{V}(f)X - \mathcal{V}(g)Y \\ &\subseteq \mathcal{W} + \mathcal{U} = \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Dementsprechend ist \mathfrak{M} ein $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -Modul. Die Invarianz von $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{M} \rangle$ unter geometrischen Symmetrien $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ ergibt sich sofort aus $T_p\phi(X_p) \in T_p\phi(\mathcal{U}_p) = \mathcal{U}_{\phi(p)}$ für alle $p \in \text{dom } \phi$ und der Vertauschbarkeit der Lie-Klammer mit dem Pushforward

$$[T\phi(X), \mathcal{V}]_{\phi(p)} = [T\phi(X), T\phi(\mathcal{V})]_{\phi(p)} = T_p\phi([X, \mathcal{V}]_p) \subseteq T_p\phi(\mathcal{W}_p) = \mathcal{W}_{\phi(p)}$$

als Folge der Invarianz der betreffenden Distributionen \mathcal{U}, \mathcal{V} und \mathcal{W} .

- (iii) Nach Teil (ii) ist $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{M} \rangle$ eine glatte invariante Distribution. Wegen $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ gilt

$$[X, Y] \in [X, \mathcal{V}] \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}.$$

Wie in Teil (i) folgt $[[X, Y], \mathcal{V}] \subseteq \mathcal{W}$ aus der Jacobi-Identität.

Natürlich ist \mathfrak{M} eine involutive Distribution, wenn \mathcal{U} involutiv ist und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ gilt. \square

Nach dem Theorem von Frobenius ist jede involutive Distribution konstanten Ranges integrabel. Daher werden maximale Integralmannigfaltigkeiten einer involutiven *invarianten* Distribution unter geometrischen Symmetrien auf maximale Integralmannigfaltigkeiten abgebildet. Hierin liegt die wesentliche Bedeutung involutiver invarianter Distributionen. Auf Grundlage der obigen Proposition führen wir die Cauchy-Cartan-Charakteristiken ein.

Definition 3.2.6. Es sei \mathcal{D} eine glatte Distribution auf \mathcal{M} . Ein *lokales* Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ heißt *Cauchy-Cartan-Charakteristik von $\mathcal{D}^{(k)}$* , wenn gilt $X \in \mathcal{D}^{(k)}$ und $[X, \mathcal{D}^{(k)}] \subseteq \mathcal{D}^{(k)}$.

Die von Cauchy-Cartan-Charakteristiken erzeugte *glatte* Distribution $\text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}]$ mit $\text{Char}_p[\mathcal{D}^{(k)}] := \langle \{X_p \mid X \in \Gamma_p(\tau_{\mathcal{M}}|_{\mathcal{D}^{(k)}}) \text{ mit } [X, Y] \in \Gamma_p(\tau_{\mathcal{M}}|_{\mathcal{D}^{(k)}}) \text{ für alle } Y \in \Gamma_p(\tau_{\mathcal{M}}|_{\mathcal{D}^{(k)}})\} \rangle$ ist nach Bemerkung 3.1.1 für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ein $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -Modul, was die Notation

$$\text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}] = \{X \in \mathcal{D}^{(k)} \mid [X, \mathcal{D}^{(k)}] \subseteq \mathcal{D}^{(k)}\} \subseteq \mathcal{D}^{(k)}$$

rechtfertigt. An dieser Darstellung sehen wir besonders deutlich die Beziehung zum Vektorraum \mathfrak{M} aus Proposition 3.2.5. Im Spezialfall $\mathcal{U} = \mathcal{W} = \mathcal{V} = \mathcal{D}^{(k)}$ stimmt \mathfrak{M} mit $\text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}]$ überein. Insbesondere ist $\text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}]$ eine *involutive* invariante Distribution für jedes $k \in \mathbb{N}_0$.

Zur Berechnung von $\text{Char}[\mathcal{U}] = \{X \in \mathcal{U} \mid [X, \mathcal{U}] \subseteq \mathcal{U}\}$ benötigen wir nur Methoden aus der Linearen Algebra. Hierzu machen wir den Ansatz $X = \sum_{i=1}^r a^i X_i \in \text{Char}[\mathcal{U}]$, wobei die Vektorfelder $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$ eine (lokale) Basis von \mathcal{U} bilden und $a^1, \dots, a^r \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ beliebige reelle Funktionen sind. Aus den charakterisierenden Bedingungen

$$[X, X_j] \pmod{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^r a^i [X_i, X_j] \pmod{\mathcal{U}} = 0, \quad 1 \leq j \leq r$$

erhalten wir mit Hilfe der Strukturgleichungen von $T\mathcal{M} = \mathcal{U} \oplus \langle X_{r+1}, \dots, X_n \rangle$,

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k X_k \in \mathcal{U}', \quad 1 \leq i, j \leq r,$$

und nr^2 Strukturkoeffizienten $C_{ij}^k \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ schließlich $r(n-r)$ Bedingungen der Form

$$\sum_{i=1}^r a^i C_{ij}^k = 0, \quad 1 \leq j \leq r < k \leq n \quad (3.2)$$

an die Koeffizienten a^i des Ansatzes für $X \in \text{Char}[\mathcal{U}]$. Bezeichnet Ξ^k eine $r \times r$ -Matrix mit Einträgen $(\Xi^k)_{ji} = C_{ij}^k$ und $a = (a^1, \dots, a^r)^T$, dann gilt $a \in \ker \Xi^k$ für $r < k \leq n$. Wir können diese Gleichungssysteme (3.2) nach gewissen Koeffizientenfunktionen a^i auflösen und das Ergebnis in unseren Ansatz für X einsetzen. Wegen $\text{Char}[\mathcal{U}] \subseteq \mathcal{U}$ gilt trivialerweise

$$\dim \mathcal{U}'_p \leq \dim \mathcal{U}_p + \frac{1}{2} \left(\dim \mathcal{U}_p - \dim \text{Char}_p[\mathcal{U}] \right) \left(\dim \mathcal{U}_p - \dim \text{Char}_p[\mathcal{U}] - 1 \right).$$

Bemerkung 3.2.7. Man kann die Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distributionen alternativ, wie in Hermes [15], *punktweise* definieren durch

$$\overline{\text{Char}}_p[\mathcal{D}^{(k)}] := \left\langle \{X_p \mid X \in \Gamma_p(\tau\mathcal{M}|_{\mathcal{D}^{(k)}}) \text{ mit } [X, Y]_p \in \mathcal{D}_p^{(k)} \text{ für alle } Y \in \Gamma_p(\tau\mathcal{M}|_{\mathcal{D}^{(k)}})\} \right\rangle.$$

Die so entstandene *invariante* Distribution $\overline{\text{Char}}[\mathcal{D}^{(k)}] \supseteq \text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}]$ muss nicht glatt sein. Der wesentliche Unterschied zu $\text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}]$ liegt in der Bedingung $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p^{(k)}$, welche punktal ausgewertet wird. Mit anderen Worten entspricht $\text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}]$ dem glatten Anteil von $\overline{\text{Char}}[\mathcal{D}^{(k)}]$. Rechnerisch hängt dies damit zusammen, dass die Bedingungen (3.2) punktweise ausgewertet werden. Ein konkretes Beispiel verdeutlicht den Unterschied. Wir betrachten auf $\mathcal{M} = \mathbb{R}^5$ mit globalen Koordinaten (x, y, z, u, v) eine vierdimensionale reguläre Distribution $\mathcal{D} = \langle X, Y, Z, W \rangle$, welche durch die vier Vektorfelder

$$\begin{aligned} X &= \partial_x, & Z &= \partial_z + x\partial_v, \\ Y &= \partial_y, & W &= \partial_u + (x + y^2 + z)\partial_v \end{aligned}$$

erzeugt wird. Anhand der nichtverschwindenden Lie-Klammern

$$[X, Z] = \partial_v, \quad [X, W] = \partial_v, \quad [Y, W] = 2y\partial_v, \quad [Z, W] = \partial_v$$

sehen wir, dass der Ansatz $aX + bY + cZ + dW \in \overline{\text{Char}}[\mathcal{D}]$ auf vier Bedingungen

$$\begin{aligned} [aX + bY + cZ + dW, X] \pmod{\mathcal{D}} &= -(c+d)\partial_v = 0, \\ [aX + bY + cZ + dW, Y] \pmod{\mathcal{D}} &= -2yd\partial_v = 0, \\ [aX + bY + cZ + dW, Z] \pmod{\mathcal{D}} &= (a-d)\partial_v = 0, \\ [aX + bY + cZ + dW, W] \pmod{\mathcal{D}} &= (a + 2yb + c)\partial_v = 0 \end{aligned}$$

für a, b, c, d führt. Es gilt $(a, b, c, d)^T \in \ker \Xi(y)$ mit

$$\Xi(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2y \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2y & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dim \ker \Xi(y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } y \neq 0, \\ 2, & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$

Daran erkennen wir das sprunghafte Verhalten der Dimension von

$$\overline{\text{Char}}_p[\mathcal{D}] = \begin{cases} \{0\}, & \text{falls } p \neq (x, 0, z, u, v), \\ \langle Y_p, X_p - Z_p + W_p \rangle, & \text{falls } p = (x, 0, z, u, v). \end{cases}$$

Im Gegensatz dazu gilt $\text{Char}[\mathcal{D}] = \{0\}$. Generell ist $\overline{\mathfrak{M}} \subseteq T\mathcal{M}$ definiert durch

$$\overline{\mathfrak{M}}_p := \langle \{X_p \mid X \in \mathcal{U} \text{ mit } [X, \mathcal{V}]_p \in \mathcal{W}_p \rangle$$

eine *invariante* Distribution, die im Allgemeinen weder glatt noch involutiv ist, wobei $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ weiterhin glatte invariante Distributionen bezeichnen. Zum Nachweis der Invarianz von $\overline{\mathfrak{M}}$ siehe den Beweis von Proposition 3.2.5(ii). Sicherlich beinhaltet $\overline{\mathfrak{M}}$ mehr Informationen über die Struktur der Lie-Pseudogruppe $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ als $\langle \mathfrak{M} \rangle$, die besonders bei Äquivalenzfragen zweifellos berücksichtigt werden müssen. Beispielsweise ist die Dimension $p \mapsto \dim \overline{\mathfrak{M}}_p$ eine feinere Invariante als $p \mapsto \dim \langle \mathfrak{M} \rangle_p$. \triangleleft

Die Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distributionen lassen sich auch mittels Kodistributionen einführen. Ist Γ eine glatte Kodistribution, so definieren wir

$$\text{Char}[\Gamma^{(k)}] := \left\langle \{X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \mid \iota_X(\omega) = 0 \text{ und } \iota_X(d\omega) \in \Gamma^{(k)} \text{ für alle } \omega \in \Gamma^{(k)}\} \right\rangle.$$

Hierbei steht ι_X für die innere Ableitung nach einem Vektorfeld X . Unter gewissen Regularitätsannahmen gilt $\text{Char}[\Gamma^{(k)}] = \text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}]$ im Fall $\Gamma = \mathcal{D}^0$. Dabei wird $\text{Char}[\Gamma]^0$ in der Literatur als *Cartansches System für Γ* bezeichnet. Wir verzichten hier auf die Details und verweisen auf Gardner [14] bzw. Vassiliou [37].

Korollar 3.2.8. *Die Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distributionen bilden eine Kette*

$$\text{Char}[\mathcal{D}] \subseteq \text{Char}[\mathcal{D}'] \subseteq \dots \subseteq \text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}] \subseteq \text{Char}[\mathcal{D}^{(k+1)}] \subseteq \dots \subseteq T\mathcal{M}.$$

Beweis. Der besseren Übersicht halber geben wir einen allgemeinen Beweis an. Es seien

$$\mathfrak{M} = \{X \in \mathcal{U} \mid [X, \mathcal{U}] \subseteq \mathcal{U}\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}' = \{X \in \mathcal{U}' \mid [X, \mathcal{U}'] \subseteq \mathcal{U}'\}$$

zwei involutive Distributionen, wobei \mathcal{U} eine beliebige glatte Distribution bezeichnet. Für jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{M}$ gilt $X \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$. Mit Hilfe der Jacobi-Identität erhalten wir

$$\begin{aligned} [X, \mathcal{U}'] &= [X, \mathcal{U}] + [X, [\mathcal{U}, \mathcal{U}]] \\ &= [X, \mathcal{U}] + [[\mathcal{U}, X], \mathcal{U}] + [[X, \mathcal{U}], \mathcal{U}] \\ &\subseteq \mathcal{U} + [\mathcal{U}, \mathcal{U}] = \mathcal{U}'. \end{aligned}$$

Zusammenfassend finden wir $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'$. Ist \mathcal{U} involutiv, so gilt $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$. Im Spezialfall $\mathcal{U} = \mathcal{D}^{(k)}$ und $\mathcal{U}' = \mathcal{D}^{(k+1)}$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ folgt hieraus $\text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}] = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}' = \text{Char}[\mathcal{D}^{(k+1)}]$. \square

Für spätere Anwendungen halten wir das folgende Ergebnis in Form eines Korollars fest.

Korollar 3.2.9. *Es sei \mathcal{D} eine glatte Distribution auf \mathcal{M} . Dann gilt $T\phi(\text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}]) = \text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}]$ für alle geometrischen Symmetrien $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$.*

Falls die Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distributionen $\text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}]$ regulär sind, so bilden sie eine weitere Filtrierung auf dem Tangentialbündel $T\mathcal{M}$:

$$T_{\text{Char}}^k \mathcal{M} := \begin{cases} \{0\}, & \text{falls } k < 0, \\ \text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}], & \text{falls } k \in \{0, \dots, s\}, \\ T\mathcal{M}, & \text{falls } k > s, \end{cases}$$

die unter geometrischen Symmetrien $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ erhalten bleibt.

Wir wollen nun eine weitere Konstruktion involutiver invarianter Distributionen vorstellen. Die Grundidee dieser Konstruktion liegt in der Beobachtung, dass Bilder involutiver Distributionen unter Diffeomorphismen involutiv bleiben.

Korollar 3.2.10. *Es seien $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ein lokaler Diffeomorphismus und $\mathcal{V} \subseteq T\mathcal{M}$ eine beliebige involutive Distribution auf \mathcal{M} . Dann ist $T\phi(\mathcal{V}) \subseteq T\mathcal{M}$ ebenfalls involutiv.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der Kommutativität der Lie-Klammer mit dem Pushforward:

$$[T\phi(\mathcal{V}), T\phi(\mathcal{V})]_{\phi(p)} = T_p\phi([\mathcal{V}, \mathcal{V}]_p) \subseteq T_p\phi(\mathcal{V}_p).$$

Des Weiteren gilt $\dim T_p\phi(\mathcal{V}_p) = \dim \mathcal{V}_p$ für alle Punkte p des Definitionsbereichs von ϕ . \square

Streng genommen ist die Distribution $T\phi(\mathcal{V})$ nur auf dem Bild im $\phi \subseteq \mathcal{M}$ definiert. Sie lässt sich aber leicht auf ganz \mathcal{M} trivial fortsetzen. Zu jedem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}_{\mathcal{V}} \cap \Gamma_p(\tau_{\mathcal{M}})$ mit $\text{supp}(X) \not\subseteq \text{dom } \phi \ni p$ finden wir eine (erforderlichenfalls kompakte) Umgebung $p \in U \subset \text{dom } \phi$ und eine glatte Funktion $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ mit $f|_U \equiv 1$ und $f|_{\mathcal{M} \setminus \text{dom } \phi} \equiv 0$ derart, dass $fX \in \mathfrak{X}_{\mathcal{V}} \cap \Gamma_{\mathcal{M}}(\tau_{\mathcal{M}})$ global definiert ist. Dann setzen wir $T_p\phi((fX)_p) := 0$ für $p \in \mathcal{M} \setminus \text{dom } \phi$.

Proposition 3.2.11. *Es seien $\mathcal{U} \subseteq T\mathcal{M}$ eine invariante Distribution und $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ die einzige reguläre involutive Subdistribution vom Rang $s = \dim \mathcal{V}$. Dann ist \mathcal{V} invariant.*

Beweis. Es sei $\phi \in \text{Diff}_{\text{lok}}(\mathcal{M})$ ein lokaler Diffeomorphismus. Nach Korollar 3.2.10 ist $T\phi(\mathcal{V})$ involutiv und es gilt $T\phi(\mathcal{V}) \subseteq T\phi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ auf dem Bildbereich von ϕ . Demnach ist $T\phi(\mathcal{V})$ eine weitere involutive Subdistribution von \mathcal{U} mit $\dim T\phi(\mathcal{V}) = \dim \mathcal{V}$. Die Voraussetzung impliziert sofort $T\phi(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$. Wegen $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D}) \subseteq \text{Diff}_{\text{lok}}(\mathcal{M})$ folgt die Behauptung. \square

In der Praxis hat die obige Proposition nur geringe Bedeutung. Dies liegt natürlich an der schwer nachzuweisenden Voraussetzung. In seltenen Fälle ist es jedoch möglich zu zeigen, dass \mathcal{V} die bezüglich der Mengeninklusion *größte* involutive Subdistribution von \mathcal{U} ist, woraus dann die Invarianz folgt, vgl. Proposition 4.1.11. Wir können aber leicht notwendige Bedingungen für die Invarianz von \mathcal{V} angeben: Hierzu seien $\mathcal{V} = \langle X_1, \dots, X_s \rangle$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U} = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$ und $T\mathcal{M} = \mathcal{U} \oplus \langle X_{r+1}, \dots, X_n \rangle$. Wir machen den Ansatz

$$\phi_* X_j = \sum_{i=1}^r a_j^i X_i \in \mathcal{U}, \quad 1 \leq j \leq s$$

mit unbekanntenen Koeffizientenfunktionen $a_j^i \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ und betrachten $[\mathcal{V}, \phi_*(\mathcal{V})] \bmod \mathcal{V}$. Da ϕ ein Diffeomorphismus ist, hat die $s \times r$ -Koeffizientenmatrix A mit Einträgen $A_{ij} = a_j^i$ vollen Zeilenrang s . Aus den Strukturgleichungen des Tangentialbündels $T\mathcal{M}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} [X_k, \phi_* X_j] \bmod \mathcal{V} &= \sum_{i=1}^r \left(a_j^i [X_k, X_i] + X_k(a_j^i) X_i \right) \bmod \mathcal{V} \\ &= \sum_{t=s+1}^r \left(\sum_{i=1}^r a_j^i C_{ki}^t + X_k(a_j^i) \right) X_t + \sum_{t=r+1}^n \left(\sum_{i=1}^r a_j^i C_{ki}^t \right) X_t, \quad 1 \leq k, j \leq s. \end{aligned}$$

Falls \mathcal{V} invariant unter $T\phi$ ist, dann folgt aus $[\mathcal{V}, \phi_*(\mathcal{V})] = [\mathcal{V}, \mathcal{V}] \subseteq \mathcal{V}$ unmittelbar

$$0 = X_k(a_j^t) + \sum_{i=1}^r a_j^i C_{ki}^t, \quad 1 \leq k, j \leq s < t \leq r,$$

$$0 = \sum_{i=1}^r a_j^i C_{ki}^t, \quad 1 \leq k, j \leq s < r < t \leq n.$$

Hieraus ergeben sich $s^2(n-s)$ Bedingungen an die Koeffizienten $a_j^i \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$:

$$X_k(a_j^t) + \sum_{i=s+1}^r a_j^i C_{ki}^t = - \sum_{i=1}^s a_j^i C_{ki}^t, \quad 1 \leq k, j \leq s < t \leq r,$$

$$\sum_{i=s+1}^r a_j^i C_{ki}^t = - \sum_{i=1}^s a_j^i C_{ki}^t, \quad 1 \leq k, j \leq s < r < t \leq n.$$

Da die linke Seite dieser Gleichungen verschwindet, erhalten wir als notwendige Bedingungen

$$0 = \sum_{i=1}^s a_j^i C_{ki}^t, \quad 1 \leq k, j \leq s < t \leq n. \quad (3.3a)$$

Diese Bedingungen sind dann hinreichend für die Invarianz von \mathcal{V} unter $T\phi$, wenn die einzige Lösung $(a_j^{s+1}, \dots, a_j^r)$ der folgenden Algebrodifferentialgleichungen

$$X_k(a_j^t) = - \sum_{i=s+1}^r a_j^i C_{ki}^t, \quad 1 \leq k, j \leq s < t \leq r, \quad (3.3b)$$

$$0 = \sum_{i=s+1}^r a_j^i C_{ki}^t, \quad 1 \leq k, j \leq s < r < t \leq n \quad (3.3c)$$

die Nulllösung ist. Wenn dies der Fall ist, dann gilt $\phi_* X_j \in \mathcal{V}$.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir auf den Zusammenhang zwischen invarianten Distributionen und Integrierbarkeitsbedingungen näher eingehen. Der Einfachheit halber sei $\mathcal{D} = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$ eine reguläre Distribution auf \mathcal{M} , welche durch r linear unabhängige Vektorfelder

$$X_k = \sum_{i=1}^n \xi_k^i(\mathbf{x}) \partial_{x^i}, \quad 1 \leq k \leq r$$

aufgespannt wird. Weiter seien $n-r$ Vektorfelder X_{r+1}, \dots, X_n so gewählt, dass $\{X_1, \dots, X_n\}$ ein Rahmen von $T\mathcal{M}$ ist. Jeder Diffeomorphismus $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ besitzt in lokalen Koordinaten $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ auf \mathcal{M} die Form $\phi(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x}))$. Die in Definition 3.1.2 angegebene Symmetriebedingung $T\phi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ lässt sich daher äquivalent schreiben als

$$T\phi(X_k) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \xi_k^i(\mathbf{x}) \right) \partial_{x^j} = 0 \quad \text{mod } \mathcal{D}, \quad 1 \leq k \leq r. \quad (3.4)$$

In der zugehörigen Zerlegung von $T\phi(X_k)$ bezüglich der Basis $\{X_1, \dots, X_n\}$ müssen folglich $n-r$ Koeffizienten vor X_{r+1}, \dots, X_n verschwinden. Diese Beschreibung führt auf ein System von $r(n-r)$ Bestimmungsgleichungen und eine Ungleichung $\det J\phi(\mathbf{x}) \neq 0$ für die gesuchten Komponenten $\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})$. Die zuletzt genannte Ungleichung sorgt dafür, dass die Lösungen $\phi(\mathbf{x})$ der Bestimmungsgleichungen (3.4) einen lokalen Diffeomorphismus bilden.

Es sei $\mathcal{U} \subseteq T\mathcal{M}$ eine invariante Distribution vom Rang s , die durch Vektorfelder

$$Y_k = \sum_{i=1}^n \eta_k^i(\mathbf{x}) \partial_{x^i}, \quad 1 \leq k \leq s$$

erzeugt wird. Die Invarianz von \mathcal{U} resultiert in einem System von $s(n-s)$ Bedingungen

$$T\phi(Y_k) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \eta_k^i(\mathbf{x}) \right) \partial_{x^j} = 0 \quad \text{mod } \mathcal{U}, \quad 1 \leq k \leq s$$

an die Komponenten von ϕ . Die so gefundenen „versteckten“ Bedingungen werden von jeder geometrischen Symmetrie ϕ automatisch erfüllt. Weitere Bedingungen dieser Art entstehen beispielsweise aus der Eigenschaft $[\mathcal{U}, T\phi(\mathcal{U})] \subseteq \mathcal{U}'$. Ist \mathcal{U} zusätzlich involutiv, so gilt $[\mathcal{U}, T\phi(\mathcal{U})] \subseteq \mathcal{U}$. Dies führt in lokalen Koordinaten auf $s^2(n-s)$ Bedingungen der Form

$$[Y_\ell, T\phi(Y_k)] = \left[\sum_{j=1}^n \eta_\ell^j(\phi(\mathbf{x})) \partial_{x^j}, \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \eta_k^i(\mathbf{x}) \right) \partial_{x^j} \right] = 0 \quad \text{mod } \mathcal{U}, \quad 1 \leq \ell, k \leq s.$$

Eine weitere elementare Folgerung der Diffeomorphie geometrischer Symmetrien ist die folgende Beobachtung: Sind \mathcal{V} und \mathcal{U} zwei invariante Distributionen mit $\mathcal{V} \subsetneq \mathcal{U}$, dann gilt

$$T\phi(\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}) \not\subseteq \mathcal{V}.$$

Bezeichnet $\{Y_{t+1}, \dots, Y_s\}$ eine Vervollständigung der Basis $\{Y_1, \dots, Y_t\}$ von \mathcal{V} zu einer Basis von \mathcal{U} , so gilt folglich $T\phi(Y_k) \neq 0 \quad \text{mod } \mathcal{V}$ für alle $t < k \leq s$. Betrachtet man die zugehörige Zerlegung von $T\phi(Y_k)$ bezüglich der Basis $\{Y_1, \dots, Y_s\}$, nämlich

$$T\phi(Y_k) = \sum_{\ell=1}^t \varphi_k^\ell(\mathbf{x}) Y_\ell + \sum_{\ell=t+1}^s \psi_k^\ell(\mathbf{x}) Y_\ell, \quad t < k \leq s,$$

so stellt man fest, dass die quadratische $(s-t) \times (s-t)$ -Matrix Ψ mit Einträgen $\psi_k^\ell(\mathbf{x})$ invertierbar sein muss. Einfache Überlegungen dieser Art können bei der Analyse der Bestimmungsgleichungen (3.4) sehr hilfreich sein.

3.3 Projektion und Prolongation geometrischer Symmetrien

In diesem Abschnitt gehen wir der Frage nach, unter welchen Bedingungen geometrische Symmetrien projizierbar sind. Als Motivation betrachten wir die natürliche Hierarchie von Differentialgleichungen. Zur Beschreibung der prolongierten Differentialgleichungen in unserem verallgemeinerten Kontext orientieren wir uns an den Eigenschaften der Vessiot-Distribution.

Definition 3.3.1. Unter einer *Prolongation der Differentialgleichung* $(\rho: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{H})$ verstehen wir ein Paar $(\rho \circ \pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{D})$, bestehend aus einer gefaserten Mannigfaltigkeit $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ zusammen mit einer Distribution $\mathcal{D} \subseteq T\mathcal{M}$, sodass gilt:

(i) $T_p \pi(\mathcal{D}_p) \subseteq \mathcal{H}_{\pi(p)}$ für alle $p \in \pi^{-1}(\{\pi(p)\})$.

(ii) Zu jeder ρ -transversalen Integralmannigfaltigkeit $\hat{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{N}$ von \mathcal{H} existiert genau eine $\rho \circ \pi$ -transversale Integralmannigfaltigkeit $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{M}$ von \mathcal{D} mit der Eigenschaft $\pi(\mathcal{O}) = \hat{\mathcal{O}}$.

Aus der ersten Bedingung folgt trivialerweise, dass jede $\rho \circ \pi$ -transversale Integralmannigfaltigkeit $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{M}$ von \mathcal{D} auf eine ρ -transversale Integralmannigfaltigkeit $\hat{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{N}$ von \mathcal{H} projiziert wird. Im Allgemeinen ist die lineare Hülle der Vereinigung von $T_p\pi(\mathcal{D}_p)$,

$$\left\langle \bigcup_{p \in \pi^{-1}(\{\pi(p)\})} T_p\pi(\mathcal{D}_p) \right\rangle \subseteq \mathcal{H}_{\pi(p)}, \quad (3.5)$$

ein echter Untervektorraum von $\mathcal{H}_{\pi(p)}$, weshalb die Distribution \mathcal{H} nicht direkt aus \mathcal{D} rekonstruierbar ist, vgl. (2.4). Die zweite Bedingung besagt unter anderem, dass die Lösungen von $(\rho: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{H})$ auf eindeutige Weise prolongiert werden können. Es ist daher naheliegend zu fragen, wann eine geometrische Symmetrie $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ von \mathcal{D} auf eine geometrische Symmetrie $\psi \in \Gamma(\mathcal{N}, \mathcal{H})$ von \mathcal{H} projiziert werden kann, derart, dass das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{M} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{N} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{N} \end{array}$$

kommutiert. Zur Klärung dieser Frage abstrahieren wir uns von den zugrundeliegenden Differentialgleichungen und betrachten die vorliegende Situation auf der Ebene von Distributionen.

Falls ein lokaler Diffeomorphismus $\phi: U \subseteq \mathcal{M} \rightarrow V \subseteq \mathcal{M}$ auf einen lokalen Diffeomorphismus $\psi: \pi(U) \subseteq \mathcal{N} \rightarrow \pi(V) \subseteq \mathcal{N}$ projiziert werden kann, dann ist ϕ notwendigerweise fasererhaltend bezüglich π . In diesem Fall existiert zu jedem Punkt $\hat{p} \in \pi(U) \subseteq \mathcal{N}$ genau ein Bildpunkt $\tilde{p} = \psi(\hat{p}) \in \pi(V) \subseteq \mathcal{N}$ derart, dass gilt

$$\phi(U \cap \pi^{-1}(\{\hat{p}\})) = V \cap \pi^{-1}(\{\tilde{p}\}).$$

Die Faser $\mathcal{M}_{\hat{p}} = \pi^{-1}(\{\hat{p}\}) \subset \mathcal{M}$ über \hat{p} muss nicht komplett im Definitionsbereich U von ϕ liegen, weshalb $U \cap \mathcal{M}_{\hat{p}}$ aus mehreren Zusammenhangskomponenten bestehen kann. Betrachten wir in dieser Situation den Tangentialraum $T_p\mathcal{M}_{\pi(p)} \cong V_p\pi$ an die Faser $\mathcal{M}_{\pi(p)} = \pi^{-1}(\{\pi(p)\})$ im Punkt $p \in U$, so finden wir

$$T_p\phi(V_p\pi) = V_{\phi(p)}\pi.$$

Folglich wird das Vertikalbündel $V\pi$ unter $T\phi$ auf sich abgebildet.

Proposition 3.3.2. Es seien $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine surjektive Submersion und $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ein lokaler Diffeomorphismus mit der Eigenschaft $T\phi(V\pi) = V\pi$. Außerdem seien alle π -Fasern im Definitionsbereich von ϕ zusammenhängend. Dann existiert ein lokaler Diffeomorphismus $\psi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ mit der Eigenschaft $\psi \circ \pi = \pi \circ \phi$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass der Diffeomorphismus $\phi: U \subseteq \mathcal{M} \rightarrow V \subseteq \mathcal{M}$ fasererhaltend bezüglich π ist. Dazu bemerken wir, dass das Vertikalbündel $V\pi$ eine *integrable* Distribution vom konstanten Rang $\dim V\pi = \dim \mathcal{M} - \dim \mathcal{N}$ ist. Die zugehörigen Integralmannigfaltigkeiten von $V\pi$ sind im Definitionsbereich U von ϕ zusammenhängend. Ist $U \cap \mathcal{M}_{\pi(p)}$ eine solche Integralmannigfaltigkeit, so ist $\phi(U \cap \mathcal{M}_{\pi(p)})$ ebenfalls zusammenhängend. Wegen $T_p\phi(V_p\pi) = V_{\phi(p)}\pi$ für alle $p \in U \cap \mathcal{M}_{\pi(p)}$ gilt folglich $\phi(U \cap \mathcal{M}_{\pi(p)}) = V \cap \mathcal{M}_{\pi(\phi(p))}$. Wir setzen $\psi(\hat{p}) = \psi(\pi(p)) := \pi(\phi(p))$. Die so konstruierte Abbildung $\psi: \pi(U) \subseteq \mathcal{N} \rightarrow \pi(V) \subseteq \mathcal{N}$ ist laut dem Submersionstheorem, siehe Abraham *et al.* [1, Theorem 3.5.2], ein lokaler Diffeomorphismus. \square

Die Voraussetzung, dass alle π -Fasern im Definitionsbereich von ϕ zusammenhängend sind, kann nach eventueller Einschränkung des Definitionsbereichs entfallen. Wendet man

die obige Proposition auf geometrische Symmetrien an, so gelangt man zu folgender Schlussfolgerung: Falls das Vertikalbündel $V\pi \subseteq T\mathcal{M}$ invariant ist, dann ist jede geometrische Symmetrie $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ lokal projizierbar auf einen lokalen Diffeomorphismus $\psi \in \text{Diff}_{\text{lok}}(\mathcal{N})$. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn das Vertikalbündel $V\pi$ mit der Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distribution $\text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}]$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ übereinstimmt.

Der so konstruierte lokale Diffeomorphismus $\psi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ ist zusätzlich genau dann eine geometrische Symmetrie von \mathcal{H} , wenn gilt $T\psi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Wenn dies der Fall ist, dann ist die Urbilddistribution $(T\pi)^{-1}(\mathcal{H}) \subseteq T\mathcal{M}$, punktweise gegeben durch

$$(T_p\pi)^{-1}(\mathcal{H}_{\pi(p)}) := \left\{ X_p \in T_p\mathcal{M} \mid T_p\pi(X_p) \in \mathcal{H}_{\pi(p)} \right\} \supseteq V_p\pi,$$

invariant unter $T\phi$. Diese Behauptung bestätigen wir durch einfaches Nachrechnen. Es gilt:

$$\left(T_{\phi(p)}\pi \circ T_p\phi \right) (X_p) = \left(T_{\pi(p)}\psi \circ T_p\pi \right) (X_p) \in T_{\pi(p)}\psi \left(\mathcal{H}_{\pi(p)} \right) = \mathcal{H}_{(\psi \circ \pi)(p)} = \mathcal{H}_{(\pi \circ \phi)(p)}$$

für alle $X_p \in (T_p\pi)^{-1}(\mathcal{H}_{\pi(p)}) \supseteq \mathcal{D}_p$. Die umgekehrte Inklusion ergibt sich beispielsweise aus Dimensionsbetrachtungen $\dim(T_p\pi)^{-1}(\mathcal{H}_{\pi(p)}) = \dim \mathcal{H}_{\pi(p)} + \dim V\pi$ und der Tatsache, dass $T_p\phi$ ein Isomorphismus ist. Die nächste Proposition beweist die Umkehrung dieser Aussage.

Proposition 3.3.3. Es seien $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine surjektive Submersion, $\mathcal{H} \subseteq T\mathcal{N}$ eine Distribution auf \mathcal{N} und $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ein lokaler π -fasererhaltender Diffeomorphismus mit der Eigenschaft $T\phi((T\pi)^{-1}(\mathcal{H})) = (T\pi)^{-1}(\mathcal{H})$. Dann existiert ein lokaler Diffeomorphismus $\psi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ mit der Eigenschaft $\psi \circ \pi = \pi \circ \phi$ und $T\psi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

Beweis. Da ϕ nach Voraussetzung π -fasererhaltend ist, existiert ein lokaler Diffeomorphismus ψ mit der Eigenschaft $\psi \circ \pi = \pi \circ \phi$. Weiter seien \hat{p} ein Punkt des Definitionsbereichs von ψ und $Y_{\hat{p}} \in \mathcal{H}_{\hat{p}} \subseteq T_{\hat{p}}\mathcal{N}$ ein beliebiger Vektor. Wir zeigen $T_{\hat{p}}\psi(Y_{\hat{p}}) \in \mathcal{H}_{\psi(\hat{p})}$. Hierzu sei $p \in \pi^{-1}(\{\hat{p}\})$ ein Punkt des Definitionsbereichs von ϕ . Da die Tangentialabbildung $T_p\pi$ surjektiv ist, finden wir einen Vektor $X_p \in (T_p\pi)^{-1}(\mathcal{H}_{\pi(p)}) \subseteq T_p\mathcal{M}$ mit der Eigenschaft $T_p\pi(X_p) = Y_{\hat{p}}$. Dann gilt

$$T_{\hat{p}}\psi(Y_{\hat{p}}) = (T_{\phi(p)}\pi \circ T_p\phi)(X_p) \in T_{\phi(p)}\pi \left((T_{\phi(p)}\pi)^{-1}(\mathcal{H}_{\pi(\phi(p))}) \right) = \mathcal{H}_{(\pi \circ \phi)(p)} = \mathcal{H}_{\psi(\hat{p})}.$$

Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion $T\psi(\mathcal{H}) \supseteq \mathcal{H}$ bemerken wir, dass die Umkehrabbildung ϕ^{-1} der gleichen Bedingung $T\phi^{-1}((T\pi)^{-1}(\mathcal{H})) = (T\pi)^{-1}(\mathcal{H})$ genügt. \square

Falls zusätzlich die Urbilddistribution $(T\pi)^{-1}(\mathcal{H})$ invariant ist, dann ist jede geometrische Symmetrie von \mathcal{D} lokal projizierbar auf eine geometrische Symmetrie von \mathcal{H} . Die Invarianz der Urbilddistribution liegt vor, wenn $(T\pi)^{-1}(\mathcal{H})$ mit $\mathcal{D}^{(k)}$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ übereinstimmt. Zusammenfassend halten wir folgendes Ergebnis fest:

Korollar 3.3.4. Es seien $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine surjektive Submersion, $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ eine geometrische Symmetrie von $\mathcal{D} \subseteq T\mathcal{M}$ und $\mathcal{H} \subseteq T\mathcal{N}$ eine Distribution auf \mathcal{N} .

- (i) Es gelte $V\pi = \text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}]$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.
- (ii) Es gelte $(T\pi)^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{D}^{(k)}$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.

Dann existiert um jeden Punkt p des Definitionsbereichs von ϕ eine Umgebung $p \in U \subseteq \text{dom } \phi$ und eine geometrische Symmetrie $\psi \in \Gamma(\mathcal{N}, \mathcal{H})$ mit Definitionsbereich $\text{dom } \psi \supseteq \pi(U)$ derart, dass gilt $\psi \circ \pi|_U = \pi \circ \phi|_U$.

Bemerkung 3.3.5. Wir haben bereits erwähnt, dass die lineare Hülle der Vereinigung (3.5) im Allgemeinen ein echter Untervektorraum von $\mathcal{H}_{\pi(p)}$ ist. Im Fall der Gleichheit

$$\left\langle \bigcup_{p \in \pi^{-1}(\{\hat{p}\})} T_p \pi(\mathcal{D}_p) \right\rangle = \mathcal{H}_{\hat{p}} \quad (3.6)$$

für alle $\hat{p} \in \mathcal{N}$ ist die Urbilddistribution $(T\pi)^{-1}(\mathcal{H})$ invariant unter π -fasererhaltenden geometrischen Symmetrien $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$. Hierzu seien $\psi \in \text{Diff}_{lok}(\mathcal{N})$ mit $\psi \circ \pi = \pi \circ \phi$ und $Y_{\hat{p}} \in \mathcal{H}_{\hat{p}}$ beliebig. Wir finden endlich viele Punkte $p_1, \dots, p_\ell \in \mathcal{M}_{\hat{p}} = \text{dom } \phi \cap \mathcal{M}_{\hat{p}}$ der Faser über \hat{p} und ℓ Vektoren $X_{p_i}^i \in \mathcal{D}_{p_i}$ derart, dass gilt

$$Y_{\hat{p}} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i T_{p_i} \pi(X_{p_i}^i), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Aus der Linearität der Tangentialabbildung $T_{\hat{p}}\psi: T_{\hat{p}}\mathcal{N} \rightarrow T_{\psi(\hat{p})}\mathcal{N}$ folgt

$$T_{\hat{p}}\psi(Y_{\hat{p}}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \left(T_{\phi(p_i)} \pi \circ T_{p_i} \phi \right) (X_{p_i}^i) \in \left\langle \bigcup_{i=1}^{\ell} T_{\phi(p_i)} \pi(\mathcal{D}_{\phi(p_i)}) \right\rangle \subseteq \mathcal{H}_{\psi(\hat{p})}.$$

Da ψ ein lokaler Diffeomorphismus ist, erhalten wir $T\psi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ und somit auch $\psi \in \Gamma(\mathcal{N}, \mathcal{H})$. Dabei haben wir vorausgesetzt, dass die Faser $\mathcal{M}_{\hat{p}}$ komplett im Definitionsbereich von ϕ liegt. \triangleleft

Im Gegensatz zur Projektion ist die Prolongation von Abbildungen, falls definiert, im Allgemeinen nicht eindeutig, siehe auch Bemerkung 4.1.6. Im Spezialfall *lokal lösbarer* Differentialgleichungen ist es unter zusätzlichen Voraussetzungen möglich die Eindeutigkeit der prolongierten geometrischen Symmetrien zu folgern.

Proposition 3.3.6. Es seien $\psi \in \Gamma(\mathcal{N}, \mathcal{H})$ eine ρ -fasererhaltende geometrische Symmetrie der Differentialgleichung $(\rho: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{H})$ und $(\rho \circ \pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{D})$ eine lokal lösbare Prolongation. Dann existiert höchstens eine geometrische Symmetrie $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ mit $\psi \circ \pi = \pi \circ \phi$.

Beweis. Es sei $p \in \mathcal{M}$ ein beliebiger Punkt. Da $(\rho \circ \pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{D})$ nach Voraussetzung lokal lösbar ist, finden wir eine $\rho \circ \pi$ -transversale Integralmannigfaltigkeit $p \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{M}$ von \mathcal{D} . Dann ist $\hat{\mathcal{O}} = \pi(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{N}$ eine ρ -transversale Integralmannigfaltigkeit der Distribution \mathcal{H} mit $\hat{p} = \pi(p) \in \hat{\mathcal{O}}$. Da ψ nach Voraussetzung fasererhaltend bezüglich ρ ist, ist das Bild $\psi(\hat{\mathcal{O}})$ wieder eine ρ -transversale Integralmannigfaltigkeit von \mathcal{H} mit $\psi(\hat{p}) \in \psi(\hat{\mathcal{O}})$, falls $\hat{\mathcal{O}}$ im Definitionsbereich von ψ liegt. Nach Definition 3.3.1 existiert genau eine $\rho \circ \pi$ -transversale Integralmannigfaltigkeit $\tilde{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{M}$ von \mathcal{D} mit $\pi(\tilde{\mathcal{O}}) = \psi(\hat{\mathcal{O}})$. Folglich existiert ein eindeutig bestimmter Punkt $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{O}}$ mit der Eigenschaft $\pi(\tilde{p}) = \psi(\hat{p})$. Falls eine geometrische Symmetrie ϕ existiert, so muss notwendigerweise $\phi(p) = \tilde{p}$ gelten. Man beachte, dass der so konstruierte Bildpunkt \tilde{p} von der Wahl der Integralmannigfaltigkeit \mathcal{O} abhängen kann, weshalb die Existenz von ϕ damit nicht bewiesen ist. \square

Korollar 3.3.7. Es seien $(\rho \circ \pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{D})$ eine lokal lösbare Prolongation der Differentialgleichung $(\rho: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{H})$ und $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ respektive $\psi \in \Gamma(\mathcal{N}, \mathcal{H})$ zwei geometrische Symmetrien mit $\psi \circ \pi = \pi \circ \phi$. Dann ist ϕ eine eindeutig bestimmte Prolongation von ψ .

Beweis. Es sei $\varphi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ eine weitere Prolongation von ψ mit der Eigenschaft $\psi \circ \pi = \pi \circ \varphi$. Für jede lokale Lösung $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{M}$ der Differentialgleichung $(\rho \circ \pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{D})$ ist $\hat{\mathcal{O}} = \pi(\mathcal{O})$ eine Lösung von $(\rho: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{H})$. Wegen $T\phi(V\pi) = V\pi$ bzw. $T\varphi(V\pi) = V\pi$ ist das Bild $\phi(\mathcal{O})$ bzw. $\varphi(\mathcal{O})$ wieder eine Lösung von $(\rho \circ \pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{D})$. Es gilt $\pi(\phi(\mathcal{O})) = \psi(\hat{\mathcal{O}}) = \pi(\varphi(\mathcal{O}))$. Insbesondere ist $\psi(\hat{\mathcal{O}})$ eine Lösung von $(\rho: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{H})$. Aus der Eindeutigkeit der Prolongation von Lösungen folgt $\phi(\mathcal{O}) = \varphi(\mathcal{O})$ und somit auch $\phi = \varphi$. \square

3.4 Infinitesimale geometrische Symmetrien

Die Bestimmung der ganzen Lie-Pseudogruppe $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ ist in der Regel ein hoffnungsloses Unterfangen. Bereits die Aufstellung der Bestimmungsgleichungen (3.4) ist in der Praxis ein schwer zu lösendes Problem. Vor diesem Hintergrund ist es naheliegend, nach einfacher zu beschreibenden Unterstrukturen der Lie-Pseudogruppe zu suchen, die auch algorithmisch effektiv berechnet werden können.

Definition 3.4.1. Es sei \mathcal{D} eine beliebige Distribution auf \mathcal{M} . Ein lokales Vektorfeld $X \in \Gamma_U(\tau_{\mathcal{M}})$ heißt *infinitesimale geometrische Symmetrie von \mathcal{D}* , wenn der zugehörige Fluss $\phi: \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ eine einparametrische *lokale Lie-Gruppe* von geometrischen Symmetrien von \mathcal{D} bildet.

Die Standardnotation für den Fluss eines Vektorfeldes X ist $\phi(t, p) = \phi_t(p) = \exp(tX)p$. Sein Definitionsbereich \mathfrak{U} ist eine offene Teilmenge der Produktmannigfaltigkeit $\mathbb{R} \times U$ mit der Eigenschaft $\{0\} \times U \subset \mathfrak{U}$. Es gilt $\phi_0 = \text{id}_U$ und $(\phi_t \circ \phi_s)(p) = \phi_{t+s}(p)$ für hinreichend kleine Werte von t, s . Der Fluss ϕ bildet genau dann eine lokale Lie-Gruppe, wenn die lokalen Diffeomorphismen ϕ_t für alle hinreichend kleinen Parameter $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ geometrische Symmetrien von \mathcal{D} sind. Für ausführliche Darstellungen zur Lie-Gruppentheorie verweisen wir auf Warner [39, Chapter 3] und Varadarajan [35].

Proposition 3.4.2. Es sei \mathcal{D} eine glatte Distribution auf \mathcal{M} . Ein Vektorfeld $X \in \Gamma_U(\tau_{\mathcal{M}})$ ist genau dann eine infinitesimale geometrische Symmetrie von \mathcal{D} , wenn gilt $\mathcal{L}_X \mathcal{D} = [X, \mathcal{D}] \subseteq \mathcal{D}$.

Beweis. Dies ist eine direkte Folgerung aus der Definition der Lie-Ableitung

$$\mathcal{L}_X Y = \frac{d}{dt} \left[(T \exp(tX))^{-1} Y \right]_{t=0}$$

mit einem beliebigen Vektorfeld $Y \in \mathcal{D}$. Daher gilt $T \exp(tX)(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ genau dann, wenn \mathcal{D} invariant unter der Lie-Ableitung nach dem Vektorfeld X ist. \square

Die Menge der infinitesimalen geometrischen Symmetrien von \mathcal{D} , in Zeichen

$$\text{Sym}[U, \mathcal{D}] := \{X \in \Gamma_U(\tau_{\mathcal{M}}) \mid [X, \mathcal{D}] \subseteq \mathcal{D}\},$$

bildet nach Proposition 3.2.5(i) eine reelle Lie-Algebra. Auf ähnliche Weise lassen sich infinitesimale geometrische Symmetrien für glatte Kodistributionen Γ einführen. In Analogie zur obigen Proposition ist ein Vektorfeld $X \in \Gamma_U(\tau_{\mathcal{M}})$ genau dann eine infinitesimale geometrische Symmetrie von Γ , wenn gilt $\mathcal{L}_X \Gamma = \{\mathcal{L}_X \omega \mid \omega \in \Gamma\} \subseteq \Gamma$. Hierbei bezeichnet $\mathcal{L}_X \omega$ die Lie-Ableitung einer Einsform ω nach einem Vektorfeld X . Für die so erhaltene reelle Lie-Algebra gilt stets $\text{Sym}[W, \mathcal{D}] \subseteq \text{Sym}[U, \mathcal{D}]$ mittels der Einschränkung auf $U \subseteq W \subseteq \mathcal{M}$. In der Regel werden infinitesimale geometrische Symmetrien nur lokal eingeführt, um sicher zu stellen, dass die globale topologische Struktur von \mathcal{M} keinen Einfluss hat, d.h. $\text{Sym}[W, \mathcal{D}] = \text{Sym}[U, \mathcal{D}]$ für alle $U \subset W$ gilt. Weiter induziert jede geometrische Symmetrie $\phi: U \subseteq \mathcal{M} \rightarrow V \subseteq \mathcal{M}$ von \mathcal{D} einen Lie-Algebren-Isomorphismus

$$\phi_* : \begin{cases} \text{Sym}[U, \mathcal{D}] & \longrightarrow & \text{Sym}[V, \mathcal{D}] \\ X & \longmapsto & \phi_* X. \end{cases}$$

Es seien allgemein $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k \subseteq T\mathcal{M}$ beliebige Subdistributionen, dann ist die Menge

$$\text{Sym}[U, \mathcal{D}; \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k] := \{X \in \text{Sym}[U, \mathcal{D}] \mid [X, \mathcal{U}_i] \subseteq \mathcal{U}_i \text{ für } i = 1, \dots, k\}$$

eine Lie-Unteralgebra von $\text{Sym}[U, \mathcal{D}]$. Dies folgt direkt aus der Jacobi-Identität. Bezeichnet \mathfrak{g} eine beliebige Lie-Unteralgebra von $\text{Sym}[U, \mathcal{D}]$, so wird die zugehörige (zusammenhängende) lokale Lie-Gruppe $\mathcal{G} \subseteq \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ mit $T_e\mathcal{G} \cong \mathfrak{g}$ kurz *Symmetriegruppe von \mathcal{D}* genannt.

Es sei $\{X_1, \dots, X_n\}$ ein Rahmen des Tangentialbündels $T\mathcal{M}$ derart, dass die ersten r Vektorfelder X_1, \dots, X_r die Distribution $\mathcal{D} = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$ aufspannen. Dann besitzt jedes Vektorfeld $X \in \Gamma_U(\tau\mathcal{M})$ in lokalen Koordinaten $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ auf \mathcal{M} die Form

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}) X_i \quad (3.7)$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizientenfunktionen $\xi^i \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$. Definitionsgemäß ist X genau dann eine infinitesimale geometrische Symmetrie von \mathcal{D} , wenn die Lie-Klammern

$$[X, X_k] = \sum_{i=1}^n \left(\xi^i(\mathbf{x}) [X_i, X_k] - X_k(\xi^i)(\mathbf{x}) X_i \right), \quad 1 \leq k \leq r \quad (3.8)$$

modulo \mathcal{D} verschwinden. Betrachten wir $T\mathcal{M}$ als eine involutive Distribution, so finden wir insgesamt n^3 Strukturkoeffizienten $C_{ik}^s \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, sodass gilt

$$[X_i, X_k] = \sum_{s=1}^n C_{ik}^s(\mathbf{x}) X_s, \quad 1 \leq i, k \leq n.$$

Einsetzen dieser Strukturgleichungen in die obige Formel (3.8) liefert

$$[X, X_k] \text{ mod } \mathcal{D} = \sum_{i=r+1}^n \left(\sum_{s=1}^n \xi^s(\mathbf{x}) C_{sk}^i(\mathbf{x}) - X_k(\xi^i)(\mathbf{x}) \right) X_i = 0, \quad 1 \leq k \leq r.$$

Hieraus ergeben sich $r(n-r)$ Bedingungen an die Koeffizienten $\xi^i(\mathbf{x})$ des Ansatzes für X :

$$X_k(\xi^i)(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^n \xi^s(\mathbf{x}) C_{sk}^i(\mathbf{x}), \quad 1 \leq k \leq r < i \leq n. \quad (3.9)$$

Da jedes Vektorfeld X_k eine eindeutige Darstellung bezüglich der Standardbasis $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}\}$ von $T\mathcal{M}$ besitzt, führt dies auf ein im Allgemeinen überbestimmtes System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für $\xi^i(\mathbf{x})$, das *bestimmendes System* genannt wird. Man beachte, dass die Gestalt der so erhaltenen Bestimmungsgleichungen (3.9) sowohl von der Zerlegung (3.7) von X als auch von der Wahl der Basis $\{X_1, \dots, X_n\}$ von $T\mathcal{M}$ abhängt. Ein wesentlicher Vorteil der Darstellung (3.7), gegenüber der Zerlegung von $X = \sum_{i=1}^n \eta^i(\mathbf{x}) \partial_{x^i}$ bezüglich der Standardbasis, liegt darin, dass das zugehörige bestimmende System direkt aus den Strukturgleichungen von $T\mathcal{M} = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ aufgestellt werden kann.

Korollar 3.4.3. *Es seien $\mathcal{U} \subseteq T\mathcal{M}$ eine glatte invariante Distribution auf \mathcal{M} und $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{D}]$ eine infinitesimale geometrische Symmetrie von \mathcal{D} . Dann gilt $\mathcal{L}_X\mathcal{U} = [X, \mathcal{U}] \subseteq \mathcal{U}$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $T\phi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ für jede geometrische Symmetrie $\phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{D})$. Demzufolge erhalten wir $T \exp(tX)(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, wobei $\exp(tX)$ den Fluss von X bezeichnet. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 3.4.2. Es gilt $\text{Sym}[U, \mathcal{D}; \mathcal{U}] = \text{Sym}[U, \mathcal{D}]$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Nicht jede glatte Distribution \mathcal{U} mit der Eigenschaft $\mathcal{L}_X\mathcal{U} = [X, \mathcal{U}] \subseteq \mathcal{U}$ für alle $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{D}]$ ist invariant unter *geometrischen* Symmetrien. \square

Insbesondere ist $\text{Sym}[U, \mathcal{D}] \cap \mathcal{U} = \{X \in \mathfrak{X}_U \cap \Gamma_U(\tau\mathcal{M}) \mid [X, \mathcal{D}] \subseteq \mathcal{D}\}$ ein Ideal der Lie-Algebra $\text{Sym}[U, \mathcal{D}]$. In der Tat, sind $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{D}]$ und $Y \in \text{Sym}[U, \mathcal{D}] \cap \mathcal{U}$ beliebig, dann gilt $[X, Y] \in \text{Sym}[U, \mathcal{D}]$ und $[X, Y] \in [X, \mathcal{U}] \subseteq \mathcal{U}$. Insgesamt erhalten wir $[X, Y] \in \text{Sym}[U, \mathcal{D}] \cap \mathcal{U}$.

Die praktische Bedeutung des obigen Korollars liegt in der Konstruktion von Integrabilitätsbedingungen an die Koeffizienten $\xi^i(\mathbf{x})$ des Ansatzes für $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{D}]$. Wird eine invariante Distribution $\mathcal{U} \subset T\mathcal{M}$ vom Rang s durch Vektorfelder Y_1, \dots, Y_s erzeugt, so betrachten wir eine Vervollständigung $\{Y_{s+1}, \dots, Y_n\}$ zu einer Basis von $T\mathcal{M}$ mit

$$X_i = \sum_{j=1}^n \varphi_i^j(\mathbf{x}) Y_j \quad \text{und} \quad [Y_j, Y_k] = \sum_{s=1}^n \tilde{C}_{jk}^s(\mathbf{x}) Y_s.$$

Aus der Eigenschaft $[X, \mathcal{U}] \subseteq \mathcal{U}$ ergeben sich dann $s(n-s)$ Bedingungen an $\xi^i(\mathbf{x})$ der Form

$$Y_k \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i^j(\mathbf{x}) \xi^i(\mathbf{x}) \right) = \sum_{s=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i^s(\mathbf{x}) \xi^i(\mathbf{x}) \right) \tilde{C}_{sk}^j(\mathbf{x}), \quad 1 \leq k \leq s < j \leq n.$$

Die so gewonnenen Integrabilitätsbedingungen können häufig die explizite Integration des bestimmenden Systems (3.9) vereinfachen, besonders dann, wenn möglichst viele Koeffizientenfunktionen φ_i^j und \tilde{C}_{sk}^j verschwinden.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Lie-Algebra $\text{Sym}[U, \mathcal{D}]$ und dem $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -Modul $\text{Char}[\mathcal{D}]$. Jede Cauchy-Cartan-Charakteristik $X \in \text{Char}[\mathcal{D}]$ ist eine infinitesimale geometrische Symmetrie, d.h. $X|_U \in \text{Sym}[U, \mathcal{D}]$, aber nicht umgekehrt, da eine infinitesimale geometrische Symmetrie nicht notwendigerweise in der Distribution \mathcal{D} enthalten sein muss. Es gilt $\text{Char}[\mathcal{D}]|_U = \text{Sym}[U, \mathcal{D}] \cap \mathcal{D} \subseteq \text{Sym}[U, \mathcal{D}]$. Insbesondere ist $\text{Sym}[U, \mathcal{D}]$ ein unendlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum, wenn $\text{Char}[\mathcal{D}]|_U \neq \{0\}$ nicht trivial ist. Schreiben wir das bestimmende System (3.9) in der Form

$$X_k(\xi^i)(\mathbf{x}) - \sum_{s=r+1}^n \xi^s(\mathbf{x}) C_{sk}^i(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^r \xi^s(\mathbf{x}) C_{sk}^i(\mathbf{x}), \quad 1 \leq k \leq r < i \leq n,$$

so erkennen wir, dass die Cauchy-Cartan-Charakteristiken $\sum_{s=1}^r \xi^s X_s$ spezielle Lösungen sind, für welche die linke Seite dieser Gleichungen identisch verschwindet.

Es seien $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ eine s -dimensionale (lokale) Integralmannigfaltigkeit der Distribution \mathcal{D} und $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ein Vektorfeld. Für hinreichend kleine Werte $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ führen wir die Menge $\mathcal{O}_t := \exp(tX)(\mathcal{O})$ ein. Es folgt, dass \mathcal{O}_t für jedes t wieder eine s -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Weiter ist \mathcal{O}_t eine Integralmannigfaltigkeit von \mathcal{D} , wenn X eine infinitesimale geometrische Symmetrie ist.

Proposition 3.4.4. Es seien $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ eine Cauchy-Cartan-Charakteristik von \mathcal{D} und $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ eine s -dimensionale Integralmannigfaltigkeit von \mathcal{D} derart, dass X überall transversal zu \mathcal{O} ist, d.h. $X_p \notin T_p\mathcal{O}$ für alle $p \in \mathcal{O}$. Dann ist die Menge

$$\mathcal{O}_X := \bigcup_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)} \mathcal{O}_t$$

eine $(s+1)$ -dimensionale Integralmannigfaltigkeit von \mathcal{D} .

Beweis. Aus den obigen Überlegungen wissen wir bereits, dass jede Teilmenge $\mathcal{O}_t \subset \mathcal{M}$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ eine Integralmannigfaltigkeit von \mathcal{D} ist. Da das Vektorfeld $X \in T\mathcal{O}_X$ per Definition in der Distribution \mathcal{D} enthalten ist, folgt die Behauptung. \square

Dieses Ergebnis zeigt die große Bedeutung von Cauchy-Cartan-Charakteristiken. Gemäß Definition 3.4.1 können wir jede infinitesimale geometrische Symmetrie dazu verwenden, um aus einer bekannten Integralmannigfaltigkeit \mathcal{O} neue Integralmannigfaltigkeiten \mathcal{O}_t zu gewinnen; ihre Dimension bleibt aber stets dieselbe. Finden wir aber eine transversale Cauchy-Cartan-Charakteristik X zu \mathcal{O} , dann können wir \mathcal{O} zu einer höherdimensionalen Integralmannigfaltigkeit \mathcal{O}_X fortsetzen, und diese Fortsetzung erfordert im Wesentlichen nur die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung, nämlich die Bestimmung des Flusses $\exp(tX)$ von X .

Korollar 3.4.5. *Es seien $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ eine Cauchy-Cartan-Charakteristik von \mathcal{D} und $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{M}$ eine maximale Integralmannigfaltigkeit von \mathcal{D} . Dann ist X tangential zu \mathcal{O} und es gilt $\exp(tX)(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ für alle hinreichend kleinen Werte $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Beweis. Bekanntlich nennt man eine Integralmannigfaltigkeit $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{M}$ *maximal*, wenn für jede andere Integralmannigfaltigkeit $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ von \mathcal{D} mit $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{N}$ folgt $\mathcal{O} = \mathcal{N}$. Wäre X nicht tangential zu \mathcal{O} , so erhielten wir $\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{O}_X$, im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Für *maximale* Integralmannigfaltigkeiten sind $X \in \text{Char}[\mathcal{D}]|_U \subseteq \text{Sym}[U, \mathcal{D}]$ in dieser Hinsicht die uninteressantesten Symmetrien. Um solche Symmetrien aus der Betrachtung auszuschließen, betrachten wir die zugehörige Quotienten-Lie-Algebra

$$\text{Shuf}[U, \mathcal{D}] := \text{Sym}[U, \mathcal{D}] / \text{Char}[\mathcal{D}]|_U,$$

die von den sogenannten (infinitesimalen) *Shuffling-Symmetrien* $X \in \text{Shuf}[U, \mathcal{D}]$ aufgespannt wird. Gilt $\text{Char}[\mathcal{D}]|_U = \langle X_1, \dots, X_s \rangle$, so ist ein Vektorfeld $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{D}]$ mit Darstellung (3.7) dann eine Shuffling-Symmetrie von \mathcal{D} , wenn die Koeffizienten ξ^1, \dots, ξ^s verschwinden.

Korollar 3.4.6. *Die Lie-Algebren $\text{Sym}[U, \mathcal{D}^{(k)}]$ bilden eine aufsteigende Kette*

$$\text{Sym}[U, \mathcal{D}] \subseteq \text{Sym}[U, \mathcal{D}'] \subseteq \dots \subseteq \text{Sym}[U, \mathcal{D}^{(k)}] \subseteq \text{Sym}[U, \mathcal{D}^{(k+1)}] \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

Beweis. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus Korollar 3.2.4 und Korollar 3.4.3. Alternativ folgt die Behauptung direkt aus der Jacobi-Identität. \square

Es besteht definitionsgemäß folgender Zusammenhang zwischen der Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distribution $\text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}]$ und der Lie-Algebra $\text{Sym}[U, \mathcal{D}^{(k)}]$:

$$\text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}]|_U = \text{Sym}[U, \mathcal{D}^{(k)}] \cap \mathcal{D}^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir die Frage untersucht, unter welchen Bedingungen geometrische Symmetrien (lokal) projizierbar sind. Die gleiche Frage stellt sich natürlich auch für infinitesimale geometrische Symmetrien. In diesem Kontext heben wir die folgende Proposition hervor:

Proposition 3.4.7. *Es seien $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine surjektive Submersion, $\mathcal{H} \subseteq T\mathcal{N}$ eine glatte Distribution auf \mathcal{N} und $(T\pi)^{-1}(\mathcal{H}) \subseteq T\mathcal{M}$ eine glatte Urbilddistribution. Weiter sei $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{D}]$ eine infinitesimale geometrische Symmetrie von \mathcal{D} . Es gelten folgende Annahmen:*

- (i) Alle π -Fasern in U seien zusammenhängend.
- (ii) Es gelte $\mathcal{L}_X V\pi = [X, V\pi] \subseteq V\pi$.
- (iii) Es gelte $\mathcal{L}_X (T\pi)^{-1}(\mathcal{H}) = [X, (T\pi)^{-1}(\mathcal{H})] \subseteq (T\pi)^{-1}(\mathcal{H})$.

Dann existiert eine eindeutig bestimmte infinitesimale geometrische Symmetrie $Y \in \text{Sym}[\pi(U), \mathcal{H}]$ mit der Eigenschaft $Y \circ \pi = T\pi \circ X$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{X} & T\mathcal{M} \\ \pi \downarrow & & \downarrow T\pi \\ \mathcal{N} & \xrightarrow{Y} & T\mathcal{N} \end{array}$$

Beweis. Wir betrachten zunächst ein beliebiges Vektorfeld $X \in \Gamma_U(\tau_{\mathcal{M}})$ auf \mathcal{M} . Das Vektorfeld X ist projizierbar auf $\mathcal{N} = \pi(\mathcal{M})$ genau dann, wenn für alle $\tilde{p} \in \mathcal{M}_{\pi(p)} \cap U$ mit $p \in U \subseteq \mathcal{M}$ gilt $T_p\pi(X_p) = T_{\tilde{p}}\pi(X_{\tilde{p}})$. Zum Nachweis dieser Eigenschaft betrachten wir den Fluss $\phi_t = \exp(tX)$ zum Vektorfeld $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{D}]$ mit $X_p = [t \mapsto \phi_t(p)]_{t=0}$. Nach Voraussetzung (ii) und Proposition 3.4.2 ist X eine infinitesimale geometrische Symmetrie von $V\pi$ und es gilt $T\phi_t(V\pi) = V\pi$ für alle hinreichend kleinen Parameter $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Wegen $\phi_0 = \text{id}_U$ und der Voraussetzung (i) können wir nach Proposition 3.3.2 ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass ϕ_t ein π -fasererhaltender Diffeomorphismus ist. Weiter finden wir zu jedem Parameter $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ einen lokalen Diffeomorphismus $\psi_t: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ mit der Eigenschaft $\psi_t \circ \pi = \pi \circ \phi_t$. Folgerichtig erhalten wir schließlich

$$Y_{\pi(p)} = T_p\pi(X_p) = [t \mapsto (\pi \circ \phi_t)(p)]_{t=0} = [t \mapsto (\pi \circ \phi_t)(\tilde{p})]_{t=0} = T_{\tilde{p}}\pi(X_{\tilde{p}}) = Y_{\pi(\tilde{p})}.$$

Die Voraussetzung (iii) impliziert $T\phi_t((T\pi)^{-1}(\mathcal{H})) = (T\pi)^{-1}(\mathcal{H})$. Nach Proposition 3.3.3 ist ψ_t eine geometrische Symmetrie von \mathcal{H} . Insbesondere ist $Y \in \text{Sym}[\pi(U), \mathcal{H}]$ eine infinitesimale geometrische Symmetrie von \mathcal{H} . \square

Korollar 3.4.8. *Es seien $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine surjektive Submersion, $\mathcal{D} \subseteq T\mathcal{M}$ eine glatte Distribution auf \mathcal{M} und $\mathcal{H} \subseteq T\mathcal{N}$ eine glatte Distribution auf \mathcal{N} .*

- (i) *Es gelte $V\pi = \text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}]$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.*
- (ii) *Es gelte $(T\pi)^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{D}^{(k)}$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.*

Dann existiert um jeden Punkt $p \in \mathcal{M}$ eine Umgebung $p \in U \subseteq \mathcal{M}$ derart, dass jede infinitesimale geometrische Symmetrie $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{D}]$ auf eine infinitesimale geometrische Symmetrie $Y \in \text{Sym}[\pi(U), \mathcal{H}]$ projizierbar ist.

Beweis. Dies folgt direkt aus Korollar 3.3.4. \square

Kapitel 4

Kontaktsymmetrien

Der klassische, von Sophus Lie eingeführte Symmetriebegriff ist der der Kontaktsymmetrie. Analog zur Galoistheorie für algebraische Gleichungen wollte Lie die Struktur von (gewöhnlichen) Differentialgleichungen mit Hilfe von kontinuierlichen Transformationsgruppen untersuchen. Aufgrund des hohen Rechenaufwandes blieben diese Methoden jedoch lange Zeit ungenutzt. Erst mit dem Aufkommen von Computeralgebrasystemen fand die Symmetrieanalyse von Differentialgleichungen starke Beachtung. Im vorliegenden Kapitel betrachten wir die klassische Lie-Symmetrietheorie von Differentialgleichungen aus geometrischer Sicht.

4.1 Kontakttransformationen

Ende des 19. Jahrhunderts beschrieb Sophus Lie ausführlich sogenannte *Berührungstransformationen* [20], [21], unter anderem, um Differentialgleichungen und Methoden wie die Legendre-Transformation und die kanonische Transformation der klassischen Mechanik zu studieren. In heutiger Sprache sind sie Diffeomorphismen des Jetbündels, welche Kontaktstrukturen erhalten, und heißen *Kontakttransformationen*.

Definition 4.1.1. Ein lokaler Diffeomorphismus $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ heißt *Kontakttransformation der Ordnung $q \geq 1$* , wenn gilt $T\Phi(\mathcal{C}_q) = \mathcal{C}_q$ oder äquivalent $T^*\Phi(\mathcal{C}_q^0) = \mathcal{C}_q^0$.

Zusammen mit der Kontaktdistribution $\mathcal{C}_q \subset TJ_q\pi$ bildet das Paar $(\pi^q: J_q\pi \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{C}_q)$ eine lokal lösbare Differentialgleichung im Sinn der Definition 3.1.4 und die geometrischen Symmetrien von \mathcal{C}_q sind gerade die Kontakttransformationen auf $J_q\pi$. Die zugehörige Lie-Pseudogruppe bezeichnen wir mit $\Gamma(J_q\pi, \mathcal{C}_q)$. Eine einfache Folgerung aus der Definition ist die folgende Beobachtung: Es sei $\mathcal{N} = \text{im } j_q\sigma \subset J_q\pi$ das Bild eines prolongierten Schnittes $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$ und $\Phi: U \subseteq J_q\pi \rightarrow V \subseteq J_q\pi$ eine Kontakttransformation mit $\mathcal{N} \subset U$. Dann ist $\Phi(\mathcal{N})$ eine Integralmannigfaltigkeit der Kontaktdistribution \mathcal{C}_q . Ist $\Phi(\mathcal{N})$ zusätzlich transversal zur Projektion $\pi^q: J_q\pi \rightarrow \mathcal{X}$, dann existiert nach Proposition 2.2.2 ein lokaler Schnitt $\bar{\sigma} \in \Gamma_{lok}(\pi)$ mit $\Phi(\mathcal{N}) = \text{im } j_q\bar{\sigma}$. Falls die Kontakttransformation Φ „nah“ an der Identität $\text{id}_{J_q\pi}$ liegt, so bildet sie prolongierte Schnitte in prolongierte Schnitte ab.

Zum besseren Verständnis der Kontaktbedingung $T\Phi(\mathcal{C}_q) = \mathcal{C}_q$ wollen wir sie in lokalen Koordinaten $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ auf $J_q\pi$ untersuchen. Jede Abbildung $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ besitzt die Form

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = (\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}), \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})).$$

Hierbei ist $\xi = \xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ eine lokale Darstellung von $\pi^q \circ \Phi: J_q\pi \rightarrow \mathcal{X}$ und $\psi = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ bezeichnet alle verbleibenden Komponenten von Φ . Nach Proposition 2.2.2 wird die Kontaktdistribution \mathcal{C}_q lokal durch zwei Arten von Vektorfeldern aufgespannt: transversale Vektorfelder $\mathcal{C}_i^{(q)}$ mit $1 \leq i \leq n$ und vertikale Vektorfelder $\mathcal{C}_\alpha^\mu \in V\pi_{q-1}^q$ mit $1 \leq \alpha \leq m$, $|\mu| = q$. Die

linke Seite der Kontaktbedingung $T_\rho\Phi((\mathcal{C}_\alpha^\mu)_\rho) \in (\mathcal{C}_q)_{\Phi(\rho)}$ lautet, ausgeschrieben:

$$T_\rho\Phi((\mathcal{C}_\alpha^\mu)_\rho) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{x^i} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| < q} \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta}. \quad (4.1)$$

Hierbei beschreibt die rechte Seite einen Vektor im Bildpunkt $\Phi(\rho) \in J_q\pi$, wobei die Ableitungen der Koeffizientenfunktionen in $\rho = (\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ ausgewertet werden. Die letzte Doppelsumme liegt im vertikalen Anteil der Kontaktverteilung $V_{\Phi(\rho)}\pi_{q-1}^q \subset (\mathcal{C}_q)_{\Phi(\rho)}$. Die ersten zwei Summen liegen genau dann in $(\mathcal{C}_q)_{\Phi(\rho)}$, wenn diese eine Linearkombination der transversalen Kontaktvektorfelder $(\mathcal{C}_i^{(q)})_{\Phi(\rho)}$ sind. Ein Koeffizientenvergleich ergibt die hierzu äquivalenten Bedingungen an die Komponenten von Φ :

$$\frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} = \sum_{i=1}^n \psi_{\nu+1_i}^\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha}, \quad 0 \leq |\nu| < |\mu| = q. \quad (4.2)$$

Diese Bedingungen nennen wir im Folgenden *vertikale Kontaktbedingungen*. Sie beschreiben in lokalen Koordinaten die geometrische Forderung $T\Phi(V\pi_{q-1}^q) \subset \mathcal{C}_q$. Falls Φ die vertikalen Kontaktbedingungen (4.2) erfüllt, so schreiben wir (4.1) in der Form

$$T_\rho\Phi((\mathcal{C}_\alpha^\mu)_\rho) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) (\mathcal{C}_i^{(q)})_{\Phi(\rho)} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) (\mathcal{C}_\beta^\nu)_{\Phi(\rho)}. \quad (4.3)$$

Für die transversalen Kontaktvektorfelder $\mathcal{C}_i^{(q)}$ mit $1 \leq i \leq n$ erhalten wir nach gleicher Rechnung die folgende kompakte Darstellung:

$$T_\rho\Phi((\mathcal{C}_i^{(q)})_\rho) = \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j) \partial_{x^j} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| < q} \mathcal{C}_i^{(q)}(\psi_\nu^\beta) \partial_{u_\nu^\beta} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \mathcal{C}_i^{(q)}(\psi_\nu^\beta) \partial_{u_\nu^\beta}. \quad (4.4)$$

Man bestätigt leicht, dass die rechte Seite genau dann in $(\mathcal{C}_q)_{\Phi(\rho)}$ liegt, wenn gilt

$$\mathcal{C}_i^{(q)}(\psi_\nu^\beta) = \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j), \quad 0 \leq |\nu| < q. \quad (4.5)$$

Diese Bedingungen nennen wir im Folgenden *transversale Kontaktbedingungen*. Sie beschreiben in lokalen Koordinaten die geometrische Forderung $T\Phi(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}_q$ für ein Komplement $\mathcal{H} = \langle \mathcal{C}_1^{(q)}, \dots, \mathcal{C}_n^{(q)} \rangle$ von $V\pi_{q-1}^q$ in \mathcal{C}_q , das durch Basisvektorfelder $\mathcal{C}_i^{(q)}$ aufgespannt wird. Falls Φ die transversalen Kontaktbedingungen (4.5) erfüllt, so schreiben wir $T_\rho\Phi((\mathcal{C}_i^{(q)})_\rho)$ als

$$T_\rho\Phi((\mathcal{C}_i^{(q)})_\rho) = \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j)(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) (\mathcal{C}_j^{(q)})_{\Phi(\rho)} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \mathcal{C}_i^{(q)}(\psi_\nu^\beta)(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) (\mathcal{C}_\beta^\nu)_{\Phi(\rho)}. \quad (4.6)$$

Ein lokaler Diffeomorphismus $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ ist folglich genau dann eine Kontakttransformation, wenn die beiden Kontaktbedingungen (4.2) und (4.5) erfüllt sind. Aus der Diffeomorphie von Φ ergibt sich weiter, dass die zusammengesetzte quadratische $\dim \mathcal{C}_q \times \dim \mathcal{C}_q$ -Matrix

$$K_\Phi := \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq \alpha \leq m, |\mu|=q}} & \left(\mathcal{C}_j^{(q)}(\xi^i) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \\ \hline \left(\frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \right)_{\substack{1 \leq \beta \leq m, |\nu|=q \\ 1 \leq \alpha \leq m, |\mu|=q}} & \left(\mathcal{C}_j^{(q)}(\psi_\nu^\beta) \right)_{\substack{1 \leq \beta \leq m, |\nu|=q \\ 1 \leq j \leq n}} \end{array} \right) = \left(J^q\Phi \left| \begin{array}{c} \mathcal{C} \\ * \end{array} \right. \right)$$

invertierbar ist. Sie entspricht der Abbildungsmatrix von $T_\rho\Phi|_{(\mathcal{C}_q)_\rho}: (\mathcal{C}_q)_\rho \rightarrow (\mathcal{C}_q)_{\Phi(\rho)}$.

Beispiel 4.1.2. Wir betrachten auf dem Jetbündel erster Ordnung eine Selbstabbildung $\Phi: J_1\pi \rightarrow J_1\pi$ mit lokaler Darstellung $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{(1)}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{(1)}))$. Die vertikalen Kontaktbedingungen (4.2) sind trivialerweise erfüllt. Die Abbildung Φ erfüllt genau dann die transversalen Kontaktbedingungen (4.5), wenn gilt¹

$$\psi_i^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{(1)}) = \mathcal{C}_i^{(1)}(\varphi^\beta)(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{(1)}) = \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^i}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{\alpha=1}^n u_i^\alpha \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial u^\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (4.7)$$

Wenn dies der Fall ist, sehen wir anhand der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \psi_i^\beta}{\partial u_k^\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{(1)}) = \begin{cases} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial u^\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & \text{falls } i = k, \\ 0, & \text{falls } i \neq k, \end{cases}$$

dass die Jacobi-Matrix von Φ eine linke untere Blockstruktur besitzt

$$J\Phi = \left(\begin{array}{cc|ccc} I_n & 0 & & & \\ \hline \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}} & & & \\ \hline & * & \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}} & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}} \end{array} \right),$$

wenn $x^1 \prec \cdots \prec x^n \prec u^1 \prec \cdots \prec u^m \prec u_1^1 \prec u_1^2 \prec \cdots \prec u_1^m \prec \cdots \prec u_n^1 \prec u_n^2 \prec \cdots \prec u_n^m$ die zugehörige Ordnung der Jetvariablen $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{(1)})$ bezeichnet. Hierbei steht I_n für die $n \times n$ -Einheitsmatrix. Nach dem Entwicklungssatz für Blockmatrizen erhalten wir

$$\det J\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{(1)}) = \left(\det \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \right)^{n+1}.$$

Zusammenfassend stellen wir fest, dass die obige Abbildung $\Phi: J_1\pi \rightarrow J_1\pi$ genau dann eine Kontakttransformation ist, wenn die Matrix $\partial \varphi / \partial \mathbf{u}$ invertierbar ist und (4.7) gilt. \triangleleft

Bemerkung 4.1.3. Die aufgestellten Kontaktbedingungen (4.2) und (4.5) lassen sich alternativ mit Hilfe der formalen Ableitung $D_i: \mathcal{F}(J_q\pi) \rightarrow \mathcal{F}(J_{q+1}\pi)$ formulieren. Es gilt:

$$D_i \psi_\nu^\beta = \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta D_i \xi^j, \quad 0 \leq |\nu| < q. \quad (4.8)$$

Diese Formel entsteht durch Summation der beiden Kontaktbedingungen, wie folgt:

$$\begin{aligned} D_i \psi_\nu^\beta &= \mathcal{C}_i^{(q)}(\psi_\nu^\beta) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} u_{\mu+1_i}^\alpha \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \\ &= \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} u_{\mu+1_i}^\alpha \left(\sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial \xi^j}{\partial u_\mu^\alpha} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \left(\mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} u_{\mu+1_i}^\alpha \frac{\partial \xi^j}{\partial u_\mu^\alpha} \right) = \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta D_i \xi^j. \end{aligned}$$

¹Der besseren Lesbarkeit halber schreiben wir u_i^α statt $u_{i_i}^\alpha$.

Umgekehrt lassen sich aus (4.8) wieder die beiden Kontaktbedingungen leicht herleiten. Beispielsweise erhalten wir die vertikalen Kontaktbedingungen direkt aus

$$\frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} = \frac{\partial (D_i \psi_\nu^\beta)}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} = \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial (D_i \xi^j)}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} = \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial \xi^j}{\partial u_\mu^\alpha}, \quad 0 \leq |\nu| < |\mu| = q.$$

Ein Nachteil der obigen Prolongationsformel (4.8) ist, dass sie Ableitungen der Ordnung $q+1$ enthält und somit formal gesehen auf einem höheren Jetbündel $J_{q+1}\pi$ definiert ist. \triangleleft

Aus der Diffeomorphie einer Kontakttransformation $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ folgt direkt

$$\dim(T\Phi(\mathcal{C}_q) \bmod V\pi_{q-1}^q) = n. \quad (4.9)$$

Betrachten wir die Koeffizienten vor den transversalen Kontaktvektorfeldern in Darstellungen (4.3) und (4.6), so stellen wir in lokalen Koordinaten äquivalent fest, dass die zusammengesetzte $n \times \dim \mathcal{C}_q$ -Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq \alpha \leq m, |\mu|=q}} & \left(\mathcal{C}_j^{(q)}(\xi^i) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \end{array} \right)$$

vollen Zeilenrang n besitzt. Sie besteht aus den ersten n Zeilen der Matrix K_Φ . Die Matrix $C = C(\rho)$ mit Einträgen $C_{ji} = \mathcal{C}_j^{(q)}(\xi^i)(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$, im Folgenden *Kontaktmatrix von Φ* genannt, spielt an mehreren Stellen eine entscheidende Rolle. Es gilt $\text{rang } C(\rho) = \dim T_\rho(\pi^q \circ \Phi)(\mathcal{H}_\rho)$ für das Komplement $\mathcal{H} = \langle \mathcal{C}_1^{(q)}, \dots, \mathcal{C}_n^{(q)} \rangle$. Die beiden miteinander gekoppelten Kontaktbedingungen zusammen mit der erwähnten Rangbedingung (4.9) legen alle Koordinatenfunktionen $\psi_\nu^\beta = \psi_\nu^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ von Φ mit $0 < |\nu| \leq q$ eindeutig fest. Damit ist Φ durch $\pi_0^q \circ \Phi$ eindeutig bestimmt. Zu beliebig vorgegebenen Funktionen $\xi^i = \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ und $\psi^\beta = \psi^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ kann es folglich höchstens eine Kontakttransformation Φ mit diesen Koordinatenfunktionen geben. Einschränkungen an die Wahl von ξ^i und ψ^β entstehen aus den zugehörigen Kompatibilitätsbedingungen und der geforderten Diffeomorphie von Φ . Welche Funktionen ξ^i und ψ^β eine Kontakttransformation Φ tatsächlich festlegen, ist der Inhalt des Theorems von Bäcklund 4.2.6.

Wir wollen die in Kapitel 3 vorgestellten Methoden für Strukturanalyse der Lie-Pseudogruppe $\Gamma(J_q\pi, \mathcal{C}_q)$ einsetzen. Zu diesem Zweck untersuchen wir die Eigenschaften der k -fach (stark) abgeleiteten Kontaktdistribution $\mathcal{C}_q^{(k)} \subseteq TJ_q\pi$, rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_q^{(0)} &:= \mathcal{C}_q, \\ \mathcal{C}_q^{(k+1)} &:= \left(\mathcal{C}_q^{(k)} \right)' = \mathcal{C}_q^{(k)} + \left[\mathcal{C}_q^{(k)}, \mathcal{C}_q^{(k)} \right], \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Die nächste Proposition beschreibt in lokalen Koordinaten eine natürliche Basis von $\mathcal{C}_q^{(k)}$.

Proposition 4.1.4. Die k -fach (stark) abgeleitete Kontaktdistribution $\mathcal{C}_q^{(k)} \subseteq TJ_q\pi$ wird lokal durch zwei Arten von Vektorfeldern

$$\mathcal{C}_i^{(q-k)} = \partial_{x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| < q-k} u_{\mu+1_i}^\alpha \partial_{u_\mu^\alpha}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.10a)$$

$$\mathcal{C}_\alpha^\mu = \partial_{u_\mu^\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq m, \quad q-k \leq |\mu| \leq q \quad (4.10b)$$

aufgespannt. Es gilt² $V\pi_{q-k-1}^q \subset \mathcal{C}_q^{(k)}$ mit $\dim \mathcal{C}_q^{(k)} = n + m \left[\binom{n+q}{q} - \binom{n+q-k-1}{q-k-1} \right]$.

²Für $k \geq q$ setzen wir allgemein $V\pi_{q-k-1}^q := V\pi^q$.

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $k = 1$. Laut Proposition 2.2.2 wird die Kontaktdistribution $\mathcal{C}_q \subset TJ_q\pi$ lokal durch die Vektorfelder $\mathcal{C}_i^{(q)}$ und \mathcal{C}_α^μ mit $|\mu| = q$ erzeugt. Man bestätigt leicht, dass mit Ausnahme von

$$[\mathcal{C}_\alpha^{\mu+1_i}, \mathcal{C}_i^{(q)}] = \partial_{u_\mu^\alpha} \notin \mathcal{C}_q, \quad |\mu| = q - 1$$

alle Lie-Klammern verschwinden. Daher gilt $\partial_{u_\mu^\alpha} \in \mathcal{C}'_q$ für alle $|\mu| = q - 1$ und somit auch

$$\mathcal{C}_i^{(q-1)} := \mathcal{C}_i^{(q)} - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q-1} u_{\mu+1_i}^\alpha \partial_{u_\mu^\alpha} \in \mathcal{C}'_q \supset \mathcal{C}_q, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Mittels vollständiger Induktion folgt im Fall $1 < k \leq q$ analog

$$[\mathcal{C}_\alpha^{\mu+1_i}, \mathcal{C}_i^{(q-k+1)}] = \partial_{u_\mu^\alpha} \in \mathcal{C}_q^{(k)}, \quad |\mu| = q - k.$$

Alle anderen Lie-Klammern verschwinden. Insbesondere ist $\mathcal{C}_q^{(k-1)}$ nicht involutiv. Weiter gilt

$$\mathcal{C}_i^{(q-k)} := \mathcal{C}_i^{(q-k+1)} - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q-k} u_{\mu+1_i}^\alpha \partial_{u_\mu^\alpha} \in \mathcal{C}_q^{(k)} \supset \mathcal{C}_q^{(k-1)}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Für $k \geq q$ finden wir $\mathcal{C}_q^{(k)} = TJ_q\pi$. Die Dimensionsformel für $\mathcal{C}_q^{(k)} \subseteq TJ_q\pi$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{C}_q^{(k)} &= n + \dim V\pi_{q-k-1}^q \\ &= n + (\dim J_q\pi - \dim J_{q-k-1}\pi) \\ &= n + m \left[\binom{n+q}{q} - \binom{n+q-k-1}{q-k-1} \right]. \end{aligned}$$

Wir bemerken in Analogie zum Korollar 2.2.3, dass die k -fach abgeleitete Kontaktdistribution $\mathcal{C}_q^{(k)} \subseteq TJ_q\pi$ lokal in zwei Subdistributionen $\mathcal{H} \oplus V\pi_{q-k-1}^q$ zerfällt. Das transversale Komplement \mathcal{H} ist n -dimensional und nicht eindeutig bestimmt. \square

Die so entstandene aufsteigende Kette von Distributionen

$$\mathcal{C}_q \subset \mathcal{C}'_q \subset \mathcal{C}''_q \subset \dots \subset \mathcal{C}_q^{(q-1)} \subset \mathcal{C}_q^{(q)} = TJ_q\pi$$

wird nach q Schritten stationär. Weiter ist \mathcal{C}_q eine holonome Distribution mit $\mathcal{C}_q^{(q)} = TJ_q\pi$. Die in Bemerkung 3.2.3 eingeführte *schwache* Ableitung von Distributionen liefert im Fall der Kontaktdistribution das gleiche Ergebnis, denn es gilt $\tilde{\mathcal{C}}_q^{(k)} = \mathcal{C}_q^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die in Proposition 4.1.4 angegebene Basis von $\mathcal{C}_q^{(k)} \subseteq TJ_q\pi$ ist über k Ordnungen projizierbar, d.h. $T\pi_{q-k}^q(\mathcal{C}_i^{(q-k)})$ ist ein wohldefiniertes Vektorfeld auf $J_{q-k}\pi$. Aus diesem Grund gilt

$$(\mathcal{C}_q)_\rho = T_{\hat{\rho}}\pi_{q-k}^{q+r}((\mathcal{C}_{q+r}^{(r)})_{\hat{\rho}})$$

für alle $\hat{\rho} \in (\pi_{q-k}^{q+r})^{-1}(\{\rho\})$, vergleiche Formel (2.4), sowie $(\mathcal{C}_q^{(k)})_\rho = (T_\rho\pi_{q-k}^q)^{-1}((\mathcal{C}_{q-k})_{\pi_{q-k}^q(\rho)})$ für alle $k \leq q$. Mit anderen Worten ist $\mathcal{C}_q^{(k)} = (T\pi_{q-k}^q)^{-1}(\mathcal{C}_{q-k})$ die Urbilddistribution von \mathcal{C}_{q-k} .

Korollar 4.1.5. *Es seien $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ eine Kontakttransformation der Ordnung $q \geq 1$ und $\mathcal{C}_q^{(k)} \subseteq TJ_q\pi$ die k -fach abgeleitete Kontaktdistribution auf $J_q\pi$. Dann gilt $T\Phi(\mathcal{C}_q^{(k)}) = \mathcal{C}_q^{(k)}$ oder äquivalent $T^*\Phi((\mathcal{C}_q^0)^{(k)}) = (\mathcal{C}_q^0)^{(k)}$.*

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Korollar 3.2.4 mit $\mathcal{M} := J_q\pi$ und $\mathcal{D} := \mathcal{C}_q$. Man beachte, dass nur die Fälle $0 < k < q$ nicht trivial sind: Für $k = 0$ erhalten wir die Ausgangsdefinition 4.1.1 von Kontakttransformationen. Für $k = q$ ergibt sich, wegen $\mathcal{C}_q^{(q)} = TJ_q\pi$, die Tatsache, dass Φ ein lokaler Diffeomorphismus ist. \square

Es seien $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ eine beliebige glatte Abbildung und $\partial_{u_\mu^\alpha} \in V\pi_{q-k-1}^q \subset \mathcal{C}_q^{(k)}$ ein vertikales Vektorfeld mit $0 < |\mu| = q - k$, dann gilt allgemein

$$\begin{aligned} T\Phi(\partial_{u_\mu^\alpha}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{x^i} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq q} \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \mathcal{C}_i^{(q)} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| < q} \left(\frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} - \sum_{i=1}^n \psi_{\nu+1_i}^\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \right) \partial_{u_\nu^\beta} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta}. \end{aligned}$$

Insbesondere liegt $T\Phi(\partial_{u_\mu^\alpha})$ genau dann in $\mathcal{C}_q^{(k)}$, wenn die Koordinatenfunktionen ψ_ν^β von Φ den *verallgemeinerten* vertikalen Kontaktbedingungen

$$\frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} = \sum_{i=1}^n \psi_{\nu+1_i}^\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha}, \quad 0 \leq |\nu| < |\mu| \quad (4.11)$$

genügen. Für eine Kontakttransformation Φ erhalten wir nach Korollar 4.1.5 somit

$$T\Phi(\partial_{u_\mu^\alpha}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \mathcal{C}_i^{(q)} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\mu| \leq |\nu| < q} \left(\frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} - \sum_{i=1}^n \psi_{\nu+1_i}^\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \right) \partial_{u_\nu^\beta} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta}. \quad (4.12)$$

Der geometrische Ursprung der verallgemeinerten vertikalen Kontaktbedingungen (4.11) liegt natürlich in der Lie-Ableitung und der Rechenregel

$$\Phi_* \partial_{u_\mu^\alpha} = \Phi_* \left(\left[\partial_{u_{\mu+1_i}^\alpha}, \mathcal{C}_i^{(q)} \right] \right) = \left[\Phi_* \partial_{u_{\mu+1_i}^\alpha}, \Phi_* \mathcal{C}_i^{(q)} \right].$$

Wir wollen der Vollständigkeit halber zeigen, dass die gefundenen Bedingungen (4.11) in Wirklichkeit *Integrabilitätsbedingungen* sind, d.h. sie entstehen durch geschickte Manipulationen der beiden Kontaktbedingungen (4.2) und (4.5) und werden von jeder Kontakttransformation automatisch erfüllt. Der Beweis wird mittels vollständiger Induktion nach der Länge $|\mu|$ geführt.

IA. Im Fall $|\mu| = q$ ist nichts mehr zu zeigen, siehe (4.2).

IV. Es gelte (4.11) für alle Multiindizes μ mit $r < |\mu| \leq q$.

IS. Es sei $0 < r = |\mu| < q$. Wir leiten die transversalen Kontaktbedingungen

$$\mathcal{C}_i^{(q)}(\psi_\nu^\beta) = \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j), \quad 0 \leq |\nu| < r$$

nach $u_{\mu+1_i}^\alpha$ ab und erhalten unter Verwendung der Produktregel zunächst

$$\mathcal{C}_i^{(q)} \left(\frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} \right) + \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_{\nu+1_j}^\beta}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j) + \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \mathcal{C}_i^{(q)} \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} \right) + \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial \xi^j}{\partial u_\mu^\alpha}.$$

Anschließend stellen wir die Terme geeignet um:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} - \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial \xi^j}{\partial u_\mu^\alpha} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_{\nu+1_j}^\beta}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j) - \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q)}(\psi_{\nu+1_j}^\beta) \frac{\partial \xi^j}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} - \mathcal{C}_i^{(q)} \left(\frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} - \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial \xi^j}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} \right) \\
&\stackrel{IV.}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_{\nu+1_j}^\beta}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j) - \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q)}(\psi_{\nu+1_j}^\beta) \frac{\partial \xi^j}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Die auf der rechten Seite stehenden Summenausdrücke lassen sich für $0 \leq |\nu| < r$ zu Null vereinfachen. Erneutes Anwenden der Induktionsvoraussetzung ergibt schließlich

$$\begin{aligned}
& \stackrel{IV.}{=} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \psi_{\nu+1_j+1_k}^\beta \frac{\partial \xi^k}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} \right) \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j) - \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q)}(\psi_{\nu+1_j}^\beta) \frac{\partial \xi^j}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} \\
&\stackrel{(4.5)}{=} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \psi_{\nu+1_j+1_k}^\beta \frac{\partial \xi^k}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} \right) \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j) - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \psi_{\nu+1_j+1_k}^\beta \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^k) \right) \frac{\partial \xi^j}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} = 0.
\end{aligned}$$

Nach Umbenennung der Summationsindizes folgt die Behauptung.

Die obigen Rechnungen korrespondieren damit, dass wir die Lie-Klammer $[\partial_{u_{\mu+1_i}^\alpha}, T\Phi(\mathcal{C}_i^{(q)})]$ auf zwei unterschiedliche Arten auswerten: Für jeden Multiindex μ mit $|\mu| < q$ gilt

$$\begin{aligned}
& \left[\partial_{u_{\mu+1_i}^\alpha}, T\Phi(\mathcal{C}_i^{(q)}) \right]_{\Phi(\rho)} \stackrel{(4.4)}{=} \left[\partial_{u_{\mu+1_i}^\alpha}, \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j) \partial_{x^j} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq q} \mathcal{C}_i^{(q)}(\psi_\nu^\beta) \partial_{u_\nu^\beta} \right]_{\Phi(\rho)} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi^j}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{x^j} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq q} \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta} \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q)} \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} \right) \partial_{x^j} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq q} \mathcal{C}_i^{(q)} \left(\frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} \right) \partial_{u_\nu^\beta}, \\
& \left[\partial_{u_{\mu+1_i}^\alpha}, T\Phi(\mathcal{C}_i^{(q)}) \right]_{\Phi(\rho)} \stackrel{(4.6)}{=} \left[\partial_{u_{\mu+1_i}^\alpha}, \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j) \mathcal{C}_j^{(q)} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \mathcal{C}_i^{(q)}(\psi_\nu^\beta) \partial_{u_\nu^\beta} \right]_{\Phi(\rho)} \\
&= \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| < q} \left(\sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j) \frac{\partial \psi_{\nu+1_j}^\beta}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} \right) \partial_{u_\nu^\beta} \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q)} \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} \right) \mathcal{C}_j^{(q)} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi^j}{\partial u_\mu^\alpha} \mathcal{C}_j^{(q)} \\
&\quad + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \mathcal{C}_i^{(q)} \left(\frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_{\mu+1_i}^\alpha} \right) \partial_{u_\nu^\beta}.
\end{aligned}$$

Es ist wichtig zu betonen, dass die obigen Lie-Klammern im Bildpunkt $\Phi(\rho)$ ausgewertet werden, da die Koeffizienten der transversalen Kontaktvektorfelder $\mathcal{C}_i^{(q)}$ vom betrachteten

Punkt abhängen. Anschließende Differenzbildung dieser Terme ergibt

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\partial_{u_{\mu+1}^\alpha}, T\Phi(\mathcal{C}_i^{(q)}) \right]_{\Phi(\rho)} - \left[\partial_{u_{\mu+1}^\alpha}, T\Phi(\mathcal{C}_i^{(q)}) \right]_{\Phi(\rho)} \\
&= \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| < q} \left(\frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} - \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial \xi^j}{\partial u_\mu^\alpha} \right) \partial_{u_\nu^\beta} \\
&\quad + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| < q} \mathcal{C}_i^{(q)} \left(\frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_{\mu+1}^\alpha} - \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial \xi^j}{\partial u_{\mu+1}^\alpha} \right) \partial_{u_\nu^\beta} \\
&\quad - \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| < q} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_{\nu+1_j}^\beta}{\partial u_{\mu+1}^\alpha} \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j) - \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q)}(\psi_{\nu+1_j}^\beta) \frac{\partial \xi^j}{\partial u_{\mu+1}^\alpha} \right) \partial_{u_\nu^\beta}.
\end{aligned}$$

Da die Vektorfelder $\partial_{u_\nu^\beta}$ der Standardbasis von $TJ_q\pi$ linear unabhängig sind, folgt wie in (4.13)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} - \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial \xi^j}{\partial u_\mu^\alpha} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_{\nu+1_j}^\beta}{\partial u_{\mu+1}^\alpha} \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j) - \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q)}(\psi_{\nu+1_j}^\beta) \frac{\partial \xi^j}{\partial u_{\mu+1}^\alpha} \\
&\quad - \mathcal{C}_i^{(q)} \left(\frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_{\mu+1}^\alpha} - \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial \xi^j}{\partial u_{\mu+1}^\alpha} \right), \quad 0 \leq |\nu| < |\mu|.
\end{aligned}$$

Mittels vollständiger Induktion nach der Länge $|\mu|$ sehen wir, dass die Terme auf der rechten Seite identisch verschwinden. Diese Herleitung zeigt besonders deutlich die zugrundeliegende geometrische Idee $[V\pi_{q-k}^q, T\Phi(\mathcal{C}_q)] \subseteq [\mathcal{C}_q^{(k-1)}, \mathcal{C}_q] \subseteq \mathcal{C}_q^{(k)}$. Erst die Einführung der abgeleiteten Kontaktdistributionen $\mathcal{C}_q^{(k)}$ ermöglicht eine koordinatenunabhängige geometrische Interpretation der gefundenen Integrabilitätsbedingungen (4.11), die in nicht angepassten Koordinaten eine ganz andere Gestalt haben.

Als erste Anwendung dieses Resultates betrachten wir eine π^q -fasererhaltende Kontakttransformation $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ mit lokaler Darstellung $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = (\xi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}))$. Die verallgemeinerten vertikalen Kontaktbedingungen (4.11) implizieren, wegen $\partial \xi^i / \partial u_\mu^\alpha = 0$, dass die Komponenten $\psi_\mu^\alpha = \psi_\mu^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ mit $0 \leq |\mu| = r$ tatsächlich nur von Ableitungen $\mathbf{u}^{(r)}$ abhängen dürfen. Weiter ist die $n \times n$ -Kontaktmatrix C mit Einträgen $C_{ij}(\mathbf{x}) = C_i^{(q)}(\xi^j)(\mathbf{x}) = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}(\mathbf{x})$, als *transponierte* Teilmatrix der Jacobi-Matrix von Φ , in jedem Punkt des Definitionsbereichs von Φ invertierbar. Linksmultiplikation mit der inversen Kontaktmatrix

$$\begin{pmatrix} \psi_{\mu+1_1}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r+1)}) \\ \vdots \\ \psi_{\mu+1_n}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r+1)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial \xi^n}{\partial x^1}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial x^n}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial \xi^n}{\partial x^n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_1^{(r+1)}(\psi_\mu^\alpha)(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r+1)}) \\ \vdots \\ C_n^{(r+1)}(\psi_\mu^\alpha)(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r+1)}) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

zeigt, dass die transversalen Kontaktbedingungen (4.5) alle Komponenten $\psi_\mu^\alpha = \psi_\mu^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)})$ für $|\mu| = r > 0$ eindeutig festlegen. Diese Komponenten ψ_μ^α sind linear in $\mathbf{u}^{(r)}$ und es gilt

$$T\Phi(V\pi_r^q) = V\pi_r^q, \quad 0 \leq r < q,$$

sowie $T\Phi(V\pi^q) = V\pi^q$, was unmittelbar aus Darstellung (4.12) folgt. Tatsächlich gilt auch die umgekehrte Aussage, wenn auch der direkte Beweis nicht so einfach ist. Zu vorgegebenen Funktionen $\xi^i = \xi^i(\mathbf{x})$ und $\psi^\alpha = \psi^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ existiert genau dann eine Kontakttransformation $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$, wobei $(\xi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$ eine lokale Darstellung von $\pi_0^q \circ \Phi: J_q\pi \rightarrow \mathcal{E}$ ist, wenn die Matrizen $\partial \xi / \partial \mathbf{x}$ und $\partial \psi / \partial \mathbf{u}$ invertierbar sind. Zum Nachweis dieser Behauptung

verwenden wir die transversalen Kontaktbedingungen in der Form (4.14) und konstruieren die gesuchten Funktionen $\psi_\mu^\alpha = \psi_\mu^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)})$ für $|\mu| = r > 0$ Ordnung für Ordnung. Es ist wichtig zu bemerken, dass die so gewonnenen Koordinatenfunktionen ψ_μ^α wohldefiniert sind, da ihre Konstruktion von der Reihenfolge der Indizes abhängt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \psi_{(\mu+1_i)+1_j}^\alpha - \psi_{(\mu+1_j)+1_i}^\alpha &= \sum_{k=1}^n c_{jk} \mathcal{C}_k^{(q)}(\psi_{\mu+1_i}^\alpha) - \sum_{k=1}^n c_{ik} \mathcal{C}_k^{(q)}(\psi_{\mu+1_j}^\alpha) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \left(c_{jk} \mathcal{C}_k^{(q)}(c_{is}) - c_{ik} \mathcal{C}_k^{(q)}(c_{js}) \right) \mathcal{C}_s^{(q)}(\psi_\mu^\alpha) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n (c_{jk} c_{is} - c_{ik} c_{js}) (\mathcal{C}_k^{(q)} \circ \mathcal{C}_s^{(q)})(\psi_\mu^\alpha) \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \left(c_{jk} \frac{\partial c_{is}}{\partial x^k} - c_{ik} \frac{\partial c_{js}}{\partial x^k} \right) \mathcal{C}_s^{(q)}(\psi_\mu^\alpha) = 0, \quad 0 \leq |\mu| \leq q-2. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $c_{ik} = c_{ik}(\mathbf{x})$ den (i, k) -ten Eintrag der inversen Kontaktmatrix C^{-1} . Die hier auftretenden Koeffizienten

$$\sum_{k=1}^n \left(c_{jk} \frac{\partial c_{is}}{\partial x^k} - c_{ik} \frac{\partial c_{js}}{\partial x^k} \right), \quad 1 \leq i, j, s \leq n$$

verschwinden in Folge der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen. Es bleibt zu zeigen, dass die so konstruierte Abbildung $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Hierzu ist es erforderlich die Invertierbarkeit der Jacobi-Matrix $J\Phi$ nachzuweisen. Diese Eigenschaft werden wir später in einem allgemeinen Kontext indirekt beweisen, siehe Seite 64.

Bemerkung 4.1.6. Es sei $\Psi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ eine beliebige glatte Abbildung mit lokaler Darstellung $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = (\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}), \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}))$ derart, dass die zugehörige Kontaktmatrix C der Ordnung $q+1$ mit Einträgen $C_{ji} = \mathcal{C}_j^{(q+1)}(\xi^i)(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q+1)})$ invertierbar ist. In Analogie zu den transversalen Kontaktbedingungen lassen sich aus

$$\mathcal{C}_i^{(q+1)}(\psi_\nu^\beta) = \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \mathcal{C}_i^{(q+1)}(\xi^j), \quad |\nu| = q \quad (4.15)$$

zu jedem Multiindex $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ der Länge $|\nu| = q$ Funktionen $\psi_{\nu+1_1}^\beta, \dots, \psi_{\nu+1_n}^\beta \in \mathcal{F}(J_{q+1}\pi)$ gewinnen. Die so erhaltenen Funktionen sind im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, d.h. zu jedem Multiindex μ der Länge $q+1$ finden wir möglicherweise mehrere unterschiedliche Funktionen ψ_μ^β mit $\nu+1_i = \mu = \tau+1_k$. Für jede Auswahl dieser Funktionen erhalten wir eine Abbildung $j_1\Psi: J_{q+1}\pi \rightarrow J_{q+1}\pi$ mit lokaler Darstellung $j_1\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = (\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}), \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q+1)}))$ und der Eigenschaft $\Psi \circ \pi_q^{q+1} = \pi_q^{q+1} \circ j_1\Psi$. Weiter ist $j_1\Psi$ verträglich mit der Prolongation von lokalen Schnitten von π , d.h. für jeden lokalen Schnitt $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$ mit $\Psi(\text{im } j_q\sigma) = \text{im } j_q\bar{\sigma}$ gilt $j_1\Psi(\text{im } j_{q+1}\sigma) = \text{im } j_{q+1}\bar{\sigma}$. Als konkretes Beispiel betrachten wir einen Diffeomorphismus $\Psi: J_1\pi \rightarrow J_1\pi$ mit lokaler Darstellung $\Psi(x, y, u, u_x, u_y) = (x, y, u, u_y, u_x)$. Die Abbildung Ψ unterscheidet sich von der Identität $\text{id}_{J_1\pi}$ in der Vertauschung von u_x und u_y . Insbesondere ist Ψ keine Kontakttransformation. Aus der Bedingung (4.15) ergeben sich zwei unterschiedliche Abbildungen $j_1\Psi^1, j_1\Psi^2: J_2\pi \rightarrow J_2\pi$ mit lokaler Darstellung

$$\begin{aligned} j_1\Psi^1(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) &= (x, y, u, u_y, u_x, u_{xy}, u_{yy}, u_{xx}), \\ j_1\Psi^2(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) &= (x, y, u, u_y, u_x, u_{xy}, u_{xx}, u_{xy}). \end{aligned}$$

Für jeden lokalen Schnitt $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$ der Form $\sigma(x, y) = f(x + y)$ gilt dann trivialerweise $j_1\Psi^i(x, y, j_2\sigma(x, y)) = (x, y, j_2\sigma(x, y))$. Weiter sind $j_1\Psi^1, j_1\Psi^2$ keine Diffeomorphismen. \triangleleft

Betrachten wir eine Kontakttransformation $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ mit lokaler Darstellung

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = (\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})),$$

so sehen wir eine weitere bemerkenswerte Konsequenz der Diffeomorphie von Φ . Definitionsgemäß ist der Definitionsbereich $U = \text{dom } \Phi$ eine nicht näher bestimmte offene Menge. Es folgt aus der Eigenschaft (4.9), dass die Kontaktmatrix $C = C(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)})$ mit Einträgen

$$C_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) = C_i^{(q)}(\xi^j)(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{\alpha=1}^m u_i^\alpha \frac{\partial \xi^j}{\partial u^\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

in allen Punkten $\rho \in U$ invertierbar sein muss, da $\partial \xi / \partial \mathbf{u}_{(1)} = 0$ verschwindet. Daher gilt

$$U \cap \{\rho \in J_q\pi \mid \det C(\rho) = 0\} = \emptyset.$$

Mit anderen Worten: Es existiert keine Fortsetzung von Φ zu einer Kontakttransformation, deren Definitionsbereich mit der Menge $\{\rho \in J_q\pi \mid \det C(\rho) = 0\}$ einen nichtleeren Durchschnitt hat; auch dann nicht, wenn die Funktionen ξ^j auf ganz $J_q\pi$ definiert sind. Eine weitere Beobachtung ist, dass die Komponenten ψ_μ^α von Φ mit $|\mu| = 1$ nicht notwendigerweise linear in $\mathbf{u}_{(1)}$ sind. Ein konkretes Beispiel verdeutlicht das Gesagte.

Beispiel 4.1.7. Wir betrachten eine Kontakttransformation $\Phi: J_1\pi \rightarrow J_1\pi$ in zwei unabhängigen Variablen (x, y) und einer abhängigen Variable u mit lokaler Darstellung

$$\Phi(x, y, u, u_x, u_y) = (x + y, y + u, u, \phi, \varphi)$$

und noch unbestimmten Funktionen $\phi = \phi(x, y, u, u_x, u_y)$ und $\varphi = \varphi(x, y, u, u_x, u_y)$. Die vertikalen Kontaktbedingungen (4.2) sind für jede Wahl von ϕ, φ automatisch erfüllt. Für die zugehörige Kontaktmatrix von Φ mit $\xi^1 = x + y$ und $\xi^2 = y + u$ finden wir

$$C = C(x, y, u, u_x, u_y) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_x^{(1)}(\xi^1) & \mathcal{C}_x^{(1)}(\xi^2) \\ \mathcal{C}_y^{(1)}(\xi^1) & \mathcal{C}_y^{(1)}(\xi^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u_x \\ 1 & 1 + u_y \end{pmatrix} \text{ mit } \det C = 1 - u_x + u_y.$$

Außerhalb der Hyperebene $\{\rho \in J_1\pi \mid \det C(\rho) = 0\}$ lassen sich die unbekanntenen Funktionen ϕ, φ direkt aus den transversalen Kontaktbedingungen (4.5) bestimmen:

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_x^{(1)}(\xi^1) & \mathcal{C}_x^{(1)}(\xi^2) \\ \mathcal{C}_y^{(1)}(\xi^1) & \mathcal{C}_y^{(1)}(\xi^2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{C}_x^{(1)}(u) \\ \mathcal{C}_y^{(1)}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u_x \\ 1 & 1 + u_y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - u_x + u_y} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y - u_x \end{pmatrix}.$$

Diese Komponenten ϕ, φ sind nicht linear in $\mathbf{u}_{(1)}$. Anhand der Jacobi-Determinante von Φ

$$\det J\Phi = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+u_y}{(1-u_x+u_y)^2} & \frac{-u_x}{(1-u_x+u_y)^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{(1-u_x+u_y)^2} & \frac{1}{(1-u_x+u_y)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(1 - u_x + u_y)^3} = \frac{1}{(\det C)^3}$$

sehen wir weiter, dass die so bestimmte Kontakttransformation $\Phi: J_1\pi \rightarrow J_1\pi$ keine stetige Fortsetzung auf die Hyperebene $\{\rho \in J_1\pi \mid \det C(\rho) = 0\}$ besitzt. Demnach ist Φ eine echte lokale Kontakttransformation erster Ordnung. \triangleleft

Als Nächstes untersuchen wir die Eigenschaften der involutiven Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distributionen, um weitere Informationen über Kontakttransformationen zu erhalten.

Proposition 4.1.8. Für die Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distributionen $\text{Char}[\mathcal{C}_q^{(k)}]$ gilt

- (i) $\text{Char}[\mathcal{C}_q] = \{0\}$,
- (ii) $\text{Char}[\mathcal{C}_q^{(k)}] = V\pi_{q-k}^q \subset \mathcal{C}_q^{(k-1)}$ für $0 < k < q$,
- (iii) $\text{Char}[\mathcal{C}_q^{(q)}] = TJ_q\pi$.

Beweis. Es genügt den Beweis in lokalen Koordinaten zu führen.

- (i) Es sei $X \in \mathfrak{X}(J_q\pi)$ eine Cauchy-Cartan-Charakteristik von \mathcal{C}_q mit lokaler Darstellung

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \mathcal{C}_i^{(q)} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} \eta_\mu^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \mathcal{C}_\alpha^\mu.$$

Definitionsgemäß gilt $[X, \mathcal{C}_q] \subseteq \mathcal{C}_q$. Zur Bestimmung der Koeffizienten von X berechnen wir zuerst die Lie-Klammer $[X, \partial_{u_\nu^\beta}]$ mit $|\nu| = q$ und erhalten

$$\begin{aligned} [X, \partial_{u_\nu^\beta}] &= \sum_{i=1}^n \left(\xi^i [\mathcal{C}_i^{(q)}, \partial_{u_\nu^\beta}] - \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\nu^\beta} \mathcal{C}_i^{(q)} \right) - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} \frac{\partial \eta_\mu^\alpha}{\partial u_\nu^\beta} \mathcal{C}_\alpha^\mu \\ &= \sum_{i=1}^n \xi^i [\mathcal{C}_i^{(q)}, \partial_{u_\nu^\beta}] \quad \text{mod } \mathcal{C}_q \\ &= - \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_i > 0}}^n \xi^i \partial_{u_{\nu-1_i}^\beta} \quad \text{mod } \mathcal{C}_q. \end{aligned}$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Standardbasis von $TJ_q\pi$ und $\partial_{u_{\nu-1_i}^\beta} \notin \mathcal{C}_q$ folgt aus der Beliebigkeit des Multiindex ν sofort $\xi^i = 0$. Demnach gilt $\text{Char}[\mathcal{C}_q] \subseteq V\pi_{q-1}^q$. Nun betrachten wir die Lie-Klammer $[X, \mathcal{C}_j^{(q)}]$ für $1 \leq j \leq n$ und finden

$$\begin{aligned} [X, \mathcal{C}_j^{(q)}] &= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} [\eta_\mu^\alpha \mathcal{C}_\alpha^\mu, \mathcal{C}_j^{(q)}] = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} \left(\eta_\mu^\alpha [\mathcal{C}_\alpha^\mu, \mathcal{C}_j^{(q)}] - \mathcal{C}_j^{(q)} (\eta_\mu^\alpha) \mathcal{C}_\alpha^\mu \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} \eta_\mu^\alpha [\mathcal{C}_\alpha^\mu, \mathcal{C}_j^{(q)}] \quad \text{mod } \mathcal{C}_q \\ &= \sum_{\substack{\alpha=1 \\ |\mu|=q \\ \mu_j > 0}}^m \eta_\mu^\alpha \partial_{u_{\mu-1_j}^\alpha} \quad \text{mod } \mathcal{C}_q. \end{aligned}$$

Da die Basisvektorfelder $\partial_{u_{\mu-1_j}^\alpha} \notin \mathcal{C}_q$ linear unabhängig sind, folgt aus der Beliebigkeit des Index j unmittelbar $\eta_\mu^\alpha = 0$. Zusammenfassend erhalten wir $\text{Char}[\mathcal{C}_q] = \{0\}$.

- (ii) Es sei $X \in \mathfrak{X}(J_q\pi)$ eine Cauchy-Cartan-Charakteristik von $\mathcal{C}_q^{(k)}$ mit lokaler Darstellung

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \mathcal{C}_i^{(q-k)} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{q-k \leq |\mu| \leq q} \eta_\mu^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \mathcal{C}_\alpha^\mu.$$

Nach Definition 3.2.6 gilt $[X, \mathcal{C}_q^{(k)}] \subseteq \mathcal{C}_q^{(k)}$. Wir zeigen zuerst, dass die Koeffizienten ξ^i von X verschwinden. Zu diesem Zweck berechnen wir die Lie-Klammer $[X, \partial_{u_\nu}^\beta]$ mit $|\nu| = q - k > 0$ und erhalten analog zu obiger Vorgehensweise

$$\begin{aligned} [X, \partial_{u_\nu}^\beta] &= \sum_{i=1}^n \xi^i [\mathcal{C}_i^{(q-k)}, \partial_{u_\nu}^\beta] \quad \text{mod } \mathcal{C}_q^{(k)} \\ &= - \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_i > 0}}^n \xi^i \partial_{u_{\nu-1_i}^\beta} \quad \text{mod } \mathcal{C}_q^{(k)}. \end{aligned}$$

Zu jedem Koordinatenindex i finden wir einen Multiindex $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$ der Länge $|\nu| = q - k$ mit $\nu_i > 0$, sodass folgt $\xi^i = 0$ und somit $\text{Char}[\mathcal{C}_q^{(k)}] \subseteq V\pi_{q-k-1}^q$. Nun betrachten wir die Lie-Klammer

$$\begin{aligned} [X, \mathcal{C}_j^{(q-k)}] &= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q-k} \eta_\mu^\alpha [\mathcal{C}_\alpha^\mu, \mathcal{C}_j^{(q-k)}] \quad \text{mod } \mathcal{C}_q^{(k)} \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\substack{|\mu|=q-k \\ \mu_j > 0}} \eta_\mu^\alpha \partial_{u_{\mu-1_j}^\alpha} \quad \text{mod } \mathcal{C}_q^{(k)}. \end{aligned}$$

Wegen $\partial_{u_{\mu-1_j}^\alpha} \notin \mathcal{C}_q^{(k)}$ folgern wir in Analogie zu obiger Argumentation $\eta_\mu^\alpha = 0$ für alle $|\mu| = q - k$. Daher gilt $\text{Char}[\mathcal{C}_q^{(k)}] \subseteq V\pi_{q-k}^q$. Die umgekehrte Inklusion ergibt sich aus den Strukturgleichungen von $\mathcal{C}_q^{(k)}$, vgl. den Beweis von Proposition 4.1.4. Also gilt

$$\text{Char}[\mathcal{C}_q^{(k)}] = \mathcal{C}_q^{(k-1)} \cap V\pi_1^q = \mathcal{C}_q^{(k-1)} \cap \text{Char}[\mathcal{C}_q^{(q-1)}]. \quad (4.16)$$

(iii) Im Spezialfall $k = q$ ist $\mathcal{C}_q^{(q)} = TJ_q\pi$ involutiv, deshalb gilt $\text{Char}[\mathcal{C}_q^{(q)}] = \mathcal{C}_q^{(q)} = TJ_q\pi$.

Wir halten fest, dass die Vertikalbündel $V\pi_{q-1}^q \subset V\pi_{q-2}^q \subset \dots \subset V\pi_1^q$ mit den Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distributionen $\text{Char}[\mathcal{C}'_q] \subset \text{Char}[\mathcal{C}''_q] \subset \dots \subset \text{Char}[\mathcal{C}_q^{(q-1)}]$ identifiziert werden können. Man beachte aber, dass das Vertikalbündel $V\pi_0^q$ nicht aus den Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distributionen $\text{Char}[\mathcal{C}_q^{(k)}]$ gewonnen werden kann. \square

Bemerkung 4.1.9. Man kann mit Hilfe der hergeleiteten Eigenschaften von Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distributionen das lokale Äquivalenzproblem für Jetbündel lösen, siehe Yamaguchi [40], [41]. Die Kernfrage dabei lautet: Wann ist eine Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ lokal diffeomorph zum Jetbündel $(J_q\pi, \mathcal{C}_q)$? Die natürlichen Voraussetzungen dazu sind:

$$\dim \mathcal{M} = \dim J_q\pi, \quad \dim \mathcal{D}^{(k)} = \dim \mathcal{C}_q^{(k)} \quad \text{und} \quad \dim \text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}] = \dim \text{Char}[\mathcal{C}_q^{(k)}].$$

Fordert man in Analogie zu (4.16) zusätzlich $\text{Char}[\mathcal{D}^{(k)}] = \mathcal{D}^{(k-1)} \cap \text{Char}[\mathcal{D}^{(q-1)}]$, so ist $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ lokal diffeomorph zum Jetbündel $(J_q\pi, \mathcal{C}_q)$, wenn $q > 1$ ist. Dieses Ergebnis zeigt auf eindrucksvolle Weise die immense Bedeutung von Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distributionen. \triangleleft

Es folgt aus Korollar 3.2.9, dass das Vertikalbündel $V\pi_{q-k}^q = \text{Char}[\mathcal{C}_q^{(k)}]$ mit $0 < k < q$ invariant unter Kontakttransformationen ist. Gemäß Proposition 3.3.2 ist jede Kontakttransformation $\Phi \in \Gamma(J_q\pi, \mathcal{C}_q)$ über k Ordnungen *lokal* projizierbar, d.h. es existieren lokale

Diffeomorphismen $\Phi_{q-k}: J_{q-k}\pi \rightarrow J_{q-k}\pi$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 J_q\pi & \xrightarrow{\Phi} & J_q\pi \\
 \pi_{q-k}^q \downarrow & & \downarrow \pi_{q-k}^q \\
 J_{q-k}\pi & \xrightarrow{\Phi_{q-k}} & J_{q-k}\pi \\
 \pi_1^{q-k} \downarrow & & \downarrow \pi_1^{q-k} \\
 J_1\pi & \xrightarrow{\Phi_1} & J_1\pi
 \end{array}$$

Wir werden in Proposition 4.2.1 beweisen, dass die so erhaltenen Diffeomorphismen Φ_{q-k} in der Tat selbst Kontakttransformationen sind. In lokalen Koordinaten $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ auf $J_q\pi$ ergibt sich folgendes Bild: Jede Kontakttransformation $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ besitzt lokal die Form

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = (\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}), \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})), \quad (4.17)$$

wobei die Komponenten $\psi_\mu^\alpha = \psi_\mu^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)})$ mit $|\mu| = r > 0$ von Ableitungen $\mathbf{u}^{(r)}$ abhängen. Weiter sind ψ^α für $1 \leq \alpha \leq m$ Funktionen von $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)})$. Insbesondere sind die Komponenten $\psi_\mu^\alpha = \psi_\mu^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)})$ mit $|\mu| = r > 2$ linear in $\mathbf{u}^{(r)}$, was unmittelbar aus den transversalen Kontaktbedingungen (4.5) folgt. Der Rest dieses Abschnittes befasst sich mit verschiedenen Beweisen und Beweisvarianten der folgenden Proposition:

Proposition 4.1.10. Es sei $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ eine Kontakttransformation der Ordnung $q \geq 1$.

(i) Es gilt $T\Phi(V\pi_k^q) = V\pi_k^q$ für alle $0 < k < q$.

(ii) Im Fall $m = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{X} > 1$ gilt zusätzlich $T\Phi(V\pi_0^q) = V\pi_0^q$.

Beweisvariante 1: Teil (i). Nach Proposition 4.1.8 gilt $V\pi_k^q = \text{Char}[C_q^{(q-k)}]$ für $0 < k < q$. Laut Korollar 3.2.9 sind die Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distributionen invariant unter Kontakttransformationen. Folglich gilt $T\Phi(V\pi_k^q) = V\pi_k^q$. \square

Beweisvariante 2: Teil (i). Wir wollen als Nächstes einen rechnerischen Beweis der Invarianz von $V\pi_k^q$ für $0 < k < q$ präsentieren. An der Darstellung (4.12) erkennen wir leicht die hierzu äquivalente lokale Aussage $\partial\xi^i/\partial u_\tau^\gamma = 0$ für alle $k < |\tau| \leq q$. Die zugrundeliegende Idee wird bereits am Vertikalbündel $V\pi_{q-1}^q$ sehr deutlich. Zum Nachweis der Eigenschaft $\partial\xi^i/\partial u_\tau^\gamma = 0$ für $|\tau| = q$ betrachten wir die verallgemeinerten vertikalen Kontaktbedingungen

$$\frac{\partial\psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} = \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial\xi^j}{\partial u_\mu^\alpha}, \quad 0 \leq |\nu| < |\mu| = q - 1.$$

Leiten wir diese Gleichungen nach u_τ^γ mit $|\tau| = q$ ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial u_\tau^\gamma} \frac{\partial\psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u_\tau^\gamma} \left(\sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial\xi^j}{\partial u_\mu^\alpha} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\psi_{\nu+1_j}^\beta}{\partial u_\tau^\gamma} \frac{\partial\xi^j}{\partial u_\mu^\alpha} + \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial^2\xi^j}{\partial u_\mu^\alpha \partial u_\tau^\gamma}.$$

Aus den (verallgemeinerten) vertikalen Kontaktbedingungen ergibt sich zum Vergleich

$$\frac{\partial}{\partial u_\mu^\alpha} \frac{\partial\psi_\nu^\beta}{\partial u_\tau^\gamma} = \frac{\partial}{\partial u_\mu^\alpha} \left(\sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial\xi^j}{\partial u_\tau^\gamma} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\psi_{\nu+1_j}^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \frac{\partial\xi^j}{\partial u_\tau^\gamma} + \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial^2\xi^j}{\partial u_\tau^\gamma \partial u_\mu^\alpha}.$$

Dank dem Satz von Schwarz muss die Differenz der beiden letzten Gleichungen verschwinden:

$$0 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_{\nu+1_j}^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \frac{\partial \xi^j}{\partial u_\tau^\gamma} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_{\nu+1_j}^\beta}{\partial u_\tau^\gamma} \frac{\partial \xi^j}{\partial u_\mu^\alpha} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \psi_{\nu+1_j}^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} - \sum_{k=1}^n \psi_{\nu+1_j+1_k}^\beta \frac{\partial \xi^k}{\partial u_\mu^\alpha} \right) \frac{\partial \xi^j}{\partial u_\tau^\gamma}.$$

Der Klammerausdruck auf der rechten Seite verschwindet für alle $0 \leq |\nu| < q - 2$ identisch. Wir untersuchen die rechte Seite im Fall $|\nu| = q - 2$ und behaupten, dass der Ausdruck

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \psi_{\nu+1_j}^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} - \sum_{k=1}^n \psi_{\nu+1_j+1_k}^\beta \frac{\partial \xi^k}{\partial u_\mu^\alpha} \right) \frac{\partial \xi^j}{\partial u_\tau^\gamma}, \quad |\nu| = q - 2 \quad (4.18)$$

genau dann verschwindet, wenn $\partial \xi^j / \partial u_\tau^\gamma = 0$ gilt. Hierzu betrachten wir $T\Phi(\partial u_\mu^\alpha) \in \mathcal{C}'_q$ mit

$$T\Phi(\partial u_\mu^\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \mathcal{C}_i^{(q)} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\sigma|=q-1} \left(\frac{\partial \psi_\sigma^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} - \sum_{k=1}^n \psi_{\sigma+1_k}^\beta \frac{\partial \xi^k}{\partial u_\mu^\alpha} \right) \partial u_\sigma^\beta + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\sigma|=q} \frac{\partial \psi_\sigma^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \mathcal{C}_\beta^\sigma.$$

Da Φ nach Voraussetzung ein lokaler Diffeomorphismus mit der Eigenschaft $T\Phi(\mathcal{C}'_q) = \mathcal{C}'_q$ ist, muss die Matrix $A = A(\rho)$ mit Einträgen

$$A_{(\alpha,\mu)}^{(\beta,\sigma)} = \frac{\partial \psi_\sigma^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} - \sum_{k=1}^n \psi_{\sigma+1_k}^\beta \frac{\partial \xi^k}{\partial u_\mu^\alpha}, \quad |\mu| = |\sigma| = q - 1$$

in jedem Punkt des Definitionsbereichs von Φ invertierbar sein. In dieser Notation werden Zeilen von A durch hochgestellte Indizes, und Spalten von A durch tiefgestellte Indizes markiert. Angenommen, es gelte $\partial \xi^j / \partial u_\tau^\gamma \neq 0$ für ein festes Tripel (j, γ, τ) , dann gilt

$$A_{(\alpha,\mu)}^{(\beta,\nu+1_j)} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n A_{(\alpha,\mu)}^{(\beta,\nu+1_i)} \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\tau^\gamma} \bigg/ \frac{\partial \xi^j}{\partial u_\tau^\gamma}, \quad |\nu| = q - 2.$$

Daher ist die $(\beta, \nu + 1_j)$ -te Zeile in A eine Linearkombination der anderen Zeilen. Insbesondere ist A nicht invertierbar, im Widerspruch zur Diffeomorphie von Φ . Folglich kann der obige Ausdruck (4.18) nur dann verschwinden, wenn $\partial \xi^i / \partial u_\tau^\gamma = 0$ gilt. Als Folge dieser Erkenntnis erhalten wir $T\Phi(V\pi_{q-1}^q) = V\pi_{q-1}^q$. Durch Induktion nach k folgt mit der gleichen Überlegung allgemein $T\Phi(V\pi_k^q) = V\pi_k^q$ aus der Eigenschaft $T\Phi(V\pi_{k-1}^q \setminus V\pi_k^q) \not\subseteq \mathcal{C}_q^{(q-k-1)}$. Dabei kann die obige Argumentation wörtlich übernommen werden, wenn man überall $|\nu| \leq q - 2$, $|\mu| = q - 1$, $|\tau| = q$ durch $|\nu| \leq k - 1$, $|\mu| = k$, $|\tau| = k + 1$ ersetzt. \square

Natürlich ist $T\Phi(V\pi_1^q) = V\pi_1^q$ dabei die stärkere Aussage, denn sie impliziert die Invarianz der Vertikalbündel $V\pi_k^q$ für alle $1 < k < q$. Die beiden Inklusionen

$$\begin{aligned} T\Phi(V\pi_k^q) &= T\Phi(V\pi_k^q \cap V\pi_1^q) \subset T\Phi(V\pi_1^q) = V\pi_1^q, \\ T\Phi(V\pi_k^q) &= T\Phi(V\pi_k^q \cap \mathcal{C}_q^{(q-k-1)}) \subset T\Phi(\mathcal{C}_q^{(q-k-1)}) = \mathcal{C}_q^{(q-k-1)} \end{aligned}$$

ergeben zusammen die behauptete Invarianz $T\Phi(V\pi_k^q) \subseteq V\pi_1^q \cap \mathcal{C}_q^{(q-k-1)} = V\pi_k^q$.

Die nächste Proposition liefert eine weitere geometrische Erklärung für die Invarianz der Vertikalbündel. Es wird sich herausstellen, dass die (involutiven) Vertikalbündel, unter gewissen Voraussetzungen, schon die höchste Dimension haben.

Proposition 4.1.11. Es sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}_q^{(k)}$ eine reguläre involutive Subdistribution der k -fach abgeleiteten Kontaktdistribution $\mathcal{C}_q^{(k)} \subset T J_q \pi$. Dann gilt

$$\dim V\pi_{q-k-1}^q \geq s + m \binom{n-s+q-k-1}{q-k} + m \left[\binom{n+q}{q} - \binom{n+q-k}{q-k} \right] \geq \dim \mathcal{U}, \quad (4.19)$$

wobei $s \in \{0, \dots, n\}$ die Dimension des π^q -transversalen Anteils von \mathcal{U} bezeichnet.

Beweis. Es sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}_q^{(k)}$ eine reguläre involutive Subdistribution, sodass $s: J_q \pi \rightarrow \{0, \dots, n\}$ mit $\rho \mapsto \dim T_\rho \pi^q(\mathcal{U}_\rho)$ eine konstante Abbildung mit Wert s ist. Da $\mathcal{P} := \mathcal{U} \cap V\pi_{q-k-1}^q$ involutiv ist, zerfällt \mathcal{U} in zwei Subdistributen $\mathcal{U} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{P}$ mit einem s -dimensionalen Komplement \mathcal{H} . Folglich gilt $\dim \mathcal{U} = s + \dim \mathcal{P}$. Im Fall $s = 0$ erhalten wir $\mathcal{U} \subseteq V\pi_{q-k-1}^q$ mit

$$\dim V\pi_{q-k-1}^q = m \left[\binom{n+q}{q} - \binom{n+q-k-1}{q-k-1} \right] \geq \dim \mathcal{U}.$$

Im Fall $s \geq 1$ konstruieren wir in lokalen Koordinaten zunächst spezielle involutive Subdistributen $\mathcal{H} \oplus \mathcal{P}$ von $\mathcal{C}_q^{(k)}$, deren Dimension maximal ist. Es sei \mathcal{H} aufgespannt durch die transversalen Basisvektorfelder $\mathcal{C}_{i_1}^{(q-k)}, \dots, \mathcal{C}_{i_s}^{(q-k)} \in \mathcal{C}_q^{(k)}$. Wir konstruieren nun $\mathcal{P} \subseteq V\pi_{q-k-1}^q$ derart, dass $\mathcal{U} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{P}$ involutiv und maximal ist. Die Involutivität von \mathcal{U} bedeutet insbesondere, dass zu jedem Vektorfeld $X \in \mathcal{P}$ die Lie-Klammern $[X, \mathcal{C}_{i_1}^{(q-k)}], \dots, [X, \mathcal{C}_{i_s}^{(q-k)}]$ in $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}_q^{(k)}$ liegen. Man bestätigt sofort, dass die vertikalen Vektorfelder

$$\partial_{u_\mu}^\alpha \in V\pi_{q-k-1}^q \text{ mit } |\mu| = q-k \text{ und } (\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_s}) \neq (0, \dots, 0)$$

nicht zu \mathcal{P} gehören, da die entsprechende Lie-Klammer $[\partial_{u_\mu}^\alpha, \mathcal{C}_{i_j}^{(q-k)}] = \partial_{u_{\mu-1i_j}^\alpha}$ mit $\mu_{i_j} > 0$ bereits aus $\mathcal{C}_q^{(k)}$ hinausführt. Wir setzen daher

$$\mathcal{P} := \left\langle \left\{ \partial_{u_\mu}^\alpha \in V\pi_{q-k-1}^q \mid \text{falls } |\mu| = q-k \text{ dann } (\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_s}) = (0, \dots, 0) \right\} \right\rangle.$$

Dann ist $\mathcal{U} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{P}$ eine involutive Subdistribution von $\mathcal{C}_q^{(k)}$ mit maximaler Dimension

$$\begin{aligned} \dim V\pi_{q-k-1}^q &\geq \dim \mathcal{U} = s + m |\{ \mu \in \mathbb{N}_0^n \mid |\mu| = q-k, \mu_{i_1} = \dots = \mu_{i_s} = 0 \}| \\ &\quad + m |\{ \mu \in \mathbb{N}_0^n \mid q-k+1 \leq |\mu| \leq q \}| \\ &= s + m |\{ \mu \in \mathbb{N}_0^{n-s} \mid |\mu| = q-k \}| \\ &\quad + m |\{ \mu \in \mathbb{N}_0^n \mid q-k+1 \leq |\mu| \leq q \}| \\ &= s + m \binom{n-s+q-k-1}{q-k} + m \left[\binom{n+q}{q} - \binom{n+q-k}{q-k} \right]. \end{aligned}$$

Generell können wir, nach eventueller Überführung in die reduzierte Zeilenstufenform, annehmen, dass ein Komplement \mathcal{H} durch s Vektorfelder der Form

$$X_j = \mathcal{C}_{i_j}^{(q-k)} + \sum_{r=s+1}^n a_j^r \mathcal{C}_{i_r}^{(q-k)} + Y_j, \quad 1 \leq j \leq s$$

aufgespannt wird. Hierbei sind $Y_j \in V\pi_{q-k-1}^q \setminus \mathcal{P}$ geeignete vertikale Vektorfelder und $a_j^r \in \mathcal{F}(J_q \pi)$ reelle Funktionen. In Analogie zu obiger Überlegung sehen wir, dass die vertikalen

Vektorfelder $\partial_{u_\mu^\alpha} \in V\pi_{q-k-1}^q$ mit $|\mu| = q - k$ und $(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_s}) \neq (0, \dots, 0)$ nicht in \mathcal{P} liegen, da die entsprechende Lie-Klammer

$$[\partial_{u_\mu^\alpha}, X_j] \mod \mathcal{C}_q^{(k)} = \partial_{u_{\mu^{-1}i_j}^\alpha} + \sum_{\substack{r=s+1 \\ \mu_{i_r} > 0}}^n a_j^r \partial_{u_{\mu^{-1}i_r}^\alpha} \neq 0 \quad \text{mit } \mu_{i_j} > 0$$

aus $\mathcal{C}_q^{(k)}$ hinausföhrt, woraus dann die behauptete Abschätzung (4.19) folgt. \square

Die erste Ungleichung in (4.19) ist genau dann mit Gleichheit erfüllt, wenn gilt

$$m \sum_{r=1}^s \binom{n-r+q-k-1}{q-k-1} = s.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn entweder $s = 0$ oder $m = n = 1 < q - k$ oder $m = 1 = q - k$ gilt. Unter allen involutiven Subdistributionen von $\mathcal{C}_q^{(k)}$ hat das Vertikalbündel $V\pi_{q-k-1}^q$ die höchste Dimension. Im Fall $m > 1$ ist $V\pi_{q-k-1}^q$ die *einzig*e involutive Subdistribution von $\mathcal{C}_q^{(k)}$ mit Dimension $\dim V\pi_{q-k-1}^q$. Damit ist $V\pi_{q-k-1}^q$ nach Proposition 3.2.11 invariant unter Kontakttransformationen.

Bemerkung 4.1.12. Eine alternative Herleitung der Dimensionsabschätzung (4.19) für den Spezialfall $k = 0$ wird in Vinogradov *et al.* [18, Chapter 4] bzw. Vinogradov [38, Chapter 2] beschrieben. Die wesentliche Idee dort beruht darauf, dass jede π^q -transversale s -dimensionale Integralmannigfaltigkeit $\tilde{\mathcal{O}} \subset J_{q-1}\pi$ der Kontaktdistribution \mathcal{C}_{q-1} auf eindeutige Weise zu einer *maximalen* Integralmannigfaltigkeit $\mathcal{O} \subset J_q\pi$ von \mathcal{C}_q geliftet werden kann. Es wird gezeigt

$$\dim \mathcal{O} = s + m \binom{n-s+q-1}{q},$$

in Übereinstimmung mit unserem Ergebnis, wenn \mathcal{O} eine Integralmannigfaltigkeit von \mathcal{U} ist. \triangleleft

Beweisvariante 3: Teil (i). Wir betrachten das Vertikalbündel $V\pi_1^q$. Nach Korollar 3.2.10 ist $\mathcal{U} := T\Phi(V\pi_1^q)$ eine reguläre involutive Subdistribution von $\mathcal{C}_q^{(q-2)}$ mit Dimension $\dim V\pi_1^q$. Im Allgemeinen hängt die Dimension $\dim T_\rho\pi^q(\mathcal{U}_\rho)$ des π^q -transversalen Anteils von \mathcal{U} vom betrachteten Punkt ab, weshalb die folgenden Ausführungen teilweise etwas technisch sind. Zunächst bemerken wir, dass die Rangabbildung $r: \rho \mapsto \dim T_\rho\pi^q(\mathcal{U}_\rho)$ unterhalbstetig ist, d.h. um jeden Punkt ρ existiert eine offene Umgebung $\rho \in O \subseteq \text{im } \Phi$, sodass $r(\hat{\rho}) \geq r(\rho)$ für alle $\hat{\rho} \in O$ gilt. Wir betrachten eine Partition von $\text{im } \Phi \subseteq J_q\pi$ in Teilmengen der Form $U_i := \{\rho \in \text{im } \Phi \mid r(\rho) = i\}$. Dann gilt $\text{im } \Phi = \bigsqcup_{i=0}^n U_i$. Es sei nun s die größte Zahl in $\{0, \dots, n\}$ derart, dass die Menge $\emptyset \neq U_s \subseteq \text{im } \Phi$ nichtleer ist. Dann muss U_s notwendigerweise offen sein. Im Fall $s = 0$ folgt automatisch $\mathcal{U}_\rho = V_\rho\pi_1^q$ für alle $\rho \in \text{im } \Phi$. Nach dieser einleitenden Vorbereitung können wir die obige Dimensionsformel (4.19) mit $k = q - 2$ anwenden und erhalten auf $U_s \subseteq \text{im } \Phi$

$$0 = \dim V\pi_1^q - \dim \mathcal{U} \geq s \left[m \left(n - \frac{s}{2} + \frac{1}{2} \right) - 1 \right] = s \left[(m-1) + m(n-s) + \frac{m(s-1)}{2} \right] \geq 0.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung verschwindet genau dann, wenn $s = 0$ oder $m = n = s = 1$ ist. Im regulären Fall $mn > 1$ muss notwendigerweise $s = 0$ folgen und es gilt $U_0 = \text{im } \Phi$. Dies ist äquivalent zu $\mathcal{U} = V\pi_1^q$ auf dem ganzen Bildbereich von Φ . \square

Im Ausnahmefall $mn = 1$ erhalten wir dagegen keine Information. Der Grund, weshalb wir die bereits bekannte Invarianz von $V\pi_1^q$ mit dieser Methode nicht nachweisen können, liegt darin, dass wir die innere Struktur der Kontakttransformationen nicht vollends berücksichtigt haben. Unsere Argumentation beruht ausschließlich auf der Bedingung $\dim T\Phi(V\pi_1^q) = \dim V\pi_1^q$ und der Eigenschaft $T\Phi(V\pi_1^q) \subset \mathcal{C}_q^{(q-2)}$. Zum besseren Verständnis dient folgendes Beispiel.

Beispiel 4.1.13. Wir betrachten eine glatte Abbildung $\Psi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ in einer unabhängigen Variable x und einer abhängigen Variable u mit lokaler Darstellung

$$\Psi(x, u, u_1, \dots, u_q) = \left(u + u_2, e^x u_2^2/2, e^x u_2, e^x, u_3, \dots, u_q \right),$$

wobei u_k für die k -fache Ableitung von u nach x steht. An der Jacobi-Matrix von Ψ

$$J\Psi = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & \\ e^x u_2^2/2 & 0 & 0 & e^x u_2 & \\ e^x u_2 & 0 & 0 & e^x & \\ e^x & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & \mathbf{0} & & & I_{q-2} \end{array} \right) \quad \text{mit } \text{rang } J\Psi = q + 1 < \dim J_q\pi$$

sehen wir, dass das Vertikalbündel $V\pi_1^q = \langle \partial_{u_q}, \dots, \partial_{u_3}, \partial_{u_2} \rangle \subset \mathcal{C}_q^{(q-2)}$ unter $T\Psi$ auf die involutive Subdistribution $\mathcal{U} = \langle \partial_{u_q}, \dots, \partial_{u_3}, \mathcal{C}_x^{(2)} \rangle \neq V\pi_1^q$ von $\mathcal{C}_q^{(q-2)}$ abgebildet wird. Weiter finden wir $T\Psi(V\pi_k^q) = V\pi_k^q$ für alle $1 < k < q$. Dabei gilt zwar $\dim T\Psi(V\pi_1^q) = \dim V\pi_1^q$ aber nicht $T\Psi(\mathcal{C}_q) = \mathcal{C}_q$, weshalb Ψ keine Kontakttransformation ist. Wegen $\text{rang } J\Psi < \dim J_q\pi$ ist Ψ kein lokaler Diffeomorphismus. \triangleleft

Im Sonderfall $mn = 1$ besitzt die k -fach abgeleitete Kontaktdistribution

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_q^{(k)} &= \langle \mathcal{C}_x^{(q-k)} \rangle \oplus \langle \partial_{u_q}, \dots, \partial_{u_{q-k+1}}, \partial_{u_{q-k}} \rangle \\ &= \langle \partial_{u_{q-k}} \rangle \oplus \langle \partial_{u_q}, \dots, \partial_{u_{q-k+1}}, \mathcal{C}_x^{(q-k)} \rangle \end{aligned}$$

verschiedene lokale Zerlegungen in involutive Subdistributionen der Dimensionen 1 und $k + 1$. Beruht die Argumentation allein auf der Bedingung $\dim T\Phi(V\pi_{q-k-1}^q) = \dim V\pi_{q-k-1}^q$, so können wir den Fall $T\Phi(V\pi_{q-k-1}^q) = \langle \partial_{u_q}, \dots, \partial_{u_{q-k+1}}, \mathcal{C}_x^{(q-k)} \rangle$ grundsätzlich nicht ausschließen.

Beweisvariante 3: Teil (ii). Wir betrachten analog das Vertikalbündel $V\pi_0^q$ und setzen $\mathcal{U} := T\Phi(V\pi_0^q) \subset \mathcal{C}_q^{(q-1)}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass der Rang $s := \dim T\pi^q(\mathcal{U}) = \dim T\pi_0^q(\mathcal{U})$ auf im $\Phi \subseteq J_q\pi$ konstant ist. Anhand der Dimensionsabschätzung (4.19) mit $k = q - 1$, nämlich

$$0 = \dim V\pi_0^q - \dim \mathcal{U} \geq s(m - 1) \geq 0,$$

sehen wir, dass die rechte Seite dieser Ungleichung genau dann verschwindet, wenn $s = 0$ oder $m = 1$ ist. Gilt $m > 1$, so folgt notwendigerweise $s = 0$ und somit auch $\mathcal{U} = V\pi_0^q$. \square

Im Sonderfall $m = 1$ ist $V\pi_0^q$ nicht invariant, siehe Beispiel 4.2.2. Im Fall $m > 1$ ist jede Kontakttransformation $\Phi \in \Gamma(J_q\pi, \mathcal{C}_q)$ über q Ordnungen lokal projizierbar und besitzt in lokalen Koordinaten die Form

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = (\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})),$$

wobei die Komponenten $\psi_\mu^\alpha = \psi_\mu^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)})$ mit $0 < |\mu| = r$ von Ableitungen $\mathbf{u}^{(r)}$ abhängen. Es existiert folglich ein lokaler Diffeomorphismus $\Phi_0: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ mit $\Phi_0 \circ \pi_0^q = \pi_0^q \circ \Phi$.

$$\begin{array}{ccc} J_q \pi & \xrightarrow{\Phi} & J_q \pi \\ \pi_0^q \downarrow & & \downarrow \pi_0^q \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{\Phi_0} & \mathcal{E} \end{array}$$

Beweisvariante 4. Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem weiteren, rechnerischen Beweis von Proposition 4.1.10 im Fall $mn > 1$. Die zugehörige Beweisidee beruht auf der folgenden Beobachtung: Falls $V\pi_k^q$ invariant ist, dann folgt aus der Involutivität von $V\pi_k^q$ automatisch

$$[V\pi_k^q, T\Phi(V\pi_k^q)] = [V\pi_k^q, V\pi_k^q] \subseteq V\pi_k^q.$$

Aus diesem Grund betrachten wir die Lie-Klammern

$$\left[\partial_{u_\mu^\alpha}, T\Phi(\partial_{u_\tau^\gamma}) \right]_{\Phi(\rho)} - \left[\partial_{u_\tau^\gamma}, T\Phi(\partial_{u_\mu^\alpha}) \right]_{\Phi(\rho)}, \quad 0 < |\mu| = |\tau| \leq q$$

und werten sie auf zwei unterschiedliche Arten aus. Dank dem Satz von Schwarz gilt

$$\begin{aligned} & \left[\partial_{u_\mu^\alpha}, T\Phi(\partial_{u_\tau^\gamma}) \right]_{\Phi(\rho)} - \left[\partial_{u_\tau^\gamma}, T\Phi(\partial_{u_\mu^\alpha}) \right]_{\Phi(\rho)} \\ &= \left[\partial_{u_\mu^\alpha}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\tau^\gamma} \partial_{x^i} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq q} \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\tau^\gamma} \partial_{u_\nu^\beta} \right]_{\Phi(\rho)} - \left[\partial_{u_\tau^\gamma}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{x^i} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq q} \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta} \right]_{\Phi(\rho)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial u_\tau^\gamma \partial u_\mu^\alpha} \partial_{x^i} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq q} \frac{\partial^2 \psi_\nu^\beta}{\partial u_\tau^\gamma \partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta} \\ & \quad - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha \partial u_\tau^\gamma} \partial_{x^i} - \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq q} \frac{\partial^2 \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha \partial u_\tau^\gamma} \partial_{u_\nu^\beta} = 0, \quad 0 < |\mu| = |\tau| \leq q. \end{aligned}$$

Berechnet man denselben Term mittels der Darstellung (4.12), so ergeben sich zusätzliche Integrabilitätsbedingungen an die Komponenten von Φ . Der Übersicht halber betrachten wir hier den Spezialfall $|\mu| = |\tau| = q$ und erhalten

$$\begin{aligned} & \left[\partial_{u_\mu^\alpha}, T\Phi(\partial_{u_\tau^\gamma}) \right]_{\Phi(\rho)} - \left[\partial_{u_\tau^\gamma}, T\Phi(\partial_{u_\mu^\alpha}) \right]_{\Phi(\rho)} \\ & \stackrel{(4.3)}{=} \left[\partial_{u_\mu^\alpha}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\tau^\gamma} \mathcal{C}_i^{(q)} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\tau^\gamma} \mathcal{C}_\beta^\nu \right]_{\Phi(\rho)} - \left[\partial_{u_\tau^\gamma}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \mathcal{C}_i^{(q)} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \mathcal{C}_\beta^\nu \right]_{\Phi(\rho)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\tau^\gamma} \left[\partial_{u_\mu^\alpha}, \mathcal{C}_i^{(q)} \right]_{\Phi(\rho)} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial u_\tau^\gamma \partial u_\mu^\alpha} \mathcal{C}_i^{(q)} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \frac{\partial^2 \psi_\nu^\beta}{\partial u_\tau^\gamma \partial u_\mu^\alpha} \mathcal{C}_\beta^\nu \\ & \quad - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \left[\partial_{u_\tau^\gamma}, \mathcal{C}_i^{(q)} \right]_{\Phi(\rho)} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha \partial u_\tau^\gamma} \mathcal{C}_i^{(q)} - \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \frac{\partial^2 \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha \partial u_\tau^\gamma} \mathcal{C}_\beta^\nu \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\tau^\gamma} \left[\partial_{u_\mu^\alpha}, \mathcal{C}_i^{(q)} \right]_{\Phi(\rho)} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \left[\partial_{u_\tau^\gamma}, \mathcal{C}_i^{(q)} \right]_{\Phi(\rho)}, \quad |\mu| = |\tau| = q. \end{aligned}$$

Nach Auswertung der Lie-Klammern im Bildpunkt $\Phi(\rho)$ ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_{\nu+1_i}^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\tau^\gamma} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_{\nu+1_i}^\beta}{\partial u_\tau^\gamma} \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha}, \quad 0 \leq |\nu| < |\mu| = |\tau| = q. \quad (4.20)$$

Beziehungen dieser Art lassen sich alternativ direkt aus den verallgemeinerten vertikalen Kontaktbedingungen (4.11) herleiten:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_{\nu+1_i}^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\tau^\gamma} &= \frac{\partial}{\partial u_\mu^\alpha} \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\tau^\gamma} - \sum_{i=1}^n \psi_{\nu+1_i}^\beta \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial u_\tau^\gamma \partial u_\mu^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u_\tau^\gamma} \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} - \sum_{i=1}^n \psi_{\nu+1_i}^\beta \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha \partial u_\tau^\gamma} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_{\nu+1_i}^\beta}{\partial u_\tau^\gamma} \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha}, \quad 0 \leq |\nu| < |\mu| = |\tau| \leq q. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Wir bemerken, dass hierin ausschließlich Einträge der Jacobi-Matrix von Φ vorkommen. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass die so gewonnenen Integrabilitätsgleichungen (4.20) an die Komponenten von Φ dann mit der Rangbedingung $\text{rang } J\Phi = \dim J_q \pi$ kompatibel sind, wenn $m q = 1$ oder $\partial \xi^i / \partial u_\mu^\alpha = 0$ für alle Multiindizes μ mit $|\mu| = q$ gilt. Letztere ist äquivalent dazu, dass $V\pi_{q-1}^q$ invariant ist. Mit Hilfe der Darstellung (4.3) folgt aus der Eigenschaft

$$\dim T\Phi(V\pi_{q-1}^q) = \dim V\pi_{q-1}^q,$$

dass die zusammengesetzte $(n + \dim V\pi_{q-1}^q) \times \dim V\pi_{q-1}^q$ -Matrix

$$J^q \Phi := \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq \alpha \leq m, |\mu|=q}} \\ \left(\frac{\partial \psi_\sigma^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \right)_{\substack{1 \leq \beta \leq m, |\sigma|=q \\ 1 \leq \alpha \leq m, |\mu|=q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Xi \\ \Theta \end{pmatrix}$$

vollen Spaltenrang $\text{rang } J^q \Phi = \dim V\pi_{q-1}^q$ besitzt. Bezeichnet Ξ^i die i -te Zeile in $\partial \xi / \partial \mathbf{u}_{(q)}$ und $\Theta^{(\beta, \nu+1_i)}$ die $(\beta, \nu+1_i)$ -te Zeile in $\partial \psi / \partial \mathbf{u}_{(q)}$, dann können Gleichungen (4.20) in der Form

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\tau^\gamma} \Theta^{(\beta, \nu+1_i)} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_{\nu+1_i}^\beta}{\partial u_\tau^\gamma} \Xi^i = 0, \quad |\nu| = q - 1$$

geschrieben werden. Mit anderen Worten beschreiben (4.20) die lineare Abhängigkeit der Zeilen von $J^q \Phi$. Es sei $s = \text{rang } \Xi \in \{0, \dots, n\}$ der Rang der Matrix $\partial \xi / \partial \mathbf{u}_{(q)}$. Dann besitzt $J^q \Phi$ insgesamt $\dim \ker \Xi + \dim \ker \Theta \geq (n - s) + sm \binom{n+q-2}{q-1}$ verschiedene linear abhängige Zeilen, die den Rang von $J^q \Phi$ um mindestens $sm \binom{n+q-2}{q-1} - s \geq 0$ erniedrigen. Wegen

$$sm \binom{n+q-2}{q-1} - s = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0, \\ m = 1, n = 1, \\ m = 1, q = 1 \end{cases}$$

erhalten wir in den Fällen $mn \neq 1 \neq m q$ sofort $0 = s = \text{rang } \Xi$ und somit $\partial \xi^i / \partial u_\mu^\alpha = 0$ für alle Multiindizes μ der Länge q . Damit ist gezeigt, dass das Vertikalbündel $V\pi_{q-1}^q$ invariant ist. Mit der gleichen Überlegung folgt aus (4.21) allgemein, dass das Vertikalbündel $V\pi_k^q$ im Fall $mn \neq 1 \neq m(k+1)$ invariant ist. Hierzu betrachte man die Matrix

$$J^{k+1} \Phi := \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq \alpha \leq m, |\mu|=k+1}} \\ \left(\frac{\partial \psi_\sigma^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \right)_{\substack{1 \leq \beta \leq m, |\sigma|=k+1 \\ 1 \leq \alpha \leq m, |\mu|=k+1}} \end{pmatrix},$$

welche vollen Spaltenrang $\text{rang } J^{k+1}\Phi = \dim V\pi_k^{k+1} = m \binom{n+k}{k+1}$ besitzt. Diese Eigenschaft ergibt sich direkt aus $\dim \left(T\Phi(V\pi_k^{k+1}) \bmod V\pi_{k+1}^q \right) = \dim V\pi_k^{k+1}$ und der Darstellung (4.12). Nach (4.21) gibt es mindestens $(n-s) + sm \binom{n+k-1}{k}$ verschiedene linear abhängige Zeilen in $J^{k+1}\Phi$, wobei s den Rang von $\partial\xi/\partial\mathbf{u}_{(k+1)}$ bezeichnet. Wegen

$$sm \binom{n+k-1}{k} - s = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0, \\ m = 1, n = 1, \\ m = 1, k = 0 \end{cases}$$

folgt leicht die Behauptung. \square

Die vorgestellten Beweisvarianten von Proposition 4.1.10 beruhen im Wesentlichen auf den Strukturgleichungen der Kontaktdistribution \mathcal{C}_q . Sie unterscheiden sich in Ansatz und Argumentation, weshalb sie auch unterschiedliche Zusatzannahmen über (m, n, q) erfordern.

Beweis	Teil (i)			Teil (ii)
	$(m = 1, n = 1, q > 1)$	$(m = 1, n > 1, q > 1)$	$(m > 1, q > 1)$	$(m > 1)$
Variante 1	✓	✓	✓	✗
Variante 2	✓	✓	✓	✗
Variante 3	✗	✓	✓	✓
Variante 4	✗	✓	✓	✓

Tabelle 4.1: Geltungsbereich der Beweisvarianten von Proposition 4.1.10.

4.2 Theorem von Bäcklund

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die Kontakttransformationen unterschiedlicher Ordnung eine mehrstufige Hierarchie bilden. Grundlage sind zwei natürliche Operationen mit einer Kontakttransformation der Ordnung q : *Projektion* und *Prolongation*. Erstere erniedrigt die Ordnung; letztere erhöht sie. Wie es der Titel ausdrücklich ankündigt, beweisen wir das Theorem von Bäcklund in umfassender Ausführlichkeit, wobei wir die wichtigste Vorarbeit bereits in Proposition 4.1.10 erledigt haben.

Proposition 4.2.1. Es sei $\Phi: U \subseteq J_q\pi \rightarrow V \subseteq J_q\pi$ eine Kontakttransformation derart, dass alle π_0^q -Fasern im Definitionsbereich U von Φ zusammenhängend sind. Dann gilt:

- (i) Es existiert eine Kontakttransformation $\Phi_k: \pi_k^q(U) \subseteq J_k\pi \rightarrow \pi_k^q(V) \subseteq J_k\pi$ mit der Eigenschaft $\Phi_k \circ \pi_k^q = \pi_k^q \circ \Phi$ für jedes $0 < k < q$.
- (ii) Im Fall $m = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{X} > 1$ existiert zusätzlich ein lokaler Diffeomorphismus $\Phi_0: \pi_0^q(U) \subseteq \mathcal{E} \rightarrow \pi_0^q(V) \subseteq \mathcal{E}$ mit der Eigenschaft $\Phi_0 \circ \pi_0^q = \pi_0^q \circ \Phi$.

Beweis. Nach Voraussetzung und Proposition 4.1.10 ist Φ ein π_k^q -fasererhaltender Diffeomorphismus. Folglich existieren bijektive Abbildungen $\Phi_k: \pi_k^q(U) \subseteq J_k\pi \rightarrow \pi_k^q(V) \subseteq J_k\pi$ mit der Eigenschaft $\Phi_k \circ \pi_k^q = \pi_k^q \circ \Phi$ für alle $0 \leq k < q$. Es bleibt zu zeigen, dass die so gewonnenen Diffeomorphismen Φ_k für $0 < k < q$ Kontakttransformationen sind. Dies folgt direkt aus der Invarianz der abgeleiteten Kontaktdistributionen nach Korollar 4.1.5 und der Beziehung $\mathcal{C}_k = T\pi_k^q(\mathcal{C}_q^{(q-k)})$, vgl. auch Korollar 3.3.4:

$$T\Phi_k(\mathcal{C}_k) = (T\Phi_k \circ T\pi_k^q)(\mathcal{C}_q^{(q-k)}) = (T\pi_k^q \circ T\Phi)(\mathcal{C}_q^{(q-k)}) = T\pi_k^q(\mathcal{C}_q^{(q-k)}) = \mathcal{C}_k.$$

Zum Nachweis dieser Eigenschaft in lokalen Koordinaten genügt es zu zeigen, dass die Komponenten von Φ_k die transversalen Kontaktbedingungen (4.5) erfüllen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_i^{(k)}(\psi_\nu^\beta) &= \mathcal{C}_i^{(q)}(\psi_\nu^\beta) - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{k \leq |\mu| < q} u_{\mu+1_i}^\alpha \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \\
&\stackrel{(4.5)}{=} \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j) - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{k \leq |\mu| < q} u_{\mu+1_i}^\alpha \frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \\
&= \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \mathcal{C}_i^{(k)}(\xi^j) - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{k \leq |\mu| < q} u_{\mu+1_i}^\alpha \left[\frac{\partial \psi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} - \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \frac{\partial \xi^j}{\partial u_\mu^\alpha} \right] \\
&\stackrel{(4.11)}{=} \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \mathcal{C}_i^{(k)}(\xi^j), \quad 0 \leq |\nu| < k.
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichheit haben wir die verallgemeinerten vertikalen Kontaktbedingungen (4.11) an die Komponenten von Φ verwendet. \square

Der Grund, weshalb Kontakttransformationen erster Ordnung in einer abhängigen Variable im Allgemeinen nicht projizierbar sind, liegt darin, dass die Kontaktverteilung $\mathcal{C}_1 \subset T\mathcal{J}_1\pi$ mit $\dim \mathcal{C}_1 = 2n$ verschiedene lokale Zerlegungen $\mathcal{C}_1 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{U}$ in involutive Subdistributen der Dimension n besitzt. In lokalen Koordinaten $(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)})$ auf $\mathcal{J}_1\pi$ gilt beispielsweise

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \langle \mathcal{C}_1^{(1)}, \mathcal{C}_2^{(1)}, \dots, \mathcal{C}_n^{(1)} \rangle \oplus \langle \partial_{u_1}, \partial_{u_2}, \dots, \partial_{u_n} \rangle \\
&= \langle \partial_{u_1}, \mathcal{C}_2^{(1)}, \dots, \mathcal{C}_n^{(1)} \rangle \oplus \langle \mathcal{C}_1^{(1)}, \partial_{u_2}, \dots, \partial_{u_n} \rangle \\
&\quad \dots \\
&= \langle \partial_{u_1}, \dots, \partial_{u_{n-1}}, \mathcal{C}_n^{(1)} \rangle \oplus \langle \mathcal{C}_1^{(1)}, \dots, \mathcal{C}_{n-1}^{(1)}, \partial_{u_n} \rangle.
\end{aligned}$$

Zu jeder solchen Zerlegung finden wir eine Kontakttransformation $\Phi: \mathcal{J}_1\pi \rightarrow \mathcal{J}_1\pi$ mit der Eigenschaft $T\Phi(\langle \mathcal{C}_1^{(1)}, \dots, \mathcal{C}_n^{(1)} \rangle) = \mathcal{H}$ und $T\Phi(V\pi_0^1) = \mathcal{U}$.

Beispiel 4.2.2. Wir betrachten im Ausnahmefall $m = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{X} = 1$ Kontakttransformationen erster Ordnung $\Psi_s: \mathcal{J}_1\pi \rightarrow \mathcal{J}_1\pi$ für $1 \leq s \leq n$ mit lokaler Darstellung

$$\Psi_s(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)}) = (u_1, \dots, u_s, x^{s+1}, \dots, x^n, u - x^1 u_1 - \dots - x^s u_s, -x^1, \dots, -x^s, u_{s+1}, \dots, u_n).$$

Die Abbildung Ψ_s wird in der Literatur *Euler-Transformation* oder *partielle Legendre-Transformation* genannt. Anhand der zugehörigen Jacobi-Matrix

$$J\Psi_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & I_{n-s} & 0 & 0 & 0 \\ -u_1 \cdots -u_s & 0 & 1 & -x^1 \cdots -x^s & 0 \\ -I_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-s} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \det J\Psi_s = 1$$

erkennen wir leicht die folgenden Eigenschaften von Ψ_s :

$$\begin{aligned}
T\Psi_s(V\pi_0^1) &= \langle \mathcal{C}_1^{(1)}, \dots, \mathcal{C}_s^{(1)}, \partial_{u_{s+1}}, \dots, \partial_{u_n} \rangle \neq V\pi_0^1, \\
T\Psi_s(\langle \mathcal{C}_1^{(1)}, \dots, \mathcal{C}_n^{(1)} \rangle) &= \langle \partial_{u_1}, \dots, \partial_{u_s}, \mathcal{C}_{s+1}^{(1)}, \dots, \mathcal{C}_n^{(1)} \rangle.
\end{aligned}$$

Die Transformation Ψ_n , *Legendre-Transformation* genannt, tauscht Koordinaten mit Impulsen aus und dient in der klassischen Mechanik als wichtiges mathematisches Verfahren zur Variablentransformation. Es handelt sich um ein Spezialfall der Transformationen der Form

$$\Phi(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)}) = (\xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{(1)}), \alpha u + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{(1)}), \psi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{(1)})).$$

Für $\alpha = 1$ werden solche Kontakttransformationen *kanonisch* genannt, vgl. Tietz [34]. \triangleleft

Gemäß der Vereinbarung $\mathcal{C}_0 = T\mathcal{E}$ bezeichnen wir lokale Diffeomorphismen auf $\mathcal{E} \cong J_0\pi$ als Kontakttransformationen der Ordnung *Null*. Transformationen dieser Art werden in der Literatur *Punkttransformationen* genannt.

Definition 4.2.3. Es sei $\Phi: U \subseteq J_q\pi \rightarrow V \subseteq J_q\pi$ eine Kontakttransformation der Ordnung $q \geq 0$. Eine Kontakttransformation $j_r\Phi: \tilde{U} \subseteq J_{q+r}\pi \rightarrow \tilde{V} \subseteq J_{q+r}\pi$ der Ordnung $q+r$ heißt *r-te Prolongation von Φ* , wenn die Eigenschaft $\pi_q^{q+r} \circ j_r\Phi = \Phi \circ \pi_q^{q+r}$ auf der offenen Menge $\tilde{U} \cap (\pi_q^{q+r})^{-1}(U) \neq \emptyset$ erfüllt ist.

$$\begin{array}{ccc} J_{q+r}\pi & \xrightarrow{j_r\Phi} & J_{q+r}\pi \\ \pi_q^{q+r} \downarrow & & \downarrow \pi_q^{q+r} \\ J_q\pi & \xrightarrow{\Phi} & J_q\pi \end{array}$$

Es folgt direkt aus der Definition, dass die Einschränkung der r -ten Prolongation $j_r\Phi$ auf die Menge $\emptyset \neq \tilde{U} \cap (\pi_q^{q+r})^{-1}(U) \subseteq J_{q+r}\pi$ über r Ordnungen projizierbar ist. Insbesondere ist $j_r\Phi$ ein π_q^{q+r} -fasererhaltender Diffeomorphismus mit der Eigenschaft $Tj_r\Phi(V\pi_q^{q+r}) = V\pi_q^{q+r}$. Die r -te Prolongation einer Punkttransformation wird in der Literatur ebenfalls Punkttransformation (der Ordnung r) genannt. Eine Kontakttransformation Φ ist folglich genau dann eine Punkttransformation, wenn $T\Phi(V\pi_0^q) = V\pi_0^q$ gilt.

Beispiel 4.2.4. Wir betrachten demonstrativ die Legendre-Transformation $\Psi_2: J_1\pi \rightarrow J_1\pi$ in zwei unabhängigen Variablen (x, y) mit lokaler Darstellung

$$\Psi_2(x, y, u, u_x, u_y) = (u_x, u_y, u - xu_x - yu_y, -x, -y).$$

Die erste Prolongation $j_1\Psi_2$ von Ψ_2 hat in lokalen Koordinaten auf $J_2\pi$ die Form

$$j_1\Psi_2(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = (u_x, u_y, u - xu_x - yu_y, -x, -y, \psi^{xx}, \psi^{xy}, \psi^{yy}).$$

Zur Bestimmung der unbekanntenen Komponenten $\psi^{xx}, \psi^{xy}, \psi^{yy}$ von $j_1\Psi_2$ verwenden wir die transversalen Kontaktbedingungen (4.5). Mit Hilfe der Kontaktmatrix C von $j_1\Psi_2$,

$$C = C(\mathbf{u}_{(2)}) = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \det C = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2,$$

lassen sich die Gleichungen (4.5) in der Matrixdarstellung als

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{xx} & \psi^{xy} \\ \psi^{xy} & \psi^{yy} \end{pmatrix}$$

notieren. Hieraus ergeben sich die gesuchten Funktionen

$$\psi^{xx} = \frac{-u_{yy}}{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}, \quad \psi^{xy} = \frac{u_{xy}}{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}, \quad \psi^{yy} = \frac{-u_{xx}}{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}.$$

Diese Komponenten sind nicht linear in $\mathbf{u}_{(2)}$. An der Jacobi-Determinante

$$\det J(j_1\Psi_2) = \frac{1}{(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)^3} = \frac{1}{(\det C)^3}$$

sehen wir weiter, dass die Kontakttransformation $j_1\Psi_2$ keine stetige Fortsetzung auf die Menge $\{\rho \in J_2\pi \mid \det C(\rho) = 0\}$ besitzt. Trivialerweise gilt $Tj_1\Psi_2(V\pi_1^2) = V\pi_1^2$. \triangleleft

Eine intrinsische Konstruktion der Prolongation ist etwas verwickelt, daher begnügen wir uns zunächst mit einem rechnerischen Zugang. Es sei $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ eine lokale Darstellung einer Kontakttransformation Φ der Ordnung $q \geq 0$. Dann besitzt jede Abbildung $j_r\Phi: J_{q+r}\pi \rightarrow J_{q+r}\pi$ mit der Eigenschaft $\pi_q^{q+r} \circ j_r\Phi = \Phi \circ \pi_q^{q+r}$ in lokalen Koordinaten die Form

$$j_r\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q+r)}) = (\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}), \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q+r)}))$$

mit zunächst unbekanntenen Komponenten $\psi_\nu^\beta = \psi_\nu^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q+r)})$ für $q < |\nu| \leq q+r$. Offenbar erfüllt $j_r\Phi$ genau dann die verallgemeinerten vertikalen Kontaktbedingungen (4.11), wenn die Komponenten ψ_ν^β mit $|\nu| = q+s$ ausschließlich von Ableitungen $\mathbf{u}^{(q+s)}$ abhängen. Weiter erfüllt $j_r\Phi$ genau dann die transversalen Kontaktbedingungen (4.5), wenn gilt

$$\mathcal{C}_i^{(q+r)}(\psi_\nu^\beta) = \sum_{j=1}^n \psi_{\nu+1_j}^\beta \mathcal{C}_i^{(q+1)}(\xi^j), \quad q \leq |\nu| < q+r.$$

Falls $j_r\Phi$ in einer Umgebung um $\rho \in J_{q+r}\pi$ zusätzlich ein lokaler Diffeomorphismus ist, dann folgt aus der Rangbedingung (4.9) die Tatsache, dass die Kontaktmatrix $C = C(\pi_{q+1}^{q+r}(\rho))$ von $j_r\Phi$ im Punkt ρ invertierbar ist. Hieraus resultiert die *Eindeutigkeit* der Komponenten ψ_ν^β für $q < |\nu| \leq q+r$ in einer Umgebung um ρ . Folglich ist der Definitionsbereich der r -ten Prolongation $j_r\Phi$ eine offene Teilmenge von $\{\rho \in J_{q+r}\pi \mid \det C(\pi_{q+1}^{q+r}(\rho)) \neq 0\}$.

Zum Nachweis der *Existenz* von $j_r\Phi$ betrachten wir einen beliebigen Punkt $\rho \in J_{q+r}\pi$, in dem die Kontaktmatrix $C = C(\pi_{q+1}^{q+r}(\rho))$ mit Einträgen $C_{ij} = \mathcal{C}_i^{(q+1)}(\xi^j)$ invertierbar ist. Definitionsgemäß ist ρ eine Äquivalenzklasse von lokalen Schnitten $\sigma \in \Gamma_p(\pi)$ mit $p = \pi^{q+r}(\rho) \in \mathcal{X}$ und $[\sigma]_p^{(q+r)} = \rho$. Wir nehmen einen *beliebigen* Repräsentanten σ von ρ und betrachten das prolongierte Bild im $j_q\sigma \subset J_q\pi$ in einer Umgebung um $\hat{\rho} = \pi_q^{q+r}(\rho)$. Dann ist $\Phi(\text{im } j_q\sigma)$ eine Integralmannigfaltigkeit der Kontaktdistribution \mathcal{C}_q . Wir zeigen, dass die Untermannigfaltigkeit $\Phi(\text{im } j_q\sigma)$ transversal zur Projektion $\pi^q: J_q\pi \rightarrow \mathcal{X}$ ist. Hierzu betrachten wir den Tangentialraum $T_{\hat{\rho}}(\text{im } j_q\sigma) \subset T_{\hat{\rho}}J_q\pi$ im Punkt $\hat{\rho}$, aufgespannt durch n Vektoren

$$Tj_q\sigma(\partial_{x^i}) = \mathcal{C}_i^{(q)} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} \sigma_{\mu+1_i}^\alpha(\hat{\mathbf{x}}) \mathcal{C}_\alpha^\mu, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Da Φ nach Voraussetzung eine Kontakttransformation ist, folgt aus den beiden Kontaktbedingungen (4.2) und (4.5) sofort, dass der Tangentialraum $T_{\Phi(\hat{\rho})}\Phi(\text{im } j_q\sigma)$ im Bildpunkt $\Phi(\hat{\rho})$ durch n Vektoren der Form

$$(T\Phi \circ Tj_q\sigma)(\partial_{x^i}) = \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q+1)}(\xi^j) \mathcal{C}_j^{(q)} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \mathcal{C}_i^{(q+1)}(\psi_\nu^\beta) \mathcal{C}_\beta^\nu, \quad 1 \leq i \leq n$$

aufgespannt wird. Die Koeffizienten vor $\mathcal{C}_j^{(q)}$ entsprechen den Einträgen der *invertierbaren* Kontaktmatrix C , weshalb $\Phi(\text{im } j_q\sigma)$ transversal bezüglich π^q ist. Es existiert folglich ein lokaler Schnitt $\bar{\sigma} \in \Gamma_{(\pi^q \circ \Phi)(\hat{\rho})}(\pi)$ derart, dass gilt $\text{im } j_q\bar{\sigma} = \Phi(\text{im } j_q\sigma)$. Schließlich setzen wir

$$j_r\Phi(\rho) := [\bar{\sigma}]_{(\pi^q \circ \Phi)(\hat{\rho})}^{(q+r)}.$$

Bei einem anderen Repräsentanten σ' von ρ stimmen die Ableitungen von σ' mit denen von σ bis hin zur Ordnung $q+r$ überein, sodass der Ausdruck $j_r\Phi(\rho)$ wohldefiniert ist. Nach Konstruktion gilt $\pi_q^{q+r} \circ j_r\Phi = \Phi \circ \pi_q^{q+r}$.

Allgemein ist die r -te Prolongation $j_r\Phi$ einer Kontakttransformation Φ der Ordnung $q \geq 0$ genau dann wohldefiniert in $\rho \in J_{q+r}\pi$, wenn das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \xrightarrow{j_{q+r}\sigma} & \\
 & & & \nearrow^{j_q\sigma} & \\
 \mathcal{X} & \xleftarrow{\sigma} & \mathcal{E} & \xleftarrow{\pi_q^q} & J_q\pi & \xleftarrow{\pi_q^{q+r}} & J_{q+r}\pi \\
 & \searrow^{\pi} & & \searrow^{\pi_q} & \downarrow \Phi & & \downarrow j_r\Phi \\
 & & & \searrow^{\pi_q} & & & \\
 & & & \searrow^{\pi_q} & & & \\
 \mathcal{X} & \xleftarrow{\bar{\sigma}} & \mathcal{E} & \xleftarrow{\pi_q^q} & J_q\pi & \xleftarrow{\pi_q^{q+r}} & J_{q+r}\pi \\
 & \searrow^{\pi} & & \searrow^{\pi_q} & \downarrow \Phi & & \downarrow j_r\Phi \\
 & & & \searrow^{\pi_q} & & & \\
 & & & \searrow^{\pi_q} & & & \\
 & & & \xrightarrow{j_{q+r}\bar{\sigma}} & & &
 \end{array} \tag{4.22}$$

für jeden lokalen Schnitt $\sigma \in [\sigma]_{\pi^{q+r}(\rho)}^{(q+r)} = \rho$ kommutiert. Mit der Bezeichnung

$$\bar{\sigma} := (\pi_0^q \circ \Phi \circ j_q\sigma) \circ (\pi^q \circ \Phi \circ j_q\sigma)^{-1}$$

folgt direkt $j_r\Phi \circ j_{q+r}\sigma = j_{q+r}\bar{\sigma}$. Insbesondere ist die Identität $\text{id}_{J_{q+r}\pi}$ die r -te Prolongation von $\text{id}_{J_q\pi}$. Die Rechenregel $j_r(\Phi \circ \Psi) = j_r\Phi \circ j_r\Psi$ für Kontakttransformationen Φ, Ψ impliziert, dass mit Φ auch $j_r\Phi$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Die Verkettung zweier Punkttransformationen bleibt eine Punkttransformation. Das nächste Korollar konkretisiert die Voraussetzung, unter welcher der Definitionsbereich der Prolongation maximal groß ist.

Korollar 4.2.5. *Es sei $\Phi: U \subseteq J_q\pi \rightarrow V \subseteq J_q\pi$ eine Kontakttransformation der Ordnung $q \geq 0$ mit der Eigenschaft $T\Phi(V\pi_{q-1}^q) = V\pi_{q-1}^q$. Dann existiert zu jedem $r > 0$ eine eindeutig bestimmte r -te Prolongation $j_r\Phi$ von Φ mit*

$$j_r\Phi: (\pi_q^{q+r})^{-1}(U) \subseteq J_{q+r}\pi \rightarrow (\pi_q^{q+r})^{-1}(V) \subseteq J_{q+r}\pi.$$

Beweis. Für jeden Schnitt $\sigma \in [\sigma]_{\pi^{q+r}(\rho)}^{(q+r)} = \rho \in (\pi_q^{q+r})^{-1}(U)$ gilt nach Proposition 2.2.2

$$T(\text{im } j_q\sigma) \subset \mathcal{C}_q|_{\text{im } j_q\sigma} \quad \text{und} \quad T(\text{im } j_q\sigma) \cap V\pi_{q-1}^q|_{\text{im } j_q\sigma} = \{0\}.$$

Nach eventueller Einschränkung des Definitionsbereichs von σ derart, dass $\text{dom } \sigma \subset U$ gilt, folgt aus der Isomorphie von $T\Phi$ und der Voraussetzung $T\Phi(V\pi_{q-1}^q) = V\pi_{q-1}^q$ unmittelbar

$$T(\Phi(\text{im } j_q\sigma)) \cap V\pi_{q-1}^q|_{\Phi(\text{im } j_q\sigma)} = \{0\}.$$

Dementsprechend ist $\Phi(\text{im } j_q\sigma)$ eine π^q -transversale Integralmannigfaltigkeit der Kontaktdistribution \mathcal{C}_q . Das Diagramm (4.22) kommutiert. In lokalen Koordinaten ergibt sich folgendes Bild. Anhand der Darstellung (4.3) ergibt sich aus der Voraussetzung $T\Phi(V\pi_{q-1}^q) = V\pi_{q-1}^q$ die Tatsache, dass die Kontaktmatrix $C = C(\pi_q^{q+r}(\rho))$ von Φ mit Einträgen

$$C_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}(\mathbf{x}), & \text{falls } q = 0, \\ \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{\alpha=1}^m u_i^\alpha \frac{\partial \xi^j}{\partial u^\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & \text{falls } q = 1, \\ \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{\alpha=1}^m u_i^\alpha \frac{\partial \xi^j}{\partial u^\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & \text{falls } q > 1, m > 1, \\ \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)}) + u_{1_i} \frac{\partial \xi^j}{\partial u}(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)}) + \sum_{k=1}^n u_{1_{k+1_i}} \frac{\partial \xi^j}{\partial u_{1_k}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)}), & \text{falls } q > 1, m = 1 \end{cases}$$

in jedem Punkt $\rho \in (\pi_q^{q+r})^{-1}(U)$ invertierbar ist, sodass die r -te Prolongation $j_r\Phi$ auf ganz $(\pi_q^{q+r})^{-1}(U) \subseteq J_{q+r}\pi$ definiert ist. \square

Das Theorem von Bäcklund [6] ging historisch als Antwort aus der Frage³ hervor, ob es Kontakttransformationen höherer Ordnung gibt, die nicht als Prolongation von Punkt- bzw. Kontakttransformationen erster Ordnung entstehen.

Theorem 4.2.6 (Bäcklund; Lokale Version). *Es sei $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ eine beliebige Kontakttransformation der Ordnung $q \geq 1$. Dann gelten folgende lokale Aussagen:*

- (i) *Im Fall $m > 1$ ist $\Phi = j_q\Phi_0$ die q -te Prolongation einer Punkttransformation $\Phi_0: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$.*
- (ii) *Im Fall $m = 1$ ist $\Phi = j_{q-1}\Phi_1$ die $(q-1)$ -te Prolongation einer Kontakttransformation erster Ordnung $\Phi_1: J_1\pi \rightarrow J_1\pi$.*

Beweis. Es sei $\rho \in J_q\pi$ ein beliebiger Punkt des Definitionsbereichs von Φ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $U \subseteq J_q\pi$ eine hinreichend kleine offene Umgebung um ρ , die vollständig im Definitionsbereich von Φ liegt, derart, dass alle π_0^q -Fasern in U zusammenhängend sind. Nach Proposition 4.2.1 existiert im Fall $m > 1$ ein lokaler Diffeomorphismus Φ_0 auf $\pi_0^q(U)$ mit $\Phi_0 \circ \pi_0^q = \pi_0^q \circ \Phi$ und im Fall $m = 1$ eine Kontakttransformation Φ_1 auf $\pi_1^q(U)$ mit $\Phi_1 \circ \pi_1^q = \pi_1^q \circ \Phi$. Aus der Eindeutigkeit der Prolongation folgt $\Phi = j_q\Phi_0$ bzw. $\Phi = j_{q-1}\Phi_1$. \square

Zusammenfassend stellen wir fest, dass die Lie-Pseudogruppe $\Gamma(J_q\pi, \mathcal{C}_q)$ im Fall $m > 1$ lokal isomorph zur Lie-Pseudogruppe $\Gamma(\mathcal{E}, \mathcal{C}_0) = \text{Diff}_{\text{lok}}(\mathcal{E})$ und im Fall $m = 1$ lokal isomorph zur Lie-Pseudogruppe $\Gamma(J_1\pi, \mathcal{C}_1)$ ist. Für global definierte Kontakttransformationen lassen sich diese Aussagen präzisieren.

Theorem 4.2.7 (Bäcklund; Globale Version). *Im Fall $mq > 1$ ist jede global definierte Kontakttransformation $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ die q -te Prolongation eines π -fasererhaltenden Diffeomorphismus $\Phi_0: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ mit $\Phi = j_q\Phi_0$.*

Beweis. Es sei $\rho \in J_q\pi$ ein beliebiger Punkt. Die wesentliche Voraussetzung ist, dass die Kontakttransformation Φ entlang der gesamten Faser $(\pi_0^q)^{-1}(\{\pi_0^q(\rho)\}) \subset J_q\pi$ definiert ist. Wir geben zuerst einen rechnerischen Beweis an. Im Fall $m > 1$ sei $\Phi_0: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung um $\pi_0^q(\rho)$ mit der Eigenschaft $j_q\Phi_0 = \Phi$. Die zugehörige Kontaktmatrix $C = C(\pi_1^q(\rho))$ von Φ mit Einträgen

$$C_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) = C_i^{(1)}(\xi^j)(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{\alpha=1}^m u_i^\alpha \frac{\partial \xi^j}{\partial u^\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

muss laut der Rangbedingung (4.9) in jedem Punkt $\hat{\rho} \in (\pi_0^q)^{-1}(\{\pi_0^q(\rho)\})$ invertierbar sein. Wir zeigen $\xi^j = \xi^j(\mathbf{x})$. Zu diesem Zweck betrachten wir die nichtverschwindenden Einträge von $\partial \xi / \partial \mathbf{u}$. Angenommen, es gelte $\partial \xi^j / \partial u^\beta \neq 0$ für ein festes Paar (j, β) . Wir setzen

$$u_i^\alpha := \begin{cases} -\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \bigg/ \frac{\partial \xi^j}{\partial u^\beta}, & \text{falls } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auf diese Weise finden wir einen Punkt $\hat{\rho} \in (\pi_0^q)^{-1}(\{\pi_0^q(\rho)\})$, in dem die j -te Spalte in $C = C(\pi_1^q(\hat{\rho}))$ eine Nullspalte ist, weshalb C nicht invertierbar ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich ist ξ^j unabhängig von \mathbf{u} . Dementsprechend ist Φ_0 ein π -fasererhaltender

³„Gibt es Transformationen, welche keine Berührungstransformationen sind, bei denen Berührung höherer Ordnung invariante Beziehung ist?“ S. Lie [20, S. 223 (Fußnote)]

lokaler Diffeomorphismus. Aus der Beliebigkeit des betrachteten Punktes ρ und der Surjektivität der Projektion π_0^q folgt die Behauptung. Im Fall $m = 1$ verfahren wir analog. Es sei $\Phi_1: J_1\pi \rightarrow J_1\pi$ eine Kontakttransformation in einer Umgebung um $\pi_1^q(\rho)$ mit $j_{q-1}\Phi_1 = \Phi$. Wir betrachten die zugehörige Kontaktmatrix $C = C(\pi_2^q(\rho))$ von Φ mit Einträgen

$$C_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(2)}) = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)}) + u_{1_i} \frac{\partial \xi^j}{\partial u}(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)}) + \sum_{k=1}^n u_{1_{k+1_i}} \frac{\partial \xi^j}{\partial u_{1_k}}(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)})$$

und zeigen zuerst $\xi^j = \xi^j(\mathbf{x}, u)$. Hierzu bemerken wir, dass die Kontaktmatrix C in jedem Punkt $\hat{\rho} \in (\pi_1^q)^{-1}(\{\pi_1^q(\rho)\})$ invertierbar ist. Angenommen, es gelte $\partial \xi^j / \partial u_{1_s} \neq 0$ für ein festes Paar (j, s) . Wir setzen

$$u_{1_{k+1_i}} := \begin{cases} - \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} + u_{1_i} \frac{\partial \xi^j}{\partial u} \right) / \frac{\partial \xi^j}{\partial u_{1_s}}, & \text{falls } k = s, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist die j -te Spalte in $C = C(\pi_2^q(\hat{\rho}))$ eine Nullspalte, weshalb C nicht invertierbar ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich ist ξ^j unabhängig von $\mathbf{u}_{(1)}$. Aus den vertikalen Kontaktbedingungen (4.2) für Φ_1 folgt $\Phi_1 = j_1\Phi_0$ und somit auch $\Phi = j_q\Phi_0$. Es bleibt $\xi^j = \xi^j(\mathbf{x})$ zu zeigen. Im Fall $\partial \xi^j / \partial u \neq 0$ setzen wir naheliegenderweise

$$u_i := - \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} / \frac{\partial \xi^j}{\partial u}$$

und erhalten direkt einen Widerspruch zur Invertierbarkeit der Kontaktmatrix $C = C(\pi_1^q(\hat{\rho}))$ von Φ . Folglich ist $\Phi = j_q\Phi_0$ fasererhaltend bezüglich π^q . Aus der Surjektivität der Projektion π_0^q folgt $\mathcal{E} = \pi_0^q(J_q\pi)$ und somit die Behauptung. Ein intrinsischer Beweis hierzu basiert im Wesentlichen auf der Invarianz der Vertikalbündel. Im Fall $mq > 1$ ist das Vertikalbündel $V\pi_{q-1}^q$ nach Proposition 4.1.10 invariant unter Kontakttransformationen. Es gilt

$$T(\Phi(\text{im } j_q\sigma)) \cap V\pi_{q-1}^q|_{\Phi(\text{im } j_q\sigma)} = \{0\}$$

ohne Einschränkungen für *alle* Schnitte $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$. Folglich ist jede Integralmannigfaltigkeit $\Phi(\text{im } j_q\sigma)$ von \mathcal{C}_q automatisch π^q -transversal. Insbesondere induziert Φ eine Bijektion

$$\begin{cases} \Gamma_{lok}(\pi) & \longrightarrow \Gamma_{lok}(\pi) \\ \sigma & \longmapsto \bar{\sigma} = (\pi_0^q \circ \Phi \circ j_q\sigma) \circ (\pi^q \circ \Phi \circ j_q\sigma)^{-1}, \end{cases}$$

die verträglich mit der Äquivalenzklassenbildung von q -Jets ist. Demnach ist $\Phi = j_q\Phi_0$ fasererhaltend bezüglich π^q , vgl. Definition 2.1.3. \square

Im beschriebenen Fall $mq > 1$ ist die Gruppe $\Gamma(J_q\pi, \mathcal{C}_q) \cap \text{Diff}(J_q\pi)$ isomorph zur Gruppe der π -fasererhaltenden Diffeomorphismen $\{\Phi \in \text{Diff}(\mathcal{E}) \mid T\Phi(V\pi) = V\pi\}$. Einen alternativen Beweis der (schwächeren) globalen Version des Theorems von Bäcklund für den Spezialfall $q > 1$ findet man in Alonso-Blanco *et al.* [3].

4.3 Infinitesimale Kontakttransformationen

In Analogie zu Abschnitt 3.4 untersuchen wir die infinitesimalen geometrischen Symmetrien der Kontaktdistribution \mathcal{C}_q . Im Vergleich zu allgemeinen Kontakttransformationen sind *infinitesimale* Kontakttransformationen deutlich einfacher zu beschreiben.

Definition 4.3.1. Ein lokales Vektorfeld $X \in \Gamma_U(\tau_{J_q\pi})$ heißt *infinitesimale Kontakttransformation der Ordnung $q \geq 0$* , wenn der zugehörige Fluss $\Phi: \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ eine einparametrische lokale Lie-Gruppe von Kontakttransformationen auf $U \subseteq J_q\pi$ bildet.

Korollar 4.3.2. Ein Vektorfeld $X \in \Gamma_U(\tau_{J_q\pi})$ ist genau dann eine infinitesimale Kontakttransformation der Ordnung q , wenn gilt $\mathcal{L}_X \mathcal{C}_q = [X, \mathcal{C}_q] \subseteq \mathcal{C}_q$ oder äquivalent $\mathcal{L}_X \mathcal{C}_q^0 \subseteq \mathcal{C}_q^0$.

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Proposition 3.4.2 mit $\mathcal{M} := U \subseteq J_q\pi$ und $\mathcal{D} := \mathcal{C}_q$. \square

Die Menge der infinitesimalen Kontakttransformationen der Ordnung q , in Zeichen

$$\text{Sym}[U, \mathcal{C}_q] := \{X \in \Gamma_U(\tau_{J_q\pi}) \mid [X, \mathcal{C}_q] \subseteq \mathcal{C}_q\},$$

bildet nach Proposition 3.2.5 eine reelle Lie-Algebra. Nach Konstruktion gilt $\text{Sym}[J_q\pi, \mathcal{C}_q] \subseteq \text{Sym}[U, \mathcal{C}_q]$ und $\text{Sym}[U, \mathcal{C}_0] = \Gamma_U(\tau_{\mathcal{E}})$ im Fall $q = 0$. Wir nehmen in der Regel an, dass die Teilmenge $U \subseteq J_q\pi$ im Gültigkeitsbereich der lokalen Karte $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ liegt und alle π_0^q -Fasern in U zusammenhängend sind, vgl. Proposition 3.4.7(i).

Zum besseren Verständnis der Kontaktbedingung $[X, \mathcal{C}_q] \subseteq \mathcal{C}_q$ wollen wir sie in lokalen Koordinaten $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ auf $J_q\pi$ formulieren. Jedes lokale Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(J_q\pi)$ kann bezüglich der Standardbasis von $TJ_q\pi$ in der Form

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \partial_{x^i} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq q} \eta_\nu^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \partial_{u_\nu^\beta} \quad (4.23)$$

dargestellt werden. Wir berechnen zuerst die Lie-Klammer $[X, \mathcal{C}_\alpha^\mu]$ mit $|\mu| = q$ und finden

$$[X, \mathcal{C}_\alpha^\mu] = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{x^i} - \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| < q} \frac{\partial \eta_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta} - \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \frac{\partial \eta_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta}.$$

Die letzte Doppelsumme liegt stets im vertikalen Anteil der Kontaktdistribution $V\pi_{q-1}^q \subset \mathcal{C}_q$. Die ersten zwei Summen liegen genau dann in \mathcal{C}_q , wenn diese eine Linearkombination der transversalen Kontaktvektorfelder $\mathcal{C}_i^{(q)}$ sind. Ein Koeffizientenvergleich führt auf Relationen

$$\frac{\partial \eta_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} = \sum_{i=1}^n u_{\nu+1_i}^\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha}, \quad 0 \leq |\nu| < |\mu| = q. \quad (4.24)$$

Falls die Koeffizienten $\xi^i = \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ und $\eta_\nu^\beta = \eta_\nu^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ mit $0 \leq |\nu| < q$ diese vertikalen Kontaktbedingungen erfüllen, dann gilt $[X, V\pi_{q-1}^q] \subseteq \mathcal{C}_q$. In diesem Fall schreiben wir

$$[X, \mathcal{C}_\alpha^\mu] = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \mathcal{C}_i^{(q)} - \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \frac{\partial \eta_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \mathcal{C}_\nu^\beta \in \mathcal{C}_q. \quad (4.25)$$

Auf gleiche Weise werten wir die Lie-Klammer $[X, \mathcal{C}_i^{(q)}]$ aus und erhalten

$$[X, \mathcal{C}_i^{(q)}] = - \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j) \partial_{x^j} - \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| < q} (\mathcal{C}_i^{(q)}(\eta_\nu^\beta) - \eta_{\nu+1_i}^\beta) \partial_{u_\nu^\beta} - \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \mathcal{C}_i^{(q)}(\eta_\nu^\beta) \partial_{u_\nu^\beta}.$$

Die rechte Seite liegt genau dann in \mathcal{C}_q , wenn die folgenden Rekursionsgleichungen erfüllt sind:

$$\eta_{\nu+1_i}^\beta = \mathcal{C}_i^{(q)}(\eta_\nu^\beta) - \sum_{j=1}^n u_{\nu+1_j}^\beta \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j), \quad 0 \leq |\nu| < q. \quad (4.26)$$

Falls die Koeffizienten $\xi^i = \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ und $\eta_\nu^\beta = \eta_\nu^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ mit $0 \leq |\nu| \leq q$ diese *transversalen* Kontaktbedingungen erfüllen, dann gilt $[X, \mathcal{H}] \subseteq \mathcal{C}_q$ für ein Komplement $\mathcal{H} = \langle \mathcal{C}_1^{(q)}, \dots, \mathcal{C}_n^{(q)} \rangle$ von $V\pi_{q-1}^q$ in \mathcal{C}_q . In diesem Fall besitzt die Lie-Klammer $[X, \mathcal{C}_i^{(q)}]$ folgende Darstellung:

$$[X, \mathcal{C}_i^{(q)}] = - \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q)}(\xi^j)(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \mathcal{C}_j^{(q)} - \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \mathcal{C}_i^{(q)}(\eta_\nu^\beta)(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \mathcal{C}_\beta^\nu \in \mathcal{C}_q. \quad (4.27)$$

Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(J_q\pi)$ ist folglich genau dann eine infinitesimale Kontakttransformation, wenn die Koeffizienten von X die beiden Kontaktbedingungen (4.24) und (4.26) erfüllen.

Das folgende einfache Beispiel zeigt explizit, dass der Fluss einer infinitesimalen Kontakttransformation im Allgemeinen *keine* Gruppe bildet.

Beispiel 4.3.3. Wir betrachten eine einparametrische Gruppe von Kontakttransformationen $\Phi: \mathbb{R} \times J_1\pi \rightarrow J_1\pi$ in einer unabhängigen Variable x und einer abhängigen Variable u mit

$$\Phi_t(x, u, u') = \left(x \cos(t) + u' \sin(t), u - xu' \sin^2(t) + \frac{(u')^2 - x^2}{4} \sin(2t), u' \cos(t) - x \sin(t) \right).$$

Man bestätigt leicht $\det J\Phi_t \equiv 1$ und $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$. Das zugehörige erzeugende Vektorfeld

$$X = \frac{d}{dt} \Phi_t|_{t=0} = u' \partial_x + \frac{(u')^2 - x^2}{2} \partial_u - x \partial_{u'}$$

ist eine infinitesimale Kontakttransformation erster Ordnung, denn es gilt

$$[X, \mathcal{C}_x^{(1)}] = \partial_{u'} \quad \text{und} \quad [X, \partial_{u'}] = -\mathcal{C}_x^{(1)}.$$

Für die erste Prolongation $j_1\Phi_t(x, u, u', u'') = (\Phi_t(x, u, u'), \psi_t(x, u, u', u''))$ von Φ_t finden wir

$$\psi_t(x, u, u', u'') = \frac{\mathcal{C}_x^{(2)}(u' \cos(t) - x \sin(t))}{\mathcal{C}_x^{(2)}(x \cos(t) + u' \sin(t))} = \frac{-\sin(t) + u'' \cos(t)}{\cos(t) + u'' \sin(t)} = -\tan(t - \arctan(u'')).$$

Anhand der Jacobi-Determinante $\det J(j_1\Phi_t) = (\cos(t) + u'' \sin(t))^{-2}$ sehen wir, dass die Kontakttransformationen $j_1\Phi: \mathfrak{U} \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times J_2\pi \rightarrow J_2\pi$ eine *echte* lokale Lie-Gruppe bilden. Für das entsprechende erzeugende Vektorfeld j_1X finden wir

$$j_1X = \frac{d}{dt} j_1\Phi_t|_{t=0} = u' \partial_x + \frac{(u')^2 - x^2}{2} \partial_u - x \partial_{u'} - (1 + (u'')^2) \partial_{u''}.$$

Insbesondere ist j_1X eine infinitesimale Kontakttransformation zweiter Ordnung mit

$$[j_1X, \mathcal{C}_x^{(2)}] = -u'' \mathcal{C}_x^{(2)} \quad \text{und} \quad [j_1X, \partial_{u''}] = 2u'' \partial_{u''}.$$

Offenbar gilt $[j_1X, V\pi_1^2] \subseteq V\pi_1^2$ und $X \circ \pi_1^2 = T\pi_1^2 \circ j_1X$. ◁

Wenn wir die Rekursionsgleichungen (4.26) genauer betrachten, so sehen wir, dass die Koeffizienten $\xi^j = \xi^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ und $\eta^\beta = \eta^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ eine infinitesimale Kontakttransformation X mit Darstellung (4.23) eindeutig festlegen. Es bleibt zu untersuchen, welche Kompatibilitätsbedingungen an ξ^j und η^β notwendig und hinreichend für die Existenz des Vektorfeldes X sind. Das folgende Korollar fasst hierzu die wesentlichen Informationen zusammen.

Korollar 4.3.4. *Es sei $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{C}_q]$ eine infinitesimale Kontakttransformation der Ordnung $q \geq 1$ mit lokaler Darstellung (4.23). Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Es gilt $\mathcal{L}_X \mathcal{C}_q^{(k)} = [X, \mathcal{C}_q^{(k)}] \subseteq \mathcal{C}_q^{(k)}$ für $0 \leq k \leq q$. In lokalen Koordinaten gilt äquivalent:*

$$\frac{\partial \eta_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} = \sum_{i=1}^n u_{\nu+1_i}^\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha}, \quad 0 \leq |\nu| < q - k \leq |\mu| \leq q, \quad (4.28a)$$

$$\eta_{\nu+1_i}^\beta = \mathcal{C}_i^{(q-k)}(\eta_\nu^\beta) - \sum_{j=1}^n u_{\nu+1_j}^\beta \mathcal{C}_i^{(q-k)}(\xi^j), \quad 0 \leq |\nu| < q - k. \quad (4.28b)$$

(ii) *Es gilt $\mathcal{L}_X V \pi_k^q = [X, V \pi_k^q] \subseteq V \pi_k^q$ für $0 < k < q$. In lokalen Koordinaten gilt äquivalent:*

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} = 0, \quad k < |\mu| \leq q \quad \text{und} \quad \frac{\partial \eta_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} = 0, \quad 0 \leq |\nu| \leq k < |\mu| \leq q. \quad (4.29)$$

Es existiert eine infinitesimale Kontakttransformation $Y \in \text{Sym}[\pi_1^q(U), \mathcal{C}_1]$ der Form

$$Y = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) \partial_{x^i} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq 1} \eta_\nu^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) \partial_{u_\nu^\beta}$$

mit der Eigenschaft $Y \circ \pi_1^q = T \pi_1^q \circ X$.

Im Fall $m > 1$ gilt $\mathcal{L}_X V \pi_0^q = [X, V \pi_0^q] \subseteq V \pi_0^q$. In lokalen Koordinaten gilt äquivalent:

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} = 0, \quad 0 < |\mu| \leq q \quad \text{und} \quad \frac{\partial \eta_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} = 0, \quad 0 < |\mu| \leq q. \quad (4.30)$$

Es existiert eine infinitesimale Kontakttransformation $Y \in \text{Sym}[\pi_0^q(U), \mathcal{C}_0]$ der Form

$$Y = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \partial_{x^i} + \sum_{\beta=1}^m \eta^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \partial_{u_\beta}$$

mit der Eigenschaft $Y \circ \pi_0^q = T \pi_0^q \circ X$.

Beweis. Die angegebenen Integrabilitätsbedingungen (4.28)-(4.30) lassen sich alternativ direkt aus den beiden (infinitesimalen) Kontaktbedingungen (4.24) und (4.26) herleiten.

(i) Nach Korollar 4.1.5 sind die k -fach abgeleiteten Kontaktdistributionen $\mathcal{C}_q^{(k)}$ invariant unter Kontakttransformationen. Gemäß Korollar 3.4.3 gilt $\mathcal{L}_X \mathcal{C}_q^{(k)} \subseteq \mathcal{C}_q^{(k)}$ für $0 \leq k \leq q$. In lokalen Koordinaten ergibt sich folgendes Bild: Wir nutzen die in Proposition 4.1.4 angegebene lokale Basis von $\mathcal{C}_q^{(k)}$ und berechnen die zugehörigen Lie-Klammern:

$$[X, \mathcal{C}_\alpha^\mu] \text{ mod } \mathcal{C}_q^{(k)} = - \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| < q-k} \left(\frac{\partial \eta_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} - \sum_{i=1}^n u_{\nu+1_i}^\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \right) \partial_{u_\nu^\beta}, \quad q - k \leq |\mu| \leq q,$$

$$[X, \mathcal{C}_i^{(q-k)}] \text{ mod } \mathcal{C}_q^{(k)} = \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| < q-k} \left(\eta_{\nu+1_i}^\beta - \mathcal{C}_i^{(q-k)}(\eta_\nu^\beta) + \sum_{j=1}^n u_{\nu+1_j}^\beta \mathcal{C}_i^{(q-k)}(\xi^j) \right) \partial_{u_\nu^\beta}.$$

Die Koeffizienten der rechten Seite verschwinden identisch in Folge der linearen Unabhängigkeit der Standardbasis von $TJ_q\pi$.

(ii) Nach Proposition 4.1.8 gilt $V\pi_k^q = \text{Char}[\mathcal{C}_q^{(q-k)}]$ für $0 < k < q$. Da die Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distributionen $\text{Char}[\mathcal{C}_q^{(q-k)}]$ nach Korollar 3.2.9 invariant unter Kontakttransformationen sind, folgt $\mathcal{L}_X V\pi_k^q \subseteq V\pi_k^q$ direkt aus Korollar 3.4.3. Wegen $\mathcal{C}_q^{(q-1)} = (T\pi_1^q)^{-1}(\mathcal{C}_1)$ existiert nach Proposition 3.4.7 eine infinitesimale Kontakttransformation $Y \in \text{Sym}[\pi_1^q(U), \mathcal{C}_1]$ mit der Eigenschaft $Y \circ \pi_1^q = T\pi_1^q \circ X$. In lokalen Koordinaten erhalten wir folgende Aussagen:

$$\left[X, \partial_{u_\mu^\alpha} \right] \text{ mod } V\pi_k^q = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{x^i} - \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq k} \frac{\partial \eta_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta}, \quad k < |\mu| \leq q.$$

Analog verschwinden die Koeffizienten der rechten Seite in Folge der linearen Unabhängigkeit der Standardbasis von $TJ_q\pi$.

Im Fall $m = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{X} > 1$ ist das Vertikalbündel $V\pi_0^q$ nach Proposition 4.1.10 invariant unter Kontakttransformationen. Laut Korollar 3.4.3 gilt folglich $\mathcal{L}_X V\pi_0^q \subseteq V\pi_0^q$. Wegen $TJ_q\pi = \mathcal{C}_q^{(q)} = (T\pi_0^q)^{-1}(\mathcal{C}_0)$ existiert nach Proposition 3.4.7 eine infinitesimale Kontakttransformation $Y \in \text{Sym}[\pi_0^q(U), \mathcal{C}_0]$ der Ordnung Null mit der Eigenschaft $Y \circ \pi_0^q = T\pi_0^q \circ X$. In lokalen Koordinaten erhalten wir folgende gleichwertige Aussage:

$$\left[X, \partial_{u_\mu^\alpha} \right] \text{ mod } V\pi_0^q = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{x^i} - \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial \eta_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta}, \quad 0 < |\mu| \leq q.$$

Mit dem gleichen Argument wie oben verschwinden alle Koeffizienten der rechten Seite. \square

Zu beliebig vorgegebenen Funktionen $\xi^i = \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ und $\eta^\beta = \eta^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ existiert folglich genau eine infinitesimale Kontakttransformation X der Ordnung $q \geq 0$ mit

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \partial_{x^i} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq q} \eta_\nu^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(|\nu|)}) \partial_{u_\nu^\beta}. \quad (4.31)$$

Die hier auftretenden Koeffizienten $\eta_\nu^\beta = \eta_\nu^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(|\nu|)})$ mit $|\nu| > 0$ werden nach der Formel

$$\eta_{\nu+1_i}^\beta \stackrel{(4.28b)}{=} \mathcal{C}_i^{(r+1)}(\eta_\nu^\beta) - \sum_{j=1}^n u_{\nu+1_j}^\beta \mathcal{C}_i^{(r+1)}(\xi^j), \quad 0 \leq |\nu| = r < q \quad (4.32)$$

berechnet. Im Sonderfall $m = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{X} = 1$ existieren weitere infinitesimale Kontakttransformationen der Ordnung $q \geq 1$ mit lokaler Darstellung

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)}) \partial_{x^i} + \eta(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)}) \partial_u + \sum_{0 < |\nu| \leq q} \eta_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(|\nu|)}) \partial_{u_\nu}$$

genau dann, wenn die Koeffizienten $\xi^i = \xi^i(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)})$ und $\eta = \eta(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)})$ die Gleichungen

$$\frac{\partial \eta}{\partial u_k}(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)}) \stackrel{(4.28a)}{=} \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \xi^i}{\partial u_k}(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)}), \quad 1 \leq k \leq n \quad (4.33)$$

erfüllen. Koeffizienten höherer Ordnung $\eta_\nu = \eta_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(|\nu|)})$ mit $|\nu| > 0$ werden analog gemäß der Rekursionsformel (4.32) berechnet. Man bestätigt leicht, dass das Vektorfeld

$$X = \sum_{i=1}^n u_i \partial_{x^i} + \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2 - (x^i)^2}{2} \partial_u - \sum_{i=1}^n x^i \partial_{u_i}$$

eine genuine infinitesimale Kontakttransformation erster Ordnung ist.

Beispiel 4.3.5. Wir betrachten generische infinitesimale Kontakttransformationen 2. Ordnung

$$X = \xi \partial_x + \tau \partial_y + \eta \partial_u + \rho \partial_{u_x} + \sigma \partial_{u_y} + \varphi \partial_{u_{xx}} + \phi \partial_{u_{xy}} + \psi \partial_{u_{yy}}$$

in zwei unabhängigen Variablen (x, y) und einer abhängigen Variable u mit beliebigen Koeffizientenfunktionen $\xi = \xi(x, y, u)$, $\tau = \tau(x, y, u)$ und $\eta = \eta(x, y, u)$. Die in der Darstellung von X auftretenden Koeffizienten höherer Ordnung lassen sich direkt aus den Rekursionsgleichungen (4.32) bestimmen:

$$\begin{aligned} \rho &= \mathcal{C}_x^{(1)}(\eta) - u_x \mathcal{C}_x^{(1)}(\xi) - u_y \mathcal{C}_x^{(1)}(\tau) = \eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_y - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_y, \\ \sigma &= \mathcal{C}_y^{(1)}(\eta) - u_x \mathcal{C}_y^{(1)}(\xi) - u_y \mathcal{C}_y^{(1)}(\tau) = \eta_y - \xi_y u_x + (\eta_u - \tau_y)u_y - \xi_u u_x u_y - \tau_u u_y^2, \\ \varphi &= \mathcal{C}_x^{(2)}(\rho) - u_{xx} \mathcal{C}_x^{(2)}(\xi) - u_{xy} \mathcal{C}_x^{(2)}(\tau) \\ &= \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx} u_y + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu} u_x u_y - \xi_{uu} u_x^3 \\ &\quad - \tau_{uu} u_x^2 u_y + (\eta_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xy} - 3\xi_u u_x u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xy} - \tau_u u_y u_{xx}, \\ \phi &= \begin{cases} \mathcal{C}_y^{(2)}(\rho) - u_{xy} \mathcal{C}_y^{(2)}(\xi) - u_{yy} \mathcal{C}_y^{(2)}(\tau) \\ \mathcal{C}_x^{(2)}(\sigma) - u_{xx} \mathcal{C}_x^{(2)}(\xi) - u_{xy} \mathcal{C}_x^{(2)}(\tau) \end{cases} \\ &= \eta_{xy} + (\eta_{yu} - \xi_{xy})u_x + (\eta_{xu} - \tau_{xy})u_y + (\eta_{uu} - \xi_{xu} - \tau_{yu})u_x u_y - \tau_{xu} u_y^2 \\ &\quad - \tau_{uu} u_x u_y^2 - \xi_{uu} u_x^2 u_y - \xi_y u_{xx} + (\eta_u - \tau_y - \xi_x)u_{xy} - \tau_x u_{yy} - \xi_u u_y u_{xx} \\ &\quad - 2\xi_u u_x u_{xy} - 2\tau_u u_y u_{xy} - \tau_u u_x u_{yy}, \\ \psi &= \mathcal{C}_y^{(2)}(\sigma) - u_{xy} \mathcal{C}_y^{(2)}(\xi) - u_{yy} \mathcal{C}_y^{(2)}(\tau) \\ &= \eta_{yy} - \xi_{yy} u_x + (2\eta_{yu} - \tau_{yy})u_y - \xi_{yu} u_x u_y + (\eta_{uu} - 2\tau_{yu})u_y^2 - \xi_{uu} u_x u_y^2 \\ &\quad - \tau_{uu} u_y^3 - 2\xi_y u_{xy} + (\eta_u - 2\tau_y)u_{yy} - \xi_u u_x u_{yy} - 2\xi_u u_y u_{xy} - 3\tau_u u_y u_{yy}. \end{aligned}$$

Die so bestimmten Koeffizientenfunktionen $\rho, \sigma, \varphi, \phi, \psi$ sind linear in Ableitungen von ξ, τ, η und polynomial in Jetvariablen $(u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$. \triangleleft

Anhand der Rekursionsformel (4.32) sehen wir allgemein, dass die Funktionen η_ν^β der Ordnung $|\nu| = r > 0$ linear in Ableitungen von ξ^j und η^β sind. Die Koeffizienten dieser Linearkombinationen sind Polynome in Jetvariablen $(\mathbf{u}_{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{(r)})$.

Es ist wichtig zu bemerken, dass die Darstellung der (infinitesimalen) Kontaktbedingungen (4.32) und (4.33) von der Wahl der (lokalen) Basis von $TJ_q\pi$ abhängt. In Abschnitt 4.1 haben wir darauf hingewiesen, dass die Kontaktdistribution $\mathcal{C}_q \subset TJ_q\pi$ holonom ist. Daher liegt es nahe infinitesimale Kontakttransformationen $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{C}_q]$ der Ordnung $q \geq 1$ bezüglich einer der Kontaktdistribution angepassten lokalen Basis in der Form

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \mathcal{C}_i^{(q)} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq q} Q_\nu^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \partial_{u_\nu^\beta} \quad (4.34)$$

darzustellen. Die zugehörigen Bedingungen an die Koeffizientenfunktionen $\xi^i = \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ und $Q_\nu^\beta = Q_\nu^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ leiten wir direkt aus dem Korollar 4.3.4 her. Die Invarianz der k -fach abgeleiteten Kontaktdistributionen impliziert

$$\begin{aligned} [X, \mathcal{C}_\alpha^\mu] \text{ mod } \mathcal{C}_q^{(k)} &= - \sum_{\substack{i=1 \\ \mu_i > 0, |\mu|=q-k}}^n \xi^i \partial_{u_{\mu-1_i}^\alpha} - \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| < q-k} \frac{\partial Q_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta} \\ &= - \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| < q-k} \left(\frac{\partial Q_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} + \delta_{|\nu|}^{q-k-1} \delta_\alpha^\beta \delta_{\nu+1_i}^\mu \xi^i \right) \partial_{u_\nu^\beta} = 0, \quad q-k \leq |\mu| \leq q, \end{aligned}$$

$$\left[X, \mathcal{C}_i^{(q-k)} \right] \bmod \mathcal{C}_q^{(k)} = \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| < q-k} \left(Q_{\nu+1_i}^\beta - \mathcal{C}_i^{(q-k)}(Q_\nu^\beta) \right) \partial_{u_\nu^\beta} = 0. \quad (4.35)$$

Aus der Invarianz der Vertikalbündel folgt analog

$$\begin{aligned} \left[X, \partial_{u_\mu^\alpha} \right] \bmod V\pi_k^q &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \mathcal{C}_i^{(q)} - \sum_{\substack{i=1 \\ \mu_i > 0, |\mu|=k+1}}^n \xi^i \partial_{u_{\mu-1_i}^\alpha} - \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq k} \frac{\partial Q_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta} \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \mathcal{C}_i^{(q)} - \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq k} \left(\frac{\partial Q_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} + \delta_{|\nu|}^k \delta_\alpha^\beta \delta_{\nu+1_i}^\mu \xi^i \right) \partial_{u_\nu^\beta} = 0, \quad k < |\mu| \leq q, \\ \left[X, \partial_{u_\mu^\alpha} \right] \bmod V\pi_0^q &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \mathcal{C}_i^{(q)} - \sum_{\substack{i=1 \\ \mu_i > 0, |\mu|=1}}^n \xi^i \partial_{u_{\mu-1_i}^\alpha} - \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial Q_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta} \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial u_\mu^\alpha} \mathcal{C}_i^{(q)} - \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{\partial Q_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} + \delta_\alpha^\beta \delta_{1_i}^\mu \xi^i \right) \partial_{u_\nu^\beta} \stackrel{m \geq 1}{=} 0, \quad 0 < |\mu| \leq q. \end{aligned}$$

In Folge der linearen Unabhängigkeit der gewählten Basis von $TJ_q\pi$ verschwinden alle Koeffizienten auf der rechten Seite. Hieraus ergeben sich folgende Aussagen: Die Funktionen $Q^\beta = Q^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)})$, *Charakteristiken von X* genannt, haben die Eigenschaft

$$\frac{\partial Q^\beta}{\partial u_i^\alpha} = \begin{cases} \frac{\partial Q^\gamma}{\partial u_i^\gamma}, & \text{falls } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{falls } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

und legen, vermöge der rekursiven Vorschrift

$$Q_{\nu+1_i}^\beta \stackrel{(4.35)}{=} \mathcal{C}_i^{(r+1)}(Q_\nu^\beta), \quad 0 \leq |\nu| = r < q, \quad (4.36)$$

alle Koeffizienten $Q_\nu^\beta = Q_\nu^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(|\nu|)})$ von X mit $|\nu| > 0$ eindeutig fest. Des Weiteren gilt

$$\xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) = - \frac{\partial Q^\beta}{\partial u_i^\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.37)$$

Im Fall $m = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{X} > 1$ sind die Charakteristiken $Q^\beta = Q^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)})$ linear in $\mathbf{u}_{(1)}$. Folglich lassen sich infinitesimale Kontakttransformationen der Ordnung $q \geq 1$ in der Form

$$X = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q^\beta}{\partial u_i^\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mathcal{C}_i^{(q)} + \sum_{\beta=1}^m Q^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) \partial_{u^\beta} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 < |\nu| \leq q} Q_\nu^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(|\nu|)}) \partial_{u_\nu^\beta}$$

darstellen. Im Spezialfall $m = 1$ induziert jede Funktion $Q \in \mathcal{F}(J_1\pi)$ eine infinitesimale Kontakttransformation der Ordnung $q \geq 1$ mit lokaler Darstellung

$$X = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q}{\partial u_i}(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)}) \mathcal{C}_i^{(q)} + Q(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)}) \partial_u + \sum_{0 < |\nu| \leq q} Q_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(|\nu|)}) \partial_{u_\nu}.$$

Anhand der Rekursionsformel (4.36) sehen wir analog, dass die Funktionen Q_ν^β der Ordnung $|\nu| = r > 0$ linear in Ableitungen von Q^β sind. Die Koeffizienten dieser Linearkombinationen sind wieder Polynome in Jetvariablen $(\mathbf{u}_{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{(r)})$.

Beispiel 4.3.6. Wir betrachten infinitesimale Kontakttransformationen zweiter Ordnung

$$X = -Q_{u_x} \mathcal{C}_x^{(2)} - Q_{u_y} \mathcal{C}_y^{(2)} + Q \partial_u + \rho \partial_{u_x} + \sigma \partial_{u_y} + \varphi \partial_{u_{xx}} + \phi \partial_{u_{xy}} + \psi \partial_{u_{yy}}$$

in zwei unabhängigen Variablen (x, y) und einer abhängigen Variable u . Die zugehörige Charakteristik Q ist eine beliebige Funktion in Jetvariablen (x, y, u, u_x, u_y) . Die in der Darstellung von X auftretenden Koeffizienten lassen sich aus den Rekursionsgleichungen (4.36) berechnen:

$$\begin{aligned} \rho &= \mathcal{C}_x^{(1)}(Q) = Q_x + u_x Q_u, \\ \sigma &= \mathcal{C}_y^{(1)}(Q) = Q_y + u_y Q_u, \\ \varphi &= \mathcal{C}_x^{(2)}(\rho) = Q_{xx} + 2Q_{xu}u_x + Q_{uu}u_x^2 + (Q_u + Q_{xu_x})u_{xx} \\ &\quad + Q_{xu_y}u_{xy} + Q_{uu_x}u_xu_{xx} + Q_{uu_y}u_xu_{xy}, \\ \phi &= \begin{cases} \mathcal{C}_y^{(2)}(\rho) = Q_{xy} + Q_{yu}u_x + Q_{xu}u_y + Q_{uu}u_xu_y + (Q_u + Q_{xu_x})u_{xy} \\ \mathcal{C}_x^{(2)}(\sigma) \quad + Q_{xu_y}u_{yy} + Q_{uu_x}u_xu_{xy} + Q_{uu_y}u_xu_{yy}, \end{cases} \\ \psi &= \mathcal{C}_y^{(2)}(\sigma) = Q_{yy} + 2Q_{yu}u_y + Q_{uu}u_y^2 + Q_{yu_x}u_{xy} \\ &\quad + (Q_u + Q_{yu_y})u_{yy} + Q_{uu_x}u_yu_{xy} + Q_{uu_y}u_yu_{yy}. \end{aligned}$$

Die so bestimmten Koeffizientenfunktionen $\rho, \sigma, \varphi, \phi, \psi$ sind linear in Ableitungen von Q und polynomial in Jetvariablen $(u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$. \triangleleft

Die angegebenen Darstellungen (4.23) und (4.34) einer infinitesimalen Kontakttransformation X können durch einen einfachen Basiswechsel in $TJ_q\pi$ ineinander transformiert werden:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n \xi^i \partial_{x^i} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq q} \eta_\nu^\beta \partial_{u_\nu^\beta} \\ &= \sum_{i=1}^n \xi^i \mathcal{C}_i^{(q)} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| < q} \left(\eta_\nu^\beta - \sum_{i=1}^n u_{\nu+1_i}^\beta \xi^i \right) \partial_{u_\nu^\beta} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q} \eta_\nu^\beta \partial_{u_\nu^\beta}. \end{aligned}$$

Im Fall $m > 1$ ergeben sich hieraus folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} Q^\beta(x, \mathbf{u}^{(1)}) &= \eta^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \sum_{i=1}^n u_i^\beta \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= -\frac{\partial Q^\beta}{\partial u_i^\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \eta^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= Q^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) - \sum_{i=1}^n u_i^\beta \frac{\partial Q^\beta}{\partial u_i^\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Im Spezialfall $m = 1$ gelten die gleichen Beziehungen, nur mit dem Unterschied, dass die hier auftretenden Koeffizienten ξ^i, η und Q Funktionen in Jetvariablen $(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)})$ sind.

Bemerkung 4.3.7. Man kann die obige Rekursionsformel (4.36) leicht exakt auflösen:

$$Q_\nu^\beta = \mathcal{C}_\nu^{(q)}(Q^\beta), \quad 0 < |\nu| \leq q,$$

wobei $\mathcal{C}_\nu^{(q)} := (\mathcal{C}_1^{(q)})^{\nu_1} \circ \dots \circ (\mathcal{C}_n^{(q)})^{\nu_n}$ die Hintereinanderausführung der Operatoren $\mathcal{C}_i^{(q)}$ bezeichnet. Hieraus ergibt sich sofort eine explizite Formel für die Koeffizienten η_ν^β :

$$\eta_\nu^\beta = \begin{cases} \mathcal{C}_\nu^{(q)} \left(\eta^\beta - \sum_{i=1}^n u_i^\beta \xi^i \right) + \sum_{i=1}^n u_{\nu+1_i}^\beta \xi^i, & \text{falls } 0 < |\nu| < q, \\ \mathcal{C}_\nu^{(q)} \left(\eta^\beta - \sum_{i=1}^n u_i^\beta \xi^i \right), & \text{falls } |\nu| = q. \end{cases}$$

In der Literatur wird diese *Prolongationsformel* stets mittels der formalen Ableitung formuliert:

$$\eta_\nu^\beta = D_\nu \left(\eta^\beta - \sum_{i=1}^n u_i^\beta \xi^i \right) + \sum_{i=1}^n u_{\nu+1_i}^\beta \xi^i = D_\nu Q^\beta + \sum_{i=1}^n u_{\nu+1_i}^\beta \xi^i, \quad (4.38)$$

und man verlangt, dass die rechte Seite nicht von Ableitungen der Ordnung $q+1$ abhängt. \triangleleft

Definition 4.3.8. Es sei $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{C}_q]$ eine infinitesimale Kontakttransformation der Ordnung $q \geq 0$. Eine infinitesimale Kontakttransformation $j_r X \in \text{Sym}[(\pi_q^{q+r})^{-1}(U), \mathcal{C}_{q+r}]$ der Ordnung $q+r$ heißt *r-te Prolongation*⁴ von X , wenn $X \circ \pi_q^{q+r} = T\pi_q^{q+r} \circ j_r X$ gilt.

$$\begin{array}{ccc} J_{q+r}\pi & \xrightarrow{j_r X} & T J_{q+r}\pi \\ \pi_q^{q+r} \downarrow & & \downarrow T\pi_q^{q+r} \\ J_q\pi & \xrightarrow{X} & T J_q\pi \end{array}$$

Liegt $U \subseteq J_q\pi$ im Geltungsbereich der lokalen Karte $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$, so ist die *r-te Prolongation* $j_r X$ von X mit lokaler Darstellung (4.23) eindeutig bestimmt und es gilt

$$j_r X = X + \sum_{\beta=1}^m \sum_{q < |\nu| \leq q+r} \eta_\nu^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(|\nu|)}) \partial_{u_\nu^\beta}.$$

Ihre Koeffizienten $\eta_\nu^\beta = \eta_\nu^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(|\nu|)})$ für $q < |\nu| \leq q+r$ werden nach der Formel (4.32) berechnet. Es gilt stets $[j_r X, V\pi_q^{q+r}] \subseteq V\pi_q^{q+r}$. Nach Korollar 4.3.4 ist $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{C}_q]$ genau dann die *q-te Prolongation* eines Vektorfeldes $Y \in \text{Sym}[\pi_0^q(U), \mathcal{C}_0]$, wenn $[X, V\pi_0^q] \subseteq V\pi_0^q$ gilt. Dabei wird X naheliegenderweise infinitesimale Punkttransformation (der Ordnung q) genannt. Ferner gilt $X = j_r X$ genau dann, wenn

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \partial_{x^i} + \sum_{\alpha=1}^n b^\alpha \partial_{u^\alpha}, \quad a^i, b^\alpha \in \mathbb{R}$$

eine Translationssymmetrie ist.

Korollar 4.3.9. Es seien $X, Y \in \text{Sym}[U, \mathcal{C}_q]$ zwei Vektorfelder. Dann gilt

$$j_r([X, Y]) = [j_r X, j_r Y].$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass beide Vektorfelder $j_r([X, Y])$ und $[j_r X, j_r Y]$ auf $(\pi_q^{q+r})^{-1}(U) \subseteq J_{q+r}\pi$ über r Ordnungen projizierbar sind und es gilt

$$T\pi_q^{q+r}(j_r([X, Y])) = [X, Y] \circ \pi_q^{q+r} = T\pi_q^{q+r}([j_r X, j_r Y]).$$

Mit Hilfe der Jacobi-Identität $[[j_r X, j_r Y], \mathcal{C}_{q+r}] = [j_r X, [j_r Y, \mathcal{C}_{q+r}]] + [[j_r X, \mathcal{C}_{q+r}], j_r Y] \subseteq \mathcal{C}_{q+r}$ sehen wir, dass das Vektorfeld $[j_r X, j_r Y]$ ebenfalls eine infinitesimale Kontakttransformation der Ordnung $q+r$ ist. Aus der Eindeutigkeit der *r-ten Prolongation* folgt die Behauptung. \square

Theorem 4.3.10 (Bäcklund; Infinitesimale Version). Es sei $X \in \text{Sym}[(\pi_0^q)^{-1}(U), \mathcal{C}_q]$ eine infinitesimale Kontakttransformation der Ordnung $q \geq 1$. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Im Fall $m > 1$ ist $X = j_q Y$ die *q-te Prolongation* eines Vektorfeldes $Y \in \text{Sym}[U, \mathcal{C}_0]$.

⁴Die Notation ist in der Literatur nicht einheitlich; oft wird auch $\text{pr}^{(r)} X$ oder $X^{(r)}$ geschrieben.

(ii) Im Fall $m = 1$ ist $X = j_{q-1}Y$ die $(q-1)$ -te Prolongation einer infinitesimalen Kontakttransformation $Y \in \text{Sym}[(\pi_0^1)^{-1}(U), \mathcal{C}_1]$.

Beweis. Nach Korollar 4.3.4 existiert ein Vektorfeld $Y \in \text{Sym}[U, \mathcal{C}_0]$ mit der Eigenschaft $Y \circ \pi_0^q = T\pi_0^q \circ X$ bzw. ein Vektorfeld $Y \in \text{Sym}[(\pi_0^1)^{-1}(U), \mathcal{C}_1]$ mit $Y \circ \pi_1^q = T\pi_1^q \circ X$. Aus der Eindeutigkeit der Prolongation folgt sofort $j_q Y = X$ bzw. $j_{q-1} Y = X$. \square

Einen ausführlichen rechnerischen Beweis der infinitesimalen Version des Theorems von Bäcklund findet man beispielsweise in Anderson und Ibragimov [5, Chapter 2]. Wir halten fest, dass die Prolongation einen Lie-Algebren-Monomorphismus

$$\kappa_1^0 : \begin{cases} \text{Sym}[U, \mathcal{C}_0] & \longrightarrow & \text{Sym}[(\pi_0^1)^{-1}(U), \mathcal{C}_1] \\ X & \longmapsto & j_1 X \end{cases}$$

und einen Lie-Algebren-Isomorphismus

$$\kappa_{q-1}^1 : \begin{cases} \text{Sym}[(\pi_0^1)^{-1}(U), \mathcal{C}_1] & \longrightarrow & \text{Sym}[(\pi_0^q)^{-1}(U), \mathcal{C}_q] \\ X & \longmapsto & j_{q-1} X \end{cases}$$

definiert, wobei κ_1^0 genau dann surjektiv ist, wenn $m = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{X} > 1$ gilt.

4.4 Lie-Symmetrien von Differentialgleichungen

In Anlehnung an den Symmetriebegriff aus der elementaren Geometrie beschreiben wir in diesem Abschnitt die klassischen Lie-Symmetrien von Differentialgleichungen. Die leitende Idee besteht darin Transformationen zu finden, die Lösungen einer gegebenen Differentialgleichung in andere Lösungen überführen. Wir beschränken uns dabei auf Kontakttransformationen, da sie prolongierte Schnitte in der Regel auf prolongierte Schnitte abbilden. Es seien $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ eine Kontakttransformation und $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$ eine lokale Lösung der Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$. Liegt das prolongierte Bild im $j_q\sigma$ im Definitionsbereich von Φ , so ist $\Phi(\text{im } j_q\sigma) \subset J_q\pi$ eine Integralmannigfaltigkeit der Kontaktdistribution \mathcal{C}_q . Wir nehmen für den Moment an, dass die Untermannigfaltigkeit $\Phi(\text{im } j_q\sigma)$ transversal zur Projektion π^q ist, dann existiert nach Proposition 2.2.2 ein lokaler Schnitt $\bar{\sigma} \in \Gamma_{lok}(\pi)$ derart, dass $\Phi(\text{im } j_q\sigma) = \text{im } j_q\bar{\sigma}$ gilt. Definitionsgemäß ist $\bar{\sigma}$ genau dann eine Lösung von \mathcal{R}_q , wenn das prolongierte Bild im $j_q\bar{\sigma}$ vollständig in \mathcal{R}_q liegt. Diese Beobachtung motiviert folgende vorläufige Definition.

Definition 4.4.1. Es sei $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine Differentialgleichung der Ordnung q . Eine Kontakttransformation $\Phi: U \subseteq J_q\pi \rightarrow V \subseteq J_q\pi$ heißt (*äußere*) *Kontaktsymmetrie* von \mathcal{R}_q , wenn das Bild $\Phi(\text{im } j_q\sigma) = \text{im } j_q\bar{\sigma}$ jeder prolongierten Lösung im $j_q\sigma \subseteq U \cap \mathcal{R}_q$, falls definiert, wieder eine prolongierte Lösung von \mathcal{R}_q ist.

Es ist sinnvoll zusätzlich zu fordern, dass der Definitionsbereich U der Kontaktsymmetrie Φ die Untermannigfaltigkeit $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ nicht trivial schneidet, d.h. $U \cap \mathcal{R}_q \neq \emptyset$. Betrachten wir beispielsweise eine Monge-Ampèresche Gleichung der Form

$$\mathcal{R}_2 : \left\{ u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0, \right.$$

so sehen wir, dass die prolongierte Legendre-Transformation $j_1\Psi_2$ aus Beispiel 4.2.4 auf der Untermannigfaltigkeit $\mathcal{R}_2 \subset J_2\pi$ nirgends definiert ist. Daher gibt es auch keinen Grund die Transformation $j_1\Psi_2$ als eine Kontaktsymmetrie von \mathcal{R}_2 zu betrachten. Es ist weiter wünschenswert, dass zu jeder Kontaktsymmetrie Φ von \mathcal{R}_q mindestens eine Lösung σ gibt, die unter Φ auf eine (andere) Lösung abgebildet wird. Anderenfalls würden wir nicht von Symmetrien sprechen. Hierzu ist es aber notwendig, dass der Definitionsbereich von Φ mit der Lösungsmenge $\emptyset \neq \text{Sol}(\mathcal{R}_q) \subseteq \mathcal{R}_q$ einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Beispiel 4.4.2. Wir betrachten eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\mathcal{R}_1 : \left\{ (u')^2 - 4xu' + 4u = 0. \right.$$

Es handelt sich um ein Sonderfall der Clairautschen Differentialgleichung $f(u') + xu' - u = 0$ mit $f(z) = -z^2/4$. Das prolongierte System $\mathcal{R}_2 \subset J_2\pi$ wird zusätzlich durch die Gleichung $u''(u' - 2x) = 0$ beschrieben. Es gibt folglich zwei Haupttypen von *glatten* Lösungen⁵ von \mathcal{R}_1 : triviale Geradenlösungen $u(x) = 2cx - c^2$ mit $c \in \mathbb{R}$ und eine nichttriviale Lösung $u(x) = x^2$. Man bestätigt leicht, dass die *Gruppe* von Kontakttransformationen $j_1\Phi_t: J_1\pi \rightarrow J_1\pi$ mit

$$j_1\Phi_t(x, u, u') = (\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}') = (x + 2t, u + 4t(x + t), u' + 4t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.39)$$

Kontaktsymmetrien von \mathcal{R}_1 sind. Mit $C := c + 2t$ gilt tatsächlich

$$\begin{aligned} j_1\Phi_t(x, 2cx - c^2, 2c) &= (x + 2t, 2cx - c^2 + 4t(x + t), 2c + 4t) = (\bar{x}, 2C\bar{x} - C^2, 2C), \\ j_1\Phi_t(x, x^2, 2x) &= (x + 2t, (x + 2t)^2, 2(x + 2t)) = (\bar{x}, \bar{x}^2, 2\bar{x}). \end{aligned}$$

Insbesondere ist die singuläre Integralkurve $\{(x, x^2, 2x) \in J_1\pi \mid x \in \mathbb{R}\}$ invariant unter $j_1\Phi_t$. \triangleleft

Um nachzuweisen, dass eine Kontakttransformation tatsächlich eine Kontaktsymmetrie ist, muss der Lösungsraum der betrachteten Differentialgleichung explizit bekannt sein. Weiter stellt die Berechnung der transformierten Schnitte eine nicht triviale Aufgabe dar. Aus diesen Gründen finden Kontaktsymmetrien nach Definition 4.4.1 kaum praktische Anwendung. Wir beschreiben im Folgenden hinreichende und einfacher zu verifizierende Bedingungen für Kontaktsymmetrien. Als Motivation betrachten wir die Eigenschaften einer beliebigen π^q -fasererhaltenden Kontaktsymmetrie $\Phi: U \subseteq J_q\pi \rightarrow V \subseteq J_q\pi$ mit $U \cap \text{Sol}(\mathcal{R}_q) \neq \emptyset$. Zu jedem Punkt $\rho \in U \cap \text{Sol}(\mathcal{R}_q)$ finden wir eine Lösung $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$ von \mathcal{R}_q mit der Eigenschaft $\rho \in \text{im } j_q\sigma \subseteq U \cap \text{Sol}(\mathcal{R}_q)$ derart, dass die Untermannigfaltigkeit $\Phi(\text{im } j_q\sigma) \subset J_q\pi$ das Bild einer prolongierten Lösung im $j_q\bar{\sigma} \ni \Phi(\rho)$ ist. Daher gilt $\Phi(U \cap \text{Sol}(\mathcal{R}_q)) = V \cap \text{Sol}(\mathcal{R}_q)$. Folglich ist die Lösungsmenge $\text{Sol}(\mathcal{R}_q) \subseteq \mathcal{R}_q$ invariant unter π^q -fasererhaltenden Kontaktsymmetrien von \mathcal{R}_q . Falls die betrachtete Kontaktsymmetrie Φ nicht π^q -fasererhaltend ist, so können wir die Invarianz der Lösungsmenge $\text{Sol}(\mathcal{R}_q)$ auf diese Weise im Allgemeinen nicht folgern. Als Beispiel betrachten wir eine einfache partielle Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} u_x = 0, \\ u_y = 0, \\ u = 0. \end{cases}$$

Man bestätigt sofort, dass die Legendre-Transformation Ψ_2 aus Beispiel 4.2.4 eine Kontaktsymmetrie von \mathcal{R}_1 ist. Bezeichnet σ die Nulllösung von \mathcal{R}_1 , so ist die Untermannigfaltigkeit $\Psi_2(\text{im } j_1\sigma) \subset J_1\pi$ nirgends π^1 -transversal und es gilt $\Psi_2(\text{Sol}(\mathcal{R}_1)) \not\subseteq \text{Sol}(\mathcal{R}_1)$. Generell stellen Differentialgleichungen erster Ordnung in einer abhängigen Variable in vielen Situationen eine Ausnahme dar. Im regulären Fall $m_q > 1$ sehen wir an der Eigenschaft

$$T\left(\Phi(\text{im } j_q\sigma)\right) \cap V\pi_{q-1}^q|_{\Phi(\text{im } j_q\sigma)} = \{0\},$$

dass für *jede* Kontaktsymmetrie Φ von \mathcal{R}_q das Bild $\Phi(\text{im } j_q\sigma)$ *jeder* prolongierten Lösung stets π^q -transversal ist, woraus dann $\Phi(U \cap \text{Sol}(\mathcal{R}_q)) = V \cap \text{Sol}(\mathcal{R}_q)$ folgt. Die Lösungsmenge $\text{Sol}(\mathcal{R}_q)$ einer Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ ist somit invariant unter Kontaktsymmetrien von \mathcal{R}_q . Diese Beobachtung führt uns zur folgenden Definition.

⁵Weitere C^1 -Lösungen, die sich aus den beiden Lösungsfamilien stückweise zusammensetzen, werden unter $j_1\Phi_t$ ebenfalls auf C^1 -Lösungen abgebildet.

Definition 4.4.3. Es sei $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine Differentialgleichung. Eine Kontakttransformation $\Phi: U \subseteq J_q\pi \rightarrow V \subseteq J_q\pi$ heißt *Lie-Kontaktsymmetrie* von \mathcal{R}_q , wenn $\Phi(U \cap \mathcal{R}_q) = V \cap \mathcal{R}_q$ gilt.

Die Menge der Lie-Kontaktsymmetrien von \mathcal{R}_q bildet auf natürliche Weise eine Lie-Pseudogruppe $\Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q)$. Die Identität $\text{id}_{J_q\pi}$ ist stets eine (Lie-)Kontaktsymmetrie. Ist die betrachtete (Lie-)Kontaktsymmetrie $\Phi = j_q\Phi_0$ die q -te Prolongation einer Punkttransformation $\Phi_0: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, so sprechen wir von *(Lie-)Punktsymmetrien*. Jede Lie-Kontaktsymmetrie ist offenbar eine Kontaktsymmetrie, denn das Bild $\Phi(\text{im } j_q\sigma)$ jeder prolongierten Lösung von \mathcal{R}_q liegt automatisch in \mathcal{R}_q . Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Der wesentliche Grund hierfür ist, neben der verletzten π^q -Transversalitätsbedingung im Fall $mq = 1$, die mögliche Existenz von Integrabilitätsbedingungen $\text{Sol}(\mathcal{R}_q) \subsetneq \mathcal{R}_q$.

Beispiel 4.4.4. Wir betrachten eine Differentialgleichung \mathcal{R}_1 , die durch das lineare System⁶

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} u_x = 0, \\ u_y = xu \end{cases}$$

beschrieben wird. Nach einer Überkreuzableitung sehen wir, dass die Nullfunktion $u(x, y) = 0$ die einzige Lösung von $\mathcal{R}_1 \supsetneq \text{Sol}(\mathcal{R}_1) \neq \emptyset$ ist. Folglich sind die Translationen in x -Richtung,

$$\Phi_t(x, y, u, u_x, u_y) = (x + t, y, u, u_x, u_y), \quad t \in \mathbb{R},$$

Kontaktsymmetrien von \mathcal{R}_1 mit erzeugendem Vektorfeld $X = \partial_x$. Da die Jetvariable x in der Repräsentation von \mathcal{R}_1 explizit vorkommt, ist die Kontakttransformation Φ_t *keine* Lie-Kontaktsymmetrie, d.h. die Untermannigfaltigkeit $\mathcal{R}_1 \subset J_1\pi$ ist *nicht* invariant unter Φ_t . Betrachten wir stattdessen das prolongierte System $\mathcal{R}_2 = \text{Sol}(\mathcal{R}_2) \subset J_2\pi$ mit Darstellung

$$\mathcal{R}_2 : \begin{cases} u_{xx} = 0, & u_x = 0, \\ u_{xy} = 0, & u_y = 0, \\ u_{yy} = 0, & u = 0, \end{cases}$$

so bestätigt man sofort, dass die erste Prolongation $j_1\Phi_t: J_2\pi \rightarrow J_2\pi$ von Φ_t mit

$$j_1\Phi_t(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = (x + t, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$$

eine Lie-Kontaktsymmetrie von \mathcal{R}_2 ist. Das vervollständigte System $\mathcal{R}_1^{(1)} = \text{Sol}(\mathcal{R}_1)$ ist dann ebenfalls invariant unter Φ_t . Dieses einfache Beispiel zeigt explizit, dass durch die Vervollständigung neue Lie-Kontaktsymmetrien entstehen können. \triangleleft

Korollar 4.4.5. Es seien $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ eine Kontakttransformation der Ordnung $q \geq 0$ mit lokaler Darstellung (4.17) und $\Psi \in \mathcal{F}(J_q\pi)$ eine beliebige glatte Funktion. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n \left((D_i\Psi) \circ j_1\Phi \right) D_j(\xi^i) = D_j(\Psi \circ \Phi). \quad (4.40)$$

⁶Die zugehörige Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_1]$ wurde in Beispiel 3.2.2 untersucht.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich durch direktes Nachrechnen. In lokalen Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n (D_i \Psi)(j_1 \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q+1)})) D_j(\xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)})) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}(\Phi) D_j(\xi^i) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} \frac{\partial \Psi}{\partial u_\mu^\alpha}(\Phi) \left(\sum_{i=1}^n \psi_{\mu+1_i}^\alpha D_j(\xi^i) \right) \\
&\stackrel{(4.5)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}(\Phi) D_j(\xi^i) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} \frac{\partial \Psi}{\partial u_\mu^\alpha}(\Phi) D_j(\psi_\mu^\alpha) \\
&= D_j \left(\Psi(\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})) \right).
\end{aligned}$$

In der vorletzten Gleichheit haben wir die transversalen Kontaktbedingungen (4.5) an die Komponenten von $j_1 \Phi$ verwendet, siehe auch (4.8). \square

Nach diesem Korollar ist die r -te Prolongation $j_r \Phi$ einer Lie-Kontaktsymmetrie Φ von \mathcal{R}_q stets eine Lie-Kontaktsymmetrie von \mathcal{R}_{q+r} . Ist in der Tat $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = 0$ eine Gleichung der lokalen Repräsentation von $\mathcal{R}_q \subset J_q \pi$ und $\rho \in \mathcal{R}_{q+1}$ ein Punkt, in dem die Kontaktmatrix von $j_1 \Phi$ invertierbar ist und $\Psi(\Phi(\pi_q^{q+1}(\rho))) = 0$ gilt, dann ergibt sich aus der Rechenregel (4.40) durch Linksmultiplikation der inversen Kontaktmatrix unmittelbar $D_i \Psi(j_1 \Phi(\rho)) = 0$. Folglich ist \mathcal{R}_{q+1} invariant unter $j_1 \Phi$. Natürlich können wir diesen Vorgang beliebig oft wiederholen und so die Invarianz von \mathcal{R}_{q+r} unter $j_r \Phi$ schlussfolgern. Aus der Projizierbarkeit der Prolongation von Kontakttransformationen folgt allgemein die Invarianz von $\mathcal{R}_{q+r}^{(s)}$ unter $j_r \Phi$, vgl. auch Korollar 4.4.8. Wir können somit während der Vervollständigung von \mathcal{R}_q keine (Lie-)Kontaktsymmetrie verlieren (aber wie in Beispiel 4.4.4 gezeigt, können wir durchaus neue Lie-Kontaktsymmetrien gewinnen).

Nach dem Theorem von Bäcklund 4.2.6 sind die meisten Kontakttransformationen faktisch Prolongationen von Punkttransformationen. Diese strukturellen Eigenschaften übertragen sich automatisch auf (Lie-)Kontaktsymmetrien.

Proposition 4.4.6. Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q \pi$ eine reguläre Differentialgleichung der Ordnung $q \geq 1$ und $\iota: \mathcal{R}_q \hookrightarrow J_q \pi$ die zugehörige Inklusionsabbildung. Dann gelten für jede Lie-Kontaktsymmetrie $\Phi: J_q \pi \rightarrow J_q \pi$ von \mathcal{R}_q die folgenden Aussagen:

(i) Für alle $0 \leq k \leq q$ gilt $T\Phi(T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap \mathcal{C}_q^{(k)}|_{\iota(\mathcal{R}_q)}) = T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap \mathcal{C}_q^{(k)}|_{\iota(\mathcal{R}_q)}$.

(ii) Für alle $0 < k < q$ gilt $T\Phi(T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap V\pi_k^q|_{\iota(\mathcal{R}_q)}) = T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap V\pi_k^q|_{\iota(\mathcal{R}_q)}$.

Im Fall $m = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{X} > 1$ gilt zusätzlich

$$T\Phi(T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap V\pi_0^q|_{\iota(\mathcal{R}_q)}) = T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap V\pi_0^q|_{\iota(\mathcal{R}_q)}. \quad (4.41)$$

Beweis. Der besseren Lesbarkeit halber identifizieren wir \mathcal{R}_q mit dem Bild $\iota(\mathcal{R}_q)$. Es sei $\rho \in \text{dom } \Phi \cap \mathcal{R}_q \subset J_q \pi$ ein beliebiger Punkt. Nach Korollar 4.1.5 gilt $T_\rho \Phi(T_\rho \mathcal{R}_q \cap (\mathcal{C}_q^{(k)})_\rho) \subseteq (\mathcal{C}_q^{(k)})_{\Phi(\rho)}$ für alle $0 \leq k \leq q$. Weiter ist $T_\rho \Phi|_{T_\rho \mathcal{R}_q}: T_\rho \mathcal{R}_q \rightarrow T_{\Phi(\rho)} \mathcal{R}_q$ ein Vektorraumisomorphismus mit der Eigenschaft $T_\rho \Phi(T_\rho \mathcal{R}_q \cap (\mathcal{C}_q^{(k)})_\rho) \subseteq T_{\Phi(\rho)} \mathcal{R}_q$. Insgesamt erhalten wir die behauptete Inklusion $T_\rho \Phi(T_\rho \mathcal{R}_q \cap (\mathcal{C}_q^{(k)})_\rho) \subseteq T_{\Phi(\rho)} \mathcal{R}_q \cap (\mathcal{C}_q^{(k)})_{\Phi(\rho)}$. Aus Proposition 4.1.10 folgt analog $T_\rho \Phi(T_\rho \mathcal{R}_q \cap V_\rho \pi_k^q) \subseteq V_{\Phi(\rho)} \pi_k^q$. Mit dem gleichen Argument, dass $T_\rho \Phi|_{T_\rho \mathcal{R}_q}$ ein Isomorphismus ist, erhalten wir $T_\rho \Phi(T_\rho \mathcal{R}_q \cap V_\rho \pi_k^q) \subseteq T_{\Phi(\rho)} \mathcal{R}_q$ und somit auch $T_\rho \Phi(T_\rho \mathcal{R}_q \cap V_\rho \pi_k^q) \subseteq T_{\Phi(\rho)} \mathcal{R}_q \cap V_{\Phi(\rho)} \pi_k^q$. Die umgekehrten Inklusionen resultieren direkt aus der Tatsache, dass Φ^{-1} ebenfalls eine Lie-Kontaktsymmetrie von \mathcal{R}_q ist. \square

Natürlich besitzt auch jede Lie-*Punktsymmetrie* Φ von \mathcal{R}_q stets die Eigenschaft (4.41). Für π^q -fasererhaltende Lie-Kontaktsymmetrien Φ von \mathcal{R}_q gilt zusätzlich

$$T\Phi(T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap V\pi^q|_{\iota(\mathcal{R}_q)}) = T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap V\pi^q|_{\iota(\mathcal{R}_q)}. \quad (4.42)$$

Die Verwendung der Inklusionsabbildung $\iota: \mathcal{R}_q \hookrightarrow J_q\pi$ legt schon nahe, dass die beschriebenen Distributionen ausschließlich auf der Differentialgleichung \mathcal{R}_q (intrinsisch) definiert sind. Wir sehen unter anderem, dass die Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ und das Symbol \mathcal{N}_q im regulären Fall $mq > 1$ invariant unter Lie-Kontaktsymmetrien sind. Betrachtet man ausschließlich Lie-*Punktsymmetrien*, so ist auch das Symbol $\mathcal{N}_1 \subset T\mathcal{R}_1$ stets invariant. Das folgende Beispiel zeigt, dass das Symbol $\mathcal{N}_1 \subset T\mathcal{R}_1$ im Fall $mq = 1$ im Allgemeinen *nicht* invariant unter Lie-Kontaktsymmetrien ist.

Beispiel 4.4.7. Wir betrachten eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$\mathcal{R}_1 : \left\{ u_y = 0. \right.$$

An der letzten Komponente sehen wir, dass die *partielle* Legendre-Transformation Ψ_1 aus Beispiel 4.2.2 mit Darstellung $\Psi_1(x, y, u, u_x, u_y) = (u_x, y, u - xu_x, -x, u_y)$ eine Lie-Kontaktsymmetrie von \mathcal{R}_1 ist. Das eindimensionale Symbol $T\iota(\mathcal{N}_1) = \langle \partial_{u_x} \rangle$ ist wegen $T\Psi_1(\partial_{u_x}) = \mathcal{C}_x^{(1)}$ *nicht* invariant unter Ψ_1 , wohingegen die Vessiot-Distribution $T\iota(\mathcal{V}[\mathcal{R}_1]) = \langle \mathcal{C}_x^{(1)}, \mathcal{C}_y^{(1)}, \partial_{u_x} \rangle$ invariant ist. Die Erklärung hierfür liegt in der Struktur der Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_1] = \langle \bar{X}_1, \bar{X}_2 \rangle \oplus \langle \bar{Y} \rangle = \langle \partial_{\bar{x}} + \bar{u}_x \partial_{\bar{u}}, \partial_{\bar{y}} \rangle \oplus \langle \partial_{\bar{u}_x} \rangle$, die sich auch in der Form $\mathcal{V}[\mathcal{R}_1] = \langle \partial_{\bar{y}}, \partial_{\bar{u}_x} \rangle \oplus \langle \partial_{\bar{x}} + \bar{u}_x \partial_{\bar{u}} \rangle$ zerlegen lässt. Jede glatte Lösung $u(x, y) = f(x)$ von \mathcal{R}_1 mit $f''(x) \neq 0$ wird unter Ψ_1 auf die negative Legendre-Transformierte $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = -f^*(\bar{x})$ abgebildet:

$$\Psi_1(x, y, f(x), f'(x), 0) = (f'(x), y, f(x) - xf'(x), -x, 0) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{u}_x(\bar{x}, \bar{y}), 0).$$

Beispielsweise wird $u(x, y) = x^2 + 1$ auf $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = -\bar{x}^2/4 + 1$ abgebildet, weshalb Ψ_1 eine nichttriviale Lie-Kontaktsymmetrie ist. Für Lösungen der Form $u(x, y) = ax + b$ ist Ψ (im $j_1\sigma$) nicht π^1 -transversal. Mit Hilfe der Jacobi-Matrix $J(j_1\Psi_1)$ bestätigt man leicht, dass das eindimensionale Symbol $T\iota(\mathcal{N}_2) = \langle \partial_{u_{xx}} \rangle$ des prolongierten Systems

$$\mathcal{R}_2 : \left\{ \begin{array}{l} u_{xy} = 0, \\ u_{yy} = 0, \\ u_y = 0 \end{array} \right.$$

in der Tat invariant unter der ersten Prolongation $j_1\Psi_1$ von Ψ_1 ist. Es gilt

$$j_1\Psi_1(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = \left(u_x, y, u - xu_x, -x, u_y, \frac{-1}{u_{xx}}, \frac{u_{xy}}{u_{xx}}, \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{u_{xx}} \right).$$

Die Vessiot-Distribution $T\iota(\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]) = \langle \mathcal{C}_x^{(2)}, \mathcal{C}_y^{(2)}, \partial_{u_{xx}} \rangle$ bleibt weiterhin invariant unter $j_1\Psi_1$. \triangleleft

Nach Proposition 4.2.1 lassen sich Kontakttransformationen lokal projizieren. Zu jeder Kontakttransformation $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ der Ordnung $q \geq 1$ existiert eine Kontakttransformation $\Phi_{q-k}: J_{q-k}\pi \rightarrow J_{q-k}\pi$ der Ordnung $q-k$ mit der Eigenschaft $\Phi_{q-k} \circ \pi_{q-k}^q = \pi_{q-k}^q \circ \Phi$. Hierbei gilt $0 < k < q$. Im Fall $m > 1$ kann die Projektionsordnung k auch den Wert q annehmen.

Korollar 4.4.8. *Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine Differentialgleichung und $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ eine Lie-Kontaktsymmetrie von \mathcal{R}_q . Dann sind die Mengen $\mathcal{R}_{q-k}^{(k)} \subseteq J_{q-k}\pi$ invariant unter Φ_{q-k} .*

Beweis. Es sei $\rho \in \mathcal{R}_q$ ein Punkt derart, dass $\hat{\rho} = \pi_{q-k}^q(\rho) \in \mathcal{R}_{q-k}^{(k)}$ zusätzlich im Definitionsbereich von Φ_{q-k} liegt. Aus der Eigenschaft $\Phi_{q-k} \circ \pi_{q-k}^q = \pi_{q-k}^q \circ \Phi$ folgt direkt

$$\Phi_{q-k}(\hat{\rho}) = (\Phi_{q-k} \circ \pi_{q-k}^q)(\rho) = (\pi_{q-k}^q \circ \Phi)(\rho) \in \pi_{q-k}^q(\mathcal{R}_q) = \mathcal{R}_{q-k}^{(k)}.$$

Folglich sind die Projektionsmengen $\mathcal{R}_{q-k}^{(k)} \subseteq J_{q-k}\pi$ invariant unter Φ_{q-k} . Falls \mathcal{R}_q eine reguläre Differentialgleichung ist, dann ist Φ_{q-k} eine Lie-Kontaktsymmetrie von $\mathcal{R}_{q-k}^{(k)}$ mit $\Phi = j_k \Phi_{q-k}$. \square

Als Nächstes untersuchen wir die (lokale) Eindeutigkeit der Lie-Kontaktsymmetrien auf \mathcal{R}_q .

Korollar 4.4.9. *Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine Differentialgleichung und $\Phi, \Psi: U \subseteq J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ zwei Lie-Kontaktsymmetrien von \mathcal{R}_q mit der Eigenschaft $\Phi|_{U \cap \mathcal{R}_q} = \Psi|_{U \cap \mathcal{R}_q}$.*

- (i) *Im Fall $m > 1$ sei $\mathcal{O} = \pi_0^q(U \cap \mathcal{R}_q)$ eine offene Teilmenge von \mathcal{E} . Dann stimmen Φ und Ψ auf ganz $U \cap (\pi_0^q)^{-1}(\mathcal{O})$ überein.*
- (ii) *Im Fall $m = 1$ sei $\mathcal{O} = \pi_1^q(U \cap \mathcal{R}_q)$ eine offene Teilmenge von $J_1\pi$. Dann stimmen Φ und Ψ auf ganz $U \cap (\pi_1^q)^{-1}(\mathcal{O})$ überein.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Theorem von Bäcklund 4.2.6 und Korollar 4.2.5. \square

Hat eine lokale Repräsentation von $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ im Fall $m > 1$ eine Gleichung der Form $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$, d.h. $\pi_0^q(U \cap \mathcal{R}_q)$ ist nicht offen in \mathcal{E} , so können unterschiedliche Lie-Punktsymmetrien von \mathcal{R}_q existieren, deren Verhalten auf \mathcal{R}_q übereinstimmt. Entsprechendes gilt auch für den Fall $m = 1$. Ein konkretes Beispiel verdeutlicht das Gesagte.

Beispiel 4.4.10. Wir betrachten eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\mathcal{R}_1 : \{ u' = 0. \}$$

Man bestätigt sofort, dass die Gruppe von Kontakttransformationen $\Phi_t: J_1\pi \rightarrow J_1\pi$ mit

$$\Phi_t(x, u, u') = (x + 2tu', u + t(u')^2, u'), \quad t \in \mathbb{R}$$

Lie-Kontaktsymmetrien von \mathcal{R}_1 sind. Offenbar gilt $\Phi_t|_{\mathcal{R}_1} = \text{id}_{\mathcal{R}_1} = \text{id}_{J_1\pi}|_{\mathcal{R}_1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. \triangleleft

Um in diesem Sinn identische Lie-Kontaktsymmetrien auszuschließen, können wir auf $\Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q)$ eine Äquivalenzrelation $\Phi \sim_{\mathcal{R}_q} \Psi : \Leftrightarrow \Phi|_{\text{dom } \Phi \cap \mathcal{R}_q} = \Psi|_{\text{dom } \Psi \cap \mathcal{R}_q}$ einführen.

Der Rest dieses Abschnittes befasst sich mit *infinitesimalen* Lie-Kontaktsymmetrien von Differentialgleichungen. Hierbei handelt es sich um spezielle Unterstrukturen der Lie-Pseudogruppe $\Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q)$, die wir in der nächsten Definition einführen.

Definition 4.4.11. Es sei $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine Differentialgleichung der Ordnung $q \geq 1$. Eine infinitesimale Kontakttransformation $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{C}_q]$ heißt *infinitesimale (Lie-)Kontaktsymmetrie von \mathcal{R}_q* , wenn der zugehörige Fluss $\Phi: \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ eine einparametrische lokale Lie-Gruppe von (Lie-)Kontaktsymmetrien von \mathcal{R}_q bildet.

Im Fall $X = j_q Y$ sprechen wir naheliegenderweise von infinitesimalen (Lie-)Punktsymmetrien. Jede infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrie ist offenbar eine infinitesimale Kontaktsymmetrie. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wie das Beispiel 4.4.4 demonstriert. Der Grund hierfür ist die mögliche Existenz von Integrabilitätsbedingungen $\text{Sol}(\mathcal{R}_q) \subsetneq \mathcal{R}_q$.

Proposition 4.4.12. Es seien $\mathcal{R}_q = \text{Sol}(\mathcal{R}_q) \subset J_q\pi$ eine lokal lösbare Differentialgleichung der Ordnung $q \geq 1$ und $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{C}_q]$ eine infinitesimale Kontaktsymmetrie von \mathcal{R}_q . Dann ist X eine infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrie von \mathcal{R}_q .

Beweis. Wir betrachten den zugehörigen lokalen Fluss $\Phi_t: U_t \subseteq U \rightarrow V_t \subseteq U$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ von X . Nach Voraussetzung existiert zu jedem Punkt $\rho \in U_t \cap \mathcal{R}_q$ eine lokale Lösung σ von \mathcal{R}_q mit der Eigenschaft $\rho \in \text{im } j_q\sigma \subseteq U_t \cap \mathcal{R}_q$. Da im regulären Fall $m_q > 1$ stets

$$T(\Phi_t(\text{im } j_q\sigma)) \cap V\pi_{q-1}^q|_{\Phi_t(\text{im } j_q\sigma)} = \{0\} \quad (4.43)$$

gilt, ist $\Phi_t(\text{im } j_q\sigma)$ eine π^q -transversale Integralmannigfaltigkeit der Kontaktdistribution \mathcal{C}_q und somit eine Lösung von \mathcal{R}_q . Folglich gilt $\Phi_t(U_t \cap \mathcal{R}_q) = V_t \cap \mathcal{R}_q$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Im Sonderfall $m_q = 1$ argumentieren wir anders. Zu jeder prolongierten Lösung $\rho \in \text{im } j_1\sigma \subset U$ von \mathcal{R}_1 existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass die Untermannigfaltigkeit $\Phi_t(\text{im } j_1\sigma) \subset J_1\pi$ für alle Parameterwerte $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ transversal zur Projektion π^1 ist. Folglich gilt $\Phi_t(\rho) \in \mathcal{R}_1$. Da die Eigenschaft (4.43) generisch ist, existiert zu jeder kompakten Umgebung $\rho \in A \subset U$ ein $\varepsilon = \varepsilon(A) > 0$ derart, dass $\Phi_t(A \cap \mathcal{R}_1) = \Phi_t(A) \cap \mathcal{R}_1$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt. Insbesondere ist Φ_t eine lokale Lie-Kontaktsymmetrie von \mathcal{R}_1 , was zu zeigen war. \square

Man beachte, dass die Voraussetzung der lokalen Lösbarkeit in der obigen Proposition nur hinreichend aber nicht notwendig ist. Beispielsweise ist $X = \partial_y$ eine infinitesimale (Lie)-Kontaktsymmetrie der Differentialgleichung \mathcal{R}_1 aus Beispiel 4.4.4, obwohl \mathcal{R}_1 *nicht* lokal lösbar ist.

Der \mathbb{R} -Vektorraum der infinitesimalen Lie-Kontaktsymmetrien von \mathcal{R}_q , in Zeichen⁷

$$\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q] := \{X \in \text{Sym}[U, \mathcal{C}_q] \mid X_\rho \in T_\rho\mathcal{R}_q \text{ für alle } \rho \in U \cap \mathcal{R}_q\},$$

bildet eine reelle Lie-Algebra. Sind in der Tat $X, Y \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q]$ zwei beliebige infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrien, so ist auch der Kommutator $[X, Y] \in \text{Sym}[U, \mathcal{C}_q]$ nach dem Theorem von Frobenius tangential zu \mathcal{R}_q . Die Menge der infinitesimalen Lie-Punktsymmetrien von \mathcal{R}_q ,

$$\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q; V\pi_0^q] := \{X \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q] \mid [X, V\pi_0^q] \subseteq V\pi_0^q\},$$

bildet eine Lie-Unteralgebra von $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q]$. In lokalen Koordinaten $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ auf $U \subseteq J_q\pi$ ergibt sich folgendes Bild: Es sei $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = \mathbf{0}$ eine lokale Repräsentation der Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ derart, dass $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^t$ ein regulärer Wert der Abbildung $\Phi: U \subseteq J_q\pi \rightarrow \mathbb{R}^t$ ist. Nach dem Satz vom regulären Wert gilt dann $T_\rho\mathcal{R}_q = \ker T_\rho\Phi$ für alle $\rho \in U \cap \mathcal{R}_q$. Eine infinitesimale Kontakttransformation $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{C}_q]$ mit lokaler Darstellung

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) \partial_{x^i} + \sum_{\beta=1}^m \eta^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) \partial_{u^\beta} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 < |\nu| \leq q} \eta_\nu^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(|\nu|)}) \partial_{u^\beta} \quad (4.44)$$

ist folglich genau dann eine infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrie von \mathcal{R}_q , wenn die Koeffizientenfunktionen des Ansatzes für X das homogene lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi^\tau}{\partial x^i}(\rho) \xi^i(\rho) + \sum_{\beta=1}^m \sum_{0 \leq |\nu| \leq q} \frac{\partial \Phi^\tau}{\partial u^\beta}(\rho) \eta_\nu^\beta(\rho) = 0, \quad 1 \leq \tau \leq t$$

in jedem Punkt $\rho \in U \cap \mathcal{R}_q$ erfüllen. Diese Bedingungen lassen sich kompakt schreiben als

$$\forall \rho \in \mathcal{R}_q : X \Phi^\tau(\rho) = 0, \quad 1 \leq \tau \leq t. \quad (4.45)$$

Zum besseren Verständnis demonstrieren wir die Bestimmung der infinitesimalen Lie-Kontaktsymmetrien einer Differentialgleichung an einem konkreten Beispiel.

⁷Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q]$ anstelle von $\text{Sym}[U \cap \mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q]$.

Beispiel 4.4.13. Wir betrachten die lineare Wärmeleitungsgleichung

$$\mathcal{R}_2 : \left\{ u_t - xu_{xx} = 0. \right.$$

Zur Bestimmung der infinitesimalen Lie-Punktsymmetrien von \mathcal{R}_2 machen wir den Ansatz

$$X = j_2 Y = \xi \partial_t + \tau \partial_x + \eta \partial_u + \rho \partial_{u_t} + \sigma \partial_{u_x} + \varphi \partial_{u_{tt}} + \phi \partial_{u_{tx}} + \psi \partial_{u_{xx}}$$

mit beliebigen Koeffizientenfunktionen $\xi = \xi(t, x, u)$, $\tau = \tau(t, x, u)$ und $\eta = \eta(t, x, u)$. Es gilt $X(u_t - xu_{xx}) = -\tau u_{xx} + \rho - \psi x$. Die hierfür benötigten Koeffizienten ρ und ψ sind bereits in Beispiel 4.3.5 angegeben. Dabei ersetzen wir die Jetvariable u_t durch xu_{xx} und sortieren die Terme nach Monomen in verbleibenden Jetvariablen u_x, u_{tx}, u_{xx} . Die zugehörigen Koeffizienten bilden dann das bestimmende System:

$$\mathcal{P}_2 : \left\{ \begin{array}{l} \xi_x = 0, \quad \eta_{uu} - 2\tau_{xu} = 0, \\ \xi_u = 0, \quad \eta_t - x\eta_{xx} = 0, \\ \tau_{uu} = 0, \quad 2\tau_u + x\xi_{xu} = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \tau_t + x(2\eta_{xu} - \tau_{xx}) = 0, \\ \tau - x(2\tau_x - \xi_t) = 0. \end{array}$$

Nach Lösen dieser Differentialgleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(t) = c_4 t^2 + c_3 t + c_2, \\ \tau &= \tau(t, x) = 2c_4 t x + c_3 x, \\ \eta &= \eta(t, x, u) = h(t, x) - c_4 x u + c_1 u, \end{aligned}$$

wobei $h(t, x)$ eine beliebige Lösung der Ausgangsgleichung bezeichnet. Letzteres ist eine direkte Folge des Superpositionsprinzips. Zusammenfassend stellen wir fest, dass die Lie-Algebra $\text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{C}_2; V\pi_0^2] = \text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{C}_2]$ durch die zweifache Prolongation der Vektorfelder

$$\begin{aligned} Y_1 &= \partial_t, & Y_4 &= t^2 \partial_t + 2tx \partial_x - xu \partial_u, \\ Y_2 &= u \partial_u, & Y_h &= h(t, x) \partial_u \\ Y_3 &= t \partial_t + x \partial_x, \end{aligned}$$

erzeugt wird, wobei \mathcal{R}_2 keine weiteren infinitesimalen Lie-Kontaktsymmetrien besitzt. Mit Hilfe der formalen Theorie kann man, ganz ohne die explizite Konstruktion von Lösungen, Aussagen über die Dimension des Lösungsraumes erhalten. Durch die Cartan-Charaktere lässt sich das noch verfeinern: Sie geben an, wie viele Funktionen mit wie vielen Argumenten die allgemeine Lösung enthält. \triangleleft

Bemerkung 4.4.14. Es gibt eine Vielzahl an Variationen des infinitesimalen Symmetrieansatzes (4.45). Zum einen können wir zusätzliche Bedingungen an den Lösungsraum einer Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q \pi$ stellen, um nur solche Lösungen zu berücksichtigen, an denen wir primär interessiert sind, vgl. Olver und Rosenau [24]. Die additive Trennung der Variablen durch einen Ansatz der Form $u(t, x) = f(t) + g(x)$ ist beispielsweise äquivalent zur Zusatzbedingung $u_{tx} = 0$. Der multiplikative Separationsansatz $u(t, x) = f(t)g(x)$ korrespondiert mit der nichtlinearen Gleichung $uu_{tx} = u_t u_x$. Zum anderen können wir zusätzliche Nebenbedingungen an die Koeffizienten des Ansatzes für eine infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrie $X \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q]$ stellen, um das zugehörige bestimmende System algorithmisch lösen zu können. Der Einfachheit halber können wir beispielsweise annehmen, dass die Koeffizienten $\xi^i = \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ und $\eta^\beta = \eta^\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ von X mit Darstellung (4.31) Polynome in Jetvariablen (\mathbf{x}, \mathbf{u}) vom Grad nicht höher als s sind. Auf diese Weise erhalten wir im Allgemeinen eine *echte endlichdimensionale* Lie-Unteralgebra $\mathfrak{g} \subseteq \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q; V\pi_0^q]$. Schließlich können wir diese

beiden Ideen miteinander kombinieren: Bei nichtlinearen Differentialgleichungen findet man spezielle Lösungen meist dadurch, dass man die entsprechenden Systeme auf invarianten Untermannigfaltigkeiten betrachtet. Als ein Spezialfall wollen wir hier die Suche nach gruppeninvarianten Lösungen erwähnen, siehe Olver und Rosenau [23]. Mit anderen Worten suchen wir nach denjenigen Lösungen $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$ einer Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$, die invariant unter einer einparametrischen Transformationsgruppe $\exp(tX)$ mit infinitesimalem Generator $X = j_q Y$ sind. Der Graph im $\sigma \subseteq \mathcal{E}$ dieser Lösungen muss also eine invariante Fläche unter den durch $Y = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \partial_{x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \eta^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \partial_{u^\alpha}$ definierten Transformationen $\exp(tY)$ sein. Diese Eigenschaft führt auf *m Bedingungen für invariante Flächen*, nämlich $Q^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) = \eta^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \sum_{i=1}^n u_i^\alpha \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$. Das so entstandene kombinierte System lautet:

$$\tilde{\mathcal{R}}_q : \begin{cases} \Phi^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = 0, & 1 \leq \tau \leq t, \\ Q^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) = 0, & 1 \leq \alpha \leq m. \end{cases}$$

Damit Lösungen $\xi^i = \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ und $\eta^\alpha = \eta^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ existieren, müssen beide Teilsysteme konsistent sein. Ein wichtiges Resultat hierzu besagt, siehe Pucci und Saccomandi [29], dass die Integrabilitätsbedingungen für das kombinierte System durch Anwenden des prolongierten infinitesimalen Generators $j_q Y$ auf die Ausgangsgleichungen von \mathcal{R}_q entstehen:

$$\forall \rho \in \tilde{\mathcal{R}}_q : (j_q Y) \Phi^\tau(\rho) = 0, \quad 1 \leq \tau \leq t.$$

Wenn wir fordern, dass diese Gleichungen identisch erfüllt sein müssen, entspricht das genau der *nichtklassischen* Methode, die von Bluman und Cole bei ihrer Analyse der Wärmeleitungsgleichung in [7] vorgestellt wurde. \triangleleft

Korollar 4.4.15. *Es seien $X \in \text{Sym}[U, \mathcal{C}_q]$ eine infinitesimale Kontakttransformation mit lokaler Darstellung (4.44) und $\Psi \in \mathcal{F}(J_q\pi)$ eine beliebige glatte Funktion. Dann gilt*

$$j_1 X(D_i \Psi) = D_i(X\Psi) - \sum_{j=1}^n (D_i \xi^j)(D_j \Psi). \quad (4.46)$$

Beweis. Dies ist eine einfache Folgerung aus der Eigenschaft (4.27), angewandt auf $j_1 X$:

$$\left[j_1 X, \mathcal{C}_i^{(q+1)} \right] = - \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_i^{(q+1)}(\xi^j) \mathcal{C}_j^{(q+1)} - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q+1} \mathcal{C}_i^{(q+1)}(\eta_\mu^\alpha) \mathcal{C}_\alpha^\mu.$$

Mit $D_i \Psi = \mathcal{C}_i^{(q+1)}(\Psi)$ und $(j_1 X)\Psi = X\Psi$ erhalten wir sofort

$$j_1 X(D_i \Psi) - D_i(X\Psi) = \left[j_1 X, \mathcal{C}_i^{(q+1)} \right] \Psi = - \sum_{j=1}^n (D_i \xi^j)(D_j \Psi).$$

In der letzten Gleichheit haben wir die Tatsache ausgenutzt, dass $\Psi = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ nicht von Ableitungen der Ordnung $q+1$ abhängt. Nach Umstellen folgt die Behauptung. \square

Korollar 4.4.16. *Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine reguläre Differentialgleichung der Ordnung $q \geq 1$ und $X \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q]$ eine infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrie von \mathcal{R}_q . Dann ist $j_r X$ eine infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrie der prolongierten Differentialgleichung $\mathcal{R}_{q+r}^{(s)} \subset J_{q+r}\pi$.*

Beweis. Nach Korollar 4.4.15 ist $j_{r+s} X$ eine infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrie der Differentialgleichung $\mathcal{R}_{q+r+s} \subset J_{q+r+s}\pi$. Da das Vektorfeld $j_{r+s} X = j_s(j_r X)$ über s Ordnungen projizierbar ist und die Eigenschaft $j_r X \circ \pi_{q+r}^{q+r+s} = T\pi_{q+r}^{q+r+s} \circ j_{r+s} X$ gilt, ist $j_r X$ eine infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrie von $\mathcal{R}_{q+r}^{(s)} = \pi_{q+r}^{q+r+s}(\mathcal{R}_{q+r+s}) \subset J_{q+r}\pi$. \square

Dieses Korollar bestätigt erneut die Tatsache, dass während der Vervollständigung von \mathcal{R}_q keine infinitesimale (Lie-)Kontaktsymmetrie verloren gehen kann. Für eine reguläre lokal lösbare Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ sind die Lie-Algebren $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q]$ und $\text{Sym}[\mathcal{R}_{q+r}, \mathcal{C}_{q+r}]$ isomorph zueinander.

Proposition 4.4.17. Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine reguläre Differentialgleichung der Ordnung $q \geq 1$ und $\iota: \mathcal{R}_q \hookrightarrow J_q\pi$ die zugehörige Inklusionsabbildung. Dann gelten für jede infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrie $X \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q]$ die folgenden Aussagen:

(i) Für alle $0 \leq k \leq q$ gilt $\left[X|_{\iota(\mathcal{R}_q)}, T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap \mathcal{C}_q^{(k)}|_{\iota(\mathcal{R}_q)} \right] \subseteq T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap \mathcal{C}_q^{(k)}|_{\iota(\mathcal{R}_q)}$.

(ii) Für alle $0 < k < q$ gilt $\left[X|_{\iota(\mathcal{R}_q)}, T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap V\pi_k^q|_{\iota(\mathcal{R}_q)} \right] \subseteq T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap V\pi_k^q|_{\iota(\mathcal{R}_q)}$.

Im Fall $m = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{X} > 1$ gilt zusätzlich

$$\left[X|_{\iota(\mathcal{R}_q)}, T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap V\pi_0^q|_{\iota(\mathcal{R}_q)} \right] \subseteq T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap V\pi_0^q|_{\iota(\mathcal{R}_q)}. \quad (4.47)$$

Beweis. Es seien $X \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q]$ eine infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrie und $Y \in \mathcal{C}_q^{(k)}$ ein beliebiges Vektorfeld mit der Eigenschaft $Y_\rho \in T_\rho\mathcal{R}_q$ für alle $\rho \in U \cap \mathcal{R}_q$. Nach Korollar 4.3.4(i) und dem Theorem von Frobenius gilt $[X, Y]_\rho \in T_\rho\mathcal{R}_q \cap (\mathcal{C}_q^{(k)})_\rho$ für alle $\rho \in U \cap \mathcal{R}_q$. Etwas präziser formuliert, betrachten wir das zurückgezogene lokale Vektorfeld $\bar{X} = \iota^*X|_{\iota(\mathcal{R}_q)}$ auf \mathcal{R}_q und die Distribution⁸ $(\iota^*(\mathcal{C}_q^{(k)})^0)^0 = \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q \subseteq T\mathcal{R}_q$. Dann gilt

$$\mathcal{L}_{\bar{X}}(\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q) = \left[\bar{X}, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q \right] \subseteq \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q.$$

Nach Korollar 4.3.4 und dem Theorem von Frobenius finden wir analog $[X, Y]_\rho \in T_\rho\mathcal{R}_q \cap V\rho\pi_k^q$ für jedes vertikale Vektorfeld $Y \in V\pi_k^q$ mit der Eigenschaft $Y_\rho \in T_\rho\mathcal{R}_q$ für alle $\rho \in U \cap \mathcal{R}_q$. In inneren Koordinaten auf \mathcal{R}_q erhalten wir äquivalent $\mathcal{L}_{\bar{X}}V\hat{\pi}_k^q = [\bar{X}, V\hat{\pi}_k^q] \subseteq V\hat{\pi}_k^q$. Alternativ folgt die Behauptung aus Proposition 4.4.6 und Proposition 3.4.2. \square

Korollar 4.4.18. Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine Differentialgleichung und $X, Y \in \text{Sym}[U, \mathcal{C}_q]$ zwei infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrien von \mathcal{R}_q mit der Eigenschaft $X|_{U \cap \mathcal{R}_q} = Y|_{U \cap \mathcal{R}_q}$.

(i) Im Fall $m > 1$ sei $\mathcal{O} = \pi_0^q(U \cap \mathcal{R}_q)$ eine offene Teilmenge von \mathcal{E} . Dann stimmen X und Y auf ganz $U \cap (\pi_0^q)^{-1}(\mathcal{O})$ überein.

(ii) Im Fall $m = 1$ sei $\mathcal{O} = \pi_1^q(U \cap \mathcal{R}_q)$ eine offene Teilmenge von $J_1\pi$. Dann stimmen X und Y auf ganz $U \cap (\pi_1^q)^{-1}(\mathcal{O})$ überein.

Beweis. Dies ist eine Folge von Korollar 4.4.9, angewandt auf den Fluss von X resp. Y . \square

Ist \mathcal{O} nicht offen in \mathcal{E} bzw. $J_1\pi$, dann existieren möglicherweise unterschiedliche infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrien von \mathcal{R}_q , deren Verhalten auf der Untermannigfaltigkeit $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ übereinstimmt. Als Beispiel betrachten wir hier die infinitesimalen Kontakttransformationen im Fall $mq = 1$ mit lokaler Darstellung

$$X^Q = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q}{\partial u_i} \partial_{x^i} + \left(Q - \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial Q}{\partial u_i} \right) \partial_u + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial Q}{\partial u} \right) \partial_{u_i}.$$

Es sei $\mathcal{R}_1 \subset J_1\pi$ eine beliebige Differentialgleichung mit lokaler Repräsentation $\Phi(\mathbf{x}, u, \mathbf{u}_{(1)}) = \mathbf{0}$. Wir setzen $Q := (\Phi^1 \dots \Phi^t)^2$. Dann gilt zwar $X^Q \in \text{Sym}[\mathcal{R}_1, \mathcal{C}_1]$ mit $X^Q|_{\mathcal{R}_1} = X^0|_{\mathcal{R}_1}$ aber nicht $X^Q = X^0$, wobei X^0 das Nullvektorfeld auf $J_1\pi$ bezeichnet. Um in diesem Sinn identische infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrien von der Betrachtung auszuschließen, führen wir auf $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q]$ eine Äquivalenzrelation $X \sim_{\mathcal{R}_q} Y :\Leftrightarrow X|_{\text{dom } X \cap \mathcal{R}_q} = Y|_{\text{dom } Y \cap \mathcal{R}_q}$ ein.

⁸Für $k \geq q$ setzen wir allgemein $V\hat{\pi}_{q-k-1}^q := V\hat{\pi}^q$.

Kapitel 5

Innere Symmetrien

Eine wichtige Verallgemeinerung der klassischen Symmetriekonzepte basiert auf der Vessiot-Theorie. Die eigentliche Stärke der Vessiot-Theorie liegt darin, dass sie eine sehr schöne „innere“ geometrische Modellierung von Differentialgleichungen als eine Mannigfaltigkeit mit einer Distribution, der Vessiot-Distribution, liefert und dadurch den Einsatz der in Kapitel 3 beschriebenen geometrischen Methoden für Symmetrieanalysen ermöglicht. Unter einer *inneren* Symmetrie einer gegebenen Differentialgleichung verstehen wir eine geometrische Symmetrie der zugehörigen Vessiot-Distribution. Diese intrinsische Formulierung ermöglicht es, zahlreiche Ergebnisse, die bisher die relativ abstrakte Sprache der äußeren Differentialformen benutzen, näher an Anwendungen zu rücken. Eine in diesem Zusammenhang bislang offene Frage ist, wann es mehr innere als äußere Symmetrien gibt. In der mathematischen Literatur findet sich nicht viel zu dieser Thematik. Eine Gemeinsamkeit fast aller uns bekannten Arbeiten aus diesem Bereich ist, dass ihre Ergebnisse erst unter sehr starken Voraussetzungen gültig sind, welche die Mehrzahl der in Anwendungen auftretenden Differentialgleichungen nicht erfüllen. Die im vorliegenden Kapitel ausgearbeitete geometrische Sichtweise trägt zu einem tieferen Verständnis der Zusammenhänge verschiedener Symmetriearten bei.

5.1 Symmetrien der Vessiot-Distribution

Den Ausgangspunkt für unsere Überlegungen stellen die klassischen Lie-Kontaktsymmetrien dar. Nach Proposition 4.4.6 bildet jede Lie-Kontaktsymmetrie $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ einer Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ die zugehörige Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ in sich ab. Es ist dabei nicht relevant, wie sich die Transformation Φ außerhalb der Untermannigfaltigkeit $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ verhält. Die für unsere Zwecke wesentliche Information ist in der Einschränkung $\phi := \Phi|_{\mathcal{R}_q}: \mathcal{R}_q \rightarrow \mathcal{R}_q$ festgehalten. Dies motiviert folgende Begriffsbildung, vgl. Definition 3.1.2:

Definition 5.1.1. Es seien $(\mathcal{R}_q, \hat{\pi}^q, \mathcal{X})$ eine gefaserte Mannigfaltigkeit und $\iota: \mathcal{R}_q \hookrightarrow J_q\pi$ eine Einbettung mit $\hat{\pi}^q = \pi^q \circ \iota$. Ein lokaler Diffeomorphismus $\phi: \mathcal{R}_q \rightarrow \mathcal{R}_q$ heißt *innere Symmetrie von \mathcal{R}_q* , wenn ϕ eine geometrische Symmetrie der Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] = (\iota^*\mathcal{C}_q^0)^0$ ist.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_q & \xrightarrow{\iota} & J_q\pi \\ & \searrow \hat{\pi}^q & \swarrow \pi^q \\ & & \mathcal{X} \end{array}$$

Hierbei bezeichnet $(\mathcal{R}_q, \hat{\pi}^q, \mathcal{X})$ zunächst eine *beliebige* gefaserte Mannigfaltigkeit, die vermöge $\iota: \mathcal{R}_q \hookrightarrow J_q\pi$ in ein Jetbündel der Ordnung q eingebettet wird. Dabei sind alle relevanten Informationen über die Struktur des Lösungsraumes in den Eigenschaften der Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] = (\iota^*\mathcal{C}_q^0)^0$ kodiert. Wir verdeutlichen die Idee am Beispiel 4.4.2.

Beispiel 5.1.2. Es seien $(\mathcal{R}_1, \hat{\pi}^1, \mathcal{X}) = (\mathbb{R}^2, \text{pr}_1, \mathbb{R})$ eine gefaserte Mannigfaltigkeit mit globalen Koordinaten (\bar{x}, \bar{p}) auf $\mathcal{R}_1 = \mathbb{R}^2$ und $\iota: \mathcal{R}_1 \hookrightarrow J_1\pi$ eine Einbettung mit Komponenten

$$x(\bar{x}, \bar{p}) = \bar{x}, \quad u(\bar{x}, \bar{p}) = \bar{x}\bar{p} - \frac{1}{4}\bar{p}^2, \quad u'(\bar{x}, \bar{p}) = \bar{p}.$$

Die zugehörige Punktmenge $\iota(\mathcal{R}_1) \subset J_1\pi$ kann implizit durch die Gleichung

$$\iota(\mathcal{R}_1) : \left\{ (u')^2 - 4xu' + 4u = 0 \right.$$

beschrieben werden. Für die Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_1] = \langle (\bar{p} - 2\bar{x})d\bar{p} \rangle^0$ finden wir

$$\mathcal{V}[\mathcal{R}_1] = \begin{cases} \langle \partial_{\bar{x}} \rangle, & \text{falls } \bar{p} \neq 2\bar{x}, \\ \langle \partial_{\bar{x}}, \partial_{\bar{p}} \rangle, & \text{falls } \bar{p} = 2\bar{x}. \end{cases}$$

Insbesondere ist $\mathcal{V}[\mathcal{R}_1]$ eine *singuläre* Distribution auf \mathcal{R}_1 . Jeder lokale Diffeomorphismus $\phi: \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_1$ hat in globalen Koordinaten (\bar{x}, \bar{p}) auf \mathcal{R}_1 die Form $\phi(\bar{x}, \bar{p}) = (\xi(\bar{x}, \bar{p}), \varphi(\bar{x}, \bar{p}))$. In einer Umgebung eines *regulären* Punktes ist ϕ genau dann eine innere Symmetrie, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

$$\det J\phi(\bar{x}, \bar{p}) \neq 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{p}) \neq 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{p}) = 0.$$

Die erste Bedingung besagt, dass ϕ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Die zweite und dritte Bedingung ergeben sich aus der Forderung $T_{(\bar{x}, \bar{p})}\phi(\mathcal{V}_{(\bar{x}, \bar{p})}[\mathcal{R}_1]) = \mathcal{V}_{\phi(\bar{x}, \bar{p})}[\mathcal{R}_1]$ für alle $(\bar{x}, \bar{p}) \in \text{dom } \phi$. Es existiert folglich eine nichtverschwindende reelle Funktion $\lambda \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_1)$, sodass gilt

$$T_{(\bar{x}, \bar{p})}\phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{p}) & \frac{\partial \xi}{\partial \bar{p}}(\bar{x}, \bar{p}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{p}) & \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{p}}(\bar{x}, \bar{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{p}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{p}) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda(\phi(\bar{x}, \bar{p})) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $(\bar{x}, \bar{p}) \in \text{dom } \phi$ mit $\bar{p} \neq 2\bar{x}$. Dementsprechend ist $\varphi(\bar{x}, \bar{p}) = \varphi(\bar{p})$ eine Funktion in \bar{p} . Da die Menge der *singulären* Punkte $S_{\mathcal{V}[\mathcal{R}_1]}^2 = \{(\bar{x}, \bar{p}) \mid \dim \mathcal{V}_{(\bar{x}, \bar{p})}[\mathcal{R}_1] = 2\} \subset \mathcal{R}_1$ invariant unter inneren Symmetrien ist, gilt $\phi(\bar{p}/2, \bar{p}) \in S_{\mathcal{V}[\mathcal{R}_1]}^2$ für alle $(\bar{p}/2, \bar{p}) \in \text{dom } \phi$. In diesem Fall ist $\varphi(\bar{p}) = 2\xi(\bar{p}/2, \bar{p})$ durch die Komponente ξ eindeutig bestimmt. Zusammenfassend halten wir fest, dass jede Funktion $\xi = \xi(\bar{x}, \bar{p})$ mit den Eigenschaften $\frac{\partial \xi}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{p}) \neq 0$ und $\frac{\partial \xi}{\partial \bar{x}}(\bar{p}/2, \bar{p}) + 2\frac{\partial \xi}{\partial \bar{p}}(\bar{p}/2, \bar{p}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{p}}(\bar{p}) \neq 0$ eine (globale) innere Symmetrie $\phi_\xi: \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_1$ vermöge $\phi_\xi(\bar{x}, \bar{p}) := (\xi(\bar{x}, \bar{p}), 2\xi(\bar{p}/2, \bar{p}))$ festlegt. Dabei werden triviale Geradenlösungen $\mathcal{N}^a = \{(\bar{x}, a) \mid \bar{x} \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{R}_1$ mit $a \in \mathbb{R}$ auf Geradenlösungen $\mathcal{N}^{2\xi(a/2, a)}$ abgebildet und die nichttriviale Lösung $\mathcal{N} = \{(\bar{x}, 2\bar{x}) \mid \bar{x} \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{R}_1$ bleibt unter ϕ_ξ invariant. Des Weiteren stellen wir fest, dass das Symbol $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{V}[\mathcal{R}_1]$ mit

$$\mathcal{N}_1 = \begin{cases} \{0\}, & \text{falls } \bar{p} \neq 2\bar{x}, \\ \langle \partial_{\bar{p}} \rangle, & \text{falls } \bar{p} = 2\bar{x} \end{cases}$$

genau dann invariant unter $T\phi_\xi$ ist, wenn $\frac{\partial \xi}{\partial \bar{p}}(\bar{p}/2, \bar{p}) = 0$ gilt. Beispielsweise ist $\phi_\xi: \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_1$ mit $\xi(\bar{x}, \bar{p}) := \bar{x} + \bar{p}$ eine globale innere Symmetrie, welche das Symbol *nicht* invariant lässt. \triangleleft

Jede innere Symmetrie ϕ von \mathcal{R}_q induziert einen lokalen Diffeomorphismus $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}: \iota(\mathcal{R}_q) \rightarrow \iota(\mathcal{R}_q)$ auf der Untermannigfaltigkeit $\iota(\mathcal{R}_q) \subseteq J_q\pi$ derart, dass die Vessiot-Distribution $T\iota(\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]) = T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap \mathcal{C}_q|_{\iota(\mathcal{R}_q)}$ unter $T\iota \circ T\phi \circ (T\iota)^{-1}$ invariant bleibt. Da die Untermannigfaltigkeit $\iota(\mathcal{R}_q) \subseteq J_q\pi$ regulär ist, besitzt $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$ stets eine Fortsetzung zu einer glatten

lokalen Abbildung $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ mit der Eigenschaft $\Phi|_{\iota(\mathcal{R}_q)} = \iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$. Wir nennen Φ ebenfalls *innere Symmetrie von $\iota(\mathcal{R}_q)$* . Zur Vereinfachung der Notation gehen wir davon aus, dass die totale Mannigfaltigkeit \mathcal{R}_q in der Tat eine reguläre Untermannigfaltigkeit des Jetbündels $J_q\pi$ ist. Hierzu identifizieren wir \mathcal{R}_q mit dem Bild $\iota(\mathcal{R}_q) \subseteq J_q\pi$.

Die Menge der inneren Symmetrien von \mathcal{R}_q bildet eine Lie-Pseudogruppe $\Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q])$. Wie das obige Beispiel explizit zeigt, kann die Menge der inneren Symmetrien in einer Umgebung eines festen Punktes $\rho \in \mathcal{R}_q$, in Zeichen $\Gamma_\rho(\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]) = \{\phi \in \Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]) \mid \rho \in \text{dom } \phi\}$, sehr stark vom betrachteten Punkt abhängen. Die Punktmenge $S_{\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]}^\ell = \{\rho \in \mathcal{R}_q \mid \dim \mathcal{V}_\rho[\mathcal{R}_q] = \ell\}$ ist invariant unter allen inneren Symmetrien. Es folgt direkt aus der Definition, dass die Integralmannigfaltigkeiten der Vessiot-Distribution unter inneren Symmetrien auf Integralmannigfaltigkeiten abgebildet werden. Man beachte aber, dass das Bild $\phi(\mathcal{N}) \subset \mathcal{R}_q$ einer $\hat{\pi}^q$ -transversalen Integralmannigfaltigkeit $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}_q$ im Allgemeinen *nicht* $\hat{\pi}^q$ -transversal ist. Dieses Verhalten ist uns bereits von den Lie-Kontaktsymmetrien bekannt. Falls das Symbol $\mathcal{N}_q \subset \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ invariant unter der Tangentialabbildung $T\phi$ ist, so ist $\phi(\mathcal{N})$ transversal bezüglich $\hat{\pi}^q$. In diesem Fall bildet $\phi: \mathcal{R}_q \rightarrow \mathcal{R}_q$ jede lokale Lösung von \mathcal{R}_q auf eine lokale Lösung ab. Offenbar ist $\{\phi \in \Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]) \mid T\phi(\mathcal{N}_q) = \mathcal{N}_q\}$ eine Lie-Pseudountergruppe von $\Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q])$. Es wird zu untersuchen sein, unter welchen Bedingungen das Symbol \mathcal{N}_q unter *allen* inneren Symmetrien invariant bleibt.

Nach Proposition 4.4.6 definiert die Einschränkung

$$\kappa_\Gamma : \begin{cases} \Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q) & \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]) \\ \Phi & \longmapsto \phi = \Phi|_{\mathcal{R}_q} \end{cases}$$

einen Homomorphismus von Lie-Pseudogruppen. Im Allgemeinen ist κ_Γ nicht injektiv, siehe Beispiel 4.4.10. Es ist naheliegend zu fragen, für welche Differentialgleichungen der Homomorphismus κ_Γ nicht surjektiv ist. Mit anderen Worten, wann gibt es mehr innere als äußere Symmetrien? Da $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit ist, besitzt jede innere Symmetrie $\phi: \mathcal{R}_q \rightarrow \mathcal{R}_q$ eine Fortsetzung zu einem lokalen Diffeomorphismus $\Phi: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ mit der Eigenschaft $\Phi|_{\mathcal{R}_q} = \phi$. Wir interessieren uns dabei für spezielle Fortsetzungen, die zugleich Kontakttransformationen sind. Der Nachweis der Nichtexistenz solcher Transformationen ist ein äußerst schwieriges Fortsetzungsproblem, da die Lie-Pseudogruppe $\Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q])$ praktisch unbekannt ist. Wir können aber leicht eine Reihe von hinreichenden Bedingungen dafür angeben. Zunächst stellen wir fest, dass die Distributionen $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_k^q \subseteq T\mathcal{R}_q$ für $0 < k < q$ invariant unter Lie-Kontaktsymmetrien sind. Gleiches gilt für die Vertikalbündel $V\hat{\pi}_k^q \subset T\mathcal{R}_q$ für $0 < k < q$. Diesen Distributionen entsprechen $T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap \mathcal{C}_q^{(k)}|_{\iota(\mathcal{R}_q)}$ bzw. $T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap V\pi_k^q|_{\iota(\mathcal{R}_q)}$ in der äußeren Beschreibung auf $TJ_q\pi$. Falls eine dieser Distributionen *nicht* invariant unter $\phi \in \Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q])$ ist, dann ist κ_Γ nicht surjektiv. Sind alle beschriebenen Distributionen invariant unter inneren Symmetrien, dann sind die Lie-Pseudogruppen $\Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q)$ und $\Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q])$ im Wesentlichen identisch.

Beispiel 5.1.3. Wir betrachten eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung 3. Ordnung:

$$\mathcal{R}_3 : \left\{ u''' = 0. \right.$$

Die zugehörige eindimensionale involutive Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_3] \subset T\mathcal{R}_3$ wird in inneren Koordinaten (x, u, u', u'') auf \mathcal{R}_3 durch das transversale Vektorfeld $X = \partial_x + u'\partial_u + u''\partial_{u'}$ erzeugt. Jeder lokale Diffeomorphismus $\phi: \mathcal{R}_3 \rightarrow \mathcal{R}_3$ mit lokaler Darstellung $\phi(x, u, u', u'') = (\xi(x, u, u', u''), \varphi(x, u, u', u''), \psi(x, u, u', u''), \omega(x, u, u', u''))$ lässt sich zu einem lokalen Diffeomorphismus $\Phi: J_3\pi \rightarrow J_3\pi$ mit $\Phi(x, u, u', u'', u''') = (\phi(x, u, u', u''), u''')$ fortsetzen. An der letzten Komponente von Φ sehen wir die Invarianz der Untermannigfaltigkeit $\mathcal{R}_3 = \Phi(\mathcal{R}_3)$.

Aus der Symmetriebedingung $T_\rho\phi(X_\rho) = \lambda(\phi(\rho))X_{\phi(\rho)}$ mit $0 \neq \lambda \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_3)$ folgt direkt, dass ϕ bzw. Φ genau dann eine innere Symmetrie ist, wenn die Komponenten von ϕ die folgenden Bestimmungsgleichungen, vgl. (3.4), erfüllen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + u'\frac{\partial\varphi}{\partial u} + u''\frac{\partial\varphi}{\partial u'} &= \psi \cdot \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + u'\frac{\partial\xi}{\partial u} + u''\frac{\partial\xi}{\partial u'} \right), \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} + u'\frac{\partial\psi}{\partial u} + u''\frac{\partial\psi}{\partial u'} &= \omega \cdot \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + u'\frac{\partial\xi}{\partial u} + u''\frac{\partial\xi}{\partial u'} \right), \\ \frac{\partial\omega}{\partial x} + u'\frac{\partial\omega}{\partial u} + u''\frac{\partial\omega}{\partial u'} &= 0.\end{aligned}$$

Beispielsweise ist $\phi(x, u, u', u'') = (x, \varphi(x, u, u', u''), u', u'')$ mit

$$\varphi(x, u, u', u'') = -\frac{1}{2}x^2u'' + xu' + f\left(u'', u' - xu'', u - xu' + \frac{1}{2}x^2u''\right)$$

eine innere Symmetrie von \mathcal{R}_3 , wobei $f = f(z_1, z_2, z_3)$ eine beliebige Funktion bezeichnet. Es gilt

$$\det J\phi = \frac{\partial f}{\partial z_3}\left(u'', u' - xu'', u - xu' + \frac{1}{2}x^2u''\right).$$

Insbesondere ist $\Phi(x, u, u', u'', u''') = (x, \varphi(x, u, u', u''), u', u'', u''')$ genau dann eine Lie-Punktsymmetrie, wenn $\varphi(x, u, u', u'') = u$ gilt. Es existieren somit innere Symmetrien von $\mathcal{R}_3 \subset J_3\pi$, die keine Kontaktsymmetrien sind. \triangleleft

5.2 Eigenschaften innerer Symmetrien

In diesem Abschnitt untersuchen wir Distributionen der (regulären) Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$, die unter allen inneren Symmetrien $\phi \in \Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q])$ invariant sind. Um eine ganze Reihe verschiedener Arten singulären Verhaltens auszuschließen, gehen wir davon aus, dass die Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] = \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}_q$ regulär ist. Im Speziellen nehmen wir an, dass das Symbol $\mathcal{N}_q \subset T\mathcal{R}_q$ überall konstanten Rang hat und jedes $\hat{\pi}^q$ -transversale Komplement $\mathcal{H} \subseteq T\mathcal{R}_q$ den Rang $n = \dim \mathcal{X}$ besitzt. Insbesondere enthält \mathcal{R}_q alle Integritätsbedingungen erster Art.

In Analogie zu abgeleiteten Kontaktdistributionen, definieren wir die k -fach (stark) abgeleitete Vessiot-Distribution $\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q] \subseteq T\mathcal{R}_q$ punktweise rekursiv durch

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{(0)}[\mathcal{R}_q] &:= \mathcal{V}[\mathcal{R}_q], \\ \mathcal{V}^{(k+1)}[\mathcal{R}_q] &:= \left(\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]\right)' = \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q] + \left[\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q], \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]\right], \quad k \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt $\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q] \subseteq \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q$ bzw. $T\iota(\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]) \subseteq T\iota(T\mathcal{R}_q) \cap \mathcal{C}_q^{(k)}|_{\iota(\mathcal{R}_q)}$. Das nächste Korollar erklärt, weshalb wir an solchen Distributionen interessiert sind.

Korollar 5.2.1. *Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine Differentialgleichung und $\phi: \mathcal{R}_q \rightarrow \mathcal{R}_q$ eine beliebige innere Symmetrie von \mathcal{R}_q . Dann gilt $T\phi(\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]) = \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Proposition 3.2.4 mit $\mathcal{M} := \mathcal{R}_q$ und $\mathcal{D} := \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$. \square

Zur Bestimmung der ersten abgeleiteten Vessiot-Distribution $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q]$ seien $\{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n\}$ eine Basis eines $\hat{\pi}^q$ -transversalen Komplements $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ und $\{\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_r\}$ eine Basis des involutiven Symbols $\mathcal{N}_q \subset \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$. Dann wird $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] = \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + [\mathcal{H}, \mathcal{H}] + [\mathcal{H}, \mathcal{N}_q]$ zusätzlich durch die Vektorfelder

$$\begin{aligned}[\bar{X}_i, \bar{X}_k], & \quad 1 \leq i < k \leq n, \\ [\bar{X}_i, \bar{Y}_\ell], & \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq \ell \leq r\end{aligned}$$

erzeugt. Ist das gewählte Komplement \mathcal{H} selbst involutiv, dann gilt $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] = \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + [\mathcal{H}, \mathcal{N}_q]$. Falls die Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ involutiv ist, gilt $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] = \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$. Zur Beschreibung der ersten abgeleiteten Vessiot-Distribution $T\iota(\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q])$ in äußeren Koordinaten auf $J_q\pi$ betrachten wir beliebige lokale Fortsetzungen der Vektorfelder $\iota_*\bar{X}_i$ und $\iota_*\bar{Y}_\ell$. Da $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit ist, finden wir um jeden Punkt $\rho \in \mathcal{R}_q$ lokale Kontaktvektorfelder $X_i \in \Gamma_\rho(\tau_{J_q\pi})$ und $Y_\ell \in \Gamma_\rho(\tau_{J_q\pi})$ mit der Eigenschaft $X_i|_{\mathcal{R}_q} = \iota_*\bar{X}_i$ bzw. $Y_\ell|_{\mathcal{R}_q} = \iota_*\bar{Y}_\ell$ derart, dass $T\iota(\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q])$ zusätzlich durch die Vektorfelder

$$\begin{aligned} [X_i, X_k]|_{\mathcal{R}_q} &= \iota_*([\bar{X}_i, \bar{X}_k]), & 1 \leq i < k \leq n, \\ [X_i, Y_\ell]|_{\mathcal{R}_q} &= \iota_*([\bar{X}_i, \bar{Y}_\ell]), & 1 \leq i \leq n, 1 \leq \ell \leq r \end{aligned}$$

erzeugt wird. Zur Verdeutlichung der Vorgehensweise betrachten wir ein konkretes Beispiel.

Beispiel 5.2.2. Es sei $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine Differentialgleichung mit lokaler Darstellung der Form

$$\mathcal{R}_q : \left\{ u_\mu^\alpha = \phi_\mu^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q-1)}, \hat{\mathbf{u}}_{(q)}), \quad (\alpha, \mu) \in \mathcal{B}. \right.$$

Jede Gleichung der lokalen Beschreibung von \mathcal{R}_q ist nach einer Hauptableitung u_μ^α der Ordnung $|\mu| = q$ aufgelöst. Hierbei bezeichnet \mathcal{B} die Menge aller Paare (α, μ) , sodass u_μ^α eine Hauptableitung ist. Die verbleibenden, parametrischen Ableitungen u_μ^α der Ordnung $|\mu| = q$ werden mit $\hat{\mathbf{u}}_{(q)}$ notiert. In inneren Koordinaten $(\bar{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}}^{(q-1)}, \overline{\hat{\mathbf{u}}}_{(q)})$ auf \mathcal{R}_q finden wir leicht, dass das Symbol $\mathcal{N}_q = V\hat{\pi}_{q-1}^q \subset \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ durch die Vektorfelder

$$\bar{Y}_\beta^\nu = \partial_{\overline{u_\beta^\nu}}, \quad (\beta, \nu) \notin \mathcal{B}, |\nu| = q$$

aufgespannt wird. Des Weiteren stellen wir fest, dass die Vektorfelder

$$\bar{X}_i = \partial_{\overline{x^i}} + \sum_{(\alpha, \mu+1_i) \in \mathcal{B}} \phi_{\mu+1_i}^\alpha(\bar{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}}^{(q-1)}, \overline{\hat{\mathbf{u}}}_{(q)}) \partial_{\overline{u_\mu^\alpha}} + \sum_{\substack{0 \leq |\mu| < q \\ (\alpha, \mu+1_i) \notin \mathcal{B}}} \overline{u_{\mu+1_i}^\alpha} \partial_{\overline{u_\mu^\alpha}}, \quad 1 \leq i \leq n$$

ein n -dimensionales $\hat{\pi}^q$ -transversales Komplement $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ erzeugen. Für eine ausführliche Herleitung verweisen wir auf Fesser [13, Proposition 3.1.19]. Zur Beschreibung der abgeleiteten Vessiot-Distribution $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q]$ bestimmen wir die zugehörigen Lie-Klammern:

$$\begin{aligned} [\bar{X}_i, \bar{X}_k] &= \sum_{(\alpha, \mu+1_k) \in \mathcal{B}} \bar{X}_i(\phi_{\mu+1_k}^\alpha) \partial_{\overline{u_\mu^\alpha}} - \sum_{(\alpha, \mu+1_i) \in \mathcal{B}} \bar{X}_k(\phi_{\mu+1_i}^\alpha) \partial_{\overline{u_\mu^\alpha}}, \\ [\bar{Y}_\beta^\nu, \bar{X}_i] &= \begin{cases} \partial_{\overline{u_{\nu-1_i}^\beta}} + \sum_{(\alpha, \mu+1_i) \in \mathcal{B}} \bar{Y}_\beta^\nu(\phi_{\mu+1_i}^\alpha) \partial_{\overline{u_\mu^\alpha}}, & \text{falls } \nu_i > 0, \\ \sum_{(\alpha, \mu+1_i) \in \mathcal{B}} \bar{Y}_\beta^\nu(\phi_{\mu+1_i}^\alpha) \partial_{\overline{u_\mu^\alpha}}, & \text{falls } \nu_i = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir sehen an den hier auftretenden Strukturkoeffizienten, dass die abgeleitete Vessiot-Distribution $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] = \langle \bar{X}_i, \bar{Y}_\beta^\nu, [\bar{X}_i, \bar{X}_k], [\bar{Y}_\beta^\nu, \bar{X}_i] \rangle$ im Allgemeinen singulär ist. In äußeren Koordinaten ergibt sich folgendes Bild: Das Symbol $T\iota(\mathcal{N}_q) \subset T\iota(\mathcal{V}[\mathcal{R}_q])$ wird durch die Vektorfelder

$$\iota_*\bar{Y}_\beta^\nu = \mathcal{C}_\beta^\nu + \sum_{(\alpha, \mu) \in \mathcal{B}} \frac{\partial \phi_\mu^\alpha}{\partial \overline{u_\nu^\beta}} \mathcal{C}_\alpha^\mu, \quad (\beta, \nu) \notin \mathcal{B}, |\nu| = q$$

aufgespannt, wohingegen die Vektorfelder

$$\iota_*\bar{X}_i = \mathcal{C}_i^{(q)} + \sum_{(\alpha, \mu) \in \mathcal{B}} \mathcal{C}_i^{(q)}(\phi_\mu^\alpha) \mathcal{C}_\alpha^\mu, \quad 1 \leq i \leq n$$

ein n -dimensionales Komplement $T\iota(\mathcal{H}) \subseteq T\iota(\mathcal{V}[\mathcal{R}_q])$ erzeugen. Diese Vektorfelder auf $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ lassen sich in naheliegender Weise zu *Kontaktvektorfeldern*

$$Y_\beta^\nu = \mathcal{C}_\beta^\nu + \sum_{(\alpha,\mu) \in \mathcal{B}} \frac{\partial \phi_\mu^\alpha}{\partial u_\nu^\beta} \mathcal{C}_\alpha^\mu, \quad (\beta, \nu) \notin \mathcal{B}, |\nu| = q,$$

$$X_i = \mathcal{C}_i^{(q)} + \sum_{(\alpha,\mu) \in \mathcal{B}} \mathcal{C}_i^{(q)}(\phi_\mu^\alpha) \mathcal{C}_\alpha^\mu, \quad 1 \leq i \leq n$$

auf ganz $J_q\pi$ fortsetzen. Die einfache, aber etwas längliche Rechnung liefert:

$$[X_i, X_k] = \sum_{(\alpha,\mu+1_k) \in \mathcal{B}} \mathcal{C}_i^{(q)}(\phi_{\mu+1_k}^\alpha) \left(\partial_{u_\mu^\alpha} + \sum_{(\beta,\nu) \in \mathcal{B}} \frac{\partial \phi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta} \right)$$

$$- \sum_{(\alpha,\mu+1_i) \in \mathcal{B}} \mathcal{C}_k^{(q)}(\phi_{\mu+1_i}^\alpha) \left(\partial_{u_\mu^\alpha} + \sum_{(\beta,\nu) \in \mathcal{B}} \frac{\partial \phi_\nu^\beta}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\nu^\beta} \right),$$

$$[Y_\beta^\nu, X_i] = \begin{cases} \partial_{u_{\nu-1_i}^\beta} + \sum_{(\alpha,\mu) \in \mathcal{B}} \frac{\partial \phi_\mu^\alpha}{\partial u_{\nu-1_i}^\beta} \partial_{u_\mu^\alpha} + \sum_{(\alpha,\mu+1_i) \in \mathcal{B}} \frac{\partial \phi_{\mu+1_i}^\alpha}{\partial u_\nu^\beta} \left(\partial_{u_\mu^\alpha} + \sum_{(\gamma,\tau) \in \mathcal{B}} \frac{\partial \phi_\tau^\gamma}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\tau^\gamma} \right), & \text{falls } \nu_i > 0, \\ \sum_{(\alpha,\mu+1_i) \in \mathcal{B}} \frac{\partial \phi_{\mu+1_i}^\alpha}{\partial u_\nu^\beta} \left(\partial_{u_\mu^\alpha} + \sum_{(\gamma,\tau) \in \mathcal{B}} \frac{\partial \phi_\tau^\gamma}{\partial u_\mu^\alpha} \partial_{u_\tau^\gamma} \right), & \text{falls } \nu_i = 0. \end{cases}$$

Die so gewonnenen Vektorfelder aus \mathcal{C}'_i sind nach Konstruktion tangential zu $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ und es gilt $T\iota(\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q]) = \langle X_i|_{\mathcal{R}_q}, Y_\ell|_{\mathcal{R}_q}, [X_i, X_k]|_{\mathcal{R}_q}, [Y_\beta^\nu, X_i]|_{\mathcal{R}_q} \rangle$. \triangleleft

Wir weisen ausdrücklich darauf hin, dass der vertikale Anteil

$$\mathcal{N}_q^{(k)} := \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q] \cap V\hat{\pi}_{q-k-1}^q, \quad k \in \mathbb{N},$$

im Folgenden *verallgemeinertes Symbol* genannt, der k -fach abgeleiteten Vessiot-Distribution $\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q] = \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}_q^{(k)}$ im Allgemeinen nicht involutiv ist, siehe Beispiel 5.2.8. Aus diesem Grund müssen bei der Bestimmung von

$$\mathcal{V}^{(k+1)}[\mathcal{R}_q] = \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q] + [\mathcal{H}, \mathcal{N}_q^{(k)}] + [\mathcal{N}_q^{(k)}, \mathcal{N}_q^{(k)}], \quad k \in \mathbb{N}$$

auch die Vektorfelder der Form $[\mathcal{N}_q^{(k)}, \mathcal{N}_q^{(k)}]$ berücksichtigt werden. In Bemerkung 3.2.3 haben wir den Begriff der schwachen Ableitung von Distributionen erwähnt. Wir definieren die k -fach *schwach* abgeleitete Vessiot-Distribution $\tilde{\mathcal{V}}^{(k)}[\mathcal{R}_q] = \mathcal{H} \oplus \tilde{\mathcal{N}}_q^{(k)} \subseteq T\mathcal{R}_q$ rekursiv durch

$$\tilde{\mathcal{V}}^{(0)}[\mathcal{R}_q] := \mathcal{V}[\mathcal{R}_q],$$

$$\tilde{\mathcal{V}}^{(k+1)}[\mathcal{R}_q] := \tilde{\mathcal{V}}^{(k)}[\mathcal{R}_q] + [\mathcal{V}[\mathcal{R}_q], \tilde{\mathcal{V}}^{(k)}[\mathcal{R}_q]], \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$= \tilde{\mathcal{V}}^{(k)}[\mathcal{R}_q] + [\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{N}}_q^{(k)}] + [\mathcal{N}_q^{(k)}, \tilde{\mathcal{N}}_q^{(k)}], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ist auch $\tilde{\mathcal{V}}^{(k)}[\mathcal{R}_q] \subseteq \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]$ invariant unter inneren Symmetrien von \mathcal{R}_q . Falls die Subdistributionen $\mathcal{N}_q^{(k)}$, $k \geq 1$ involutiv sind, so stimmen beide Ableitungsbegriffe überein. In diesem Fall erhalten wir

$$\tilde{\mathcal{V}}^{(k+1)}[\mathcal{R}_q] = \tilde{\mathcal{V}}^{(k)}[\mathcal{R}_q] + [\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{N}}_q^{(k)}] = \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q] + [\mathcal{H}, \mathcal{N}_q^{(k)}] = \mathcal{V}^{(k+1)}[\mathcal{R}_q], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die so entstandene aufsteigende Kette von invarianten Distributionen auf \mathcal{R}_q ,

$$\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] \subseteq \mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] \subseteq \mathcal{V}''[\mathcal{R}_q] \subseteq \dots \subseteq \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q] \subseteq \mathcal{V}^{(k+1)}[\mathcal{R}_q] \subseteq \dots \subseteq T\mathcal{R}_q, \quad (5.1)$$

wird in jedem Punkt $\rho \in \mathcal{R}_q$ nach endlich vielen Schritten stationär. Wir demonstrieren verschiedene Eigenschaften der abgeleiteten Vessiot-Distributionen an einigen Beispielen.

Beispiel 5.2.3. Wir betrachten erneut die in Beispiel 2.3.4 beschriebene Differentialgleichung

$$\mathcal{R}_2 : \begin{cases} u_{xy} = u, \\ u_{xx} = u_x \end{cases}$$

für eine unbekannte Funktion $u(x, y)$. Die zugehörige reguläre Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]$ wird in inneren Koordinaten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_{yy})$ auf \mathcal{R}_2 durch die drei Vektorfelder

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \partial_{\bar{x}} + \bar{u}_x(\partial_{\bar{u}} + \partial_{\bar{u}_x}) + \bar{u}\partial_{\bar{u}_y}, \\ \bar{X}_2 &= \partial_{\bar{y}} + \bar{u}_y\partial_{\bar{u}} + \bar{u}\partial_{\bar{u}_x} + \bar{u}_{yy}\partial_{\bar{u}_y}, \\ \bar{Y} &= \partial_{\bar{u}_{yy}} \end{aligned}$$

erzeugt. An den nichtverschwindenden Lie-Klammern

$$[\bar{X}_1, \bar{X}_2] = (\bar{u}_x - \bar{u})\partial_{\bar{u}_x} - \bar{u}_y\partial_{\bar{u}_y}, \quad [\bar{Y}, \bar{X}_2] = \partial_{\bar{u}_y}$$

sehen wir, dass der Rang der glatten abgeleiteten Vessiot-Distribution $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]$ *nicht* konstant ist. Der Koeffizient vor $\partial_{\bar{u}_x}$ in $[\bar{X}_1, \bar{X}_2]$ entspricht einer Integrabilitätsbedingung. Wir setzen

$$\bar{Z}_1 = \partial_{\bar{u}_y} \quad \text{und} \quad \bar{Z}_2 = (\bar{u}_x - \bar{u})\partial_{\bar{u}_x}.$$

Dann gilt $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2] = \langle \bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2 \rangle$. Insbesondere ist $\mathcal{R}_2^{(1)} = \{\rho \in \mathcal{R}_2 \mid \dim \mathcal{V}'_\rho[\mathcal{R}_2] = 4\}$ invariant unter inneren Symmetrien von \mathcal{R}_2 . Erneute Ableitung von $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]$ liefert die nichtverschwindenden Lie-Klammern

$$\begin{aligned} \bar{W}_1 &= [\bar{Z}_1, \bar{X}_2] = \partial_{\bar{u}}, \\ \bar{W}_2 &= [\bar{Z}_2, \bar{X}_2] = (\bar{u}_y - \bar{u})\partial_{\bar{u}_x}, \\ [\bar{Z}_2, \bar{X}_1] &= (\bar{u}_x - \bar{u})\partial_{\bar{u}} + (\bar{u}_x - \bar{u})\partial_{\bar{u}_x} = (\bar{u}_x - \bar{u})\bar{W}_1 + \bar{Z}_2. \end{aligned}$$

Daher gilt $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2] = \langle \bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{W}_1, \bar{W}_2 \rangle$, wobei die Vektorfelder \bar{Z}_2 und \bar{W}_2 mit $(\bar{u}_y - \bar{u})\bar{Z}_2 = (\bar{u}_x - \bar{u})\bar{W}_2$ linear abhängig sind. Weiter ist $\mathcal{R}_2^{(2)} = \{\rho \in \mathcal{R}_2 \mid \dim \mathcal{V}''_\rho[\mathcal{R}_2] = 5\}$ invariant unter inneren Symmetrien von \mathcal{R}_2 . Außerhalb der Punktmenge $\{\rho \in \mathcal{R}_2 \mid \bar{u}_x = \bar{u} \text{ oder } \bar{u}_y = \bar{u}\}$ ist die Vessiot-Distribution holonom, d.h. $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2] = T\mathcal{R}_2$. Dieses Beispiel zeigt explizit, dass die abgeleiteten Vessiot-Distributionen singular sein können. \triangleleft

Man beachte, dass die Integrabilitätsbedingungen von höherer Ordnung als das Ausgangssystem keinen Einfluss auf die Eigenschaften der abgeleiteten Vessiot-Distributionen haben, da die Koeffizienten einer Lie-Klammer $[X, Y]$ zweier beliebigen Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(J_q\pi)$ höchstens die Ordnung q haben.

Beispiel 5.2.4. Das folgende Beispiel eines linearen Systems zweiter Ordnung für eine unbekannte Funktion $u(x, y, z)$ geht wohl auf M. Janet [17] zurück:

$$\mathcal{R}_2 : \begin{cases} u_{zz} + yu_{xx} = 0, \\ u_{yy} = 0. \end{cases}$$

Wenn wir hier die erste Gleichung zweimal nach y ableiten und zweifache Ableitungen der zweiten Gleichung nach x bzw. nach z davon abziehen, so erhalten wir die Integrabilitätsbedingung

$$2u_{xxy} = D_{yy}(u_{zz} + yu_{xx}) - (D_{zz} + yD_{xx})u_{yy} = 0,$$

also eine Gleichung dritter Ordnung. Weitere Überkreuzableitungen führen zu einer zusätzlichen Integrabilitätsbedingung vierter Ordnung, nämlich der Gleichung

$$u_{xxxx} = D_{xxy}(u_{zz} + yu_{xx}) - (D_{zz} + yD_{xx})u_{xxy} = 0.$$

Die zugehörige Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]$ ist dagegen holonom mit $\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]$ -Typ (7, 10, 11). \triangleleft

Das folgende Beispiel demonstriert, dass die Kette der (regulären) abgeleiteten Vessiot-Distributionen (5.1) im Allgemeinen nicht mit $T\mathcal{R}_q$ endet.

Beispiel 5.2.5. Wir betrachten die planaren $U(1)$ -Yang-Mills-Gleichungen

$$\mathcal{R}_2 : \begin{cases} v_{tt} - u_{tx} = 0, \\ v_{tx} - u_{xx} = 0 \end{cases}$$

für zwei unbekannte Funktionen $u(t, x)$ und $v(t, x)$. Ihre Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]$ wird in inneren Koordinaten $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{u}_t, \bar{u}_x, \bar{v}_t, \bar{v}_x, \bar{u}_{tt}, \bar{u}_{tx}, \bar{u}_{xx}, \bar{v}_{xx})$ auf \mathcal{R}_2 durch die Vektorfelder

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \partial_{\bar{t}} + \bar{u}_t \partial_{\bar{u}} + \bar{v}_t \partial_{\bar{v}} + \bar{u}_{tt} \partial_{\bar{u}_t} + \bar{u}_{tx} (\partial_{\bar{u}_x} + \partial_{\bar{v}_t}) + \bar{u}_{xx} \partial_{\bar{v}_x}, \\ \bar{X}_2 &= \partial_{\bar{x}} + \bar{u}_x \partial_{\bar{u}} + \bar{v}_x \partial_{\bar{v}} + \bar{u}_{tx} \partial_{\bar{u}_t} + \bar{u}_{xx} (\partial_{\bar{u}_x} + \partial_{\bar{v}_t}) + \bar{v}_{xx} \partial_{\bar{v}_x}, \\ \bar{Y}_1 &= \partial_{\bar{u}_{tt}}, & \bar{Y}_3 &= \partial_{\bar{u}_{xx}}, \\ \bar{Y}_2 &= \partial_{\bar{u}_{tx}}, & \bar{Y}_4 &= \partial_{\bar{v}_{xx}} \end{aligned}$$

aufgespannt. Die erste abgeleitete Vessiot-Distribution $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]$ wird zusätzlich von

$$\begin{aligned} \bar{Z}_1 &= [\bar{Y}_2, \bar{X}_2] = [\bar{Y}_1, \bar{X}_1] = \partial_{\bar{u}_t}, \\ \bar{Z}_2 &= [\bar{Y}_3, \bar{X}_1] = [\bar{Y}_4, \bar{X}_2] = \partial_{\bar{v}_x}, \\ \bar{Z}_3 &= [\bar{Y}_2, \bar{X}_1] = [\bar{Y}_3, \bar{X}_2] = \partial_{\bar{v}_t} + \partial_{\bar{u}_x} \end{aligned}$$

erzeugt und es gilt $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2] \subsetneq \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] + V\hat{\pi}_0^2$. Erneute Ableitung von $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]$ zeigt, dass die zweifach abgeleitete Vessiot-Distribution $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2] \subsetneq T\mathcal{R}_2$ zusätzlich durch die Vektorfelder

$$\begin{aligned} \bar{W}_1 &= [\bar{Z}_3, \bar{X}_2] = [\bar{Z}_1, \bar{X}_1] = \partial_{\bar{u}}, \\ \bar{W}_2 &= [\bar{Z}_3, \bar{X}_1] = [\bar{Z}_2, \bar{X}_2] = \partial_{\bar{v}} \end{aligned}$$

aufgespannt wird. Weiter ist $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2]$ involutiv und es gilt $\dim \mathcal{V}''[\mathcal{R}_2] = 11 < 12 = \dim \mathcal{R}_2$ mit beispielsweise $\bar{N} = \partial_{\bar{v}_t} - \partial_{\bar{u}_x} \in T\mathcal{R}_2 \setminus \mathcal{V}''[\mathcal{R}_2]$. Nach dem klassischen Theorem von Frobenius kann $\mathcal{R}_2 \subset J_2\pi$ durch eine Familie von Differentialgleichungen

$$\mathcal{R}_2^a : \begin{cases} v_{tt} - u_{tx} = 0, \\ v_{tx} - u_{xx} = 0, \\ v_t - u_x = a, \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

überdeckt werden. Es gilt $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2^a] = T\mathcal{R}_2^a$. Man bestätigt sofort, dass die Gleichungen zweiter Ordnung in \mathcal{R}_2 differentielle Konsequenzen der Gleichung $v_t - u_x = a$ sind und es gilt $\mathcal{R}_2 = \text{Sol}(\mathcal{R}_2) = \bigsqcup_{a \in \mathbb{R}} \text{Sol}(\mathcal{R}_2^a)$. Insbesondere sind $\phi_s: \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_2$ mit globaler Darstellung

$$\begin{aligned} \phi_s(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{u}_t, \bar{u}_x, \bar{v}_t, \bar{v}_x, \bar{u}_{tt}, \bar{u}_{tx}, \bar{u}_{xx}, \bar{v}_{xx}) &= (\bar{t}, \bar{x}, \bar{u} + \bar{x}(\bar{v}_t - \bar{u}_x)(1 - e^{-s}), \bar{v}, \bar{u}_t, \\ &\quad \bar{v}_t - (\bar{v}_t - \bar{u}_x)e^{-s}, \bar{v}_t, \bar{v}_x, \bar{u}_{tt}, \bar{u}_{tx}, \bar{u}_{xx}, \bar{v}_{xx}), \quad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

genuine innere Symmetrien von \mathcal{R}_2 mit erzeugendem Vektorfeld¹

$$\bar{X} = (\bar{v}_t - \bar{u}_x)(\bar{x}\partial_{\bar{u}} + \partial_{\bar{u}_x}) = (\bar{v}_t - \bar{u}_x) \left(\bar{x}\bar{W}_1 + \frac{1}{2}\bar{Z}_3 - \frac{1}{2}\bar{N} \right).$$

Offenbar gilt $T\phi_s(\mathcal{N}_2) = \mathcal{N}_2$ für alle Parameterwerte $s \in \mathbb{R}$, weshalb auch ϕ_s jede Lösung von \mathcal{R}_2 auf eine andere Lösung abbildet. Nach Proposition 3.3.2 ist ϕ_s um eine Ordnung projizierbar. Wir finden einen Diffeomorphismus $\Psi_s: J_1\pi \rightarrow J_1\pi$ mit globaler Darstellung

$$\Psi_s(t, x, u, v, u_t, u_x, v_t, v_x) = (t, x, u + x(v_t - u_x)(1 - e^{-s}), v, u_t, v_t - (v_t - u_x)e^{-s}, v_t, v_x),$$

sodass $\Psi_s \circ \hat{\pi}_1^2 = \hat{\pi}_1^2 \circ \phi_s$ gilt. Mit Hilfe der transversalen Kontaktbedingungen (4.5) erhalten wir, wegen der Nichteindeutigkeit der Prolongation nach Bemerkung 4.1.6, zwei unterschiedliche Fortsetzungen $\Phi_s^1, \Phi_s^2: J_2\pi \rightarrow J_2\pi$ von ϕ_s mit der Eigenschaft $\Phi_s^1|_{\mathcal{R}_2} = \phi_s = \Phi_s^2|_{\mathcal{R}_2}$ und

$$\Phi_s^1(t, x, \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)}) = (\Psi_s(t, x, \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}), u_{tt}, u_{tx}, v_{tx} - (v_{tx} - u_{xx})e^{-s}, v_{tt}, v_{tx}, v_{xx}),$$

$$\Phi_s^2(t, x, \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)}) = (\Psi_s(t, x, \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}), u_{tt}, v_{tt} - (v_{tt} - u_{tx})e^{-s}, v_{tx} - (v_{tx} - u_{xx})e^{-s}, v_{tt}, v_{tx}, v_{xx}).$$

Des Weiteren finden wir $\Phi_s^i(\text{Sol}(\mathcal{R}_2^a)) = \text{Sol}(\mathcal{R}_2^b)$ mit $b = ae^{-s}$ sowie $T\Phi_s^i(V\pi_1^2) = V\pi_1^2$. Da die Yang-Mills-Gleichungen den Prototyp einer Eichtheorie darstellen, definieren für jede beliebige Funktion $\Lambda(t, x)$ die Funktionen $u(t, x) + \Lambda_t(t, x)$ und $v(t, x) + \Lambda_x(t, x)$ eine Lösung von \mathcal{R}_2^a , wenn $u(t, x), v(t, x)$ eine Lösung von \mathcal{R}_2^a ist. Die so gegebenen Lie-Punktsymmetrien $j_2\Phi_\Lambda: J_2\pi \rightarrow J_2\pi$ mit $\Phi_\Lambda(t, x, u, v) = (t, x, u + \Lambda_t(t, x), v + \Lambda_x(t, x))$ sind π^2 -fasererhaltend und bilden eine Gruppe. \triangleleft

Ist allgemein $\mathcal{V}^{(s)}[\mathcal{R}_q] \subsetneq T\mathcal{R}_q$ regulär und involutiv, so lässt sich die Untermannigfaltigkeit $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ nach dem Theorem von Frobenius durch eine $(\dim \mathcal{R}_q - \dim \mathcal{V}^{(s)}[\mathcal{R}_q])$ -parametrische Familie von Differentialgleichungen der Dimension $\dim \mathcal{V}^{(s)}[\mathcal{R}_q]$ lokal überdecken.

Wenn wir die Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ prolongieren, dann besitzt auch jede der erhaltenen Gleichungen $\mathcal{R}_{q+r} \subset J_{q+r}\pi$ eine Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_{q+r}]$. Es besteht folgender Zusammenhang zwischen abgeleiteten Vessiot-Distributionen unterschiedlicher Ordnung:

$$T_{\hat{\rho}}\hat{\pi}_q^{q+r}(\mathcal{V}_{\hat{\rho}}^{(r)}[\mathcal{R}_{q+r}]) \subseteq \mathcal{V}_{\rho}[\mathcal{R}_q^{(r)}] \quad \text{mit } \rho = \hat{\pi}_q^{q+r}(\hat{\rho}).$$

Diese Eigenschaft ergibt sich leicht aus $\mathcal{C}_q = T\pi_q^{q+r}(\mathcal{C}_{q+r}^{(r)})$, der Inklusion

$$T\iota(\mathcal{V}^{(r)}[\mathcal{R}_{q+r}]) \subseteq T\iota(T\mathcal{R}_{q+r}) \cap \mathcal{C}_{q+r}^{(r)}|_{\iota(\mathcal{R}_{q+r})}$$

und der Tatsache, dass die Projektion $\hat{\pi}_q^{q+r}: \mathcal{R}_{q+r} \rightarrow \mathcal{R}_q^{(r)}$ surjektiv ist. Auf der Ebene von Lösungen bedeutet diese Eigenschaft Folgendes: Es sei $\sigma \in \Gamma_{\text{lok}}(\pi)$ eine Lösung von \mathcal{R}_q mit $\rho \in \text{im } j_q\sigma \subseteq \mathcal{R}_q^{(r)}$. Dann ist $\hat{\rho} \in \text{im } j_{q+r}\sigma \subseteq \mathcal{R}_{q+r}$ mit $\rho = \hat{\pi}_q^{q+r}(\hat{\rho})$ eine Integralmannigfaltigkeit der Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_{q+r}] \subseteq \mathcal{V}^{(r)}[\mathcal{R}_{q+r}]$ mit $T_{\hat{\rho}}(\text{im } j_{q+r}\sigma) \subseteq \mathcal{V}_{\hat{\rho}}[\mathcal{R}_{q+r}] \subseteq \mathcal{V}_{\hat{\rho}}^{(r)}[\mathcal{R}_{q+r}]$. Insgesamt erhalten wir somit

$$T_{\rho}(\text{im } j_q\sigma) = T_{\hat{\rho}}\hat{\pi}_q^{q+r}(T_{\hat{\rho}}(\text{im } j_{q+r}\sigma)) \subseteq T_{\hat{\rho}}\hat{\pi}_q^{q+r}(\mathcal{V}_{\hat{\rho}}[\mathcal{R}_{q+r}]) \subseteq T_{\hat{\rho}}\hat{\pi}_q^{q+r}(\mathcal{V}_{\hat{\rho}}^{(r)}[\mathcal{R}_{q+r}]) \subseteq \mathcal{V}_{\rho}[\mathcal{R}_q^{(r)}].$$

Für jede beliebige Lösung $\sigma \in [\sigma]_p^{(q)} = \rho \in \mathcal{R}_q^{(r)}$ gilt folglich

$$T_{\rho}(\text{im } j_q\sigma) \subseteq \bigcup_{\hat{\rho} \in (\hat{\pi}_q^{q+r})^{-1}(\{\rho\})} T_{\hat{\rho}}\hat{\pi}_q^{q+r}(\mathcal{V}_{\hat{\rho}}[\mathcal{R}_{q+r}]) \subseteq \bigcup_{\hat{\rho} \in (\hat{\pi}_q^{q+r})^{-1}(\{\rho\})} T_{\hat{\rho}}\hat{\pi}_q^{q+r}(\mathcal{V}_{\hat{\rho}}^{(r)}[\mathcal{R}_{q+r}]) \subseteq \mathcal{V}_{\rho}[\mathcal{R}_q^{(r)}].$$

¹Allgemein ist $\bar{X} = f(\bar{v}_t - \bar{u}_x)(\bar{x}\partial_{\bar{u}} + \partial_{\bar{u}_x})$ mit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ eine *infinitesimale* innere Symmetrie von \mathcal{R}_2 .

Falls die r -fach abgeleitete Vessiot-Distribution $\mathcal{V}^{(r)}[\mathcal{R}_{q+r}]$ eine $\hat{\pi}_q^{q+r}$ -projizierbare Basis besitzt, dann ist jede prolongierte Lösung im $j_q\sigma$ eine Integralmannigfaltigkeit der Subdistribution $T\hat{\pi}_q^{q+r}(\mathcal{V}^{(r)}[\mathcal{R}_{q+r}]) \subseteq \mathcal{V}[\mathcal{R}_q^{(r)}]$. Im Spezialfall $\mathcal{V}^{(r)}[\mathcal{R}_{q+r}] = \mathcal{V}[\mathcal{R}_{q+r}] + V\hat{\pi}_{q-1}^{q+r}$ erhalten wir stets

$$T\hat{\pi}_q^{q+r}(\mathcal{V}^{(r)}[\mathcal{R}_{q+r}]) = \mathcal{V}[\mathcal{R}_q^{(r)}].$$

Beispiel 5.2.6. Wir setzen das obige Beispiel 5.2.5 fort. Die erste abgeleitete Vessiot-Distribution $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]$ besitzt trivialerweise eine $\hat{\pi}_1^2$ -projizierbare Basis mit

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'[\mathcal{R}_2] &= \langle \bar{X}_1 - \bar{u}_{tt}\bar{Z}_1 - \bar{u}_{tx}\bar{Z}_3 + \bar{u}_{xx}\bar{Z}_2, \bar{X}_2 - \bar{u}_{tx}\bar{Z}_1 - \bar{u}_{xx}\bar{Z}_3 - \bar{v}_{xx}\bar{Z}_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_4 \rangle \\ &= \langle \partial_{\bar{t}} + \bar{u}_{\bar{t}}\partial_{\bar{u}} + \bar{v}_{\bar{t}}\partial_{\bar{v}}, \partial_{\bar{x}} + \bar{u}_{\bar{x}}\partial_{\bar{u}} + \bar{v}_{\bar{x}}\partial_{\bar{v}}, \partial_{\bar{u}_t}, \partial_{\bar{v}_x}, \partial_{\bar{v}_t} + \partial_{\bar{u}_x}, \partial_{\bar{u}_{tt}}, \partial_{\bar{u}_{tx}}, \partial_{\bar{u}_{xx}}, \partial_{\bar{v}_{xx}} \rangle. \end{aligned}$$

In inneren Koordinaten $(t, x, u, v, u_t, u_x, v_t, v_x)$ auf $\mathcal{R}_1^{(1)} = \pi_1^2(\mathcal{R}_2) = J_1\pi$ erhalten wir

$$T\hat{\pi}_1^2(\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]) = \langle \mathcal{C}_t^{(1)}, \mathcal{C}_x^{(1)}, \partial_{u_t}, \partial_{v_x}, \partial_{v_t} + \partial_{u_x} \rangle \subsetneq \mathcal{C}_1.$$

Für jede Lösung σ von \mathcal{R}_2 , ist im $j_1\sigma$ eine Integralmannigfaltigkeit von $T\hat{\pi}_1^2(\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]) \subsetneq \mathcal{C}_1$. \triangleleft

Als Nächstes untersuchen wir die Eigenschaften der Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distribution von $\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]$. Definitionsgemäß ist

$$\text{Char}[\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]] := \left\{ X \in \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q] \mid [X, \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]] \subseteq \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q] \right\}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

eine *involutive* Subdistribution der k -fach abgeleiteten Vessiot-Distribution $\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]$. Sie lässt sich direkt aus den Strukturgleichungen von $\mathcal{V}^{(k+1)}[\mathcal{R}_q]$ ableiten. Ist allgemein $\mathcal{V}^{(s)}[\mathcal{R}_q]$ involutiv, so gilt $\text{Char}[\mathcal{V}^{(s)}[\mathcal{R}_q]] = \mathcal{V}^{(s)}[\mathcal{R}_q]$. Wie das folgende Korollar zeigt, sind die Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distributionen invariant unter inneren Symmetrien.

Korollar 5.2.7. *Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine Differentialgleichung und $\phi: \mathcal{R}_q \rightarrow \mathcal{R}_q$ eine beliebige innere Symmetrie von \mathcal{R}_q . Dann gilt $T\phi(\text{Char}[\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]]) = \text{Char}[\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]]$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Korollar 3.2.9 mit $\mathcal{M} := \mathcal{R}_q$ und $\mathcal{D} := \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$. \square

Im Gegensatz zur Kontaktdistribution \mathcal{C}_q mit der Eigenschaft $\text{Char}[\mathcal{C}_q] = \{0\}$ ist die Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distribution $\text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ im Allgemeinen nicht trivial.

Beispiel 5.2.8. Wir betrachten eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$\mathcal{R}_2 : \begin{cases} u_{xx} - u_{yy}^3/3 = 0, \\ u_{xy} - u_{yy}^2/2 = 0 \end{cases}$$

für eine unbekannte Funktion $u(x, y)$. In inneren Koordinaten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_{yy})$ auf \mathcal{R}_2 findet man leicht, dass die zugehörige reguläre Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]$ holonom ist. Es gilt $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2] = \langle \bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{W}_1, \bar{W}_2 \rangle = T\mathcal{R}_2$ mit Vektorfeldern

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \partial_{\bar{x}} + \bar{u}_x\partial_{\bar{u}} + \frac{\bar{u}_{yy}^3}{3}\partial_{\bar{u}_x} + \frac{\bar{u}_{yy}^2}{2}\partial_{\bar{u}_y}, & \bar{Z} &= [\bar{Y}, \bar{X}_2] = \partial_{\bar{u}_y} + \bar{u}_{yy}\partial_{\bar{u}_x}, \\ \bar{X}_2 &= \partial_{\bar{y}} + \bar{u}_y\partial_{\bar{u}} + \frac{\bar{u}_{yy}^2}{2}\partial_{\bar{u}_x} + \bar{u}_{yy}\partial_{\bar{u}_y}, & \bar{W}_1 &= [\bar{Z}, \bar{X}_2] = \partial_{\bar{u}}, \\ \bar{Y} &= \partial_{\bar{u}_{yy}}, & \bar{W}_2 &= [\bar{Y}, \bar{Z}] = \partial_{\bar{u}_x}. \end{aligned}$$

Anhand der Kommutatoren-Tabelle von $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2]$

$[\cdot, \cdot]$	\bar{X}_1	\bar{X}_2	\bar{Y}	\bar{Z}	\bar{W}_1	\bar{W}_2
\bar{X}_1	0	0	$-\overline{u_{yy}}\bar{Z}$	$-\overline{u_{yy}}\bar{W}_1$	0	$-\bar{W}_1$
\bar{X}_2	0	0	$-\bar{Z}$	$-\bar{W}_1$	0	0
\bar{Y}	$\overline{u_{yy}}\bar{Z}$	\bar{Z}	0	\bar{W}_2	0	0
\bar{Z}	$\overline{u_{yy}}\bar{W}_1$	\bar{W}_1	$-\bar{W}_2$	0	0	0
\bar{W}_1	0	0	0	0	0	0
\bar{W}_2	\bar{W}_1	0	0	0	0	0

sehen wir, dass der vertikale Anteil $\mathcal{N}_2^{(1)} = \langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle$ von $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2] = \langle \bar{X}_1, \bar{X}_2 \rangle \oplus \mathcal{N}_2^{(1)} \subsetneq \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] + V\hat{\pi}_0^2$ nicht involutiv ist. Weiter besitzt $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]$ keine $\hat{\pi}_1^2$ -projizierbare Basis. Zur Berechnung der Cauchy-Cartan-Charakteristiken $\bar{X} \in \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]]$ machen wir den üblichen Ansatz

$$\bar{X} = a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2 + c\bar{Y}$$

mit beliebigen Koeffizientenfunktionen $a, b, c \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_2)$. Aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{X}_1] \bmod \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] &= \overline{u_{yy}}c\bar{Z} = 0, \\ [\bar{X}, \bar{X}_2] \bmod \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] &= c\bar{Z} = 0, \\ [\bar{X}, \bar{Y}] \bmod \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] &= -(b + \overline{u_{yy}}a)\bar{Z} = 0 \end{aligned}$$

erhalten wir $\bar{X} = a(\bar{X}_1 - \overline{u_{yy}}\bar{X}_2)$ mit $a \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_2)$. Zusammenfassend gilt

$$\text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]] = \langle \bar{X}_1 - \overline{u_{yy}}\bar{X}_2 \rangle = \left\langle \partial_{\bar{x}} - \overline{u_{yy}}\partial_{\bar{y}} + (\overline{u_x} - \overline{u_y}\overline{u_{yy}})\partial_{\bar{u}} - \frac{\overline{u_{yy}}^3}{6}\partial_{\bar{u}_x} - \frac{\overline{u_{yy}}^2}{2}\partial_{\bar{u}_y} \right\rangle.$$

Auf gleiche Weise finden wir $\text{Char}[\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]] = \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]]$ und $\text{Char}[\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2]] = \mathcal{V}''[\mathcal{R}_2]$. \triangleleft

Falls das verallgemeinerte Symbol $\mathcal{N}_q^{(k+1)} \subset T\mathcal{R}_q$ der $(k+1)$ -fach abgeleiteten Vessiot-Distribution $\mathcal{V}^{(k+1)}[\mathcal{R}_q] = \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}_q^{(k+1)}$ involutiv ist, dann folgt aus der Rechenregel

$$[\mathcal{N}_q^{(k)}, \mathcal{V}^{(k+1)}[\mathcal{R}_q]] = [\mathcal{N}_q^{(k)}, \mathcal{H}] + [\mathcal{N}_q^{(k)}, \mathcal{N}_q^{(k+1)}] \subseteq \mathcal{V}^{(k+1)}[\mathcal{R}_q] + \mathcal{N}_q^{(k+1)} = \mathcal{V}^{(k+1)}[\mathcal{R}_q]$$

unmittelbar $\mathcal{N}_q^{(k)} \subseteq \text{Char}[\mathcal{V}^{(k+1)}[\mathcal{R}_q]]$. Im Spezialfall $k=0$ erhalten wir hieraus einen Zusammenhang zwischen dem Symbol \mathcal{N}_q und der Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distribution $\text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$. Wir verdeutlichen auch diesen Zusammenhang an einem konkreten Beispiel.

Beispiel 5.2.9. Wir betrachten eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$\mathcal{R}_2 : \begin{cases} u_{xx} + u_{xy} = 0, \\ u_{yy} + u_{xy} = 0 \end{cases}$$

für eine unbekannte Funktion $u(x, y)$. Die zugehörige Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]$ wird in inneren Koordinaten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_{xy})$ auf \mathcal{R}_2 durch die Vektorfelder

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \partial_{\bar{x}} + \overline{u_x}\partial_{\bar{u}} - \overline{u_{xy}}(\partial_{\bar{u}_x} - \partial_{\bar{u}_y}), \\ \bar{X}_2 &= \partial_{\bar{y}} + \overline{u_y}\partial_{\bar{u}} + \overline{u_{xy}}(\partial_{\bar{u}_x} - \partial_{\bar{u}_y}), \\ \bar{Y} &= \partial_{\bar{u}_{xy}} \end{aligned}$$

aufgespannt. Die erste abgeleitete Vessiot-Distribution $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]$ wird zusätzlich vom Vektorfeld

$$\bar{Z} = [\bar{X}_1, \bar{Y}] = [\bar{Y}, \bar{X}_2] = \partial_{\bar{u}_x} - \partial_{\bar{u}_y}$$

erzeugt. Es gilt $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2] \subsetneq \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] + V\hat{\pi}_0^2$. Erneute Ableitung von $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]$ zeigt, dass die zweifach abgeleitete Vessiot-Distribution $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2]$ zusätzlich von

$$\bar{W} = [\bar{Z}, \bar{X}_1] = [\bar{X}_2, \bar{Z}] = \partial_{\bar{u}}$$

aufgespannt wird. Anhand der Kommutatoren-Tabelle von $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2]$

$[\cdot, \cdot]$	\bar{X}_1	\bar{X}_2	\bar{Y}	\bar{Z}	\bar{W}
\bar{X}_1	0	0	\bar{Z}	$-\bar{W}$	0
\bar{X}_2	0	0	$-\bar{Z}$	\bar{W}	0
\bar{Y}	$-\bar{Z}$	\bar{Z}	0	0	0
\bar{Z}	\bar{W}	$-\bar{W}$	0	0	0
\bar{W}	0	0	0	0	0

sehen wir, dass sowohl $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2]$ als auch $\mathcal{N}_2^{(1)} = \langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle$ involutiv sind. Weiter ist $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2] \subsetneq T\mathcal{R}_2$ nicht holonom. Es gilt beispielsweise $\bar{N} = \partial_{\bar{u}_x} + \partial_{\bar{u}_y} \in T\mathcal{R}_2 \setminus \mathcal{V}''[\mathcal{R}_2]$. Zur Berechnung der Cauchy-Cartan-Charakteristiken $\bar{X} \in \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]]$ machen wir den üblichen Ansatz

$$\bar{X} = a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2 + c\bar{Y}$$

mit beliebigen Koeffizientenfunktionen $a, b, c \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_2)$. Aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{X}_1] \text{ mod } \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] &= -c\bar{Z} = 0, \\ [\bar{X}, \bar{X}_2] \text{ mod } \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] &= c\bar{Z} = 0, \\ [\bar{X}, \bar{Y}] \text{ mod } \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] &= (a-b)\bar{Z} = 0 \end{aligned}$$

erhalten wir $\bar{X} = a(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)$ mit $a \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_2)$. Folglich gilt $\text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]] = \langle \bar{X}_1 + \bar{X}_2 \rangle$. In analoger Weise berechnen wir $\text{Char}[\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]] \supseteq \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]]$. Hierzu machen wir den Ansatz

$$\bar{X} = a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2 + c\bar{Y} + d\bar{Z}$$

mit $a, b, c, d \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_2)$. Aus den nichttrivialen Bedingungen

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{X}_1] \text{ mod } \mathcal{V}'[\mathcal{R}_2] &= d\bar{W} = 0, \\ [\bar{X}, \bar{X}_2] \text{ mod } \mathcal{V}'[\mathcal{R}_2] &= -d\bar{W} = 0, \\ [\bar{X}, \bar{Z}] \text{ mod } \mathcal{V}'[\mathcal{R}_2] &= (b-a)\bar{W} = 0 \end{aligned}$$

erhalten wir schließlich $\mathcal{N}_2 \subset \text{Char}[\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]] = \langle \bar{X}_1 + \bar{X}_2, \bar{Y} \rangle = \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]] \oplus \mathcal{N}_2$. \triangleleft

Wie bei Lie-Kontaktsymmetrien im Fall $mq = 1$ ist das Symbol \mathcal{N}_q im Allgemeinen nicht invariant. Aus diesem Grund interessiert uns besonders die Situation, wann $\mathcal{N}_q = \text{Char}[\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q]]$ gilt. Hierzu sei $\{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_r, \bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_l\}$ eine Basis der ersten abgeleiteten Vessiot-Distribution $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] = \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] \oplus \langle \bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_l \rangle$. Wir machen den Ansatz

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{X}_i + \sum_{k=1}^r b_k \bar{Y}_k + \sum_{j=1}^l c_j \bar{Z}_j$$

mit $a_i, b_k, c_j \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_q)$ für $\bar{X} \in \text{Char}[\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q]]$. Die zugehörigen Bedingungen lauten:

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{X}_s] \text{ mod } \mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] &= \sum_{j=1}^l c_j [\bar{Z}_j, \bar{X}_s] = 0, & s = 1, \dots, n, \\ [\bar{X}, \bar{Y}_s] \text{ mod } \mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] &= \sum_{j=1}^l c_j [\bar{Z}_j, \bar{Y}_s] = 0, & s = 1, \dots, r, \\ [\bar{X}, \bar{Z}_s] \text{ mod } \mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] &= \sum_{i=1}^n a_i [\bar{X}_i, \bar{Z}_s] + \sum_{k=1}^r b_k [\bar{Y}_k, \bar{Z}_s] = 0, & s = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Trivialerweise gilt $\mathcal{N}_q \subseteq \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ genau dann, wenn $[\mathcal{N}_q, \mathcal{N}_q^{(1)}] \subseteq \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ gilt. In diesem Fall erhalten wir keine Bedingungen an die Koeffizienten $b_k \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_q)$. Es bleibt

$$\begin{aligned} [\bar{X}_i, \bar{X}] \quad \text{mod } \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] &= \sum_{s=1}^l c_s [\bar{X}_i, \bar{Z}_s] = 0, & i = 1, \dots, n, \\ [\bar{X}, \bar{Z}_s] \quad \text{mod } \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] &= \sum_{i=1}^n a_i [\bar{X}_i, \bar{Z}_s] = 0, & s = 1, \dots, l \end{aligned}$$

zu untersuchen. Aus den Strukturgleichungen von $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_q]$ folgt

$$[\bar{X}_i, \bar{Z}_s] \quad \text{mod } \mathcal{V}''[\mathcal{R}_q] = \sum_{k=1}^t C_{is}^k \bar{W}_k$$

mit Strukturkoeffizienten $C_{is}^k \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_q)$, wobei $\{\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_t\}$ eine Vervollständigung zu einer Basis von $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_q] = \mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] \oplus \langle \bar{W}_1, \dots, \bar{W}_t \rangle$ darstellt. Bezeichnet Ξ^k eine $n \times l$ -Matrix mit Einträgen $(\Xi^k)_{is} = C_{is}^k$ und $c = (c_1, \dots, c_l)$ bzw. $a = (a_1, \dots, a_n)$, dann gilt

$$c \in \bigcap_{k=1}^t \ker \Xi^k \quad \text{und} \quad a \in \bigcap_{k=1}^t \ker (\Xi^k)^T.$$

Falls der Durchschnitt der Kerne $\ker \Xi^k$ respektive $\ker (\Xi^k)^T$ trivial ist, dann ist das Symbol $\mathcal{N}_q = \text{Char}[\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q]]$ invariant unter inneren Symmetrien. In analoger Weise ist $\mathcal{N}_q^{(k)}$ invariant unter inneren Symmetrien, wenn $\mathcal{N}_q^{(k)} = \text{Char}[\mathcal{V}^{(k+1)}[\mathcal{R}_q]]$ gilt.

Beispiel 5.2.10. Wir betrachten die berühmte Korteweg-de-Vries-Gleichung

$$\mathcal{R}_3 : \left\{ u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \right.$$

für eine unbekannte Funktion $u(t, x)$. Sie beschreibt das Verhalten von Flachwasserwellen in engen Kanälen. Nach der höchsten Ableitung u_{xxx} aufgelöst, finden wir, dass die zugehörige Vesiot-Distribution holonom ist. In inneren Koordinaten $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_t, \bar{u}_x, \bar{u}_{tt}, \bar{u}_{tx}, \bar{u}_{xx}, \bar{u}_{ttt}, \bar{u}_{ttx}, \bar{u}_{txx})$ auf \mathcal{R}_3 gilt $\mathcal{V}'''[\mathcal{R}_3] = \langle \bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3, \bar{W}_1, \bar{W}_2, \bar{U} \rangle = T\mathcal{R}_3$ mit Vektorfeldern

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \partial_{\bar{t}} + \bar{u}_t \partial_{\bar{u}} + \bar{u}_{tt} \partial_{\bar{u}_t} + \bar{u}_{tx} \partial_{\bar{u}_x} + \bar{u}_{ttt} \partial_{\bar{u}_{tt}} + \bar{u}_{ttx} \partial_{\bar{u}_{tx}} + \bar{u}_{txx} \partial_{\bar{u}_{xx}}, \\ \bar{X}_2 &= \partial_{\bar{x}} + \bar{u}_x \partial_{\bar{u}} + \bar{u}_{tx} \partial_{\bar{u}_t} + \bar{u}_{xx} \partial_{\bar{u}_x} + \bar{u}_{ttx} \partial_{\bar{u}_{tt}} + \bar{u}_{txx} \partial_{\bar{u}_{tx}} + (6\bar{u}\bar{u}_x - \bar{u}_t) \partial_{\bar{u}_{xx}}, \\ \bar{Y}_1 &= \partial_{\bar{u}_{ttt}}, & \bar{Y}_2 &= \partial_{\bar{u}_{ttx}}, & \bar{Y}_3 &= \partial_{\bar{u}_{txx}}, \\ \bar{Z}_1 &= [\bar{Y}_1, \bar{X}_1] = [\bar{Y}_2, \bar{X}_2] = \partial_{\bar{u}_{tt}}, & \bar{W}_1 &= [\bar{Z}_1, \bar{X}_1] = [\bar{Z}_2, \bar{X}_2] = \partial_{\bar{u}_t}, \\ \bar{Z}_2 &= [\bar{Y}_2, \bar{X}_1] = [\bar{Y}_3, \bar{X}_2] = \partial_{\bar{u}_{tx}}, & \bar{W}_2 &= [\bar{Z}_2, \bar{X}_1] = [\bar{Z}_3, \bar{X}_2] = \partial_{\bar{u}_x}, \\ \bar{Z}_3 &= [\bar{Y}_3, \bar{X}_1] = \partial_{\bar{u}_{xx}}, & \bar{U} &= [\bar{W}_1, \bar{X}_1] = \partial_{\bar{u}}. \end{aligned}$$

Aus den Strukturgleichungen von $\mathcal{V}'''[\mathcal{R}_3]$

$$\begin{aligned} [\bar{X}_1, \bar{X}_2] &= (6\bar{u} \bar{u}_{tx} + 6\bar{u}_t \bar{u}_x - \bar{u}_{tt}) \bar{Z}_3, & [\bar{X}_2, \bar{W}_1] &= \bar{Z}_1, \\ [\bar{X}_2, \bar{W}_2] &= -6\bar{u} \bar{Z}_3 - \bar{U}, & [\bar{X}_2, \bar{U}] &= -6\bar{u}_x \bar{Z}_3 \end{aligned}$$

ergeben sich folgende invariante Distributionen:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}[\mathcal{R}_3] &= \mathcal{V}[\mathcal{R}_3] + V \hat{\pi}_2^3, & \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_3]] &= \{0\}, \\ \mathcal{V}'[\mathcal{R}_3] &= \mathcal{V}[\mathcal{R}_3] + V \hat{\pi}_1^3 = (T \hat{\pi}_2^3)^{-1} \left(\mathcal{V}[\mathcal{R}_2^{(1)}] \right), & \text{Char}[\mathcal{V}'[\mathcal{R}_3]] &= \mathcal{N}_3 = V \hat{\pi}_2^3, \\ \mathcal{V}''[\mathcal{R}_3] &= \mathcal{V}[\mathcal{R}_3] + V \hat{\pi}_0^3 = (T \hat{\pi}_1^3)^{-1} \left(\mathcal{V}[\mathcal{R}_1^{(2)}] \right), & \text{Char}[\mathcal{V}''[\mathcal{R}_3]] &= \mathcal{N}_3^{(1)} = V \hat{\pi}_1^3, \\ \mathcal{V}'''[\mathcal{R}_3] &= T\mathcal{R}_3, & \text{Char}[\mathcal{V}'''[\mathcal{R}_3]] &= T\mathcal{R}_3. \end{aligned}$$

Mit $\mathcal{R}_1^{(2)} = J_1\pi$ und $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_3] = (T\hat{\pi}_1^3)^{-1}(\mathcal{C}_1)$ folgt aus Korollar 3.3.4, dass jede innere Symmetrie $\phi \in \Gamma(\mathcal{R}_3, \mathcal{V}[\mathcal{R}_3])$ auf eine Kontakttransformation $\Phi_1 \in \Gamma(J_1\pi, \mathcal{C}_1)$ erster Ordnung lokal projizierbar ist und es gilt $j_2\Phi_1|_{\mathcal{R}_3} = \phi$. Insbesondere ist $j_2\Phi_1$ eine Lie-Kontaktsymmetrie von \mathcal{R}_3 . \triangleleft

Die nächste Proposition beschreibt allgemein, unter welchen Bedingungen innere Symmetrien lokal projizierbar sind. Wir sprechen ausdrücklich von der *lokalen* Projektion, um Annahmen über Definitionsbereiche zu vermeiden, vgl. Proposition 3.3.2.

Proposition 5.2.11. Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine reguläre Differentialgleichung und $\phi: \mathcal{R}_q \rightarrow \mathcal{R}_q$ eine innere Symmetrie von \mathcal{R}_q . Es gelten die folgenden Annahmen für ein $k \in \{1, \dots, q\}$:

- (i) $T\phi(V\hat{\pi}_{q-k}^q) = V\hat{\pi}_{q-k}^q$,
- (ii) $T\phi(\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q) = \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q$.

Dann existiert eine innere Symmetrie $\phi_{q-k}: \mathcal{R}_{q-k}^{(k)} \rightarrow \mathcal{R}_{q-k}^{(k)}$ mit $\phi_{q-k} \circ \hat{\pi}_{q-k}^q = \hat{\pi}_{q-k}^q \circ \phi$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_q & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{R}_q \\ \hat{\pi}_{q-k}^q \downarrow & & \downarrow \hat{\pi}_{q-k}^q \\ \mathcal{R}_{q-k}^{(k)} & \xrightarrow{\phi_{q-k}} & \mathcal{R}_{q-k}^{(k)} \end{array}$$

Beweis. Die erste Bedingung garantiert nach Proposition 3.3.2, dass ϕ lokal $\hat{\pi}_{q-k}^q$ -fasererhaltend ist. Es existiert folglich ein lokaler Diffeomorphismus $\phi_{q-k}: \mathcal{R}_{q-k}^{(k)} \rightarrow \mathcal{R}_{q-k}^{(k)}$ mit der Eigenschaft $\phi_{q-k} \circ \hat{\pi}_{q-k}^q = \hat{\pi}_{q-k}^q \circ \phi$. Wegen

$$\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q = (T\hat{\pi}_{q-k}^q)^{-1}(\mathcal{V}[\mathcal{R}_{q-k}^{(k)}])$$

ist die Urbilddistribution $(T\hat{\pi}_{q-k}^q)^{-1}(\mathcal{V}[\mathcal{R}_{q-k}^{(k)}])$ invariant unter $T\phi$. Nach Proposition 3.3.3 ist ϕ_{q-k} eine innere Symmetrie von $\mathcal{R}_{q-k}^{(k)}$, was zu zeigen war. \square

Definition 5.2.12. Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine reguläre Differentialgleichung der Ordnung $q \geq 1$ und $\phi: \mathcal{R}_q \rightarrow \mathcal{R}_q$ eine innere Symmetrie von \mathcal{R}_q . Die kleinste ganze Zahl $k \in \{0, \dots, q\}$, für die gilt $T\phi(V\hat{\pi}_k^q) = V\hat{\pi}_k^q$, heißt *Ordnung von ϕ* .

Jede innere Symmetrie $\phi: \mathcal{R}_q \rightarrow \mathcal{R}_q$ der Ordnung k ist über $q-k$ Ordnungen lokal projizierbar. Beispielsweise besitzt jede innere Symmetrie der planaren $U(1)$ -Yang-Mills-Gleichungen aus Beispiel 5.2.5 wegen $\text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]] = \mathcal{N}_2$ höchsten die Ordnung Eins.

Korollar 5.2.13. Es sei $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine reguläre Differentialgleichung der Ordnung $q \geq 2$ mit folgenden Eigenschaften für ein $k \in \{1, \dots, q-1\}$:

- (i) $V\hat{\pi}_{q-k}^q = \text{Char}[\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]]$,
- (ii) $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q = \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]$.

Dann ist jede innere Symmetrie von \mathcal{R}_q lokal projizierbar auf eine innere Symmetrie von $\mathcal{R}_{q-k}^{(k)}$.

²Im Fall $k = q$ gilt definitionsgemäß $V\hat{\pi}_q^q = \{0\}$.

Beweis. Beide Distributionen $\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]$ und $\text{Char}[\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]]$ sind nach Korollar 5.2.1 bzw. Korollar 5.2.7 invariant unter allen inneren Symmetrien von \mathcal{R}_q . Mit Proposition 5.2.11 folgt die Behauptung. Man beachte, dass die zweite Bedingung zwar $V\hat{\pi}_{q-k}^q \subseteq \text{Char}[\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]]$ aber nicht die umgekehrte Inklusion impliziert. Insbesondere ist $\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q] \subsetneq T\mathcal{R}_q$ nicht involutiv. \square

Im Sonderfall $k = q$ kann die erste Bedingung wegen $\mathcal{V}^{(q)}[\mathcal{R}_q] = \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}^q = T\mathcal{R}_q$ nicht erfüllt sein. Die angegebenen Kriterien sind zwar hinreichend aber nicht notwendig. In einigen Fällen ist es möglich die Invarianz der betreffenden Distributionen auf anderem Wege zu folgern, vgl. Proposition 3.2.11. Beispielsweise ist das Symbol \mathcal{N}_q dann invariant unter inneren Symmetrien, wenn $\mathcal{N}_q \subset \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ die *einzigste* involutive Subdistribution der Vessiot-Distribution ist mit Dimension $\dim \mathcal{N}_q$.

Es sei $\phi: \mathcal{R}_q \rightarrow \mathcal{R}_q$ eine beliebige innere Symmetrie der Ordnung $q-k$. Falls die betrachtete reguläre Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ lokal lösbar ist, dann lässt sich der aus Proposition 3.3.2 erhaltene Diffeomorphismus $\phi_{q-k}: \mathcal{R}_{q-k}^{(k)} \rightarrow \mathcal{R}_{q-k}^{(k)}$ entlang von Lösungen wieder prolongieren. Zunächst folgt aus der Invarianz des Vertikalbündels $V\hat{\pi}_{q-k}^q$ unter $T\phi$, wegen

$$\begin{aligned} T\phi(\mathcal{N}_q) &= T\phi(V\hat{\pi}_{q-1}^q \cap V\hat{\pi}_{q-k}^q) \subseteq T\phi(V\hat{\pi}_{q-k}^q) = V\hat{\pi}_{q-k}^q, \\ T\phi(\mathcal{N}_q) &= T\phi(V\hat{\pi}_{q-1}^q \cap \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]) \subseteq T\phi(\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]) = \mathcal{V}[\mathcal{R}_q], \end{aligned}$$

sofort die Invarianz des Symbols $T\phi(\mathcal{N}_q) \subseteq V\hat{\pi}_{q-k}^q \cap \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] = \mathcal{N}_q$ unter $T\phi$, vgl. Proposition 3.2.1(i). Dementsprechend ist $\phi(\text{im } j_q\sigma) = \text{im } j_q\bar{\sigma}$ stets $\hat{\pi}^q$ -transversal, wenn σ eine lokale Lösung von \mathcal{R}_q bezeichnet. Es gilt $\phi_{q-k}(\text{im } j_{q-k}\sigma) = \text{im } j_{q-k}\bar{\sigma}$ mit $\text{im } j_{q-k}\sigma \subseteq \mathcal{R}_{q-k}^{(k)}$ und wir setzen $j_k\phi_{q-k}(\text{im } j_q\sigma) := \text{im } j_q\bar{\sigma}$. Aus der Eindeutigkeit der Prolongation von Lösungen folgt $j_k\phi_{q-k} = \phi$. Natürlich ist diese Definition der Prolongation von ϕ_{q-k} nicht geeignet für konkrete Rechnungen, da die Lösungen von \mathcal{R}_q praktisch unbekannt sind. Stattdessen betrachten wir eine beliebige Fortsetzung von ϕ_{q-k} zu einer Abbildung $\Phi_{q-k}: J_{q-k}\pi \rightarrow J_{q-k}\pi$ auf dem umgebenden Jetbündel $J_{q-k}\pi$. Diese Transformation Φ_{q-k} ist in der Regel keine Kontakttransformation, auch kein (lokaler) Diffeomorphismus. Nichtsdestotrotz ist die zugehörige Kontaktmatrix auf $\mathcal{R}_{q-k}^{(k)} \subseteq J_{q-k}\pi$ invertierbar. Mit Hilfe der transversalen Kontaktbedingungen (4.5) können wir dann eine Abbildung $j_k\Phi_{q-k}: J_q\pi \rightarrow J_q\pi$ konstruieren mit der Eigenschaft $j_k\Phi_{q-k}|_{\mathcal{R}_q} = \phi$. Man beachte aber, dass die Prolongation $j_k\Phi_{q-k}$ im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist, siehe Bemerkung 4.1.6. Falls \mathcal{R}_q *nicht* lokal lösbar ist, dann gilt in dieser Situation weiterhin $j_k\Phi_{q-k}|_{\text{Sol}(\mathcal{R}_q)} = \phi|_{\text{Sol}(\mathcal{R}_q)}$. Damit haben wir schon ein Analogon zur lokalen Version des Theorems von Bäcklund 4.2.6 für innere Symmetrien bewiesen.

Theorem 5.2.14. *Es sei $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine reguläre lokal lösbare Differentialgleichung der Ordnung $q \geq 2$ mit folgenden Eigenschaften für ein $k \in \{1, \dots, q-1\}$:*

- (i) $V\hat{\pi}_{q-k}^q = \text{Char}[\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]]$,
- (ii) $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q = \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]$.

Dann ist jede innere Symmetrie $\phi \in \Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q])$ die k -te Prolongation einer geeigneten inneren Symmetrie $\phi_{q-k} \in \Gamma(\mathcal{R}_{q-k}^{(k)}, \mathcal{V}[\mathcal{R}_{q-k}^{(k)}])$.

Die Voraussetzung der lokalen Lösbarkeit von $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ garantiert, dass die innere Symmetrie ϕ durch Prolongation von ϕ_{q-k} über k Ordnungen *eindeutig* rekonstruierbar ist. Insbesondere ist $j_r\phi := j_{k+r}\phi_{q-k}$ eine innere Symmetrie von $\mathcal{R}_{q+r} \subset J_{q+r}\pi$.

Korollar 5.2.15. *Es sei $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine lokal lösbare Differentialgleichung der Ordnung $q \geq 2$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) $\pi_1^q(\mathcal{R}_q)$ ist offen in $J_1\pi$,
- (ii) $V\hat{\pi}_1^q = \text{Char}[\mathcal{V}^{(q-1)}[\mathcal{R}_q]]$,
- (iii) $(T\hat{\pi}_1^q)^{-1}(\mathcal{V}[\mathcal{R}_1^{(q-1)}]) = \mathcal{V}^{(q-1)}[\mathcal{R}_q]$.

Dann besitzt jede innere Symmetrie $\phi \in \Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q])$ eine eindeutige lokale Fortsetzung $\Phi \in \Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q)$ mit der Eigenschaft $\Phi|_{\mathcal{R}_q} = \phi$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Phi = j_{q-1}\phi_1 & & \\
 & \swarrow & \text{---} & \searrow & \\
 J_q\pi & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{R}_q & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{R}_q & \xrightarrow{\iota} & J_q\pi \\
 & \searrow & \downarrow \hat{\pi}_1^q & & \downarrow \hat{\pi}_1^q & \swarrow & \\
 & \pi_1^q & J_1\pi & \xrightarrow{\phi_1} & J_1\pi & \pi_1^q &
 \end{array}$$

Beweis. Die ersten zwei Bedingungen garantieren die Existenz eines lokalen Diffeomorphismus $\phi_1: J_1\pi \rightarrow J_1\pi$ mit der Eigenschaft $\phi_1 \circ \hat{\pi}_1^q = \hat{\pi}_1^q \circ \phi$, d.h. ϕ hat höchstens die Ordnung Eins. Die dritte Bedingung impliziert, dass die Abbildung ϕ_1 eine Kontakttransformation ist. Insbesondere ist $\Phi = j_{q-1}\phi_1$ eine Kontakttransformation der Ordnung q . Da $\mathcal{R}_q = \text{Sol}(\mathcal{R}_q)$ nach Voraussetzung lokal lösbar ist, ist Φ eine Lie-Kontaktsymmetrie von \mathcal{R}_q mit der Eigenschaft $\Phi|_{\mathcal{R}_q} = \phi$. Im Fall $m = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{X} > 1$ ist Φ nach dem Theorem von Bäcklund 4.2.6 eine Lie-Punktsymmetrie von \mathcal{R}_q . Falls $\mathcal{V}^{(q-1)}[\mathcal{R}_q]$ eine $\hat{\pi}_1^q$ -projizierbare Basis besitzt, dann ist die dritte Bedingung äquivalent zu $T\hat{\pi}_1^q(\mathcal{V}^{(q-1)}[\mathcal{R}_q]) = \mathcal{C}_1$. Mit anderen Worten ist $\kappa_\Gamma: \Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q) \rightarrow \Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q])$ ein lokaler Isomorphismus von Lie-Pseudogruppen. Ist die erste Bedingung verletzt, dann besitzt eine innere Symmetrie ϕ der Ordnung Eins dann eine lokale Fortsetzung zu einer Kontakttransformation Φ mit $\Phi|_{\mathcal{R}_q} = \phi$, wenn $m = 1$ gilt. \square

Nicht jede innere Symmetrie erster Ordnung ist eine Lie-Kontaktsymmetrie. Ein einfaches Gegenbeispiel ist die folgende lineare partielle Differentialgleichung

$$\mathcal{R}_1: \begin{cases} u_x = 0, \\ v_x = 0 \end{cases}$$

für zwei unbekannte Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$. Das Theorem von Bäcklund 4.2.6 besagt, dass diese Differentialgleichung ausschließlich Lie-Punktsymmetrien besitzt. In inneren Koordinaten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{u}_y, \bar{v}_y)$ auf \mathcal{R}_1 bestätigt man leicht, dass die Transformation $\phi: \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_1$ mit

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{u}_y, \bar{v}_y) = (\bar{x} + \bar{u}_y + \bar{v}_y, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{u}_y, \bar{v}_y)$$

eine genuine innere Symmetrie von \mathcal{R}_1 ist.

Beispiel 5.2.16. Wir betrachten erneut die in Beispiel 2.5.3 beschriebene lokal lösbare Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine unbekannte Funktion $u(x, y)$:

$$\mathcal{R}_2: \begin{cases} u_{xx} = \alpha u, \\ u_{yy} = \beta u. \end{cases}$$

Ihre Vessiot-Distribution ist holonom und es gilt $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2] = \langle \bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{W} \rangle = T\mathcal{R}_2$ mit

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \partial_x + \bar{u}_x \partial_u + \alpha \bar{u} \partial_{\bar{u}_x} + \bar{u}_{xy} \partial_{\bar{u}_y} & \bar{Z}_1 &= [\bar{Y}, \bar{X}_2] = \partial_{\bar{u}_x}, \\ \bar{X}_2 &= \partial_y + \bar{u}_y \partial_u + \bar{u}_{xy} \partial_{\bar{u}_x} + \beta \bar{u} \partial_{\bar{u}_y}, & \bar{Z}_2 &= [\bar{Y}, \bar{X}_1] = \partial_{\bar{u}_y}, \\ \bar{Y} &= \partial_{\bar{u}_{xy}}, & \bar{W} &= [\bar{Z}_1, \bar{X}_1] = \partial_{\bar{u}}. \end{aligned}$$

Anhand der zugehörigen Kommutatoren-Tabelle von $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2]$

$[\cdot, \cdot]$	\bar{X}_1	\bar{X}_2	\bar{Y}	\bar{Z}_1	\bar{Z}_2	\bar{W}
\bar{X}_1	0	$\beta \bar{u}_x \bar{Z}_2 - \alpha \bar{u}_y \bar{Z}_1$	$-\bar{Z}_2$	$-\bar{W}$	0	$-\alpha \bar{Z}_1$
\bar{X}_2	$\alpha \bar{u}_y \bar{Z}_1 - \bar{u}_x \bar{Z}_2$	0	$-\bar{Z}_1$	0	$-\bar{W}$	$-\beta \bar{Z}_2$
\bar{Y}	\bar{Z}_2	\bar{Z}_1	0	0	0	0
\bar{Z}_1	\bar{W}	0	0	0	0	0
\bar{Z}_2	0	\bar{W}	0	0	0	0
\bar{W}	$\alpha \bar{Z}_1$	$\beta \bar{Z}_2$	0	0	0	0

bestätigt man leicht die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'[\mathcal{R}_2] &= \langle \bar{X}_1 - \alpha \bar{u} \bar{Z}_1 - \bar{u}_{xy} \bar{Z}_2, \bar{X}_2 - \bar{u}_{xy} \bar{Z}_1 - \beta \bar{u} \bar{Z}_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Y} \rangle \\ &= \langle \partial_x + \bar{u}_x \partial_u, \partial_y + \bar{u}_y \partial_u, \partial_{\bar{u}_x}, \partial_{\bar{u}_y}, \partial_{\bar{u}_{xy}} \rangle, \\ \text{Char}[\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]] &= \mathcal{N}_2 = \langle \partial_{\bar{u}_{xy}} \rangle. \end{aligned}$$

Bezeichnen (x, y, u, u_x, u_y) die inneren Koordinaten auf $\mathcal{R}_1^{(1)} = \pi_1^2(\mathcal{R}_2) = J_1\pi$, so erhalten wir

$$T\hat{\pi}_1^2(\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]) = \langle \partial_x + u_x \partial_u, \partial_y + u_y \partial_u, \partial_{u_x}, \partial_{u_y} \rangle = \mathcal{C}_1.$$

Folglich lässt sich jede innere Symmetrie von \mathcal{R}_2 zu einer Lie-Kontaktsymmetrie fortsetzen. \triangleleft

Es sei $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine (reguläre) lokal lösbare Differentialgleichung der Ordnung $q \geq 1$ mit der Eigenschaft $\pi_0^q(\mathcal{R}_q) = \mathcal{E}$. Dann besitzt jede innere Symmetrie $\phi: \mathcal{R}_q \rightarrow \mathcal{R}_q$ nullter Ordnung eine *eindeutige* lokale Fortsetzung zu einer Lie-Punktsymmetrie $\Phi = j_q\phi_0$ von \mathcal{R}_q .

$$\begin{array}{ccccc} & & \Phi = j_q\phi_0 & & \\ & & \curvearrowright & & \\ J_q\pi & \xleftarrow{\iota} & \mathcal{R}_q & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{R}_q & \xrightarrow{\iota} & J_q\pi \\ & \searrow \pi_0^q & \downarrow \hat{\pi}_0^q & & \downarrow \hat{\pi}_0^q & \swarrow \pi_0^q & \\ & & \mathcal{E} & \xrightarrow{\phi_0} & \mathcal{E} & & \end{array}$$

Ist $\pi_0^q(\mathcal{R}_q) \subset \mathcal{E}$ nicht offen in \mathcal{E} , so ist die Fortsetzung Φ nicht eindeutig bestimmt.

Beispiel 5.2.17. Es sei $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine lokal lösbare *partielle* Differentialgleichung der Ordnung $q \geq 2$ mit lokaler Darstellung in Cauchy-Kovalevskaya-Form

$$\mathcal{R}_q : \left\{ u_\mu^\alpha = \phi_\mu^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q-1)}, \hat{\mathbf{u}}_{(q)}), \quad (\alpha, \mu) \in \mathcal{B}. \right.$$

Hierbei gilt $\mathcal{B} = \{(\alpha, \mu) \mid |\mu| = \mu_1 = q \text{ und } \alpha = 1, \dots, m\}$ mit $|\mathcal{B}| = m$. Es liegt nahe $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}^{(q-1)}, \bar{\hat{\mathbf{u}}}_{(q)})$ als innere Koordinaten auf \mathcal{R}_q zu verwenden. In Beispiel 5.2.2 haben wir eine Basis der Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] = \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}_q = \langle \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n \rangle \oplus \langle \{\bar{Y}_\beta^\nu \mid (\beta, \nu) \notin \mathcal{B}, |\nu| = q\} \rangle$ angegeben. Als Nächstes berechnen wir $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q]$. Es genügt die Lie-Klammer

$$[\bar{Y}_\beta^{\nu+1_i}, \bar{X}_i] = \partial_{\bar{u}_\beta^\nu}, \quad (\beta, \nu + 1_i) \notin \mathcal{B}, |\nu| = q - 1$$

für $i \geq 2$ zu betrachten. Da zu jedem Multiindex $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ der Länge $|\nu| = q - 1$ das Paar $(\beta, \nu + 1_2)$ nicht in \mathcal{B} liegt, finden wir $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] = \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] \oplus \langle \{\partial_{u_\nu}^\beta \mid |\nu| = q - 1\} \rangle = \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-2}^q$. Die Berechnung der Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distribution $\text{Char}[\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q]]$ vereinfacht sich enorm, wenn wir für $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] = \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}_q^{(1)} = \mathcal{H} \oplus V\hat{\pi}_{q-2}^q$ ein anderes $\hat{\pi}^q$ -transversales Komplement $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{V}'[\mathcal{R}_q]$ wählen, das durch die Vektorfelder

$$\bar{\mathcal{C}}_i^{(q-1)} = \bar{X}_i - \sum_{(\alpha, \mu+1_i) \in \mathcal{B}} \phi_{\mu+1_i}^\alpha(\bar{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}^{(q-1)}}, \overline{\hat{\mathbf{u}}^{(q)}}) \partial_{u_\mu^\alpha} - \sum_{\substack{|\mu|=q-1 \\ (\alpha, \mu+1_i) \notin \mathcal{B}}} \overline{u_{\mu+1_i}^\alpha} \partial_{u_\mu^\alpha}, \quad 1 \leq i \leq n$$

aufgespannt wird. Wir machen dann den üblichen Ansatz

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{\mathcal{C}}_i^{(q-1)} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q-1} b_\nu^\beta \partial_{u_\nu^\beta} + \sum_{\substack{|\nu|=q \\ (\beta, \nu) \notin \mathcal{B}}} c_\nu^\beta \bar{Y}_\nu^\beta$$

für eine Cauchy-Cartan-Charakteristik $\bar{X} \in \text{Char}[\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q]]$. Aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{\mathcal{C}}_s^{(q-1)}] \bmod \mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] &= \sum_{\beta=1}^m \sum_{|\nu|=q-2} b_{\nu+1_s}^\beta \partial_{u_\nu^\beta} = 0, \quad s = 1, \dots, n, \\ [\partial_{u_\tau^\gamma}, \bar{X}] \bmod \mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] &= \sum_{\substack{i=1 \\ \tau_i > 0}}^n a_i \partial_{u_{\tau-1_i}^\gamma} = 0, \quad \gamma = 1, \dots, m, \quad |\tau| = q - 1 \end{aligned}$$

folgt sofort $b_\nu^\beta = 0 = a_i$ und somit $\mathcal{N}_q = V\hat{\pi}_{q-1}^q = \text{Char}[\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q]]$. Wegen $\pi_{q-1}^q(\mathcal{R}_q) = J_{q-1}\pi$ und $T\hat{\pi}_{q-1}^q(\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q]) = \mathcal{C}_{q-1}$ besagt das Theorem 5.2.14, dass jede innere Symmetrie von \mathcal{R}_q in Wirklichkeit von der ersten Prolongation einer Kontakttransformation auf $J_{q-1}\pi$ herrührt. \triangleleft

Mit der gleichen Überlegung folgt allgemein, dass jede innere Symmetrie einer lokal lösbaren Differentialgleichung \mathcal{R}_q der Ordnung $q \geq 2$ mit den Eigenschaften $\pi_{q-1}^q(\mathcal{R}_q) = J_{q-1}\pi$ und

$$\dim \mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] = \dim \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + \dim V\pi_{q-2}^{q-1} = \dim \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + m \binom{n+q-2}{q-1}$$

die erste Prolongation einer Kontakttransformation auf $J_{q-1}\pi$ ist. Aus der Maximalität der Dimension von $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q]$ erhalten wir sofort $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] = (T\hat{\pi}_{q-1}^q)^{-1}(\mathcal{C}_{q-1})$. Wegen $\pi_{q-1}^q(\mathcal{R}_q) = J_{q-1}\pi$ gilt $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q] = \langle \bar{\mathcal{C}}_1^{(q-1)}, \dots, \bar{\mathcal{C}}_n^{(q-1)} \rangle \oplus V\hat{\pi}_{q-2}^q$ und somit auch $\mathcal{N}_q = \text{Char}[\mathcal{V}'[\mathcal{R}_q]]$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \Phi = j_1 \phi_{q-1} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ J_q \pi & \xleftarrow{\iota} & \mathcal{R}_q & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{R}_q & \xrightarrow{\iota} & J_q \pi \\ & \searrow \pi_{q-1}^q & \downarrow \hat{\pi}_{q-1}^q & & \downarrow \hat{\pi}_{q-1}^q & \swarrow \pi_{q-1}^q & \\ & & J_{q-1} \pi & \xrightarrow{\phi_{q-1}} & J_{q-1} \pi & & \end{array}$$

5.3 Infinitesimale innere Symmetrien

In diesem Abschnitt untersuchen wir lokale Lie-Untergruppen von $\Gamma(\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q])$. Solche algebraischen Unterstrukturen lassen sich in Analogie zu infinitesimalen Lie-Kontaktsymmetrien mittels Vektorfeldern beschreiben, weshalb sie deutlich einfacher zu berechnen sind.

Definition 5.3.1. Es seien $(\mathcal{R}_q, \hat{\pi}^q, \mathcal{X})$ eine gefaserte Mannigfaltigkeit und $\iota: \mathcal{R}_q \hookrightarrow J_q\pi$ eine Einbettung mit der Eigenschaft $\hat{\pi}^q = \pi^q \circ \iota$. Ein lokales Vektorfeld $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_q)$ heißt *infinitesimale innere Symmetrie von \mathcal{R}_q* , wenn der zugehörige Fluss von \bar{X} eine einparametrische lokale Lie-Gruppe von inneren Symmetrien von \mathcal{R}_q bildet.

Bei dieser Definition ist es grundsätzlich nicht ausgeschlossen, dass die Vessiot-Distribution von \mathcal{R}_q singularär ist, vgl. Beispiel 5.1.2. Um nachzuweisen, dass ein Vektorfeld $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_q)$ tatsächlich eine infinitesimale innere Symmetrie darstellt, ist es in solchen Fällen in der Regel erforderlich, zuerst den zugehörigen Fluss von \bar{X} zu berechnen. Falls aber die Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] = (\iota^*\mathcal{C}_q^0)^0$ regulär ist, so liefert Proposition 3.4.2 ein effektiv verifizierbares Kriterium für infinitesimale innere Symmetrien.

Korollar 5.3.2. Ein lokales Vektorfeld $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_q)$ ist genau dann eine infinitesimale innere Symmetrie von \mathcal{R}_q , wenn gilt $\mathcal{L}_{\bar{X}}\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] = [\bar{X}, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]] \subseteq \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ oder äquivalent $\mathcal{L}_{\bar{X}}\iota^*\mathcal{C}_q^0 \subseteq \iota^*\mathcal{C}_q^0$.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Proposition 3.4.2 mit $\mathcal{M} := \mathcal{R}_q$ und $\mathcal{D} := \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$. \square

Jede infinitesimale innere Symmetrie $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_q)$ definiert vermöge des Pushforwards ein Vektorfeld $\iota_*\bar{X}$ auf $\iota(\mathcal{R}_q) \subseteq J_q\pi$, das zu einem lokalen Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(J_q\pi)$ fortgesetzt werden kann. Umgekehrt definiert ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(J_q\pi)$ mit der Eigenschaft $X|_{\iota(\mathcal{R}_q)} \in \mathfrak{X}(\iota(\mathcal{R}_q))$ genau dann eine infinitesimale innere Symmetrie $\bar{X} = \iota^*X|_{\iota(\mathcal{R}_q)} \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_q)$, wenn geeignete lokale Kontaktvektorfelder $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(J_q\pi)$ mit $T\iota(\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]) = \langle X_i|_{\iota(\mathcal{R}_q)}, Y_\ell|_{\iota(\mathcal{R}_q)} \rangle$ existieren, sodass die Lie-Klammern $[X, X_i]|_{\iota(\mathcal{R}_q)}$ und $[X, Y_\ell]|_{\iota(\mathcal{R}_q)}$ in $T\iota(\mathcal{V}[\mathcal{R}_q])$ liegen. Wir nehmen im Folgenden an, dass die totale Mannigfaltigkeit \mathcal{R}_q bereits eine reguläre Untermannigfaltigkeit des Jetbündels $J_q\pi$ ist, d.h. $\mathcal{R}_q \subseteq J_q\pi$. Im Spezialfall $\mathcal{R}_q = J_q\pi$ ist $\bar{X} = X$ eine infinitesimale Kontakttransformation.

Die Menge der infinitesimalen inneren Symmetrien von $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$, in Zeichen³

$$\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]] := \left\{ \bar{X} \in \Gamma_{\bar{U}}(\tau_{\mathcal{R}_q}) \mid [\bar{X}, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]] \subseteq \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] \right\},$$

mit festem Definitionsbereich $\bar{U} = U \cap \mathcal{R}_q \subseteq \mathcal{R}_q$ bildet nach Proposition 3.2.5 eine reelle Lie-Algebra. Wir beschreiben die Konstruktion der Lie-Algebra $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ in inneren Koordinaten $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})$ auf \mathcal{R}_q : Hierzu nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die s -fach abgeleitete Vessiot-Distribution $\mathcal{V}^{(s)}[\mathcal{R}_q] \subseteq T\mathcal{R}_q$ regulär und involutiv ist. Weiter sei $\{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, \bar{Y}_1^0, \dots, \bar{Y}_{r_0}^0, \dots, \bar{Y}_1^s, \dots, \bar{Y}_{r_s}^s\}$ eine Basis von $\mathcal{V}^{(s)}[\mathcal{R}_q]$ mit der Eigenschaft

$$\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q] = \mathcal{V}^{(k-1)}[\mathcal{R}_q] \oplus \langle \bar{Y}_1^k, \dots, \bar{Y}_{r_k}^k \rangle, \quad 0 < k \leq s.$$

Falls $\mathcal{V}^{(s)}[\mathcal{R}_q] \subsetneq T\mathcal{R}_q$ nicht holonom ist, so wählen wir geeignete (linear unabhängige) Vektorfelder $\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_f \in T\mathcal{R}_q \setminus \mathcal{V}^{(s)}[\mathcal{R}_q]$ derart, dass $\mathcal{V}^{(s)}[\mathcal{R}_q] \oplus \langle \bar{N}_1, \dots, \bar{N}_f \rangle = T\mathcal{R}_q$ gilt. Mit anderen Worten ist $\{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, \bar{Y}_1^0, \dots, \bar{Y}_{r_0}^0, \dots, \bar{Y}_1^s, \dots, \bar{Y}_{r_s}^s, \bar{N}_1, \dots, \bar{N}_f\}$ ein Rahmen des Tangentialbündels $T\mathcal{R}_q$. Jedes Vektorfeld $\bar{X} \in \Gamma_{\bar{U}}(\tau_{\mathcal{R}_q})$ kann dann bezüglich dieser Basis in der Form

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \xi^i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}) \bar{X}_i + \sum_{i=0}^s \sum_{k=1}^{r_s} \eta_i^k(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}) \bar{Y}_k^i + \sum_{i=1}^f \varphi^i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}) \bar{N}_i \quad (5.2)$$

³Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ anstelle von $\text{Sym}[U \cap \mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$.

dargestellt werden. Aus den charakterisierenden Bedingungen $[\bar{X}, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]] \subseteq \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$, ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
[\bar{X}, \bar{X}_j] \bmod \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] &= \sum_{i=1}^n \xi^i [\bar{X}_i, \bar{X}_j] + \sum_{k=1}^{r_0} \eta_i^0 [\bar{Y}_k^0, \bar{X}_j] \\
&\quad + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{r_s} \left(\eta_i^k [\bar{Y}_k^i, \bar{X}_j] - \bar{X}_j (\eta_i^k) \bar{Y}_k^i \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^f \left(\varphi^i [\bar{N}_i, \bar{X}_j] - \bar{X}_j (\varphi^i) \bar{N}_i \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
[\bar{X}, \bar{Y}_j^0] \bmod \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] &= \sum_{i=1}^n \xi^i [\bar{X}_i, \bar{Y}_j^0] + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{r_s} \left(\eta_i^k [\bar{Y}_k^i, \bar{Y}_j^0] - \bar{Y}_j^0 (\eta_i^k) \bar{Y}_k^i \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^f \left(\varphi^i [\bar{N}_i, \bar{Y}_j^0] - \bar{Y}_j^0 (\varphi^i) \bar{N}_i \right) = 0, \quad j = 1, \dots, r_0,
\end{aligned}$$

erhalten wir mit Hilfe der Strukturgleichungen von $\mathcal{V}^{(s)}[\mathcal{R}_q] \oplus \langle \bar{N}_1, \dots, \bar{N}_f \rangle$ ein im Allgemeinen überbestimmtes System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für die Koeffizienten $\xi^i, \eta_i^k, \varphi^i \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_q)$ des Ansatzes für \bar{X} , das ebenfalls *bestimmendes System* genannt wird. Diese Koeffizienten lassen sich nun durch das Lösen von bestimmenden Gleichungen gewinnen. Ein wesentlicher Vorteil der Darstellung (5.2), gegenüber der Zerlegung von \bar{X} bezüglich der Standardbasis von $T\mathcal{R}_q$, liegt darin, dass das zugehörige bestimmende System direkt aus den Strukturgleichungen von $\mathcal{V}^{(s)}[\mathcal{R}_q] \oplus \langle \bar{N}_1, \dots, \bar{N}_f \rangle$ aufgestellt werden kann. Ist die Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ involutiv, so gilt stets $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] \subseteq \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$.

Beispiel 5.3.3. Wir setzen das Beispiel 5.2.9 fort. Es gilt $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2] \oplus \langle \bar{N} \rangle = T\mathcal{R}_2$. Dementsprechend ist $\{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{W}, \bar{N}\}$ ein Rahmen von $T\mathcal{R}_2$. Jedes Vektorfeld $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_2)$ besitzt eine eindeutige Darstellung bezüglich dieser Basis in der Form

$$\bar{X} = \xi \bar{X}_1 + \tau \bar{X}_2 + \eta \bar{Y} + \rho \bar{Z} + \sigma \bar{N} + \varphi \bar{W}$$

mit Koeffizientenfunktionen $\xi, \tau, \eta, \rho, \sigma, \varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_2)$. Mit Hilfe der Strukturgleichungen von $T\mathcal{R}_2$

$[\cdot, \cdot]$	\bar{X}_1	\bar{X}_2	\bar{Y}	\bar{Z}	\bar{N}	\bar{W}
\bar{X}_1	0	0	\bar{Z}	$-\bar{W}$	$-\bar{W}$	0
\bar{X}_2	0	0	$-\bar{Z}$	\bar{W}	$-\bar{W}$	0
\bar{Y}	$-\bar{Z}$	\bar{Z}	0	0	0	0
\bar{Z}	\bar{W}	$-\bar{W}$	0	0	0	0
\bar{N}	\bar{W}	\bar{W}	0	0	0	0
\bar{W}	0	0	0	0	0	0

stellen wir fest, dass das Vektorfeld \bar{X} genau dann eine infinitesimale innere Symmetrie von \mathcal{R}_2 ist, wenn die folgenden Lie-Klammern modulo $\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]$ verschwinden:

$$\begin{aligned}
[\bar{X}, \bar{X}_1] \bmod \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] &= -(\eta + \bar{X}_1(\rho))\bar{Z} - \bar{X}_1(\sigma)\bar{N} + (\sigma + \rho - \bar{X}_1(\varphi))\bar{W} = 0, \\
[\bar{X}, \bar{X}_2] \bmod \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] &= (\eta - \bar{X}_2(\rho))\bar{Z} - \bar{X}_2(\sigma)\bar{N} + (\sigma - \rho - \bar{X}_2(\varphi))\bar{W} = 0, \\
[\bar{X}, \bar{Y}] \bmod \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] &= (\xi - \tau - \bar{Y}(\rho))\bar{Z} - \bar{Y}(\sigma)\bar{N} - \bar{Y}(\varphi)\bar{W} = 0.
\end{aligned}$$

Das zugehörige bestimmende System lautet, ausgeschrieben:

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} \eta + \rho_x + u_x \rho_u - u_{xy}(\rho_{u_x} - \rho_{u_y}) = 0, & \sigma - \rho - \varphi_y - u_y \varphi_u - u_{xy}(\varphi_{u_x} - \varphi_{u_y}) = 0, \\ \eta - \rho_y - u_y \rho_u - u_{xy}(\rho_{u_x} - \rho_{u_y}) = 0, & \sigma + \rho - \varphi_x - u_x \varphi_u + u_{xy}(\varphi_{u_x} - \varphi_{u_y}) = 0, \\ \sigma_x + u_x \sigma_u - u_{xy}(\sigma_{u_x} - \sigma_{u_y}) = 0, & \sigma_y + u_y \sigma_u + u_{xy}(\sigma_{u_x} - \sigma_{u_y}) = 0, \\ \xi - \tau - \rho_{u_{xy}} = 0, & \sigma_{u_{xy}} = 0, \\ \varphi_{u_{xy}} = 0, & \end{cases}$$

wobei der besseren Lesbarkeit halber $(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy})$ statt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_{xy})$ die inneren Koordinaten auf \mathcal{R}_2 bezeichnen. Die Koeffizienten η, ρ, σ und $\xi - \tau$ sind wegen

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} \bar{X}_2 (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)(\varphi), & \sigma &= \frac{1}{2} (\bar{X}_1 + \bar{X}_2)(\varphi), \\ \rho &= \frac{1}{2} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)(\varphi), & \frac{\xi - \tau}{2} &= \frac{1}{4} Y (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)(\varphi) \end{aligned} \quad (5.3)$$

eindeutig durch $\varphi = \varphi(x, y, u, u_x, u_y)$ bestimmt. Man beachte, dass die Gestalt der so erhaltenen bestimmenden Gleichungen stark von der Wahl der Basis von $T\mathcal{R}_2$ abhängt. \triangleleft

Wie E. Fackerell in [12] treffend bemerkt, hat der obige Ansatz (5.2) für \bar{X} eine „Schwachstelle“ darin, dass über die Abhängigkeit der Koeffizienten von Koordinaten praktisch nichts bekannt ist, weshalb das Lösen des bestimmenden Systems deutlich aufwendiger ist. Die folgenden zwei Korollare produzieren zusätzliche Integrabilitätsbedingungen an die Koeffizienten von \bar{X} , die bei konkreten Rechnungen das Lösen des bestimmenden Systems enorm erleichtern können.

Korollar 5.3.4. *Es seien $\bar{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ eine infinitesimale innere Symmetrie von \mathcal{R}_q und $\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]$ die k -fach abgeleitete Vessiot-Distribution. Dann gilt*

$$\mathcal{L}_{\bar{X}} \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q] = [\bar{X}, \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]] \subseteq \mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q].$$

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Korollar 3.4.3 mit $\mathcal{M} := \mathcal{R}_q$ und $\mathcal{D} := \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$. \square

Korollar 5.3.5. *Es seien $\bar{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ eine infinitesimale innere Symmetrie von \mathcal{R}_q und $\text{Char}[\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]]$ die Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distribution von $\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}_{\bar{X}} \text{Char}[\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]] = [\bar{X}, \text{Char}[\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]]] \subseteq \text{Char}[\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]].$$

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Korollar 3.4.3 mit $\mathcal{M} := \mathcal{R}_q$ und $\mathcal{D} := \text{Char}[\mathcal{V}^{(k)}[\mathcal{R}_q]]$. \square

Beispiel 5.3.6 (Fortsetzung von Beispiel 5.3.3). Aus der Invarianz der abgeleiteten Vessiot-Distributionen $\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2] = \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] \oplus \langle \bar{Z} \rangle$ und $\mathcal{V}''[\mathcal{R}_2] = \mathcal{V}'[\mathcal{R}_2] \oplus \langle \bar{W} \rangle$ ergeben sich folgende zusätzliche Integrabilitätsbedingungen an die Koeffizienten $\xi, \tau, \sigma, \varphi$ von \bar{X} :

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{Z}] \text{ mod } \mathcal{V}'[\mathcal{R}_2] &= -\bar{Z}(\sigma)\bar{N} + (\tau - \xi - \bar{Z}(\varphi))\bar{W} = 0, \\ [\bar{X}, \bar{W}] \text{ mod } \mathcal{V}''[\mathcal{R}_2] &= -\bar{W}(\sigma)\bar{N} = 0. \end{aligned}$$

Diese lauten, ausgeschrieben

$$\sigma_{u_x} - \sigma_{u_y} = 0, \quad \tau - \xi - \varphi_{u_x} + \varphi_{u_y} = 0, \quad \sigma_u = 0. \quad (5.4)$$

Ohne das bestimmende System \mathcal{D}_1 vollständig zu lösen, können wir direkt $\sigma = \sigma(u_x + u_y)$ schlussfolgern. Die Invarianz der Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distributionen $\text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]] = \langle \bar{X}_1 + \bar{X}_2 \rangle$ und $\text{Char}[\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]] = \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]] \oplus \mathcal{N}_2 = \langle \bar{X}_1 + \bar{X}_2, \bar{Y} \rangle$ liefert zusätzlich

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{X}_1 + \bar{X}_2] \bmod \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]] &= (\bar{X}_1(\xi) + \bar{X}_2(\xi) - \bar{X}_1(\tau) - \bar{X}_2(\tau))\bar{X}_2 \\ &\quad - (\bar{X}_1(\eta) + \bar{X}_2(\eta))\bar{Y} - (\bar{X}_1(\rho) + \bar{X}_2(\rho))\bar{Z} \\ &\quad - (\bar{X}_1(\sigma) + \bar{X}_2(\sigma))\bar{N} - (\bar{X}_1(\varphi) + \bar{X}_2(\varphi) - 2\sigma)\bar{W} = 0, \\ [\bar{X}, \bar{Y}] \bmod \text{Char}[\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]] &= (\bar{Y}(\xi) - \bar{Y}(\tau))\bar{X}_2 + (\xi - \tau - \bar{Y}(\rho))\bar{Z} - \bar{Y}(\sigma)\bar{N} - \bar{Y}(\varphi)\bar{W} = 0. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir neun weitere Integrabilitätsbedingungen, von denen drei nichttrivial sind:

$$\begin{aligned} \xi_x + \xi_y - \tau_x - \tau_y + (u_x + u_y)(\xi_u - \tau_u) &= 0, \\ \eta_x + \eta_y + (u_x + u_y)\eta_u &= 0, \\ \xi_{u_{xy}} - \tau_{u_{xy}} &= 0. \end{aligned}$$

Anhand der Zerlegung $\xi\bar{X}_1 + \tau\bar{X}_2 = (\xi + \tau)/2(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) + (\xi - \tau)/2(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ sehen wir, dass die Summe $(\xi + \tau)/2 =: h$ eine beliebige Funktion in $(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy})$ ist, da das Vektorfeld $h \cdot (\bar{X}_1 + \bar{X}_2) \in \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]] \subseteq \text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]]$ stets eine infinitesimale innere Symmetrie darstellt. Nach Lösen der bestimmenden Gleichungen \mathcal{D}_1 finden wir, dass die Lie-Algebra $\text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]]$ durch drei Funktionen $h = h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$, $f = f(z)$ und $g = g(z_1, z_2, z_3, z_4)$ parametrisiert werden kann und es gilt

$$\begin{aligned} \xi(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}) &= h(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial z_3} - \frac{\partial g}{\partial z_2} \right), \\ \tau(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}) &= h(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial z_3} - \frac{\partial g}{\partial z_2} \right), \\ \varphi(x, y, u, u_x, u_y) &= 2xf(u_x + u_y) + g(y - x, u_x, u_y, u - x(u_x + u_y)). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten η, ρ und σ werden nach den Formeln in (5.3) berechnet. \triangleleft

Für reguläre lokal lösbare Differentialgleichungen $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ ist jede infinitesimale innere Symmetrie \bar{X} durch ihren $\hat{\pi}_0^q$ -Anteil $T\hat{\pi}_0^q \circ \bar{X}$ eindeutig bestimmt. Es existiert keine nichttriviale infinitesimale innere Symmetrie \bar{X} mit verschwindendem $\hat{\pi}_0^q$ -Anteil. Aus diesem Grund ist auch jede Cauchy-Cartan-Charakteristik $\bar{X} \in \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]] \subseteq \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$ transversal zur Projektion $\hat{\pi}^q$. Bei partiellen Differentialgleichungen enthält jede Äquivalenzklasse $\rho = [\sigma]_p^{(q)} \in \mathcal{R}_q$ in der Regel unendlich viele Lösungen. Falls der Durchschnitt dieser Lösungen

$$\rho \in \bigcap_{\sigma \in [\sigma]_p^{(q)} \cap \Theta} \text{im } j_q \sigma$$

nur den Punkt ρ enthält, so verschwindet jede Cauchy-Cartan-Charakteristik \bar{X} in ρ .

Zur Beschreibung der (infinitesimalen) Shuffling-Symmetrien von \mathcal{R}_q betrachten wir die zugehörige \mathbb{R} -Vektorraum-Projektion $P_{\text{Char}}: \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]] \rightarrow \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ und finden

$$\text{Shuf}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]] \cong \left\{ \bar{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]] \mid P_{\text{Char}}(\bar{X}) = 0 \right\} \subseteq \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]].$$

Auf diese Weise können wir $\text{Shuf}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ als eine Lie-Unteralgebra von $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ ansehen. Dann gilt $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]] = \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]] \oplus \text{Shuf}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$. Demnach lässt sich jede infinitesimale innere Symmetrie \bar{X} in der Form $\bar{X} = \bar{X}_{\text{Char}} + \bar{X}_{\text{Shuf}}$ additiv zerlegen. Die Menge der *vertikalen* infinitesimalen inneren Symmetrien, in Zeichen

$$\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{N}_q] := \left\{ \bar{X} \in \Gamma_{\bar{U}}(\tau_{\mathcal{R}_q}|_{V\hat{\pi}^q}) \mid [\bar{X}, \mathcal{N}_q] \subseteq \mathcal{N}_q \right\} \subseteq \text{Shuf}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]],$$

ist wiederum eine Lie-Unteralgebra der Shuffling-Symmetrien. Ist die Vessiot-Distribution involutiv, dann gilt $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{N}_q] = \text{Shuf}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$.

Es seien allgemein $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k \subseteq T\mathcal{R}_q$ beliebige Subdistributen, dann ist die Menge

$$\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]; \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k] := \left\{ \bar{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]] \mid [\bar{X}, \mathcal{U}_i] \subseteq \mathcal{U}_i \text{ für } i = 1, \dots, k \right\}$$

eine Lie-Unteralgebra von $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$. Sind $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$ invariant, dann gilt nach Korollar 3.4.3 stets $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]; \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k] = \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$. Als Spezialfall erhalten wir hieraus laut Proposition 4.4.17 die infinitesimalen Lie-Kontaktsymmetrien

$$\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]; V\hat{\pi}_1^q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_0^q] \cong \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q] / \sim_{\mathcal{R}_q}$$

im Fall $m = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{X} = 1$ und die infinitesimalen Lie-Punktsymmetrien

$$\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]; V\hat{\pi}_0^q] \cong \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q; V\pi_0^q] / \sim_{\mathcal{R}_q}.$$

Im Speziellen ist der Lie-Algebren-Homomorphismus

$$\kappa_P : \begin{cases} \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q; V\pi_0^q] & \longrightarrow \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]] \\ X & \longmapsto X|_{\mathcal{R}_q} \end{cases}$$

dann surjektiv, wenn die Algebren $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]; V\hat{\pi}_0^q]$ und $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ übereinstimmen.

Beispiel 5.3.7 (Fortsetzung von Beispiel 5.3.6). Wir beschreiben die Konstruktion von einigen Lie-Unteralgebren von $\text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]]$. Beispielsweise werden Shuffling-Symmetrien von \mathcal{R}_2 , wegen $\text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]] = \langle \bar{X}_1 + \bar{X}_2 \rangle$, durch die Zusatzbedingung $\xi + \tau = 0$ charakterisiert. Das zugehörige bestimmende System lautet somit

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \mathcal{D}_1, \\ \xi + \tau = 0. \end{cases}$$

Nach Lösen dieser Gleichungen \mathcal{S}_1 finden wir, dass die Lie-Unteralgebra $\text{Shuf}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]]$ durch zwei Funktionen $f = f(z)$ und $g = g(z_1, z_2, z_3, z_4)$ parametrisiert werden kann und es gilt

$$\begin{aligned} \xi(x, y, u, u_x, u_y) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial z_3} - \frac{\partial g}{\partial z_2} \right) (y - x, u_x, u_y, u - x(u_x + u_y)), \\ \tau(x, y, u, u_x, u_y) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial z_3} - \frac{\partial g}{\partial z_2} \right) (y - x, u_x, u_y, u - x(u_x + u_y)), \\ \varphi(x, y, u, u_x, u_y) &= 2xf(u_x + u_y) + g(y - x, u_x, u_y, u - x(u_x + u_y)). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten η, ρ und σ werden stets nach den Formeln in (5.3) berechnet. Wegen $\text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]] = \langle \bar{X}_1 + \bar{X}_2, \bar{Y} \rangle = \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]] \oplus \mathcal{N}_2$ gilt $\text{Shuf}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]] \subseteq \text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]; \mathcal{N}_2]$, d.h. das Symbol \mathcal{N}_2 ist invariant unter Shuffling-Symmetrien. Die *vertikalen* infinitesimalen inneren Symmetrien $\bar{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{N}_2] \subseteq \text{Shuf}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]]$ werden durch die zusätzliche Bedingung $\xi - \tau = 0$ charakterisiert. Das zugehörige bestimmende System lautet

$$\mathcal{V}_1 : \begin{cases} \mathcal{D}_1, \\ \xi + \tau = 0, \\ \xi - \tau = 0. \end{cases}$$

Nach Lösen dieser Gleichungen \mathcal{V}_1 finden wir, dass die Lie-Unteralgebra $\text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{N}_2]$ durch zwei Funktionen $f = f(z)$ und $g = g(z_1, z_2, z_3)$ parametrisiert werden kann und es gilt

$$\varphi(x, y, u, u_x, u_y) = 2xf(u_x + u_y) + g(y - x, u_x + u_y, u - x(u_x + u_y)).$$

Zur Bestimmung der infinitesimalen Kontaktsymmetrien $\bar{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]; \mathcal{N}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] + V\hat{\pi}_0^2]$ betrachten wir zunächst die zugehörigen Bedingungen: Aus der Invarianz des Symbols \mathcal{N}_2 folgt

$$[\bar{X}, \bar{Y}] \text{ mod } \mathcal{N}_2 = -\bar{Y}(\xi)\bar{X}_1 - \bar{Y}(\tau)\bar{X}_2 + (\xi - \tau - \bar{Y}(\rho))\bar{Z} - \bar{Y}(\sigma)\bar{N} - \bar{Y}(\varphi)\bar{W} = 0.$$

Aus der Invarianz der Subdistribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_2] + V\hat{\pi}_0^2 = \langle \bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{N} \rangle \subset T\mathcal{R}_2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{Z}] \text{ mod } (\mathcal{V}[\mathcal{R}_2] + V\hat{\pi}_0^2) &= -(\xi - \tau + \bar{Z}(\varphi))\bar{W} = 0, \\ [\bar{X}, \bar{N}] \text{ mod } (\mathcal{V}[\mathcal{R}_2] + V\hat{\pi}_0^2) &= -(\xi + \tau + \bar{N}(\varphi))\bar{W} = 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich drei nichttriviale Zusatzbedingungen, vgl. (5.4)

$$\mathcal{K}_1 : \begin{cases} \mathcal{D}_1, & \xi_{u_{xy}} = 0, \\ \xi + \tau + \varphi_{u_x} + \varphi_{u_y} = 0, & \tau_{u_{xy}} = 0. \end{cases}$$

Man erhält die Lösungen von \mathcal{K}_1 durch die Festlegung der Funktion $h = (\xi + \tau)/2$:

$$h(x, y, u, u_x, u_y) = -\frac{1}{2}(\varphi_{u_x} + \varphi_{u_y}) = -2x \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial z_3} + \frac{\partial g}{\partial z_2} \right) + x \frac{\partial g}{\partial z_4}.$$

Dann wird die Lie-Unteralgebra $\text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]; \mathcal{N}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] + V\hat{\pi}_0^2] \subseteq \text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]; \mathcal{N}_2]$ durch zwei Funktionen $f = f(z)$ und $g = g(z_1, z_2, z_3, z_4)$ parametrisiert und es gilt

$$\begin{aligned} \xi(x, y, u, u_x, u_y) &= -2x \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z_2} + x \frac{\partial g}{\partial z_4}, \\ \tau(x, y, u, u_x, u_y) &= -2x \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z_3} + x \frac{\partial g}{\partial z_4}, \\ \varphi(x, y, u, u_x, u_y) &= 2xf(u_x + u_y) + g(y - x, u_x, u_y, u - x(u_x + u_y)). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der infinitesimalen Lie-Punktsymmetrien $\bar{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]; V\hat{\pi}_0^2]$ betrachten wir das Vertikalbündel $V\hat{\pi}_0^2 = \langle \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{N} \rangle$. Aus den Invarianzbedingungen

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{Y}] \text{ mod } V\hat{\pi}_0^2 &= -\bar{Y}(\xi)\bar{X}_1 - \bar{Y}(\tau)\bar{X}_2 - \bar{Y}(\varphi)\bar{W} = 0, \\ [\bar{X}, \bar{Z}] \text{ mod } V\hat{\pi}_0^2 &= -(\xi - \tau + \bar{Z}(\varphi))\bar{W} - \bar{Z}(\xi)\bar{X}_1 - \bar{Z}(\tau)\bar{X}_2 = 0, \\ [\bar{X}, \bar{N}] \text{ mod } V\hat{\pi}_0^2 &= -(\xi + \tau + \bar{N}(\varphi))\bar{W} - \bar{N}(\xi)\bar{X}_1 - \bar{N}(\tau)\bar{X}_2 = 0 \end{aligned}$$

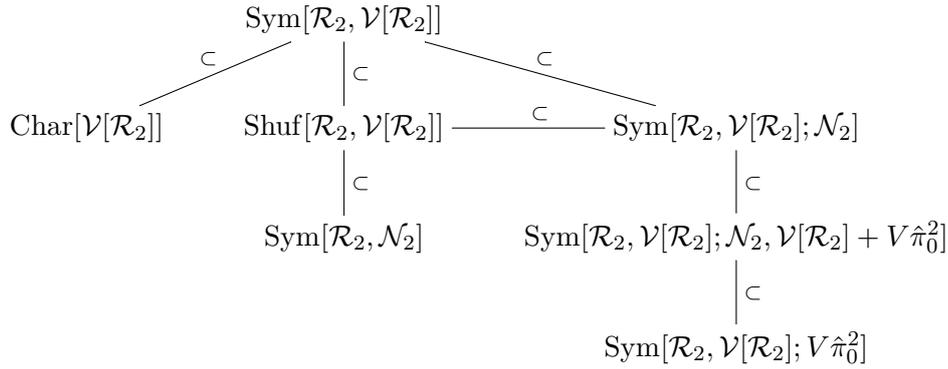
ergeben sich vier weitere Zusatzbedingungen an das System \mathcal{K}_1 :

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} \mathcal{K}_1, \\ \xi_{u_x} - \xi_{u_y} = 0, & \tau_{u_x} - \tau_{u_y} = 0, \\ \xi_{u_x} + \xi_{u_y} = 0, & \tau_{u_x} + \tau_{u_y} = 0. \end{cases}$$

Nach Lösen dieser Gleichungen \mathcal{P}_1 sehen wir, dass die Lie-Unteralgebra $\text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]; V\hat{\pi}_0^2]$ durch vier Funktionen $g_1, \dots, g_4 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ und drei Konstanten c_1, c_2, c_3 bestimmt wird. Es gilt

$$\begin{aligned} \xi(x, y, u) &= xg_2(y - x) + g_3(y - x) + c_2x + c_3u, \\ \tau(x, y, u) &= xg_2(y - x) + g_4(y - x) + c_2x + c_3u, \\ \varphi(x, y, u, u_x, u_y) &= g_1(y - x) + ug_2(y - x) + c_1x - u_x\xi(x, y, u) - u_y\tau(x, y, u). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir folgendes Bild:



Die hier angegebenen Inklusionen sind alle echt. \triangleleft

Definition 5.3.8. Es sei $\bar{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ eine infinitesimale innere Symmetrie von \mathcal{R}_q . Die kleinste ganze Zahl $k \in \{0, \dots, q\}$, für die gilt $[\bar{X}, V\hat{\pi}_k^q] \subseteq V\hat{\pi}_k^q$, heißt *Ordnung von \bar{X}* .

Jede vertikale infinitesimale innere Symmetrie $\bar{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{N}_q] \subseteq \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]; \mathcal{N}_q]$ hat definitionsgemäß höchstens die Ordnung $q-1$. Gilt allgemein $\mathcal{N}_q \subseteq \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$, dann hat auch jede Shuffling-Symmetrie $\bar{X} \in \text{Shuf}[\mathcal{R}_q]$ höchstens die Ordnung $q-1$. Insbesondere besitzt jede infinitesimale innere Symmetrie einer Differentialgleichung vom endlichen Typ höchstens die Ordnung $q-1$.

Proposition 5.3.9. Es sei $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine reguläre Differentialgleichung der Ordnung $q \geq 1$ derart, dass alle $\hat{\pi}_{q-k}^q$ -Fasern zusammenhängend sind. Dann existiert zu jeder infinitesimalen inneren Symmetrie $\bar{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ der Ordnung kleiner gleich $q-k$ ein Vektorfeld $\bar{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_{q-k}^{(k)})$ mit der Eigenschaft $\bar{Y} \circ \hat{\pi}_{q-k}^q = T\hat{\pi}_{q-k}^q \circ \bar{X}$. Gilt zusätzlich

$$\mathcal{L}_{\bar{X}} \left(\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q \right) = \left[\bar{X}, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q \right] \subseteq \left(\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q \right),$$

dann ist $\bar{Y} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_{q-k}^{(k)}, \mathcal{V}[\mathcal{R}_{q-k}^{(k)}]]$ eine infinitesimale innere Symmetrie von $\mathcal{R}_{q-k}^{(k)} \subseteq J_{q-k}\pi$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{R}_q & \xrightarrow{\bar{X}} & T\mathcal{R}_q \\
 \hat{\pi}_{q-k}^q \downarrow & & \downarrow T\hat{\pi}_{q-k}^q \\
 \mathcal{R}_{q-k}^{(k)} & \xrightarrow{\bar{Y}} & T\mathcal{R}_{q-k}^{(k)}
 \end{array}$$

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Proposition 3.4.7 und der Eigenschaft

$$\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q = \left(T\hat{\pi}_{q-k}^q \right)^{-1} \left(\mathcal{V}[\mathcal{R}_{q-k}^{(k)}] \right).$$

Falls die Voraussetzungen von Korollar 5.2.13 erfüllt sind, dann gilt allgemein

$$\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]; V\hat{\pi}_{q-k}^q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q] = \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]. \quad \square$$

Da $\mathcal{R}_{q-k}^{(k)} \subseteq J_{q-k}\pi$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit ist, lässt sich das so erhaltene Vektorfeld $\bar{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_{q-k}^{(k)})$ zu einem lokalen Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(J_{q-k}\pi)$ mit lokaler Darstellung

$$Y = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q-k)}) \partial_{x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq q-k} \eta_{\mu}^{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q-k)}) \partial_{u_{\mu}^{\alpha}}$$

fortsetzen. In der Regel ist Y keine infinitesimale Kontakttransformation. Wir können Y nach der Prolongationsformel (4.32) zu einem Vektorfeld $j_k Y \in \mathfrak{X}(J_q \pi)$ prolongieren. Dann gilt $\iota^*(j_k Y)|_{\text{Sol}(\mathcal{R}_q)} = \overline{X}|_{\text{Sol}(\mathcal{R}_q)}$. Für eine lokal lösbare Differentialgleichung \mathcal{R}_q finden wir folglich $\iota^*(j_k Y)|_{\mathcal{R}_q} = \overline{X}$. Man beachte aber, dass die Prolongation von Y im Allgemeinen *nicht* eindeutig ist.

Beispiel 5.3.10. Wir betrachten erneut die planaren $U(1)$ -Yang-Mills-Gleichungen aus Beispiel 5.2.5. Man bestätigt leicht, dass das Vektorfeld

$$\overline{X} = (\overline{v_t} - \overline{u_x})(\overline{x}\partial_u + \partial_{u_x}) = (\overline{v_t} - \overline{u_x}) \left(\overline{x}\overline{W}_1 + \frac{1}{2}\overline{Z}_3 - \frac{1}{2}\overline{N} \right)$$

eine vertikale Shuffling-Symmetrie der Ordnung Eins ist, d.h. $\overline{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{N}_2]$. In inneren Koordinaten $(t, x, u, v, u_t, u_x, v_t, v_x)$ auf $\mathcal{R}_1^{(1)} = \pi_1^2(\mathcal{R}_2) = J_1\pi$ finden wir $Y = x(v_t - u_x)\partial_u + (v_t - u_x)\partial_{u_x}$ mit $Y \circ \hat{\pi}_1^2 = T\hat{\pi}_1^2 \circ \overline{X}$. Die erste Prolongation $j_1 Y \in \mathfrak{X}(J_2\pi)$ hat die Form

$$j_1 Y = Y + \eta_{tt}^1 \partial_{u_{tt}} + \eta_{tx}^1 \partial_{u_{tx}} + \eta_{xx}^1 \partial_{u_{xx}} + \eta_{tt}^2 \partial_{v_{tt}} + \eta_{tx}^2 \partial_{v_{tx}} + \eta_{xx}^2 \partial_{v_{xx}}$$

mit nichtverschwindenden Koeffizienten $\eta_{xx}^1 = \mathcal{C}_x^{(2)}(\eta_x^1) = \mathcal{C}_x^{(2)}(v_t - u_x) = v_{tx} - u_{xx}$ und

$$\eta_{tx}^1 = \begin{cases} \mathcal{C}_t^{(2)}(\eta_x^1) = \mathcal{C}_t^{(2)}(v_t - u_x) = v_{tt} - u_{tx}, \\ \mathcal{C}_x^{(2)}(\eta_t^1) = \mathcal{C}_x^{(2)}(0) = 0. \end{cases}$$

Insgesamt erhalten wir zwei unterschiedliche Prolongationen von Y :

$$\begin{aligned} j_1 Y^1 &= Y + (v_{tt} - u_{tx})\partial_{u_{tx}} + (v_{tx} - u_{xx})\partial_{u_{xx}}, \\ j_1 Y^2 &= Y + (v_{tx} - u_{xx})\partial_{u_{xx}} \end{aligned}$$

mit $j_1 Y^1|_{\mathcal{R}_2} = j_1 Y^2|_{\mathcal{R}_2}$. Die dazu gehörenden Flüsse Φ_s^1, Φ_s^2 sind bereits in Beispiel 5.2.5 angegeben. Wegen $\text{Char}[\mathcal{V}'[\mathcal{R}_2]] = \mathcal{N}_2$ gilt allgemein $\text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]; \mathcal{N}_2] = \text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]]$. \triangleleft

Zusammenfassend halten wir folgendes Ergebnis fest:

Theorem 5.3.11. *Es sei $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine reguläre lokal lösbare Differentialgleichung der Ordnung $q \geq 1$ derart, dass alle $\hat{\pi}_{q-k}^q$ -Fasern zusammenhängend sind. Eine infinitesimale innere Symmetrie $\overline{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ ist genau dann die k -te Prolongation einer infinitesimalen inneren Symmetrie von $\mathcal{R}_{q-k}^{(k)} \subseteq J_{q-k}\pi$, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) $[\overline{X}, V\hat{\pi}_{q-k}^q] \subseteq V\hat{\pi}_{q-k}^q$,
- (ii) $[\overline{X}, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q] \subseteq (\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q)$.

Zum Nachweis der Gleichheit $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]; V\hat{\pi}_{q-k}^q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q] = \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$, wenn die (hinreichenden) Bedingungen von Korollar 5.2.13 nicht erfüllt sind, betrachten wir die zugehörigen bestimmenden Systeme $\mathcal{H}_1 \subset J_1\pi$ und $\mathcal{D}_1 \subset J_1\pi$. Wie bereits erwähnt, handelt es sich um Differentialgleichungen erster Ordnung. Wegen $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{D}_1$ genügt es $\text{Sol}(\mathcal{H}_1) \supseteq \text{Sol}(\mathcal{D}_1)$ nachzuweisen. Hierzu müssen wir lediglich feststellen, ob die zusätzlichen Gleichungen in \mathcal{H}_1 Integrierbarkeitsbedingungen von \mathcal{D}_1 sind. Nach Vervollständigung beider Systeme erhalten wir

$$\text{Sol}(\mathcal{H}_{r+1}^{(s_1)}) = \mathcal{H}_{r+1}^{(s_1)} \subseteq \mathcal{D}_{r+1}^{(s_2)} = \text{Sol}(\mathcal{D}_{r+1}^{(s_2)}) \subset J_{r+1}\pi.$$

Es handelt sich nun um Differentialgleichungen der Ordnung $r+1$ in $J_{r+1}\pi$. Anhand ihrer Dimensionen $\dim \mathcal{H}_{r+1}^{(s_1)} \leq \dim \mathcal{D}_{r+1}^{(s_2)}$ können wir dann leicht entscheiden, ob die betrachteten

Lie-Algebren übereinstimmen, und zwar ohne die bestimmenden Systeme vorher zu lösen. Im Fall $\dim \mathcal{H}_{r+1}^{(s_1)} < \dim \mathcal{D}_{r+1}^{(s_2)}$ ist $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]; V\hat{\pi}_{q-k}^q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q] + V\hat{\pi}_{q-k-1}^q$ eine echte Lie-Unteralgebra von $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$. Gilt dagegen $\dim \mathcal{H}_{r+1}^{(s_1)} = \dim \mathcal{D}_{r+1}^{(s_2)}$, dann sind beide Lie-Algebren identisch. Die beschriebene Vorgehensweise lässt sich auf allgemeine Situationen anwenden, wenn beispielsweise $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]; \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k] = \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ nachzuweisen ist.

Beispiel 5.3.12. Zur Veranschaulichung der Vorgehensweise betrachten wir eine explizite gewöhnliche unterbestimmte Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\mathcal{R}_2 : \left\{ u'' = \phi(v'') \quad \text{mit } \phi''(z) \neq 0 \forall z \right.$$

für zwei unbekannte Funktionen $u(x)$ und $v(x)$. Ihre Vessiot-Distribution wird in inneren Koordinaten $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{u}', \bar{v}', \bar{v}'')$ auf \mathcal{R}_2 durch zwei Vektorfelder

$$\bar{X} = \partial_{\bar{x}} + \bar{u}'\partial_{\bar{u}} + \bar{v}'\partial_{\bar{v}} + \phi(\bar{v}'')\partial_{\bar{u}'} + \bar{v}''\partial_{\bar{v}'}, \quad \bar{Y} = \partial_{\bar{v}''}$$

aufgespannt. Insbesondere ist $\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]$ nicht involutiv und es gilt $\text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_2]] = \{0\}$. Wir zeigen, dass das Symbol $\mathcal{N}_2 = \langle \bar{Y} \rangle$ dennoch invariant unter infinitesimalen inneren Symmetrien ist, d.h. $\text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]; \mathcal{N}_2] = \text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]]$. Hierzu machen wir den üblichen Ansatz

$$\bar{Z} = \xi\bar{X} + \tau\bar{Y} + \eta\partial_{\bar{u}'} + \rho\partial_{\bar{v}'} + \sigma\partial_{\bar{u}} + \varphi\partial_{\bar{v}}$$

für $\bar{Z} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]]$ mit Koeffizienten $\xi, \tau, \eta, \rho, \sigma, \varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_2)$. Aus den Invarianzbedingungen

$$[\bar{Z}, \bar{X}] \text{ mod } \mathcal{V}[\mathcal{R}_2] = (\tau\phi' - \bar{X}(\eta))\partial_{\bar{u}'} + (\tau - \bar{X}(\rho))\partial_{\bar{v}'} + (\eta - \bar{X}(\sigma))\partial_{\bar{u}} + (\rho - \bar{X}(\varphi))\partial_{\bar{v}} = 0,$$

$$[\bar{Z}, \bar{Y}] \text{ mod } \mathcal{N}_2 = -\bar{Y}(\xi)\bar{X} - (\xi\phi' + \bar{Y}(\eta))\partial_{\bar{u}'} - (\xi + \bar{Y}(\rho))\partial_{\bar{v}'} - \bar{Y}(\sigma)\partial_{\bar{u}} - \bar{Y}(\varphi)\partial_{\bar{v}} = 0$$

erhalten wir die beiden bestimmenden Systeme \mathcal{D}_1 und \mathcal{H}_1 in der Form

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} \xi + \bar{Y}(\rho) = 0, & \xi\phi' + \bar{Y}(\eta) = 0, \\ \rho - \bar{X}(\varphi) = 0, & \tau\phi' - \bar{X}(\eta) = 0, \\ \eta - \bar{X}(\sigma) = 0, & \bar{Y}(\sigma) = 0, \\ \tau - \bar{X}(\rho) = 0, & \bar{Y}(\varphi) = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_1 : \begin{cases} \mathcal{D}_1, \\ \bar{Y}(\xi) = 0. \end{cases}$$

Zum Nachweis der Gleichheit $\text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]; \mathcal{N}_2] = \text{Sym}[\mathcal{R}_2, \mathcal{V}[\mathcal{R}_2]]$ genügt es zu zeigen, dass die zusätzliche Gleichung $\bar{Y}(\xi) = \partial\xi/\partial\bar{v}'' = 0$ in \mathcal{H}_1 eine Integrierbarkeitsbedingung von \mathcal{D}_1 ist. Die Koeffizienten ξ, τ, η und ρ sind wegen

$$\begin{aligned} \xi &= -\bar{Y}\bar{X}(\varphi), & \eta &= \bar{X}(\sigma), \\ \tau &= \bar{X}\bar{X}(\varphi), & \rho &= \bar{X}(\varphi) \end{aligned}$$

eindeutig durch $\varphi = \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{u}', \bar{v}')$ und $\sigma = \sigma(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{u}', \bar{v}')$ bestimmt. Es gilt

$$\begin{cases} \phi'\bar{Y}\bar{X}(\varphi) = \bar{Y}\bar{X}(\sigma), \\ \phi'\bar{X}\bar{X}(\varphi) = \bar{Y}\bar{X}(\sigma). \end{cases}$$

Wegen $\bar{Y}(\xi) = -\bar{Y}^2\bar{X}(\varphi) = -\phi''\partial\varphi/\partial\bar{u}'$ und $\phi'[\bar{Y}, \bar{X}](\varphi) = [\bar{Y}, \bar{X}](\sigma)$, ausgeschrieben

$$\phi' \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{v}'} + (\phi')^2 \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{u}'} = \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{v}'} + \phi' \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{u}'},$$

erhalten wir aus der Ableitung nach \bar{v}'' direkt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{v}'} + 2\phi' \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{u}'} = \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{u}'}.$$

Da die rechte Seite nicht von \bar{v}'' abhängt, folgt $\varphi = \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{v}')$ und somit auch $\bar{Y}(\xi) = 0$. Jede infinitesimale innere Symmetrie von \mathcal{R}_2 hat folglich höchstens die Ordnung Eins. \triangleleft

Kapitel 6

Verallgemeinerte Symmetrien

In diesem letzten Kapitel wollen wir die sogenannten *verallgemeinerten Symmetrien* geometrisch untersuchen. Es handelt sich um eine weitreichende Verallgemeinerung der infinitesimalen inneren Symmetrien. Trotz ihrer Kompliziertheit sind gerade die verallgemeinerten Symmetrien (auch Lie-Bäcklund-Symmetrien genannt) in den physikalischen Anwendungen von außerordentlicher Wichtigkeit, vor allem deshalb, weil die mitunter überraschend reichhaltige Erhaltungsgrößenstruktur nichtlinearer partieller Differentialgleichungen nur durch den Zugang über verallgemeinerte Symmetrien erschlossen werden kann. Unser primäres Ziel besteht in der intrinsischen Formulierung solcher Symmetrien, die es uns ermöglicht, verschiedene strukturelle Eigenschaften zu charakterisieren.

6.1 Verallgemeinerte Vektorfelder

Für die differentialgeometrische Formulierung der verallgemeinerten Symmetrien von Differentialgleichungen führen wir den Begriff des verallgemeinerten Vektorfeldes ein.

Definition 6.1.1. Eine glatte lokale Abbildung $X: U \subseteq J_r\pi \rightarrow TJ_s\pi$ mit der Eigenschaft $\tau_{J_s\pi} \circ X = \pi_s^r|_U$ heißt *verallgemeinertes Vektorfeld vom Typ (r, s)* mit $r \geq s \geq 0$. Die Menge der verallgemeinerten Vektorfelder vom Typ (r, s) wird mit $\mathfrak{X}_s(J_r\pi)$ bezeichnet.

$$\begin{array}{ccc} J_r\pi & \xrightarrow{X} & TJ_s\pi \\ & \searrow \pi_s^r & \swarrow \tau_{J_s\pi} \\ & J_s\pi & \end{array}$$

Zur Vereinfachung der Notation werden wir auf die explizite Angabe des Definitionsbereichs verzichten, und immer eine globale Schreibweise $X: J_r\pi \rightarrow TJ_s\pi$ benutzen. Im Spezialfall $r = s$ erhalten wir die üblichen Vektorfelder auf $J_s\pi$, d.h. $\mathfrak{X}_s(J_s\pi) = \mathfrak{X}(J_s\pi)$. Jedes verallgemeinerte Vektorfeld $X: J_r\pi \rightarrow TJ_s\pi$ besitzt in lokalen Koordinaten $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)})$ auf $J_r\pi$ die Form

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) \partial_{x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq s} \eta_{\mu}^{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) \partial_{u_{\mu}^{\alpha}}. \quad (6.1)$$

Man bestätigt leicht, dass die verallgemeinerten Vektorfelder vom Typ (r, s) auch als lokale Schnitte $X \in \Gamma_{lok}((\pi_s^r)^*(\tau_{J_s\pi}))$ des zurückgezogenen Tangentialbündels $(TJ_s\pi, \tau_{J_s\pi}, J_s\pi)$ aufgefasst werden können. Hierbei bezeichnet

$$(\pi_s^r)^*(\tau_{J_s\pi}): J_r\pi \times_{J_s\pi} TJ_s\pi \rightarrow J_r\pi$$

die Projektion auf den ersten Faktor. Neben dieser geometrischen Definition besteht auch die Möglichkeit einer algebraischen Definition: Während ein klassisches Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(J_r\pi)$ als eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $X: \mathcal{F}(J_r\pi) \rightarrow \mathcal{F}(J_r\pi)$ mit der Eigenschaft $X(fg) = X(f)g + fX(g)$ verstanden wird, beschreibt ein verallgemeinertes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}_s(J_r\pi)$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $X: \mathcal{F}(J_s\pi) \rightarrow \mathcal{F}(J_r\pi)$, die der verallgemeinerten Leibniz-Regel

$$X(fg) = (f \circ \pi_s^r)X(g) + X(f)(g \circ \pi_s^r)$$

genügt. Die kleinste ganze Zahl $k \in \{s, \dots, r\}$, für die ein verallgemeinertes Vektorfeld $Y: J_k\pi \rightarrow TJ_s\pi$ derart existiert, dass $X = Y \circ \pi_k^r$ gilt, heißt *Ordnung von X* . Hat X die Ordnung s , d.h. $X = Y \circ \pi_s^r$, dann ist $Y \in \mathfrak{X}(J_s\pi)$ ein klassisches Vektorfeld auf $J_s\pi$. Von besonderem Interesse sind *vertikale* verallgemeinerte Vektorfelder.

Definition 6.1.2. Ein verallgemeinertes Vektorfeld $X: J_r\pi \rightarrow V\pi^s \subset TJ_s\pi$ heißt *vertikal*.

Jedes vertikale verallgemeinerte Vektorfeld hat in lokalen Koordinaten $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)})$ die Form

$$X = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq s} Q_{\mu}^{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) \partial_{u_{\mu}^{\alpha}}. \quad (6.2)$$

Derartige Vektorfelder sind trivialerweise lokale Schnitte $X \in \Gamma_{lok}((\pi_s^r)^*(\tau_{J_s\pi}|_{V\pi^s}))$ des zurückgezogenen Vertikalbündels $(V\pi^s, \tau_{J_s\pi}|_{V\pi^s}, J_s\pi)$.

Verallgemeinerte Vektorfelder vom Typ (r, s) lassen sich, in Analogie zu infinitesimalen Kontakttransformationen, zu verallgemeinerten Vektorfeldern vom Typ $(r+q, s+q)$ prolongieren. Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich auf den für unsere Zwecke ausreichenden Fall eines verallgemeinerten Vektorfeldes $X: J_r\pi \rightarrow T\mathcal{E}$. Wir beschreiben zuerst die Konstruktion der q -ten Prolongation eines *vertikalen* verallgemeinerten Vektorfeldes $X: J_r\pi \rightarrow V\pi$. Hierzu bemerken wir, dass die Projektion $\nu = \pi \circ \tau_{\mathcal{E}}|_{V\pi}: V\pi \rightarrow \mathcal{X}$ eine surjektive Submersion ist. Folgerichtig ist $(V\pi, \nu, \mathcal{X})$ eine gefaserte Mannigfaltigkeit. Diese Beobachtung erlaubt es, das Jetbündel $\nu^q: J_q\nu \rightarrow \mathcal{X}$ zu konstruieren. Des Weiteren ist $\hat{\nu}^q = \pi^q \circ \tau_{J_q\pi}|_{V\pi^q}: V\pi^q \rightarrow \mathcal{X}$ ebenfalls eine surjektive Submersion.

Proposition 6.1.3. Die gefaserten Mannigfaltigkeiten $(V\pi^q, \hat{\nu}^q, \mathcal{X})$ und $(J_q\nu, \nu^q, \mathcal{X})$ sind kanonisch diffeomorph.

Beweis. Definitionsgemäß ist jeder Vektor aus $V_{\rho}\pi^q$ eine Äquivalenzklasse von Kurven $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow (J_q\pi)_p$ mit der Eigenschaft $\gamma(0) = \rho$, wobei $(J_q\pi)_p$ die Faser über $p = \pi^q(\rho)$ bezeichnet. Anstelle eines solchen Repräsentanten γ können wir eine Familie von lokalen Schnitten $\sigma_t \in \Gamma_{lok}(\pi)$ betrachten, die in einer Umgebung um $p \in \mathcal{X}$ definiert sind, so dass $\gamma(t) = [\sigma_t]_p^{(q)}$ für alle $t \in I$ gilt. Diese Sichtweise erlaubt es, den kanonischen Diffeomorphismus

$$\phi_q^{-1}: \begin{cases} V\pi^q & \longrightarrow J_q\nu \\ \frac{d}{dt}([\sigma_t]_p^{(q)})_{t=0} & \longmapsto \left[\left(\frac{d\sigma_t}{dt} \right)_{t=0} \right]_p^{(q)} \end{cases}$$

zu definieren. Man verifiziert leicht, dass die Abbildung ϕ_q unabhängig von der Wahl des Repräsentanten γ und der Familie σ_t ist. \square

Definition 6.1.4. Es sei $X: J_r\pi \rightarrow V\pi$ ein vertikales verallgemeinertes Vektorfeld. Die q -te Prolongation von X ist ein vertikales verallgemeinertes Vektorfeld

$$j_q X := \phi_q \circ \text{pr}^{(q)} X: J_{q+r}\pi \rightarrow V\pi^q$$

mit der Eigenschaft $T\pi_0^q|_{V\pi^q} \circ j_q X = X \circ \pi_r^{q+r}$.

Die Beziehungen fasst das nachstehende kommutative Diagramm zusammen.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{X} & \xleftarrow{\pi^r} & J_r \pi & \xleftarrow{\pi_r^{q+r}} & J_{q+r} \pi \\
 \text{id}_{\mathcal{X}} \downarrow & & X \downarrow & & \text{pr}^{(q)} X \downarrow \\
 \mathcal{X} & \xleftarrow{v} & V \pi & \xleftarrow{v_0^q} & J_q v \\
 & & & & \downarrow \phi_q \\
 & & & & V \pi^q \\
 & \nearrow T \pi_0^q |_{V \pi^q} & & & \downarrow \hat{v}^q \\
 & & & & \mathcal{X}
 \end{array}$$

Hierbei bezeichnet $\text{pr}^{(q)} X: J_{q+r} \pi \rightarrow J_q v$ die übliche Prolongation einer *gefaserten* Abbildung X über $\text{id}_{\mathcal{X}}$. Ist allgemein $(\mathcal{E}', \pi', \mathcal{X})$ eine gefaserte Mannigfaltigkeit und $\Psi: J_r \pi \rightarrow \mathcal{E}'$ eine gefaserte Abbildung über $\text{id}_{\mathcal{X}}$, d.h. $\pi' \circ \Psi = \text{id}_{\mathcal{X}} \circ \pi^r$, so ist die q -te Prolongation von Ψ diejenige eindeutig bestimmte Abbildung $\text{pr}^{(q)} \Psi: J_{q+r} \pi \rightarrow J_q \pi'$, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{X} & \xleftarrow{j_r \sigma} & J_r \pi & \xleftarrow{\pi_r^{q+r}} & J_{q+r} \pi \\
 \text{id}_{\mathcal{X}} \downarrow & & \Psi \downarrow & & \text{pr}^{(q)} \Psi \downarrow \\
 \mathcal{X} & \xleftarrow{\pi'} & \mathcal{E}' & \xleftarrow{(\pi')_0^q} & J_q \pi' \\
 & \nearrow \sigma' & & & \downarrow j_q \sigma' \\
 & & & & \mathcal{X}
 \end{array}$$

für jeden lokalen Schnitt $\sigma \in \Gamma_{\text{lok}}(\pi)$ kommutiert. Mit $\sigma' := \Psi \circ j_r \sigma \in \Gamma_{\text{lok}}(\pi')$ erhalten wir $\text{pr}^{(q)} \Psi \circ j_{q+r} \sigma = j_q \sigma'$. Wird Ψ in adaptierten Koordinaten (\mathbf{x}, \mathbf{v}) auf \mathcal{E}' durch $v^\tau = \Psi^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)})$ dargestellt, dann besitzt die q -te Prolongation $\text{pr}^{(q)} \Psi$ lokal die Form $v_\mu^\tau = D_\mu \Psi^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(|\mu|+r)})$ mit $0 \leq |\mu| \leq q$. Es sei nun $X: J_r \pi \rightarrow V \pi$ ein vertikales verallgemeinertes Vektorfeld mit lokaler Darstellung $X = \sum_{\alpha=1}^m Q^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) \partial_{u^\alpha}$. Dann besitzt die q -te Prolongation $j_q X$ die Form

$$j_q X = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} D_\mu Q^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(|\mu|+r)}) \partial_{u_\mu^\alpha}. \quad (6.3)$$

Hat $X = Y \circ \pi_k^r$ die Ordnung $k > 0$, so hat $j_q X = j_q Y \circ \pi_{q+k}^{q+r}$ die Ordnung $q+k$. Im Sonderfall $X = Y \circ \pi_0^r$ stimmt die q -te Prolongation $j_q X$ mit $j_q Y \circ \pi_q^{q+r}$ überein, wobei die infinitesimale Punkttransformation $Y: \mathcal{E} \rightarrow V \pi \subset T \mathcal{E}$ gemäß der Formel (4.32) prolongiert wird.

Als Nächstes beschreiben wir, wie $X: J_r \pi \rightarrow V \pi$ auf lokalen Schnitten von π operiert. Hierzu sei $\sigma \in \Gamma_{\mathcal{O}}(\pi)$ ein lokaler Schnitt. Dann ist die Verkettung $X(\sigma) := X \circ j_r \sigma: \mathcal{O} \subseteq \mathcal{X} \rightarrow V \pi$ ein lokaler Schnitt von v . Wir betrachten nun allgemein eine parametrisierte Familie lokaler Schnitte $\sigma: I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E}$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. Dann gilt $X(\sigma_t)(p) \in V_{\sigma_t(p)} \pi$ mit $\sigma_t(p) = \sigma(t, p)$. Auf der anderen Seite definiert die Äquivalenzklasse $[s \mapsto \sigma_{t+s}(p)]_{s=0}$ einen Vektor aus $V_{\sigma_t(p)} \pi \subset T_{\sigma_t(p)} \mathcal{E}$. Diese Beobachtung führt uns zur folgenden Definition.

Definition 6.1.5. Es sei $X: J_r \pi \rightarrow V \pi$ ein vertikales verallgemeinertes Vektorfeld. Unter einer *Lösung von X* verstehen wir eine parametrisierte Familie lokaler Schnitte $\sigma_t \in \Gamma_{\mathcal{O}}(\pi)$ mit $t \in I$, sodass $X(\sigma_t)(p) = [s \mapsto \sigma_{t+s}(p)]_{s=0}$ für alle $(t, p) \in I \times \mathcal{O}$ gilt.

Bezeichnet $(\mathbf{x}, \sigma(t, \mathbf{x}))$ eine lokale Darstellung einer Lösung σ_t von X , so erfüllen die Komponentenfunktionen $\sigma^\alpha(t, \mathbf{x})$ die folgenden Evolutionsgleichungen

$$\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = Q^\alpha \left(\mathbf{x}, \sigma(t, \mathbf{x}), \dots, \frac{\partial^r \sigma}{\partial \mathbf{x}^r}(t, \mathbf{x}) \right), \quad 1 \leq \alpha \leq m. \quad (6.4)$$

Nach Konstruktion der q -ten Prolongation $j_q X: J_{q+r}\pi \rightarrow V\pi^q$ erhalten wir sofort

$$j_q X(\sigma_t)(p) := (j_q X \circ j_{q+r}\sigma_t)(p) = [s \mapsto j_q \sigma_{t+s}(p)]_{s=0}.$$

In lokalen Koordinaten $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q+r)})$ auf $J_{q+r}\pi$ gilt äquivalent

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{|\mu|} \sigma^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\mu}(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial \mathbf{x}^\mu} Q^\alpha \left(\mathbf{x}, \sigma(t, \mathbf{x}), \dots, \frac{\partial^r \sigma}{\partial \mathbf{x}^\nu}(t, \mathbf{x}) \right) \\ &= D_\mu Q^\alpha \left(\mathbf{x}, \sigma(t, \mathbf{x}), \dots, \frac{\partial^{|\mu|+r} \sigma}{\partial \mathbf{x}^\nu}(t, \mathbf{x}) \right), \quad \begin{array}{l} 1 \leq \alpha \leq m, \\ 0 \leq |\mu| \leq q. \end{array} \end{aligned}$$

An dieser Darstellung sehen wir besonders deutlich, dass die Prolongation von X direkt aus der Kettenregel im Jetbündelformalismus hervorgeht.

Definition 6.1.6. Es sei $\mathcal{R}_q \subseteq J_q\pi$ eine reguläre Differentialgleichung der Ordnung q . Ein vertikales verallgemeinertes Vektorfeld $X: J_r\pi \rightarrow V\pi$ heißt *vertikale verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_q* , wenn gilt $j_q X|_{\mathcal{R}_{q+r}}: \mathcal{R}_{q+r} \rightarrow V\hat{\pi}^q \subset T\mathcal{R}_q$.

Im (trivialen) Spezialfall $\mathcal{R}_q = J_q\pi$ ist $X: J_r\pi \rightarrow V\pi$ stets eine vertikale verallgemeinerte Symmetrie von $J_q\pi$. Die Menge der vertikalen verallgemeinerten Symmetrien vom Typ $(r, 0)$ von $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ mit festem Definitionsbereich $U \subseteq J_r\pi$ bildet einen \mathbb{R} -Vektorraum.

Es sei $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = \mathbf{0}$ eine lokale Repräsentation der Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ derart, dass $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^t$ ein regulärer Wert von Φ ist. Ein vertikales verallgemeinertes Vektorfeld $X = \sum_{\alpha=1}^m Q^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) \partial_{u^\alpha}$ ist genau dann eine vertikale verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_q , wenn die Koeffizienten $Q^\alpha = Q^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)})$ des Ansatzes für X das homogene lineare Gleichungssystem

$$\sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} \frac{\partial \Phi^\tau}{\partial u_\mu^\alpha}(\rho) D_\mu Q^\alpha(\rho) = 0, \quad 1 \leq \tau \leq t$$

in jedem Punkt $\rho \in \mathcal{R}_{q+r}$ erfüllen. Diese Bedingungen lassen sich kompakt schreiben als

$$\forall \rho \in \mathcal{R}_{q+r}: (j_q X) \Phi^\tau(\rho) = 0, \quad 1 \leq \tau \leq t. \quad (6.5)$$

Im Vergleich zu infinitesimalen Lie-Kontaktsymmetrien, vgl. (4.45), sind die vertikalen verallgemeinerten Symmetrien deutlich schwieriger zu berechnen.

Beispiel 6.1.7. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\mathcal{R}_2: \left\{ u_t - u_{xx} = 0 \right.$$

und ein vertikales verallgemeinertes Vektorfeld $X: J_1\pi \rightarrow V\pi$ erster Ordnung mit Darstellung $X = u_x \partial_u$. Insbesondere ist X keine infinitesimale innere Symmetrie von \mathcal{R}_2 , da X keine infinitesimale Kontakttransformation ist, vgl. Beispiel 5.2.17. Die zweite Prolongation $j_2 X: J_3\pi \rightarrow V\pi^2$ von X hat in Koordinaten $(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}, u_{ttt}, u_{ttx}, u_{txx}, u_{xxx})$ auf $J_3\pi$ die Form

$$j_2 X = u_x \partial_u + u_{tx} \partial_{u_t} + u_{xx} \partial_{u_x} + u_{ttx} \partial_{u_{tt}} + u_{txx} \partial_{u_{tx}} + u_{xxx} \partial_{u_{xx}}.$$

Aus der ersten Prolongation der Differentialgleichung $\mathcal{R}_2 \subset J_2\pi$ mit

$$\mathcal{R}_3: \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - u_{txx} = 0, \\ u_{tx} - u_{xxx} = 0, \\ u_t - u_{xx} = 0 \end{array} \right.$$

folgt unmittelbar $(j_2 X)(u_t - u_{xx}) = u_{tx} - u_{xxx} = D_x(u_t - u_{xx}) = 0$ auf $\mathcal{R}_3 \subset J_3\pi$. Dementsprechend ist X eine vertikale verallgemeinerte Symmetrie von $\mathcal{R}_2 \subset J_2\pi$. Bezeichnen $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_t, \bar{u}_x, \bar{u}_{tt}, \bar{u}_{tx}, \bar{u}_{ttt}, \bar{u}_{ttx})$ die inneren Koordinaten auf \mathcal{R}_3 und $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_t, \bar{u}_x, \bar{u}_{tt}, \bar{u}_{tx})$ die inneren Koordinaten auf \mathcal{R}_2 , so finden wir für $\overline{j_2 X}: \mathcal{R}_3 \rightarrow V\hat{\pi}^2 \subset T\mathcal{R}_2$ leicht

$$\overline{j_2 X} = \overline{u_x} \partial_{\bar{u}} + \overline{u_{tx}} \partial_{\bar{u}_t} + \overline{u_t} \partial_{\bar{u}_x} + \overline{u_{ttx}} \partial_{\bar{u}_{tt}} + \overline{u_{tt}} \partial_{\bar{u}_{tx}}.$$

Das so gewonnene vertikale verallgemeinerte Vektorfeld $\overline{j_2 X}$ ist nicht projizierbar auf \mathcal{R}_2 . \triangleleft

Das folgende Theorem liefert, unter gewissen Annahmen, eine weitere wichtige Charakterisierung von vertikalen verallgemeinerten Symmetrien. Es beschreibt unter anderem den Zusammenhang zwischen den Lösungen von X und den Lösungen von $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$.

Theorem 6.1.8. *Es sei $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine reguläre lokal lösbare Differentialgleichung der Ordnung q . Ein vertikales verallgemeinertes Vektorfeld $X: J_r\pi \rightarrow V\pi$ ist genau dann eine vertikale verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_q , wenn zu jeder Lösung $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$ von \mathcal{R}_q eine Lösung $\sigma_t \in \Gamma_{lok}(\pi)$ von X existiert mit $\sigma_0 = \sigma$ derart, dass σ_t Lösungen von \mathcal{R}_q sind.*

Beweis. Zum Beweis der Rückrichtung seien $\sigma_0 \in \Gamma_{lok}(\pi)$ eine beliebige lokale Lösung von \mathcal{R}_q und $\sigma_t \in \Gamma_{lok}(\pi)$ eine Lösung von $X: J_r\pi \rightarrow V\pi$ derart, dass σ_t Lösungen von \mathcal{R}_q sind. Ferner sei $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = \mathbf{0}$ eine lokale Repräsentation der Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ derart, dass $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^t$ ein regulärer Wert von Φ ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \Phi^\tau(\mathbf{x}, j_q \sigma(t, \mathbf{x})) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} \frac{\partial \Phi^\tau}{\partial u_\mu^\alpha}(\mathbf{x}, j_q \sigma(t, \mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{|\mu|} \sigma^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\mu}(t, \mathbf{x}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} \frac{\partial \Phi^\tau}{\partial u_\mu^\alpha}(\mathbf{x}, j_q \sigma(t, \mathbf{x})) D_\mu Q^\alpha(\mathbf{x}, j_{q+r} \sigma(t, \mathbf{x})) \\ &= (j_q X) \Phi^\tau(\mathbf{x}, j_{q+r} \sigma(t, \mathbf{x})), \quad 1 \leq \tau \leq t. \end{aligned}$$

Im Speziellen erhalten wir $(j_q X) \Phi^\tau(\rho) = 0$ für $\rho = [\sigma_0]_p^{(q+r)} \in \mathcal{R}_{q+r}$. Da auch $\mathcal{R}_{q+r} \subset J_{q+r}\pi$ lokal lösbar ist, gilt $(j_q X) \Phi^\tau(\rho) = 0$ für alle Punkte $\rho \in \mathcal{R}_{q+r}$. Definitionsgemäß ist X eine vertikale verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_q .

Es seien umgekehrt $X: J_r\pi \rightarrow V\pi$ eine vertikale verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_q und $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$ eine beliebige lokale Lösung von \mathcal{R}_q . Wir nehmen an, dass das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = Q^\alpha\left(\mathbf{x}, \sigma(t, \mathbf{x}), \dots, \frac{\partial^r \sigma}{\partial \mathbf{x}^\nu}(t, \mathbf{x})\right), \quad 1 \leq \alpha \leq m, \quad (6.6a)$$

$$\sigma^\alpha(0, \mathbf{x}) = \sigma^\alpha(\mathbf{x}), \quad 1 \leq \alpha \leq m \quad (6.6b)$$

eine eindeutige glatte Lösung $\sigma(t, \mathbf{x})$ besitzt. Es bleibt im $j_q \sigma_t \subseteq \mathcal{R}_q$ zu zeigen. Hierzu verwenden wir die Eigenschaft $[t \mapsto j_q \sigma_t(p)]_{t=0} \in V_{j_q \sigma(p)} \hat{\pi}^q$. Da $\mathcal{R}_{q+r} \subset J_{q+r}\pi$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit ist, existieren nach dem Satz von Hadamard, siehe z.B. Seiler [31, Lemma C.1.5], geeignete Funktionen $P_\kappa^{\mu\tau} \in \mathcal{F}(J_{q+r}\pi)$, sodass gilt

$$j_q X(\Phi^\tau) = \sum_{\kappa=1}^t \sum_{0 \leq |\mu| \leq r} P_\kappa^{\mu\tau} D_\mu \Phi^\kappa, \quad 1 \leq \tau \leq t. \quad (6.7)$$

Aus den obigen Überlegungen wissen wir bereits, dass die Funktionen $v^\tau(t, \mathbf{x}) := \Phi^\tau(\mathbf{x}, j_q \sigma(t, \mathbf{x}))$ mit $v^\tau(0, \mathbf{x}) \equiv 0$ Lösungen der folgenden linearen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial v^\tau}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\kappa=1}^t \sum_{0 \leq |\mu| \leq r} P_\kappa^{\mu\tau} \left(\mathbf{x}, \sigma(t, \mathbf{x}), \dots, \frac{\partial^{q+r} \sigma}{\partial \mathbf{x}^\nu}(t, \mathbf{x}) \right) \frac{\partial v^\kappa}{\partial \mathbf{x}^\mu}(t, \mathbf{x}), \quad 1 \leq \tau \leq t \quad (6.8)$$

sind. Wir gehen davon aus, dass die Nulllösung die einzige Lösung zum Anfangswert $v^\tau(0, \mathbf{x}) \equiv 0$ ist. Falls diese Annahme erfüllt ist, erhalten wir $\Phi^\tau(\mathbf{x}, j_q \sigma(t, \mathbf{x})) = 0$, was zu zeigen war. \square

Im Allgemeinen hat das obige Cauchy-Problem (6.6) nicht immer eine Lösung und falls doch, so muss diese nicht eindeutig sein. Falls die betrachtete vertikale verallgemeinerte Symmetrie $X: J_r \pi \rightarrow V\pi$ auf der Lösungsmenge $\text{Sol}(\mathcal{R}_r) = \mathcal{R}_r$ für $r \geq q$ bzw. $\text{Sol}(\mathcal{R}_r^{(q-r)}) = \mathcal{R}_r^{(q-r)}$ für $r < q$ verschwindet, so wird X *trivial* genannt. Dann ist $\sigma(t, \mathbf{x}) := \sigma(\mathbf{x})$ die gesuchte Lösung von X . Weiter kann auch (6.8) mehrere Lösungen zum Anfangswert $v^\tau(0, \mathbf{x}) \equiv 0$ besitzen. In diesem Fall kann im $j_q \sigma_t \subseteq \mathcal{R}_q$ nicht garantiert werden. Für den Rest dieses Kapitels setzen wir voraus, dass die hier betrachteten Differentialgleichungen regulär und lokal lösbar sind.

Das nächste Korollar zeigt, dass jede vertikale verallgemeinerte Symmetrie $X: J_r \pi \rightarrow V\pi$ von $\mathcal{R}_q \subset J_q \pi$ eine vertikale verallgemeinerte Symmetrie von $\mathcal{R}_{q+s} \subset J_{q+s} \pi$ ist.

Korollar 6.1.9. *Es seien $X: J_r \pi \rightarrow V\pi$ ein vertikales verallgemeinertes Vektorfeld und $\Psi \in \mathcal{F}(J_q \pi)$ eine beliebige glatte Funktion. Dann gilt*

$$(j_{q+1} X)(D_i \Psi) = D_i((j_q X)\Psi). \quad (6.9)$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich durch direktes Nachrechnen. In lokalen Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned} (j_{q+1} X)(D_i \Psi) &= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq q+1} (D_\mu Q^\alpha) D_i \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u_\mu^\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\substack{0 \leq |\mu| \leq q+1 \\ \mu_i > 0}} (D_\mu Q^\alpha) \frac{\partial \Psi}{\partial u_{\mu-1}^\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} (D_\mu Q^\alpha) D_i \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u_\mu^\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} D_i(D_\mu Q^\alpha) \frac{\partial \Psi}{\partial u_\mu^\alpha} \\ &= D_i((j_q X)\Psi). \end{aligned}$$

In der zweiten Gleichheit haben wir die Tatsache ausgenutzt, dass die Funktion $\Psi = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(a)})$ nicht von Ableitungen der Ordnung $q+1$ abhängt. \square

Bezeichnet $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(a)}) = \mathbf{0}$ eine lokale Repräsentation von $\mathcal{R}_q \subset J_q \pi$, so erhalten wir

$$(j_{q+1} X)(D_i \Phi^\tau) = D_i((j_q X)\Phi^\tau) \stackrel{(6.7)}{=} \sum_{\kappa=1}^t \sum_{0 \leq |\mu| \leq r} \left(D_i(P_\kappa^{\mu\tau}) D_\mu \Phi^\kappa + P_\kappa^{\mu\tau} D_i(D_\mu \Phi^\kappa) \right)$$

sowie $(j_{q+1} X)(\Phi^\tau) = (j_q X)(\Phi^\tau)$. Offenbar verschwinden diese Funktionen auf jeder prolongierten Lösung im $j_{q+r+1} \sigma \subseteq \mathcal{R}_{q+r+1}$, weshalb auch X eine vertikale verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_{q+1} ist. Durch wiederholte Anwendung der Formel (6.9) sehen wir allgemein, dass X eine vertikale verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_{q+s} ist. Ist umgekehrt $X: J_r \pi \rightarrow V\pi$ eine vertikale verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_{q+s} , dann gilt $j_q X \circ \hat{\pi}_{q+r}^{q+s+r} = T\hat{\pi}_q^{q+s} \circ j_{q+s} X$ auf \mathcal{R}_{q+s+r} . Folglich ist X auch eine vertikale verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_q .

Um auf der Menge der vertikalen verallgemeinerten Symmetrien von $\mathcal{R}_q \subset J_q \pi$ die Struktur einer reellen Lie-Algebra zu erklären, betrachten wir zunächst eine naheliegende Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{M}_U := \{X \in \mathfrak{X}_0(J_r \pi) \mid r \geq 0 \text{ und } \text{dom } X = (\pi_0^r)^{-1}(U)\}$, definiert durch

$$X: (\pi_0^r)^{-1}(U) \subseteq J_r \pi \rightarrow T\mathcal{E} \sim_U Y: (\pi_0^k)^{-1}(U) \subseteq J_k \pi \rightarrow T\mathcal{E} := X \circ \pi_r^k = Y \text{ oder } Y \circ \pi_k^r = X.$$

Der geometrische Hintergrund dieser Konstruktion liegt in der Beobachtung, dass mit X auch $X \circ \pi_r^{k+r}$ eine (vertikale) verallgemeinerte Symmetrie ist, welche auf dem Lösungsraum von \mathcal{R}_q auf die gleiche Art wie X operiert. Insbesondere enthält die Äquivalenzklasse $[X] \in \mathfrak{M}_U / \sim_U$ stets einen Repräsentanten minimaler Ordnung. Zusammen mit der Addition $[X] + [Y] := [(X \circ \pi_r^{k+r}) + (Y \circ \pi_k^{k+r})]$ und der skalaren Multiplikation $a[X] := [aX]$ mit $a \in \mathbb{R}$ wird die Menge der vertikalen verallgemeinerten Vektorfelder, in Zeichen

$$\mathfrak{X}(U, V\pi) := \{[X] \in \mathfrak{M}_U / \sim_U \mid \text{im } X \subseteq V\pi\},$$

zu einem \mathbb{R} -Vektorraum. Als nächsten Schritt wollen wir auf $\mathfrak{X}(U, V\pi)$ eine Lie-Klammer angeben. Es seien $X \in [X]$ und $Y \in [Y]$ zwei Repräsentanten der Ordnung r und k , wir setzen

$$[[X], [Y]] := [T\pi_0^{k+r} \circ [j_k X, j_r Y]]. \quad (6.10)$$

Man verifiziert leicht, dass diese Definition eine wohldefinierte Lie-Klammer auf $\mathfrak{X}(U, V\pi)$ festlegt, vgl. Olver [26, Proposition 5.15] und Saunders [30, Proposition 6.4.10]. Dann ist auch

$$\text{Sym}[\mathcal{R}_q, V\pi] := \left\{ [X] \in \mathfrak{X}(U, V\pi) \mid \text{im } j_q X|_{\mathcal{R}_{q+r}} \subseteq V\hat{\pi}^q \right\}$$

abgeschlossen unter der Lie-Klammer (6.10). Es ist streng genommen nicht relevant, wie sich $j_q X: (\pi_0^{q+r})^{-1}(U) \subseteq J_{q+r}\pi \rightarrow V\pi^q$ außerhalb der Untermannigfaltigkeit $\mathcal{R}_{q+r} \subset J_{q+r}\pi$ verhält. Um identische Symmetrien auszuschließen, können wir eine weitere Äquivalenzrelation $[X] \sim_{\mathcal{R}_q} [Y] :\Leftrightarrow X \circ \hat{\pi}_r^{r+k} = Y \circ \hat{\pi}_k^{r+k}$ auf $\text{Sym}[\mathcal{R}_q, V\pi]$ einführen.

Als Nächstes beschreiben wir die Konstruktion der q -ten Prolongation eines verallgemeinerten Vektorfeldes $X: J_r\pi \rightarrow T\mathcal{E}$. Hierzu bemerken wir, dass die Verkettung $v = \pi \circ \tau_{\mathcal{E}}: T\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ eine surjektive Submersion ist. Dementsprechend ist $(T\mathcal{E}, v, \mathcal{X})$ eine gefaserte Mannigfaltigkeit und $(J_q v, v^q, \mathcal{X})$ das zugehörige Jetbündel der Ordnung q . Wir betrachten weiter eine surjektive Abbildung $\psi_q: J_q v \rightarrow TJ_q\pi$, punktweise gegeben durch

$$[\bar{\sigma}]_p^{(q)} \mapsto \phi_q \left(j_q(\bar{\sigma} - T(\tau_{\mathcal{E}} \circ \bar{\sigma}) \circ (T\pi \circ \bar{\sigma})) \right) + \left(Tj_q(\tau_{\mathcal{E}} \circ \bar{\sigma}) \right) \circ (T\pi \circ \bar{\sigma})(p).$$

Hierbei gilt $\tau_{\mathcal{E}} \circ \bar{\sigma} \in \Gamma_{lok}(\pi)$ und $T\pi \circ \bar{\sigma} \in \Gamma_{lok}(T\mathcal{E})$ sowie $T(\tau_{\mathcal{E}} \circ \bar{\sigma}) \circ (T\pi \circ \bar{\sigma}) \in \Gamma_{lok}(v)$. Man überzeugt sich leicht davon, dass diese Definition nicht von der Wahl des Repräsentanten $\bar{\sigma}$ abhängt und somit wohldefiniert ist, vgl. Saunders [30, Definition 6.4.14].

Definition 6.1.10. Es sei $X: J_r\pi \rightarrow T\mathcal{E}$ ein verallgemeinertes Vektorfeld. Die q -te Prolongation von X ist ein verallgemeinertes Vektorfeld $j_q X := \psi_q \circ \text{pr}^{(q)} X: J_{q+r}\pi \rightarrow TJ_q\pi$ mit der Eigenschaft $T\pi_0^q \circ j_q X = X \circ \pi_r^{q+r}$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} & \xleftarrow{\pi^r} & J_r\pi & \xleftarrow{\pi_r^{q+r}} & J_{q+r}\pi \\ \text{id}_{\mathcal{X}} \downarrow & & X \downarrow & \text{pr}^{(q)} X \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{X} & \xleftarrow{v} & T\mathcal{E} & \xleftarrow{v_0^q} & J_q v \\ & & \swarrow T\pi_0^q & \downarrow \psi_q & \downarrow \\ & & & TJ_q\pi & \downarrow \\ & & \swarrow \pi^q \circ \tau_{J_q\pi} & & \downarrow j_q X \end{array}$$

In lokalen Koordinaten $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q+r)})$ auf $J_{q+r}\pi$ erhalten wir folgendes Bild: Es sei

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) \partial_{x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \eta^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) \partial_{u^\alpha} \\ &= \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) \mathcal{C}_i^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^m \left(\eta^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) - \sum_{i=1}^n u_i^\alpha \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) \right) \partial_{u^\alpha} \\ &= X_\xi + X_Q \end{aligned}$$

eine lokale Darstellung eines verallgemeinerten Vektorfeldes $X: J_r\pi \rightarrow T\mathcal{E}$ der Ordnung $r > 0$. Insbesondere lässt sich X eindeutig in einen transversalen X_ξ und einen vertikalen Anteil X_Q additiv zerlegen. Dann besitzt die q -te Prolongation $j_qX: J_{q+r}\pi \rightarrow TJ_q\pi$ von X die Form

$$\begin{aligned} j_qX &= \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) \partial_{x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} \eta_\mu^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(|\mu|+r)}) \partial_{u_\mu^\alpha} \\ &= \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) \mathcal{C}_i^{(q+1)} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} D_\mu \left(\eta^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) - \sum_{i=1}^n u_i^\alpha \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) \right) \partial_{u_\mu^\alpha} \\ &= j_qX_\xi + j_qX_Q. \end{aligned}$$

Die gesuchten Koeffizientenfunktionen $\eta_\mu^\alpha = \eta_\mu^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(|\mu|+r)})$ werden nach der Formel

$$\eta_\mu^\alpha = D_\mu \left(\eta^\alpha - \sum_{i=1}^n u_i^\alpha \xi^i \right) + \sum_{i=1}^n u_{\mu+1_i}^\alpha \xi^i = D_\mu Q^\alpha + \sum_{i=1}^n u_{\mu+1_i}^\alpha \xi^i, \quad 0 < |\mu| \leq q \quad (6.11)$$

berechnet, vgl. die Prolongationsformel (4.38), wobei die Funktionen

$$Q^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) := \eta^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) - \sum_{i=1}^n u_i^\alpha \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}),$$

wie im Fall von infinitesimalen Kontakttransformationen, *Charakteristiken von X* genannt werden. Im Sonderfall eines verallgemeinerten Vektorfeldes $X: \mathcal{E} \rightarrow T\mathcal{E}$ der Ordnung Null, ist $j_qX: J_q\pi \rightarrow TJ_q\pi$ eine infinitesimale Punkttransformation der Ordnung q .

In Analogie zu Definition 6.1.5 nennen wir eine parametrisierte Familie von lokalen Schnitten $\bar{\sigma}_t \in \Gamma_{\mathcal{O}_t}(\pi)$ mit $t \in I$ naheliegenderweise *Lösung von $X: J_r\pi \rightarrow T\mathcal{E}$* , wenn für alle $(t, p_t) \in I \times \mathcal{O}_t$ gilt $X(\bar{\sigma}_t)(p_t) = [s \mapsto \bar{\sigma}_{t+s}(p_t)]_{s=0}$. Sind $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$ die Bildkoordinaten auf $\mathcal{O}_t \subseteq \mathcal{X}$ und $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\sigma}(t, \bar{\mathbf{x}}))$ eine lokale Darstellung einer Lösung $\bar{\sigma}_t$ von X , so ist $(\mathbf{x}, \bar{\sigma}(t, \bar{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})))$ eine lokale Darstellung einer Lösung von X_Q und umgekehrt.

Definition 6.1.11. Es sei $\mathcal{R}_q \subseteq J_q\pi$ eine reguläre Differentialgleichung der Ordnung q . Ein verallgemeinertes Vektorfeld $X: J_r\pi \rightarrow T\mathcal{E}$ heißt *verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_q* , wenn gilt $j_qX|_{\mathcal{R}_{q+r}}: \mathcal{R}_{q+r} \rightarrow T\mathcal{R}_q$.

Im Spezialfall $\mathcal{R}_q = J_q\pi$ ist $X: J_r\pi \rightarrow T\mathcal{E}$ stets eine verallgemeinerte Symmetrie von $J_q\pi$. Insbesondere ist $X = X_\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) \mathcal{C}_i^{(1)}$ mit $Q^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r)}) = 0$ eine verallgemeinerte Symmetrie von $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$. Diese Beobachtung beweist bereits die nächste Proposition.

Proposition 6.1.12. Es sei $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine reguläre lokal lösbare Differentialgleichung der Ordnung q . Ein verallgemeinertes Vektorfeld $X: J_r\pi \rightarrow T\mathcal{E}$ ist genau dann eine verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_q , wenn der vertikale Anteil von X eine vertikale verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_q ist.

Beweis. Es seien $\sigma \in \Gamma_{lok}(\pi)$ eine beliebige Lösung von \mathcal{R}_q und $X: J_r\pi \rightarrow T\mathcal{E}$ ein verallgemeinertes Vektorfeld. Es gilt $j_qX(\sigma) = (Tj_q\sigma \circ T\pi)(X(\sigma)) + j_qX_Q(\sigma)$. Da $\mathcal{R}_{q+r} \subset J_{q+r}\pi$ lokal lösbar ist, folgt aus $j_qX_\xi(\sigma) = (Tj_q\sigma \circ T\pi)(X(\sigma)) \subseteq T\mathcal{R}_q$ sofort die Behauptung. \square

Zusammenfassend halten wir fest, dass die Menge der verallgemeinerten Symmetrien von \mathcal{R}_q ,

$$\text{Sym}[\mathcal{R}_q, T\mathcal{E}] := \left\{ [X] \in \mathfrak{M}_U / \sim_U \mid \text{im } j_qX|_{\mathcal{R}_{q+r}} \subseteq T\mathcal{R}_q \right\} \supseteq \text{Sym}[\mathcal{R}_q, V\pi],$$

eine reelle Lie-Algebra bildet, wobei die Lie-Kammer durch (6.10) gegeben ist. Wir nennen zwei (vertikale) verallgemeinerte Symmetrien $[X]$ und $[Y]$ *äquivalent*, wenn $[(X - Y)_Q]$ eine

triviale vertikale verallgemeinerte Symmetrie ist. Insbesondere ist $[X]$ äquivalent zu $[X_Q]$. Man beachte, dass der \mathbb{R} -Untervektorraum der verallgemeinerten Symmetrien der Ordnung kleiner gleich r , in Zeichen $\text{Sym}_r[\mathcal{R}_q, T\mathcal{E}] := \{[X] \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, T\mathcal{E}] \mid X \in \mathfrak{X}_0(J_r\pi)\}$, in der Regel keine Lie-Unteralgebra bildet, da dieser unter der Lie-Klammer nicht abgeschlossen ist.

6.2 Eigenschaften verallgemeinerter Symmetrien

In diesem abschließenden Abschnitt wollen wir auf den Zusammenhang zwischen infinitesimalen inneren und verallgemeinerten Symmetrien näher eingehen. Es ist leicht zu zeigen, dass jede infinitesimale innere Symmetrie eine verallgemeinerte Symmetrie ist. Uns interessiert vor allem die umgekehrte Frage, unter welchen Bedingungen eine verallgemeinerte Symmetrie stets eine infinitesimale innere Symmetrie ist. Zur Beantwortung dieser Frage vergleichen wir ihre Wirkungen auf dem Lösungsraum einer gegebenen Differentialgleichung.

Zunächst stellen wir fest, dass zu jeder infinitesimalen Lie-Punktsymmetrie $j_q X \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q; V\pi_0^q]$ ihre Projektion $T\pi_0^q \circ j_q X = X \circ \pi_0^q$ eine verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_q der Ordnung Null ist. Für genuine infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrien $j_{q-1} X \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q]$ erster Ordnung sehen wir analog, dass ihre Projektion $T\pi_0^q \circ j_{q-1} X = T\pi_0^1 \circ X \circ \pi_1^q$ eine verallgemeinerte Symmetrie von $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ erster Ordnung ist. Folglich definiert die Zuordnung

$$\kappa_K : \begin{cases} \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q] & \longrightarrow \text{Sym}[\mathcal{R}_q, T\mathcal{E}] \\ X & \longmapsto [T\pi_0^q \circ X] \end{cases}$$

einen Lie-Algebren-*Monomorphismus*. Wie das Beispiel 6.1.7 explizit zeigt, ist nicht jede verallgemeinerte Symmetrie erster Ordnung eine infinitesimale Lie-Kontaktsymmetrie. In der Regel gilt $\kappa_K(\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{C}_q]) \subsetneq \text{Sym}_1[\mathcal{R}_q, T\mathcal{E}]$.

Wie bereits in Abschnitt 5.3 ausdrücklich betont wurde, besitzt jede infinitesimale innere Symmetrie $\bar{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ eine lokale Fortsetzung zu einem Vektorfeld $X: J_q\pi \rightarrow TJ_q\pi$.

Proposition 6.2.1. Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine reguläre lokal lösbare Differentialgleichung der Ordnung $q \geq 1$ und $\bar{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ eine infinitesimale innere Symmetrie von \mathcal{R}_q mit äußerer Fortsetzung $X: J_q\pi \rightarrow TJ_q\pi$. Dann ist $Y := T\pi_0^q \circ X: J_q\pi \rightarrow T\mathcal{E}$ eine verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_q .

Beweis. Es sei $\sigma_0 \in \Gamma_{lok}(\pi)$ eine beliebige lokale Lösung von $\mathcal{R}_q = \text{Sol}(\mathcal{R}_q)$. Wir betrachten den Fluss $\Phi_t = \exp(tX)$ von X , angewandt auf das Bild im $j_q\sigma_0 \subseteq \mathcal{R}_q$. Offenbar sind $\Phi_t(\text{im } j_q\sigma_0) = \text{im } j_q\sigma_t \subseteq \mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ Integralmannigfaltigkeiten der Kontaktdistribution \mathcal{C}_q . Insbesondere ist $\bar{\sigma}_t = (\pi_0^q \circ \Phi_t \circ j_q\sigma_0) \circ (\pi^q \circ \Phi_t \circ j_q\sigma_0)^{-1}$ eine Lösung von Y . In lokalen Koordinaten $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$ auf $J_q\pi$ besitzt Φ_t die Form $\Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = (\chi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}), \phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}))$ mit erzeugendem Vektorfeld $X = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \partial_{x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} \eta_\mu^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) \partial_{u_\mu^\alpha}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^i}{\partial t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) &= \xi^i(\Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})), & 1 \leq i \leq n, \\ \frac{\partial \phi_\mu^\alpha}{\partial t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) &= \eta_\mu^\alpha(\Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})), & 1 \leq \alpha \leq m, \quad 0 \leq |\mu| \leq q. \end{aligned}$$

Wir betrachten auf \mathcal{X} eine Familie von lokalen Diffeomorphismen $\varphi_t: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ gegeben durch $\varphi(t, \mathbf{x}) = \chi(t, \mathbf{x}, j_q\sigma_0(\mathbf{x}))$, wobei die zugehörigen inversen Diffeomorphismen mit ψ_t bezeichnet werden. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $\bar{\sigma}^\alpha(t, \bar{\mathbf{x}}) = \phi^\alpha(t, \bar{\mathbf{x}}, j_q\sigma_0(\bar{\mathbf{x}}))$. Dann ist

$\sigma^\alpha(t, \mathbf{x}) = \bar{\sigma}^\alpha(t, \psi(t, \mathbf{x}))$ eine Lösung von Y_Q . Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial t}(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial \bar{\sigma}^\alpha}{\partial t}(t, \psi(t, \mathbf{x})) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{\sigma}^\alpha}{\partial \bar{x}^j}(t, \psi(t, \mathbf{x})) \frac{\partial \psi^j}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \\ &= \eta^\alpha(\mathbf{x}, j_q \sigma(t, \mathbf{x})) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{\sigma}^\alpha}{\partial \bar{x}^j}(t, \psi(t, \mathbf{x})) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi^j}{\partial x^i}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi^i}{\partial t}(t, \psi(t, \mathbf{x})) \right) \\ &= \eta^\alpha(\mathbf{x}, j_q \sigma(t, \mathbf{x})) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^i}(t, \mathbf{x}) \xi^i(\mathbf{x}, j_q \sigma(t, \mathbf{x})) = Q^\alpha(\mathbf{x}, j_q \sigma(t, \mathbf{x})). \end{aligned}$$

In der zweiten Gleichheit haben die Identität $\mathbf{x} = \psi(t, \varphi(t, \mathbf{x}))$ verwendet, welche nach dem Parameter t abgeleitet wurde. Zusammenfassend sehen wir, dass die verallgemeinerten Vektorfelder $X \circ \pi_q^{2q}: J_{2q}\pi \rightarrow TJ_q\pi$ und $j_q Y: J_{2q}\pi \rightarrow TJ_q\pi$ auf der prolongierten Differentialgleichung $\mathcal{R}_{2q} \subset J_{2q}\pi$ übereinstimmen. Insbesondere ist $j_q Y|_{\mathcal{R}_{2q}}: \mathcal{R}_{2q} \rightarrow TJ_q\pi$ projizierbar auf \mathcal{R}_q und es gilt $j_q Y|_{\mathcal{R}_{2q}} = \bar{X} \circ \hat{\pi}_q^{2q}$. \square

Für zwei unterschiedliche Fortsetzungen $X_1, X_2: J_q\pi \rightarrow TJ_q\pi$ von $\bar{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ stimmen $T\pi_0^q \circ X_1$ und $T\pi_0^q \circ X_2$ auf $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ überein, weshalb die Zuordnung

$$\kappa_I: \begin{cases} \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]] \longrightarrow \text{Sym}[\mathcal{R}_q, T\mathcal{E}]/\sim_{\mathcal{R}_q} \\ \bar{X} \longmapsto [T\pi_0^q \circ X] \end{cases}$$

einen wohldefinierten Lie-Algebren-Monomorphismus festlegt. Im Allgemeinen ist die Inklusion $\kappa_I(\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]) \subseteq \text{Sym}_q[\mathcal{R}_q, T\mathcal{E}]/\sim_{\mathcal{R}_q}$ echt. Hat die betrachtete infinitesimale innere Symmetrie \bar{X} die Ordnung $r \geq 0$, so hat auch $[T\pi_0^q \circ X]$ die Ordnung r . Vor diesem Hintergrund bemerken wir weiter, dass jede infinitesimale innere Symmetrie äquivalent zu einer vertikalen verallgemeinerten Symmetrie ist. Jede vertikale infinitesimale innere Symmetrie $\bar{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{N}_q]$ ist eine vertikale verallgemeinerte Symmetrie.

Beispiel 6.2.2. Wir betrachten ein normales System expliziter gewöhnlicher (nicht unterbestimmter) Differentialgleichungen der Ordnung $q > 1$ der Form

$$\mathcal{R}_q: \left\{ u_q^\alpha = \phi^\alpha(x, \mathbf{u}^{(q-1)}), \quad 1 \leq \alpha \leq m. \right.$$

Die zugehörige eindimensionale Vessiot-Distribution ist involutiv und wird durch das Vektorfeld

$$X = D_x|_{\mathcal{R}_{q+1}} = \partial_x + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{k=0}^{q-2} u_{k+1}^\alpha \partial_{u_k^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^m \phi^\alpha \partial_{u_{q-1}^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^m \left(\mathcal{C}_x^{(q-1)}(\phi^\alpha) + \sum_{\beta=1}^m \phi^\beta \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial u_{q-1}^\beta} \right) \partial_{u_q^\alpha}$$

aufgespannt. Da ihr Symbol $\mathcal{N}_q = \{0\}$ trivial ist, hat jede infinitesimale innere Symmetrie von $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ höchstens die Ordnung $q-1$. Wegen $\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] = \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ ist $\xi(x, \mathbf{u}^{(q-1)})X$ mit $\xi \in \mathcal{F}(J_{q-1}\pi)$ stets eine infinitesimale innere Symmetrie. Insbesondere ist $\xi \mathcal{C}_x^{(1)} = T\pi_0^q \circ (\xi X)$ eine verallgemeinerte Symmetrie der Ordnung $q-1$. Die verbleibenden vertikalen Shuffling-Symmetrien haben in äußeren Koordinaten auf $J_q\pi$ die Form

$$Y = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{k=0}^{q-1} (X^k Q^\alpha)(x, \mathbf{u}^{(q-1)}) \left(\partial_{u_k^\alpha} + \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial \phi^\beta}{\partial u_k^\alpha}(x, \mathbf{u}^{(q-1)}) \partial_{u_q^\beta} \right),$$

wobei $X^k = X \circ \dots \circ X$ die k -fache Hintereinanderausführung des Operators X bezeichnet. Dann ist $T\pi_0^q \circ Y = \sum_{\alpha=1}^m Q^\alpha(x, \mathbf{u}^{(q-1)}) \partial_{u_q^\alpha}$ eine vertikale verallgemeinerte Symmetrie. Folglich gilt $\kappa_I(\text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]) \subseteq \text{Sym}_{q-1}[\mathcal{R}_q, T\mathcal{E}]/\sim_{\mathcal{R}_q}$. \triangleleft

Das nächste Theorem beschreibt allgemein, unter welchen Bedingungen eine verallgemeinerte Symmetrie stets eine infinitesimale innere Symmetrie ist.

Theorem 6.2.3. *Es seien $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ eine reguläre lokal lösbare Differentialgleichung der Ordnung q und $X: J_r\pi \rightarrow T\mathcal{E}$ eine verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_q derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) *Die q -te Prolongation $j_q X|_{\mathcal{R}_{q+r}}: \mathcal{R}_{q+r} \rightarrow T\mathcal{R}_q$ ist über r Ordnungen projizierbar, d.h. es existiert ein Vektorfeld $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_q)$ derart, dass gilt $j_q X|_{\mathcal{R}_{q+r}} = \bar{X} \circ \hat{\pi}_q^{q+r}$.*
- (ii) *Es gilt $\mathcal{L}_{\bar{X}}\mathcal{V}[\mathcal{R}_q] = [\bar{X}, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]] \subseteq \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]$.*

Dann ist $\bar{X} \in \text{Sym}[\mathcal{R}_q, \mathcal{V}[\mathcal{R}_q]]$ eine infinitesimale innere Symmetrie von \mathcal{R}_q mit $\kappa_I(\bar{X}) = [X]$.

Beweis. Da $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ nach Voraussetzung lokal lösbar ist, ist die Projektion $\hat{\pi}_q^{q+r}: \mathcal{R}_{q+r} \rightarrow \mathcal{R}_q$ surjektiv. Aus der ersten Bedingung folgt die Existenz eines Vektorfeldes $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_q)$ mit der Eigenschaft $T\hat{\pi}_0^q \circ \bar{X} \circ \hat{\pi}_q^{q+r} = X \circ \hat{\pi}_r^{q+r}$. Die zweite Bedingung besagt, dass \bar{X} eine infinitesimale innere Symmetrie von \mathcal{R}_q ist. Für jede lokale Lösung $\sigma \in \Gamma_{\text{lok}}(\pi)$ von \mathcal{R}_q ist im $\bar{\sigma}_t = (\hat{\pi}_0^q \circ \exp(t\bar{X}))(\text{im } j_q\sigma)$ der Graph einer Lösung von X . Folglich gilt $\kappa_I(\bar{X}) = [X]$. \square

Ist $X: J_r\pi \rightarrow T\mathcal{E}$ eine verallgemeinerte Symmetrie einer Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subset J_q\pi$ vom endlichen Typ, so ist $j_q X|_{\mathcal{R}_{q+r}}: \mathcal{R}_{q+r} \rightarrow T\mathcal{R}_q$ über $r+1$ Ordnungen projizierbar.

Beispiel 6.2.4. Wir betrachten die nichtviskose Burgersgleichung

$$\mathcal{R}_1: \left\{ \begin{array}{l} u_t = uu_x. \end{array} \right.$$

Als Ansatz wählen wir ein vertikales verallgemeinertes Vektorfeld $Y: J_1\pi \rightarrow V\pi$ mit Darstellung $Y = Q(t, x, u, u_x)\partial_u$. Aus der Invarianzbedingung (6.5) folgt, dass Y genau dann eine vertikale verallgemeinerte Symmetrie von \mathcal{R}_1 ist, wenn die Gleichung $D_t Q = uD_x Q + u_x Q$ auf $\mathcal{R}_2 \subset J_2\pi$ erfüllt ist. Die prolongierte Differentialgleichung \mathcal{R}_2 lautet, ausgeschrieben

$$\mathcal{R}_2: \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = u_t u_x + uu_{xx} = u^2 u_{xx} + 2uu_x^2, \\ u_{tx} = uu_{xx} + u_x^2, \\ u_t = uu_x. \end{array} \right.$$

Nach Substitution ergibt sich folgende Gleichung für $Q = Q(t, x, u, u_x)$:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - u \frac{\partial Q}{\partial x} + u_x^2 \frac{\partial Q}{\partial u_x} = u_x Q.$$

Sie kann nach der Charakteristikenmethode gelöst werden; als allgemeine Lösung erhält man

$$Q(t, x, u, u_x) = u_x \phi \left(x + tu, u, t + \frac{1}{u_x} \right)$$

mit einer beliebigen glatten Funktion $\phi = \phi(z_1, z_2, z_3)$. Jede nichttriviale verallgemeinerte Symmetrie $X: J_1\pi \rightarrow T\mathcal{E}$ von \mathcal{R}_1 besitzt die Form

$$X = \xi^1(t, x, u, u_x)\mathcal{C}_t^{(1)} + \xi^2(t, x, u, u_x)\mathcal{C}_x^{(1)} + Q(t, x, u, u_x)\partial_u. \quad (6.12)$$

Für die erste Prolongation $j_1 X: J_2\pi \rightarrow TJ_1\pi$ von X finden wir

$$\begin{aligned} j_1 X = & \xi^1 \partial_t + \xi^2 \partial_x + (Q + u_t \xi^1 + u_x \xi^2)(\partial_u + u_x \partial_{u_t}) + (D_x Q + u_{tx} \xi^1 + u_{xx} \xi^2)(\partial_{u_x} + u \partial_{u_t}) \\ & + (D_t Q - u D_x Q - u_x Q - u_t u_x \xi^1 + u_{tt} \xi^1 - uu_{tx} \xi^1 - u_x^2 \xi^2 - uu_{xx} \xi^2 + u_{tx} \xi^2) \partial_{u_t}. \end{aligned}$$

In inneren Koordinaten $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_{xx})$ auf \mathcal{R}_2 erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \bar{j}_1 \bar{X} &= \xi^1 \partial_{\bar{t}} + \xi^2 \partial_{\bar{x}} + (Q + \bar{u} \bar{u}_x \xi^1 + \bar{u}_x \xi^2) \partial_{\bar{u}} + \left(\frac{\partial Q}{\partial \bar{x}} + \bar{u}_x \frac{\partial Q}{\partial \bar{u}} + \bar{u}_x^2 \xi^1 \right) \partial_{\bar{u}_x} \\ &\quad + \bar{u}_{xx} \left(\frac{\partial Q}{\partial \bar{u}_x} + \bar{u} \xi^1 + \xi^2 \right) \partial_{\bar{u}_{xx}}. \end{aligned}$$

Offenbar ist $\bar{j}_1 \bar{X}: \mathcal{R}_2 \rightarrow T\mathcal{R}_1$ genau dann projizierbar auf \mathcal{R}_1 , wenn gilt

$$\xi^2 = -u \xi^1 - \frac{\partial Q}{\partial u_x}. \quad (6.13)$$

Auf diese Weise erhalten wir ein Vektorfeld $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_1)$ mit der Eigenschaft $\bar{X} \circ \hat{\pi}_1^2 = \bar{j}_1 \bar{X}$:

$$\bar{X} = \bar{X}_{\xi^1} + \bar{X}_{\phi} = \xi^1 (\partial_{\bar{t}} - \bar{u} \partial_{\bar{x}} + \bar{u}_x^2 \partial_{\bar{u}_x}) - \frac{\partial Q}{\partial \bar{u}_x} \partial_{\bar{x}} + \left(Q - \bar{u}_x \frac{\partial Q}{\partial \bar{u}_x} \right) \partial_{\bar{u}} + \left(\frac{\partial Q}{\partial \bar{x}} + \bar{u}_x \frac{\partial Q}{\partial \bar{u}} \right) \partial_{\bar{u}_x}.$$

Es bleibt zu überprüfen, ob \bar{X} eine infinitesimale innere Symmetrie ist. Die zugehörige Vessiot-Distribution $\mathcal{V}[\mathcal{R}_1]$ wird durch die Vektorfelder

$$\bar{X}_1 = \partial_{\bar{t}} + \bar{u} \bar{u}_x \partial_{\bar{u}}, \quad \bar{X}_2 = \partial_{\bar{x}} + \bar{u}_x \partial_{\bar{u}}, \quad \bar{Y} = \partial_{\bar{u}_x}$$

aufgespannt. Es gilt $\bar{X}_{\xi^1} \in \text{Char}[\mathcal{V}[\mathcal{R}_1]] = \langle \bar{X}_1 - \bar{u} \bar{X}_2 + \bar{u}_x^2 \bar{Y} \rangle \subseteq \text{Sym}[\mathcal{R}_1, \mathcal{V}[\mathcal{R}_1]]$. Man verifiziert leicht $[\bar{X}_{\phi}, \bar{X}_i] \subseteq \langle \bar{X}_2, \bar{Y} \rangle$ und $[\bar{X}_{\phi}, \bar{Y}] \subseteq \langle \bar{X}_2, \bar{Y} \rangle$. Folglich ist eine verallgemeinerte Symmetrie der Form (6.12) genau dann eine infinitesimale innere Symmetrie, wenn (6.13) gilt.

◁

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Forschungsgegenstand der Arbeit ist eine intrinsische geometrische Formulierung der Symmetrietheorie für Distributionen, im Speziellen der Vessiot-Distribution. Wir betrachten dabei allgemeine Systeme (partieller) Differentialgleichungen; dies schließt insbesondere beliebig komplizierte nichtlineare Systeme ein. Ein wesentliches Hauptziel dieser Arbeit war es zu klären, wann es mehr (infinitesimale) innere als (infinitesimale) äußere Symmetrien gibt.

Den Ausgangspunkt der Untersuchungen stellt das klassische Theorem von Bäcklund dar, welches bei genauerer Betrachtung mannigfache Eigenschaften von Kontakttransformationen offenbart. Die für unsere Zwecke wesentliche Eigenschaft betrifft die Vertikalbündel. Nach einer gründlichen Analyse der Prolongationsformeln stellt man fest, dass die prolongierten Kontakttransformationen die Vertikalbündel invariant lassen. Diese Tatsache ist bereits in der Definition der Prolongation implizit festgehalten. Unter diesem Blickwinkel besagt das Bäcklunds Theorem (mit einer Ausnahme), dass jede Kontakttransformation die Vertikalbündel in sich überführt. Die Invarianz der Vertikalbündel muss aber notwendigerweise eine Folge der Kontaktbedingung sein. Daher war es naheliegend einen differentialgeometrischen Grund für diese Beobachtung in den Eigenschaften der Kontaktdistribution zu suchen.

Da die Vertikalbündel unterschiedlicher Ordnung nicht in der Kontaktdistribution enthalten sind, suchten wir nach einer geschickten Möglichkeit Letztere geeignet zu erweitern. Es hat sich herausgestellt, dass die iterierte Ableitung der Kontaktdistribution das gewünschte Ergebnis liefert. Die mehrfach abgeleiteten Kontaktdistributionen enthalten die Vertikalbündel und sind invariant unter Kontakttransformationen. Über den Zusammenhang mit Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distributionen ist es uns gelungen das Theorem von Bäcklund auf anderem Wege zu beweisen. Es stellt sich weiter heraus, dass die beschriebene Vorgehensweise auf beliebige Distributionen verallgemeinert werden kann, hiervon handelt das dritte Kapitel. Dabei abstrahieren wir uns von den zugrundeliegenden Differentialgleichungen und betrachten die Situation auf der Ebene von Distributionen. In diesem verallgemeinerten Kontext untersuchen wir die Eigenschaften der Lie-Pseudogruppe von geometrischen Symmetrien. Unser Ansatz besteht in der Konstruktion von Subdistributionen, die unter allen geometrischen Symmetrien invariant sind. Aus der Vertauschbarkeit der Lie-Klammer mit dem Pushforward lassen sich eine Vielzahl an invarianten Subdistributionen gewinnen. Im Speziellen sind die abgeleiteten Distributionen invariant. Diese entstehen aus einer gegebenen invarianten Distribution durch Hinzunahme von Lie-Klammern der beteiligten Vektorfelder. Mehr noch, es stellte sich heraus, dass die so konstruierten abgeleiteten Distributionen spezielle invariante Subdistributionen enthalten, welche ausschließlich aus Cauchy-Cartan-Charakteristiken bestehen. Die Existenz dieser Subdistributionen hat weitreichende Folgen. Sie ermöglichen unter anderem den Nachweis der Invarianz der Vertikalbündel, die bei Projektionen von geometrischen Symmetrien eine entscheidende Rolle spielen.

In Kapitel 4 und 5 wenden wir die beschriebene geometrische Symmetrietheorie auf die Kontaktdistribution bzw. die Vessiot-Distribution an. Die für innere Symmetrien wichtige Erkenntnis ist, dass diese im Lokalen genau dann äußere Punktsymmetrien sind, wenn die Vertikalbündel invariant sind. Durch die Einführung der abgeleiteten Vessiot-Distributionen können wir dafür hinreichende und leicht verifizierbare Kriterien angeben. Die Situation vereinfacht sich enorm, wenn wir ausschließlich infinitesimale innere Symmetrien betrachten. In diesem Fall genügt es, die Dimensionen der zugehörigen involutiven bestimmenden Systeme zu berechnen. Damit sind wir in der Lage algorithmisch zu entscheiden, wann eine gegebene Differentialgleichung mehr infinitesimale innere als infinitesimale äußere Symmetrien besitzt, und zwar ohne die bestimmenden Systeme vorher zu lösen.

In Kapitel 6 geben wir eine intrinsische Formulierung der verallgemeinerten Symmetrien an. Wir beschreiben genau, unter welchen Bedingungen verallgemeinerte Symmetrien mit infinitesimalen inneren Symmetrien übereinstimmen.

In der geometrischen Theorie der Differentialgleichungen wird in der Regel angenommen, dass die Vessiot-Distribution regulär ist. Diese Annahme ist aber nur dann erfüllt, wenn die betrachtete Differentialgleichung keine Singularitäten besitzt. Eine wichtige Richtung für zukünftige Forschung ist die Weiterentwicklung der Vessiot-Theorie für Differentialgleichungen mit Singularitäten. Es wäre zweifelsohne hilfreich zu verstehen, wie sich die abgeleiteten Vessiot-Distributionen in einer Umgebung von Singularitäten verhalten.

Ein eng mit Symmetrien verwandtes Thema ist das lokale Äquivalenzproblem. Eine Formulierung mittels Vessiot-Theorie würde erlauben, es auch auf Systeme mit Singularitäten (wie sie z.B. häufig bei der Modellierung elektrischer Schaltkreise auftreten) zu erweitern. Hierzu ist eine Klassifizierung der Strukturgleichungen der Vessiot-Distribution erforderlich. Ein besonders für Anwendungen interessanter Spezialfall besteht darin zu erkennen, wann eine nichtlineare Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung transformiert werden kann.

Die Mehrzahl der in Anwendungen auftretenden Differentialgleichungen gestattet weder eine analytische Lösung noch eine vollständige qualitative Untersuchung. Anwendungen der Symmetriemethoden auf singularär gestörte Differentialgleichungen haben gezeigt, dass das Vorhandensein kleiner Parameter einige Symmetrien zerstört. Diese Beobachtung motiviert die Entwicklung neuer approximativer Symmetriemethoden, welche stabil bezüglich kleiner Änderung der Parameter sind. Approximative Symmetrien haben bisher nur wenig Beachtung gefunden, dabei könnten sie im Zusammenspiel mit der Störungstheorie eine große Rolle in Anwendungen spielen.

Literaturverzeichnis

- [1] Abraham, R., Marsden, J., Ratiu, T.: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Applied Mathematical Sciences 75, Springer-Verlag, New York (1988)
- [2] Adachi, J.: Global stability of special multi-flags. *Israel Journal of Mathematics* 179:29–56 (2010)
- [3] Alonso-Blanco, R., Blázquez-Sanz, D.: The only global contact transformations of order two or more are point transformations. *Journal of Lie Theory* 15:135–143 (2005)
- [4] Anderson, I., Kamran, N., Olver, P.: Internal, external, and generalized symmetries. *Advances in Mathematics* 100:53–100 (1993)
- [5] Anderson, I., Ibragimov, N.: *Lie-Backlund Transformations in Applications*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (1979)
- [6] Bäcklund, A.: Über Flächentransformationen. *Mathematische Annalen* 9:297–320 (1876)
- [7] Bluman, G., Cole, J.: The general similarity solution of the heat equation. *Journal of Mathematics and Mechanics* 18(11):1025–1042 (1969)
- [8] Bluman, G., Kumei, S.: *Symmetries and Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences 81, Springer-Verlag, New York (1989)
- [9] Cantwell, B.: *Introduction to Symmetry Analysis*. Cambridge Texts in Applied Mathematics 29, Cambridge University Press, Cambridge (2002)
- [10] Ehresmann, C.: Les prolongements d’une variété différentiable. *Comp. Rend. Acad. Sci.* 233, 598–600, 777–779, 1081–1083 (1951)
- [11] Ehresmann, C.: Les prolongements d’une variété différentiable. *Comp. Rend. Acad. Sci.* 234, 1028–1030, 1424–1425 (1952)
- [12] Fackerell, E.: Isovectors and prolongation structures by Vessiot’s vector field formulation of partial differential equations. In: Martini, R.,(editor): *Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems*, Lecture Notes in Physics 239:303–321. Springer-Verlag, Berlin (1985)
- [13] Fesser, D.: *On Vessiot’s theory of partial differential equations*. PhD thesis, Fachbereich Mathematik, Universität Kassel (2008)
- [14] Gardner, R.: Invariants of Pfaffian Systems. *American Mathematical Society* 126:514–533 (1967)
- [15] Hermes, H.: Distributions and the Lie Algebras their Bases Can Generate. *Proceedings of The American Mathematical Society* 106:555–555 (1989)
- [16] Isidori, A.: *Nonlinear Control Systems: An Introduction*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 72, Springer-Verlag, Berlin (1985)
- [17] Janet, M.: Sur les systèmes d’équations aux dérivées partielles. *J. Math. Pure Appl.* 3:65—151 (1920)
- [18] Krasilshchik, I., Lychagin, V., Vinogradov, A.: *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*. Gordon & Breach, New York (1986)
- [19] Kruglikov, B., Lychagin, V.: Geometry of differential equations. *Handbook of Global Analysis* 12 (2008)

- [20] Lie, S.: Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungstransformationen. *Mathematische Annalen* 8(3):215–303 (1874)
- [21] Lie, S., Scheffers, G.: *Geometrie der Berührungstransformationen*. Verlag von B. J. Teubner (1896)
- [22] Montgomery, R., Zhitomirskii, M.: Geometric approach to goursat flags. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis* 18(4):459–493 (2001)
- [23] Olver, P., Rosenau, P.: Group-invariant solutions of differential equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 47:263–278 (1987)
- [24] Olver, P., Rosenau, P.: The construction of special solutions to partial differential equations. *Physics Letters A* 114(3):107–112 (1986)
- [25] Olver, P.: *Equivalence, Invariants and Symmetry*. London Mathematical Society Lecture Notes. Cambridge University Press, Cambridge (1995)
- [26] Olver, P.: *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (2. Aufl.). Graduate Texts in Mathematics 107, Springer-Verlag, New York (1993)
- [27] Ovsiannikov, L.: *Group Analysis of Differential Equations*. Academic Press, New York (1982)
- [28] Pommaret, J.: *Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups*. Gordon & Breach, London (1978)
- [29] Pucci, E., Saccomandi, G.: On the weak symmetry groups of partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 163(2):588–598 (1992)
- [30] Saunders, D.: *The Geometry of Jet Bundles*. London Mathematical Society Lecture Notes Series 142, Cambridge University Press, Cambridge (1989)
- [31] Seiler, W.: *Involution: The Formal Theory of Differential Equations and its Applications in Computer Algebra*. Algorithms and Computation in Mathematics 24, Springer-Verlag, Berlin (2010)
- [32] Shibuya, K., Yamaguchi, K.: Drapeau theorem for differential systems. *Differential Geometry and its Applications* 27(6):793–808 (2009)
- [33] Stormark, O.: *Lie's Structural Approach to PDE Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge (2000)
- [34] Tietz, H.: Die klassische Mechanik als Transformationstheorie *Zeitschrift für Naturforschung A* 6(8):417–420 (1951)
- [35] Varadarajan, V.: *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*. Graduate Texts in Mathematics 102, Springer-Verlag, New York (1984)
- [36] Vassiliou, P.: Coupled Systems of Nonlinear Wave Equations and Finite-dimensional Lie Algebras I. *Acta Applicandae Mathematica* 8(2):107–147 (1987)
- [37] Vassiliou, P.: On local equivalence for vector field systems. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 42(2):215–229 (1990)
- [38] Vinogradov, A.: *Cohomological Analysis of Partial Differential Equations and Secondary Calculus*. American Mathematical Soc. (2001)
- [39] Warner, F.: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (1983)
- [40] Yamaguchi, K.: Contact geometry of higher order. *Japanese journal of mathematics* 8(1):109–176 (1982)
- [41] Yamaguchi, K.: Geometrization of Jet bundles. *Hokkaido Mathematical Journal* 12(1):27–40 (1983)

Index

- Bündel, 6
 - Jetbündel, 7
 - Vertikalbündel, 6
- Charakteristik, 72, 120
- Differentialgleichung, 9, 21
 - formal integrabel, 13
 - involutiv, 15
 - lokal lösbar, 10
 - regulär, 12
 - vom endlichen Typ, 14
- Distribution, 19
 - k -fach schwach abgeleitet, 26, 90
 - k -fach stark abgeleitet, 25, 44, 88
 - Cauchy-Cartan-Charakteristiken-Distribution, 27, 51, 94
 - holonom, 25
 - invariant, 22
 - Kontaktdistribution, 8
 - Urbilddistribution, 34
 - Vessiot-Distribution, 16
- Kontaktbedingung
 - transversal, 42, 67
 - verallgemeinert, 46
 - vertikal, 42, 67
- Kontaktmatrix, 44
- Kontakttransformation, 41
 - infinitesimal, 67
- Legendre-Transformation, 61
- Projektion
 - einer Differentialgleichung, 10
 - einer geometrischen Symmetrie, 34
 - einer infinit. inneren Symmetrie, 109
 - einer infinit. Kontakttransformation, 69
 - einer inneren Symmetrie, 98
 - einer Kontakttransformation, 53
 - einer verallgemeinerten Symmetrie, 123
- Prolongation
 - einer Differentialgleichung, 11, 32
 - einer geometrischen Symmetrie, 35
 - einer infinit. inneren Symmetrie, 110
 - einer infinit. Kontakttransformation, 74
 - einer inneren Symmetrie, 99
 - einer Kontakttransformation, 62
 - eines Schnittes, 8
- Prolongationsformel, 43, 74, 120
- Symbol, 14
 - involutiv, 15
 - verallgemeinert, 90
- Symmetrie
 - geometrisch, 20
 - infinit. Kontaktsymmetrie, 80
 - infinit. Lie-Kontaktsymmetrie, 80
 - infinit. Lie-Punktsymmetrie, 80
 - infinit. Punktsymmetrie, 80
 - infinitesimal geometrisch, 36
 - infinitesimal innere, 103
 - innere, 85
 - Kontaktsymmetrie, 75
 - Lie-Kontaktsymmetrie, 77
 - Lie-Punktsymmetrie, 77
 - Punktsymmetrie, 77
 - Shuffling-Symmetrie, 39, 106
 - verallgemeinert, 120
 - vertikal infinitesimal innere, 106
 - vertikal verallgemeinert, 116
- Theorem von Bäcklund
 - global, 65
 - infinitesimal, 74
 - lokal, 65
- Vektorfeld
 - Ordnung, 109, 114
 - verallgemeinert, 113
 - vertikal verallgemeinert, 114

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig, ohne unerlaubte Hilfe Dritter angefertigt und andere als die in der Dissertation angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Dritte waren an der inhaltlichen Erstellung der Dissertation nicht beteiligt; insbesondere habe ich nicht die Hilfe eines kommerziellen Promotionsberaters in Anspruch genommen. Kein Teil dieser Arbeit ist in einem anderen Promotions- oder Habilitationsverfahren durch mich verwendet worden.

Kassel, den 12. April 2021

Maxim Urich