ZENTRUM FÜR LEHRER:INNENBILDUNG ZLB

Reihe Studium und Forschung | 36

Ernst Ulrich von Weizsäcker-Preis 2021 des ZLB

Emine Shaka

Lösungswerkzeuge von Erstklässler*innen bei Additions- und Subtraktionsaufgaben

kassel university press

Emine Shaka

Lösungswerkzeuge von Erstklässler*innen bei Additions- und Subtraktionsaufgaben

Ausgezeichnet mit dem
Ernst Ulrich von Weizsäcker-Preis 2021 des ZLB

Kassel 2022

kassel
university
press

Zentrum für Lehrer:innenbildung der Universität Kassel (Hrsg.)
Reihe Studium und Forschung, Heft 36

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

ISBN 978-3-7376-1040-7
DOI: https://doi.org/doi:10.17170/kobra-202204065985

https://kup.uni-kassel.de

Druck und Verarbeitung: Print Management Logistik Service, Kassel
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die vorliegende Arbeit von Frau Emine Shaka zum Thema *Lösungswerkzeuge von Erstklässler*innen bei Additions- und Subtraktionsaufgaben* ist in der mathematikdidaktischen Lehr-Lernforschung verortet und wurde im Herbst 2021 mit dem *Ernst Ulrich von Weizsäcker-Preis* ausgezeichnet. Mit diesem Preis würdigt das Zentrum für Lehrerbildung der Universität Kassel herausragende wissenschaftliche Abschlussarbeiten von Lehramtsstudierenden, die entweder die kritisch-reflexive Weiterentwicklung von Schule und Lehrerbildung oder gesellschaftlich relevante Querschnittsthemen zur Bildung für nachhaltige Entwicklung ansprechen.

Mit dem Fokus auf Lernvoraussetzungen von jungen Kindern im Bereich der Arithmetik und der Frage nach Lösungswerkzeugen von Erstklässler*innen und deren Ablösung vom zählenden Rechnen setzt Frau Shaka an einer zentralen Bedingung für das Vermeiden von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen an. Die Prävention solcher Schwierigkeiten ist ein gesellschaftlich brisantes und relevantes Thema. Nach wie vor haben die Leistungen in Mathematik einen entscheidenden Einfluss auf Bildungsbiografien von Schülerinnen und Schülern, und die Grundlagen für Erfolg im Fach Mathematik werden in der Grundschule gelegt. Die Forschungslage zeigt, dass ca. 15 % der Schülerinnen und Schüler im Laufe der Grundschulzeit besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen entwickeln, die sich weder im Unterricht noch durch individuelle Förderung in der Schule auffangen lassen. In der Grundschule werden die sich bereits im ersten Schuljahr entwickelnden Schwierigkeiten häufig nicht oder zu spät erkannt. Dies liegt unter anderem daran, dass der Schwerpunkt beim Rechnen nicht auf den Lösungsprozessen und den genutzten Lösungswerkzeugen liegt, sondern auf den korrekt ermittelten Ergebnissen. Somit fällt in den ersten beiden Schuljahren kaum auf, wenn Schülerinnen und Schüler Additions- und Subtraktionsaufgaben vorwiegend zählend lösen und Zahl- und Operationsverständnis nur unzureichend entwickelt wurden.

Frau Shaka untersucht in ihrer Arbeit gezielt die Lösungsprozesse und Lösungswerkzeuge von Schülerinnen und Schülern aus dem ersten Schuljahr. Sie entwickelt ein diagnostisches Interview auf der Basis eines einfachen Aufgabenformats, anhand dessen nicht nur die Lösungswerkzeuge der Kinder zu allen Aufgabentypen im Zahlenraum bis 20 erfasst werden können, sondern auch die Begründung ihrer Vorgehensweisen. Dieses diagnostische Interview ermöglicht Aussagen über Lösungsprodukte, Lösungsprozesse und Begründungen von Aufgabenschwierigkeiten und damit detaillierte Einblicke in die individuellen Lernstände der Lernenden. Mit diesem diagnostischen Interview hat Frau Shaka die Lösungsprozesse von zehn Schülerinnen und Schülern aus dem ersten Schuljahr im Bereich der Addition und Subtraktion erfasst. Für die Analyse der Vorgehensweisen stellt sie ein Analyseraster vor, das auf nationalen und internationalen Forschungsarbeiten aufbaut und einen schnellen Überblick über die genutzten Lösungswerkzeuge ermöglicht. Zudem lässt sich anhand dieses Rasters unmittelbar beurteilen, ob ein Kind den zentralen Schritt vom Zählen zum Rechnen vollzogen hat, der für das weitere Mathematiklernen von entscheidender Bedeutung ist.

Das von Frau Shaka entwickelte diagnostische Interview zeichnet sich durch eine herausragende Qualität aus und kann direkt von praktizierenden Lehrkräften genutzt werden. Dies gilt ebenso für das Analyseraster: Es ist einfach handhabbar, aussagekräftig und kann zur Diagnostik von Rechenkompetenzen am Ende des ersten und zu Beginn des zweiten Schuljahrs herangezogen werden. Die von Frau Shaka entwickelten Instrumente haben großes Potenzial zur „kritisch-reflexiven Weiterentwicklung" von gängigen Praktiken der Diagnostik im Mathematikunterricht.

Die Entwicklung des diagnostischen Interviews sowie Erfassung und Analyse von Lösungswerkzeugen und Lösungsprozessen bauen auf einer äußerst fundierten Auseinandersetzung mit theoretischen und empirischen Befunden zur Entwicklung des Zahlverständnisses und des Rechnens auf.

Ich wünsche der Arbeit von Frau Shaka viele interessierte Leserinnen und Leser, die diese mit ebenso viel Neugierde und Freude lesen, wie ich es getan habe. Sie alle erwartet nicht nur eine Fülle von Informationen zur aktuellen Diskussion im Bereich des Rechnenlernens, sondern auch Einblicke in ein diagnostisches Instrument, das durch die Balance von Prozess- und Produktorientierung gekennzeichnet ist.

Kassel, 01.04.2022

Prof'in Dr. Elisabeth Rathgeb-Schnierer

1. Einleitung

„Ich kanns auswendig, Trick und zählen, also alles“ – Elena, 6 Jahre alt.

Im Bereich der Grundschule besteht eine Vielzahl an Uneinigkeiten, welche das Mathematiklernen betreffen. In einer Angelegenheit herrscht jedoch kein Zweifel: Kinder sollen frühestmöglich vom zählenden Rechnen ablösen (Gaidoschik, Fellmann & Guggenbichler, 2015). Ein zählendes Rechnen kann durch die Zuhilfenahme der Finger, anderer materieller Hilfsmittel oder dem verbalen bzw. mentalen Zählen zustande kommen. Damit beschrieben wird ein zählendes Bestimmen von Rechenergebnissen, welches es zu überwinden gilt (Gaidoschik, 2010). Daher erscheint es nicht verwunderlich, dass genau dies eines der zentralen Ziele des Mathematikunterrichts in der Primarstufe darstellt (Rechtsteiner-Merz, 2015). In den inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards für die Grundschule findet sich der Kompetenzbereich Zahlen und Operationen wieder. Hierbei geht es unter anderem darum, Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen zu erkennen, welche eine Voraussetzung für die Rechenfähigkeiten darstellen, und Rechenoperationen zu verstehen sowie zu beherrschen, um Rechenprobleme bewältigen zu können (Rasch & Schütte, 2016). Damit dies gelingen kann, muss eine zunehmende Distanzierung vom zählenden Rechnen hergestellt werden, welche ein erfolgreiches Mathematiklernen begünstigt (Häsel-Weide, 2015).

Das obige Zitat stellt eine Äußerung von Elena dar, welche zu diesem Zeitpunkt die erste Klasse besuchte. Sie erklärt, dass es ihr möglich ist, eine Rechenaufgabe auf unterschiedliche Weisen zu lösen. Immer wenn ihr mehrere Möglichkeiten zur Verfügung stehen, entscheidet sie sich jedoch für die nicht-zählende Variante und wendet diese an. Die Anwendung der sogenannten nicht-zählenden Lösungswerkzeuge, insbesondere der strategischen Werkzeuge, kann nur dann erfolgreich gelingen, wenn diese auch durchdrungen und sicherer als das zählende Vorgehen wahrgenommen werden (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Dieses Ziel wird mit dem ersten Schuljahr verfolgt. Dabei stellt sich jedoch die Frage, ob diese große Aufgabe der Ablösung, wie intendiert, innerhalb des ersten Schuljahres stattfinden kann. Ist es den Kindern tatsächlich möglich, das Zählen gegen die nicht-zählenden Lösungswerkzeuge in dem Maße auszutauschen, sodass nicht mehr von einem zählenden Rechnen gesprochen werden kann? Wenn berücksichtigt wird, dass die Schulanfänger*innen mit unterschiedlichsten Erfahrungen an die Schule kommen und sie zum Teil die Zahlwortreihe noch nicht sicher beherrschen bzw. noch keine tragfähige Bedeutung in den Zahlen sehen, ist dieser Zielsetzung innerhalb des kurzen

Zeitraums skeptisch gegenüberzutreten. Genau diesem Interesse wird in der vorliegenden Arbeit nachgegangen. Unter der Fragestellung Welche Lösungswerkzeuge zeigen Schüler*innen beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben gegen Ende von Klasse 1?[1] wurden neben Elena weitere Kinder im Rahmen einer empirischen Untersuchung interviewt. Bevor ausführlicher auf die Untersuchung eingegangen wird, ist es jedoch notwendig, sich mit den Anforderungen für eine Ablösung vom zählenden Rechnen vertraut zu machen, um zu verstehen, welche Kompetenzen und Prozesse den Kindern dabei abverlangt werden.

Der Aufbau dieser Arbeit ergibt sich daraus wie folgt:

Zunächst werden das Rechnenlernen im ersten Schuljahr und die damit verbundene Zielsetzung genauer beleuchtet. Ein besonderer Fokus liegt dabei auf den Aspekten, die eine gelungene Ablösung vom zählenden Rechnen ermöglichen. Darunter findet sich ein sicheres Zahlverständnis, welches nicht ohne ein Teile-Ganzes-Konzept, das Bewusstsein von Zahlrelationen im Allgemeinen und dem Stellenwertverständnis auskommt. Das Zahlverständnis bildet die Grundlage dafür, (verschiedene) Bedeutungen in Zahlen sehen zu können und so einen Schritt weiter auf dem Weg zum Rechnen zu gelangen. Um ein tragfähiges Operationsverständnis aufzubauen, müssen Grundvorstellungen zu den einzelnen Rechenoperationen entwickelt werden und diese auf unterschiedliche Repräsentationsebenen übertragen werden können. Dabei kommt dem Darstellungswechsel eine bedeutende Rolle zu und ein verständnisbasiertes Rechnen wird angebahnt. Einen weiteren wesentlichen Inhalt stellt die Entwicklung von nicht-zählenden Strategien dar, denn erst mit diesen kann auch eine Ablösung stattfinden. Da in der mathematikdidaktischen Literatur keine einheitliche Verwendung des Strategiebegriffs auszumachen ist, wird dieser geklärt und von weiteren Begriffen abgegrenzt. Mit dem Zahlenblick wird ein letzter Bereich angesprochen, mit welchem endgültig der Sprung vom Zählen zum Rechnen gelingen soll.

Den nächsten Schwerpunkt bilden die bereits erwähnten Lösungswerkzeuge. Hierzu wird zunächst der Prozess des Rechnens betrachtet. Mithilfe eines herangezogenen Modells wird die Ebene der Lösungswerkzeuge in einen Gesamtzusammenhang mit dem Lösungsprozess gebracht. Die einzelnen Lösungswerkzeuge, mit denen eine Rechenaufgabe gelöst werden kann, werden daraufhin näher erläutert. Es wird beschrieben, wie ein zählendes Rechnen mithilfe von Zählstrategien vonstattengehen kann und das Zählen für sich eine

---

[1] Laut Duden (Dudenredaktion, o. D.) gilt die allgemeine Bestimmung, dass Zahlen einschließlich der 12 ausgeschrieben werden, nicht mehr zwingend. Dementsprechend wird für diese Arbeit die Regelung getroffen, dass Zahlen zum größten Teil dann ausgeschrieben werden, wenn diese entweder Anzahlen (z. B. *sieben* Kekse) oder eine festgeschriebene Fügung (z. B. Kraft der *Fünf*) darstellen. In allen weiteren Fällen wird das Zahlsymbol verwendet.

nützliche Fertigkeit darstellt, solange es sich nicht verfestigt. Die Problematik, welche mit einer Verfestigung einhergeht, verdeutlicht, weshalb möglichst frühzeitig eine Ablösung vom zählenden Rechnen anzustreben ist. Darauffolgend wird als zweites Lösungswerkzeug der Rückgriff auf Basisfakten präsentiert und erklärt, wie sich die hierfür notwendige Automatisierung vollzieht. Zudem wird der Zusammenhang zwischen den Basisfakten und dem letzten Lösungswerkzeug erläutert. Dieses bilden die strategischen Werkzeuge, welche in ihren Grundkonzeptionen ausdifferenziert dargelegt werden.

Mit dem nächsten Kapitel erfolgt die Darstellung und Begründung der empirischen Untersuchung. Weshalb sich für diese entschieden wurde, wird mit dem Forschungsinteresse beschrieben. Zudem werden die Forschungsfragen konkretisiert und der Forschungsstand zum Formulieren von Grundannahmen für die eigene Untersuchung herangezogen. Anschließend wird das Forschungsdesign sowie die Durchführung der Untersuchung vorgestellt und begründet. Darunter finden sich grundlegende Überlegungen zur Design- und Methodenwahl, die Beschreibung der Stichprobe, die Darlegung der Untersuchungsaufgaben, die Durchführung der Untersuchung selbst und das Verfahren zur Datenauswertung. Die Ergebnisdarstellung erfolgt zunächst separat über die Einzelinterviews, welche danach als Gesamtes betrachtet werden.

In der Schlussbetrachtung werden die wesentlichen Aspekte des theoretischen Hintergrundes zusammengefasst und die Hauptergebnisse der empirischen Untersuchung im Hinblick auf die Forschungsfrage interpretiert sowie mit dem bisherigen Forschungsstand verglichen. Die vorliegende Arbeit schließt mit einer Diskussion der Ergebnisse und einem Ausblick ab.

Da das Thema dieser Arbeit die Lösungswerkzeuge von Erstklässler*innen bei Additions- und Subtraktionsaufgaben darstellt und sich innerhalb des ersten Schuljahres im Zahlenraum bis 20 bewegt wird, liegt der Schwerpunkt aller hiernach folgenden Ausführungen auf dem additiven Rechnen bis zur 20. Höhere Zahlenräume sowie weitere Rechenoperationen bleiben unberücksichtigt.

2. Rechnen lernen im ersten Schuljahr

Das erste Schuljahr nimmt eine besondere Stellung bei der Entwicklung mathematischer Kompetenzen ein. Die Vorstellung, dass die frisch eingeschulten Kinder bei null beginnen, stellt sich jedoch als realitätsfern heraus. Die Kinder haben bereits unterschiedliche Erfahrungen im Bereich der Mathematik gesammelt und treten mit diesen in die Schule ein. Vielen Kindern ist es beispielsweise vor Schuleintritt möglich, in Geschichten eingebettete Aufgaben[2] durch ein zählendes Rechnen zu lösen (Benz, Peter-Koop & Grüßing, 2015). In der Fachdidaktik der Mathematik herrscht jedoch Konsens darüber, dass zählende Herangehensweisen abgelöst und diese durch ein nicht-zählendes Rechnen ersetzt werden sollen (Gaidoschik, 2010).

Ein zentraler Baustein des Arithmetikunterrichts in der Grundschule besteht sowohl im Aufbau tragfähiger Zahl- und Operationsvorstellungen als auch in der Entwicklung von Strategien beim Rechnen (Benz, 2018). Der Anfangsunterricht konzentriert sich bei der Erarbeitung von Zahlen und Operationen vor allem darauf, einen Einblick in den Aufbau des Zahlsystems sowie in numerische Zusammenhänge zu gewährleisten und diese als Vorteil beim Rechnen zu nutzen. Zudem sollen additive Operationen erarbeitet werden, deren Lösungen nicht auf Zählprozessen basieren (Hessisches Kultusministerium, 1995). Im *Rahmenplan Grundschule* des Bundeslandes Hessen wird explizit darauf hingewiesen, dass Kinder im Rechenlernprozess voranschreiten und nicht beim zählenden Rechnen verbleiben sollen:

> *Dabei ist darauf zu achten, daß die Kinder vom (ab)zählenden Rechnen hingeführt werden zum* ***denkenden und anwendungsorientierten Rechnen*** *[Hervorhebungen im Original] mit Hilfe von strukturierten Mengenbildern, Nachbar-, Tausch- und Umkehraufgaben, durch Zerlegen in Teilschritte, Erkennen und Anwenden von Analogien. Dies gilt besonders für das Überschreiten der Zehnerzahlen (und später auch der Hunderter- und Tausenderzahlen). Dabei sind unterschiedliche Vorgehensweisen möglich und erwünscht (a.a.O., S. 152).*

Welchen Kriterien das *denkende Rechnen* entspricht, wird nicht weiter ausgeführt. Es wird jedoch deutlich, dass ein Stagnieren im zählenden Rechnen nicht den Zielvorstellungen der Grundschule entspricht. Durch Hinzunahme verschiedener Anwendungen soll die Ablösung davon initiiert werden. Das Ziel des Arithmetikunterrichts besteht jedoch nicht allein darin, Aufgaben mithilfe bestimmter Rechentechniken zu lösen und zu Ergebnissen zu gelangen, sondern ebenfalls arithmetische Zusammenhänge zu entdecken und einen Zahl- bzw. Termvergleich anzuregen, damit ein Ableiten von Aufgaben sowie das Verknüpfen von Zahlen ermöglicht wird (Walther, Selter & Neubrand, 2016).

Die wesentliche Aufgabe im ersten Schuljahr besteht demnach darin, den Kindern hin zum Rechnen und weg vom Zählen zu verhelfen (Rechtsteiner-Merz,

---

[2] In der vorliegenden Arbeit werden mit dem Begriff *Aufgabe* Rechenaufgaben bezeichnet, bei denen jeweils die Summe einer Addition oder die Differenz einer Subtraktion ausfindig gemacht werden soll.

2015). Um die Ablösung möglich zu machen, ist die Entwicklung eines umfassenden Zahlverständnisses, eines tragfähigen Operationsverständnisses sowie die Strategieentwicklung grundlegend (Gerster, 2013; Kaufmann & Wessolowski, 2015; Schipper, 2002). Mit einem Aufbau dieser drei Aspekte kann vom zählenden Rechnen abgelöst und ein Zahlenblick entwickelt werden. Dies stellt eine wesentliche Voraussetzung für das Mathematiklernen im zweiten Schuljahr dar, in welchem dann der Zahlenraum bis 100 erkundet werden kann (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018).

2.1 Sicheres Zahlverständnis

Mit Beginn der Schulzeit stellt ein sicheres Zahlverständnis einen der wesentlichen Aspekte dar, die es zu entwickeln gilt. Dies impliziert nicht, dass ein Kind, welches beispielsweise in verschiedene(n) Richtungen, Schritten oder von verschiedenen Startzahlen aus zählen kann, automatisch über ein sicheres Zahlverständnis verfügt. Ein Verständnis von Zahlen zeigt sich vielmehr in den Vorstellungen, welche sich über die Zeit entwickeln. Diese Zahlvorstellungen gilt es mit den jeweiligen Zahlwörtern und Symbolen in Verbindung zu bringen (Padberg & Benz, 2021). Gerster und Schultz (1998) charakterisieren das Zahlverständnis als Zahlbedeutungen und Zahlbeziehungen. Sie beschreiben Zahlbedeutungen als „Vorstellungen (im weitesten Sinn), die das Kind zu Zahlen (Schreibweise oder Zahlwörter) entwickelt hat und die es bei der Arbeit mit Zahlen heranzieht“ (a.a.O., S. 101). Zahlbeziehungen wiederum beschreiben den relationalen Aspekt zwischen mehreren Zahlen, welche durch das mentale Operieren an Zahlvorstellungen hervorkommen (ebd.). Somit wird deutlich, dass nicht *das eine Zahlverständnis* existiert, sondern dass dieses stets abhängig davon ist, welche Erfahrungen zuvor mit Zahlen gemacht wurden.

Ein Verständnis von Zahlen erfolgt zudem über verschiedene Zahlaspekte, die Anzahlbestimmung als auch das Einsetzen des Kommutativ- und Assoziativgesetzes (Häsel-Weide, 2015). Schütte (2008) beschreibt den Beginn hin zu einem ausgeprägten Zahlverständnis dadurch, dass sich vom Zählen distanziert und zur Mengenerfassung bewegt wird, wodurch die ordinale Zahlauffassung um die der kardinalen erweitert wird. Im Allgemeinen kann zwischen dem ordinalen und dem kardinalen Zahlaspekt unterschieden werden. Während eine Anzahl (das letzte Zahlwort der Zählsequenz) eine Menge repräsentiert und damit den Kardinalitätsaspekt ausdrückt, wird bei einer Zahl, welcher innerhalb einer Sequenz eine feste Position zugeschrieben wird (Rangreihe), die ordinale Eigenschaft hervorgehoben. Beide Zahlaspekte sind in Zählsituationen, wie beispielsweise zur Mengenbestimmung als *eins, zwei, drei, …* oder zur Positionszuweisung als *erste, zweite, dritte, …* wiederzufinden. Dabei ist zu beachten, dass einfache Formen des Zählens, wie das Aufsagen der Zahlwortreihe, unabhängig von einer Kardinalität bzw. Ordinalität sind (Bruce & Threlfall, 2004). Nicht das einzelne, sondern das gemeinsame (ordinale und kardinale) Verständnis trägt zu einer vielseitigen Zahlvorstellung bei (Häsel-Weide, Nührenbörger, Moser Opitz & Wittich, 2017).

Ein gut ausgeprägtes Zahlverständnis ist unter anderem darin auszumachen, dass sicher gezählt werden kann (Zahlwortreihe beherrschen und abzählen können), aber auch Zahlen geschrieben, gelesen und erkannt werden können. Hinzu kommen das Zahlverständnis im Sinne eines Teile-Ganzes-Konzepts, der relationale Aspekt zwischen Zahlen (Zahlbeziehung und Zahlbedeutung) sowie das Stellenwertverständnis (Kaufmann & Wessolowski, 2015). Moeller und Nuerk (2012) erklären, dass die drei zuletzt genannten Punkte einen signifikanten Einfluss auf die weitere Entwicklung arithmetischer Kompetenzen haben, weshalb auf diese im Folgenden ausführlicher eingegangen wird.

2.1.1 Teile-Ganzes-Konzept

Um neben dem zählenden Rechnen weitere Möglichkeiten zum Lösen einer Aufgabe heranziehen zu können, wird eine Zahlvorstellung benötigt, bei der Teile-Ganzes-Beziehungen eine wesentliche Rolle spielen (Gerster, 2009). Für das Verständnis dieses Konzepts ist es unerlässlich zu wissen, dass das letzte Zahlwort beim Abzählen nicht nur die Anzahl angibt, sondern ebenfalls die Elemente dieser Menge enthält (Fritz, Ricken & Balzer, 2009). Das Betrachten von Zahlen als Mengen geht über das Erfassen vieler Einzelelemente hinaus. Es erfordert das Verständnis der Zerlegung einer Menge in Teilmengen, welche gemeinsam erneut die Ursprungsmenge darstellen. Die Einsicht, dass sich Zahlen aus anderen Zahlen zusammensetzen bzw. in andere Zahlen zerlegt werden können, wird als Teile-Ganzes-Vorstellung bezeichnet (Gerster, 2009). Von Bedeutung ist hierbei, dass die Kinder verstehen, dass sich das Ganze nicht verändert, solange die Teile unberührt bleiben. Wird einem Teil etwas hinzugefügt oder entnommen, so wirkt sich dies gleichermaßen auf das Ganze aus (Häsel-Weide, 2015). Dazu gehört ebenfalls die Einsicht, dass die Teile im Sinne der Konstanz der Summe sowie der Konstanz der Differenz gegen- bzw. gleichsinnig verändert werden können, ohne dabei das Ganze zu beeinflussen (Häsel-Weide et al., 2017). Wie bereits beschrieben, kann eine Gesamtmenge in zwei (oder mehrere) Teilmengen zerlegt werden. Die Umkehrung, Teilmengen zu einer Gesamtmenge zusammenzusetzen, ist jedoch ebenfalls möglich. Hierbei wird deutlich, dass eine Gesamtmenge zur gleichen Zeit auch immer eine Teilmenge einer größeren Menge darstellt (Schulz, 2009).

Wie sich herausstellt, ist es für das Teile-Ganzes-Verständnis von zentraler Bedeutung, Zahlen als Mengen aufzufassen und mit diesen zu operieren, sodass basierend auf dem Kommutativ- und dem Assoziativgesetz erkannt wird, dass eine Menge zerlegt, umgeordnet und wieder zusammengesetzt werden kann. Dabei ist die Zerlegung in zwei Teile, sodass ein Zahlentripel (z. B. 7 als Ganzes mit 5 und 2 als Teile) entsteht, nicht verbindlich. Je nach Größe einer Menge, kann diese in unterschiedlich viele Teile zerlegt werden (Häsel-Weide et al., 2017). Benz (2014) zeigt in ihrer Untersuchung, dass bereits Kinder im vorschulischen Alter in der Lage sind, Strukturen wahrzunehmen und zu nutzen, um Anzahlen von Mengendarstellungen zu ermitteln. Kleinere Anzahlen von Objekten können auf einen Blick (perzeptuell) erfasst werden. Dieses auf Wahrnehmung beruhende Erfassen einer Ganzheit ohne vorheriges Abzählen der Einzelelemente wird als Simultanerfassung bezeichnet (Padberg & Benz, 2021). Das simultane Erfassen einer Anzahl ist bei Mengen bis zu vier Elementen möglich (Benz, 2018; Gerster, 2009; Hess, 2012; Moser Opitz, 2012; Wittmann & Müller, 2017). Nach Benz (2014) können Prozesse zur Bestimmung einer Anzahl von Mengen unterschieden werden. Wesentlich hierbei ist, dass eine zählende Anzahlbestimmung eintritt, wenn eine Menge in Einzelelementen wahrgenommen wird. Kann die Menge als Ganzes wahrgenommen werden, so erfolgt die Anzahlbestimmung simultan. Eine dritte Möglichkeit stellt die Quasisimultanerfassung dar. Hier wird die Menge in (Teil-)Strukturen wahrgenommen. Dies ist immer dann möglich, wenn eine Menge weder zählend bestimmt noch simultan erfasst wird. Sie wird demnach in Teilmengen zerlegt, die einer als Ganzheit erfassbaren Größe entsprechen. Eine zählende Anzahlbestimmung kann jedoch ebenso erfolgen, um die (quasi-)simultan erfasste Anzahl beispielsweise zu überprüfen (Benz, 2018).

Ein ausgeprägtes Teile-Ganzes-Konzept erfolgt demnach ebenfalls über die (Quasi-)Simultanerfassung, da hierbei verschiedene Darstellungen, Vergleiche und Zerlegungen einer Menge denkbar sind. Anstelle eines Abzählvorgangs können Gruppierungen und Strukturierungen, wie sie beispielsweise in Punktebildern gegeben sind, genutzt werden (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Bei der (Quasi-)Simultanerfassung lässt sich die Idee des Teile-Ganzes-Konzepts erneut aufgreifen, wodurch noch einmal betont wird, wie eine Gesamtmenge in Beziehung zu ihren Teilmengen steht. Dies ist nicht als unbedeutend anzusehen, da dem Teile-Ganzes-Konzept beim Ablösen vom zählenden Rechnen eine zentrale Rolle zukommt (Gerster & Schultz, 1998). Auf Basis der Verinnerlichung dieses Konzepts, welches zunächst die handelnde Ebene durchläuft und zu einer mentalen Vorstellung übergeht, erfolgt das spätere Verständnis von Addition und Subtraktion (Gerster & Schultz, 1998). Das Zerlegen und Zusammensetzen von Zahlen verleiht einen Einblick in operative Strukturen.

Gelangen diese in das Bewusstsein, ist ein zügiges und nichtzählendes Operieren mit den Zahlen möglich (Radatz, Schipper, Dröge & Ebeling, 1996). Auch Gaidoschik (2009) verdeutlicht den Zusammenhang zwischen dem Teile-Ganzes-Konzept und den Rechenoperationen im additiven Bereich. Er erklärt, dass die entsprechenden Additions- und Subtraktionsaufgaben hergeleitet werden können, wenn Kinder Zahlen als Zusammensetzungen verstanden haben, wodurch nicht mehr auf das Zählen zurückgegriffen werden muss. Somit stellt das Teile-Ganzes-Konzept eine Basis zur Entwicklung nicht-zählender Strategien beim Rechnen dar und kann genutzt werden, um Aufgaben zu vereinfachen (Benz, 2018; Schütte, 2008).

2.1.2 Zahlrelationen

Die Fähigkeit, Zahlen in Relation zueinander zu sehen, stellt einen weiteren wichtigen Bestandteil dar, um an einem sicheren Zahlverständnis zu gewinnen. Wie bereits ausgeführt, beinhaltet die Ausbildung eines Teile-Ganzes-Konzepts die Einsicht, dass mit Zahlen bestimmte Beziehungen zwischen Mengen dargestellt werden können. Mit diesen wird jedoch nicht die Vielzahl an Zahlbeziehungen, die es zu entdecken gibt, ausgeschöpft.

Zahlbeziehungen beschreiben, wie Zahlen in Relation zueinanderstehen, und entstehen, geknüpft an Zahlvorstellungen, durch einen Vergleich von Zahlen. Dabei wird zum einen die Zahl für sich betrachtet, aber ebenfalls zwischen mehreren Zahlen und Aufgaben verglichen. Über diese genauere Betrachtung können Zahlbeziehungen genutzt und Strukturähnlichkeiten bewusst gemacht werden (Fast, 2017). Ein mentales Operieren an Zahlvorstellungen führt zu den sogenannten Zahlbeziehungen, welche nach Gerster und Schultz (1998, S. 101) die folgenden umfassen:

- Nachbarschaftsbeziehungen,
- Inklusionsbeziehungen (eine Zahl als Teil einer anderen sehen),
- Teile-Ganzes-Beziehungen,
- Beziehungen zur 5 und zur 10,
- Beziehungen zwischen Zehner und Einer innerhalb zweistelliger Zahlen,
- Größer/Kleiner-Beziehungen zwischen Zahlen.

Bei den Nachbarschaftsbeziehungen handelt es sich vor allem um den Vorgänger und Nachfolger (den Nachbarzahlen), mit denen ein Verständnis für die Struktur der Zahlwortreihe geschaffen werden soll. Auch das Verdoppeln und Halbieren zählt zu den Zahlbeziehungen, welche als zentrale Rechensätze auswendig gewusst zur Verfügung stehen sollten (Eckstein, 2011). Der Größer/Kleiner-Vergleich kann zwar durch die Zuhilfenahme der Position einer Zahl innerhalb der Zahlwortreihe erfolgen, jedoch ist hier auch eine Eins-zu-eins-Zuordnung denkbar und ebenfalls die Argumentation über den Unterschied von Zehner zu Einer (ab zweistelligen Zahlen) relevant (Kaufmann & Wessolowski, 2015; Padberg & Benz, 2021). Zahlen sollen verglichen, geordnet und verortet werden, um eine Vorstellung von Beziehungen zu erhalten, Muster wahrzunehmen und Strukturen zu erkennen (Häsel-Weide, 2015; Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018; Padberg & Benz, 2021).

Padberg und Benz (2021) beschreiben, dass es sich bei der Differenzbeziehung um die Relation zweier Zahlen zueinander handelt. Diese Beziehung kann qualitativ mit *mehr* oder *weniger* beschrieben werden, aber auch quantitativ durch eine genaue Differenzbildung der zwei Zahlen (Differenzmenge) erfolgen. Sie erklären weiterhin, dass verschiedene Ansichten darüber bestehen, ob Teile-Ganzes-Beziehungen zum relationalen Zahlverständnis gezählt werden (ebd.). So wie beim Teile-Ganzes-Konzept herausgestellt, bilden auch die Zahlrelationen eine zentrale Bedeutung für das Verständnis von Rechenoperationen (Eckstein, 2011). Beziehungen sorgen dafür, dass Aufgaben miteinander verbunden werden und sich dadurch ein Bewusstsein für diese Relationen entwickelt, wodurch wiederum Assoziationen entstehen, die beim Automatisieren von Aufgaben helfen (Rasch & Schütte, 2016). Somit sollten Zahlen in Relation zueinander gesehen werden, da dies bedeutend für das Rechnen – vor allem im erweiterten Zahlenraum – ist und diese Beziehungen später für das Anwenden nicht-zählender Strategien genutzt werden können (Häsel-Weide et al., 2017).

2.1.3 Stellenwertverständnis

Das Stellenwertverständnis stellt eine dritte Voraussetzung dar, um ein sicheres Zahlverständnis auszubilden. Wittmann und Müller (2012) bezeichnen das dezimale Stellenwertsystem als eine der „Grundideen der Arithmetik“ (S. 160). Die Auseinandersetzung mit diesem System gewährt einen Einblick in den Aufbau von Zahlen und ist unumgänglich, wenn ein erfolgreiches Arbeiten mit Zahlen und Operationen gelingen soll (Gaidoschik, 2015). Krauthausen (1995) stellt fest: „Wenn wir über Mathematik reden, sprechen wir die ‚Zehnersprache‘, die fest in unserem Denken verankert ist“ (S. 95). Mit der Zehnersprache spricht Krauthausen (ebd.) das dekadische Stellenwertsystem an. Dieses System beruht auf der Bündelungsidee: Eine Anzahl von Elementen wird stets zu gleichgroßen Gruppen zusammengefasst. Die Größe der Gruppen (oder auch Bündel) gibt die Mächtigkeit an, was im Falle des dekadischen Stellenwertsystems die 10 (die Bündelungseinheit) darstellt (Krauthausen & Scherer, 2007). Zudem erfolgt das Bündeln in Stufen. Zunächst werden alle Elemente zu Zehnerbündeln zusammengefasst. Die dabei übrigbleibenden Elemente, die sich aufgrund der Anzahl (kleiner als 10) nicht weiter zusammenfassen lassen, bilden die Einer (die erste Stufe). Die gebildeten Bündel werden erneut zu Zehnerbündeln zusammengefasst, sodass nun immer hundert Elemente gruppiert werden. Dies wird so lange fortgesetzt, bis eine Stufe erreicht wird, bei der keine Bündel mehr gebildet werden können. Die einzelnen Stufen stellen die Zehnerpotenzen (10^0, 10^1, 10^2, 10^3, …) und somit die Stellenwerte (Einer, Zehner, Hunderter, Tausender …) dar (Krauthausen & Scherer, 2007; Padberg & Benz, 2021; Wittmann & Müller, 2017).

Durch die fortgesetzte Bündelung ist die eindeutige Darstellung einer jeden Zahl möglich (Padberg & Benz, 2021). Dies wird besonders durch zwei Prinzipien ersichtlich: Das Stellenwertprinzip besagt, dass Bündel nach ihrer Wertigkeit (von links absteigend) angeordnet und notiert werden. Demnach stehen die kleinsten Bündel (die Einer) ganz rechts. Neben dem Stellenwertprinzip besteht noch das Prinzip des Nennwertes. Dieses besagt, dass beim jeweiligen Stellenwert, die entsprechende Bündelanzahl vermerkt wird. Die Ziffer innerhalb einer Zahl gibt somit die Bündelanzahl an und die Zifferposition den Stellenwert selbst bzw. die Mächtigkeit. Damit die Mächtigkeit mit der Bündelanzahl übereinstimmt, werden leere Stellen mit einer Null besetzt (ebd.).

Ein ausgebildetes Stellenwertverständnis zeichnet sich durch das Wissen um das Stellenwertsystem aus, da Zahlvorstellungen hierbei weiter aufgebaut werden. Zugleich besteht jedoch die Herausforderung, solch ein Verständnis im Zahlenraum bis 20 zu entwickeln, da die Zusammenhänge im höheren Zahlenraum grundsätzlich besser sichtbar werden. Die Zahlwörter betrachtend ermöglichen erst die Zahlen ab 13 eine Einsicht in die Strukturierung von Zehner und Einer. Bis zur 12 können die Zahlwörter nicht abgeleitet werden. Zudem stellt die 10 die erste Zahl mit Besetzung der Zehnerstelle dar, zuvor gibt es lediglich einen besetzten Stellenwert (ebd.). Trotz dieser Erschwernis gelingen erste Einsichten bereits in diesem kleinen Zahlenraum, zumal im ersten Schuljahr oftmals nicht nur die Zahlen bis zur 20 thematisiert werden, sondern ebenfalls die Zehnerzahlen bis 100. Gaidoschik (2015) beschreibt, dass bereits das Wissen zum (Ent-)Bündeln gefestigt werden kann. Damit es nicht zu Fehlvorstellungen kommt, wie beispielsweise der, dass ungerade Zehnerzahlen nicht halbiert werden können, ist ein Stellenwertverständnis notwendig. Der Zehner steht zwar für einen Stellenwert, dennoch kann dieser zu zehn Einzelnen entbündelt werden, wodurch die Teilbarkeit ersichtlich wird. Daher gilt es, dass die Kinder sich eingehend mit der Bündelungsidee beschäftigen und diese mit dem Sprechen und Schreiben von Zahlen verbinden (Gerster & Schultz, 1998).

2.2 Operationsverständnis

Innerhalb des ersten Schuljahres werden sowohl die Addition als auch die Subtraktion als Rechenoperation behandelt. Dazu gehören die damit verbundenen Handlungen, denn Operationsverständnis aufbauen bedeutet Grundvorstellungen erwerben. Mithilfe konkreter Handlungen soll zum mentalen Operieren übergegangen werden. Neben dem Aufbau von Grundvorstellungen bildet das Übertragen dieser auf die verschiedenen Repräsentationsebenen einen zentralen Baustein beim Aufbau eines tragfähigen Operationsverständnisses (Häsel et al., 2017). Hinzu kommt die Entwicklung der Fähigkeit zum Darstellungswechsel. Bei diesem wird der Operationsprozess von der einen Repräsentationsebene auf die andere übertragen, wodurch die Ebenen vernetzt und mentale Vorstellungsbilder aufgebaut werden (Schütte, 2008).

2.2.1 Grundvorstellungen zur Addition und Subtraktion

Mit jeder Rechenoperation gehen bestimmte Vorstellungen einher, welche für den Aufbau des Operationsverständnisses eine wesentliche Rolle spielen (Hasemann & Gasteiger, 2020). Kaufmann und Wessolowski (2015) erklären: „Erst wenn Zahlen und Rechenoperationen mit Bedeutungen, mit Vorstellungen, verknüpft werden, ist Rechnen möglich“ (S. 83). Zuvor erfolgt die Berechnung einer Aufgabe einzig über das Zählen, da die Zahlen lediglich als Position innerhalb der Zahlwortreihe verstanden werden (ebd.).

Bei den additiven Vorstellungen handelt es sich um die Veränderung von Mengen (Häsel-Weide, 2015). Es werden jeweils drei Typen von Additions- und Subtraktionsaufgaben unterschieden (Radatz et al., 1996). Um einen besseren Überblick zu schaffen, werden die zwei Rechenoperationen zunächst einzeln betrachtet.

Die syntaktische Struktur einer Additionsaufgabe lässt sich wie folgt darstellen (ebd.):

$$a + b = ?$$

$$a + ? = c$$

$$? + b = c$$

Während a, b und c drei gegebene natürliche[3] Zahlen darstellen, handelt es sich bei dem Fragezeichen stets um eine unbekannte natürliche Zahl. Die drei Additionstypen unterscheiden sich darin, dass einmal die Summe und zweimal ein Summand gesucht ist. Die Aufgabentypen sind in dem Sinne getrennt voneinander zu sehen, als dass die jeweiligen Variablen zwar jedes Mal die gleichen Zahlen darstellen können, jedoch gilt dies nicht für das Fragezeichen. Dieses ersetzt in jeder Zeile eine andere gesuchte Variable.

Die Addition beruht auf zwei Rechengesetzen: Das Kommutativgesetz besagt, dass die Summanden vertauscht werden können, ohne dass die Summe dabei verändert wird. Mit dem Assoziativgesetz wird ausgesagt, dass beim mehrfachen Addieren entweder keine oder eine beliebige Klammersetzung möglich ist und auch dies sich nicht auf das Ergebnis auswirkt (Wittmann & Müller, 2017).

Die Grundvorstellungen betreffen die semantische Struktur und werden in Sachsituationen deutlich. Generell wird zwischen dynamischen und statischen Situationen unterschieden. Als dynamisch wird eine Sachsituation genau dann bezeichnet, wenn die enthaltenden Elemente hinzukommend eingearbeitet werden. Statisch ist sie dann, wenn die Elemente bereits vorliegen (Radatz et al., 1996). Zu den Grundvorstellungen der Addition gehören das Vereinigen (statisch), das Verändern/Hinzufügen (dynamisch), das Ausgleichen (dynamisch) und das Vergleichen (statisch). Für den Aufbau eines umfassenden Operationsverständnisses ist es erforderlich, dass die Kinder diese vier Grundvorstellungen mit der Addition als Rechenoperation verbinden können (Padberg & Benz, 2021). *Tabelle 1* gibt einen Überblick über die verschiedenen Grundvorstellungen zur Addition und die entsprechenden syntaktischen Aufgabenstrukturen. Es werden Beispielaufgaben nach Radatz, Schipper, Dröge und Ebeling (1996, S. 79 f.) verwendet, welche den Gehalt der Vorstellungen verdeutlichen sollen.

[3] Da sich in der Grundschule ausschließlich mit den natürlichen Zahlen beschäftigt wird, beschränken sich auch die Ausführungen auf diese.

Tabelle 1 Überblick zu den Grundvorstellungen der Addition

Vorstellung	*Beispielaufgabe*	*Struktur*
Vereinigen (statisch)	Ernie hat 3 Kekse. Bert hat 4 Kekse. Wie viele Kekse haben sie zusammen?	a + b = ?
	Ernie und Bert haben zusammen 7 Kekse. Ernie hat 3 Kekse. Wie viele Kekse hat Bert?	a + ? = c ? + b = c
Hinzufügen (dynamisch)	Ernie hat 4 Kekse. Bert gibt ihm noch 3 Kekse dazu. Wie viele Kekse hat Ernie jetzt?	a + b = ?
	Ernie hat 4 Kekse. Dann gibt Bert ihm weitere Kekse. Jetzt hat Ernie 7 Kekse. Wie viele hat Bert ihm gegeben?	a + ? = c
	Am Anfang hatte Ernie einige Kekse. Dann gab Bert ihm 3 Kekse dazu. Jetzt hat Ernie 7 Kekse. Wie viele hatte er zu Anfang?	? + b = c
Ausgleichen (dynamisch)	Ernie hat 3 Kekse. Er bekommt 4 Kekse dazu. Jetzt hat er genauso viele Kekse wie Bert. Wie viele Kekse hat Bert?	a + b = ?
	Ernie hat 3 Kekse. Bert hat 7 Kekse. Wie viele Kekse muss Ernie noch bekommen, damit er genauso viele Kekse wie Bert hat?	a + ? = c
	Ernie hat einige Kekse. Bert hat 7 Kekse. Nun bekommt Ernie 4 Kekse dazu. Dann hat er genauso viele Kekse wie Bert. Wie viele Kekse hatte Ernie zu Anfang?	? + b = c
Vergleichen (statisch)	Ernie hat 3 Kekse. Bert hat 4 Kekse mehr als Ernie. Wie viele Kekse hat Bert?	a + b = ?
	Ernie hat 3 Kekse. Bert hat 7 Kekse. Wie viele Kekse hat Bert mehr als Ernie?	a + ? = c
	Ernie hat 7 Kekse. Er hat 3 Kekse mehr als Bert. Wie viele Kekse hat Bert?	? + b = c

Entsprechend der Grundvorstellungen wird das Additionszeichen als Symbol für die Zusammensetzung eines aus Teilen bestehenden Ganzen eingeführt. Das Subtraktionszeichen hingegen wird als Symbol für ein gegebenes Ganzes verwendet sowie einen Teil dieses Ganzen (Gerster & Schultz, 1998). Um die möglichen Situationen der Subtraktion zu veranschaulichen, wird auch bei dieser Rechenoperation zunächst der Blick auf die syntaktische Struktur geworfen.

Wie bei der Addition finden sich ebenfalls bei der Subtraktion drei Strukturtypen wieder (Radatz et al., 1996):

$$c - b = ?$$

$$c - ? = a$$

$$? - b = a$$

Gleicherweise gilt hier, dass a, b und c drei gegebene natürliche Zahlen darstellen und das Fragezeichen eine unbekannte natürliche Zahl ausdrückt. Die drei Subtraktionstypen unterscheiden sich dahingehend, dass entweder die Differenz, der Subtrahend oder der Minuend gesucht ist. Da bei der Subtraktion das Kommutativgesetz (als auch das Assoziativgesetz) keine Anwendung findet und im Bereich der natürlichen Zahlen verblieben werden soll, wird zusätzlich die Einschränkung, dass der Minuend größer als der Subtrahend sein muss, getroffen. Erneut sind die Aufgabentypen getrennt voneinander zu betrachten, sodass die jeweiligen Variablen, aber nicht das Fragezeichen die gleichen Zahlen in jeder Aufgabe beschreiben können.

Zwar lässt es sich nicht ohne Weiteres an der syntaktischen Struktur der Subtraktionsaufgaben erkennen, jedoch stellt die Addition eine Rechenoperation dar, welche sich in der Subtraktion wiederfindet (Verschaffel, Verguts, Peters, Ghesquière, De Smedt & Torbeyns, 2018). Die Subtraktion stellt die Umkehrung der Addition dar (Wartha & Schulz, 2011). Der Zusammenhang wird besonders in den Grundvorstellungen der Subtraktion ersichtlich. Padberg und Benz (2021) zählen zu diesen das Abziehen/Wegnehmen (dynamisch), das Vergleichen (statisch) und das Ergänzen (dynamisch). *Tabelle 2* greift die Vorstellungen auf und vermittelt mithilfe der Beispielaufgaben (Radatz et al., 1996, S. 79 f.), wie die Rechenoperation ausgelegt werden kann. Bei der Subtraktion ist es möglich, dass die Differenz durch das Abziehen des Subtrahenden vom Minuenden ermittelt wird oder, wie beim Vergleichen der Fall, über den Unterschied des Ganzen und der Teilmenge. Eine dritte Option bildet das Ergänzen vom Subtrahenden zum Minuenden aus. Das Hinzugefügte stellt dabei das Ergebnis dar (Wessel, 2015). Das eigentliche Subtrahieren liegt grundsätzlich nur bei der Vorstellung des Abziehens/Wegnehmens vor. Beim Vergleichen oder dem Ergänzen (entspricht dem Ausgleichen bei der Addition) kann sowohl addiert als auch subtrahiert werden, da bei diesen die additive Vorstellung hervortritt (Padberg & Benz, 2021).

Tabelle 2 Überblick zu den Grundvorstellungen der Subtraktion

Vorstellung	*Beispielaufgabe*	*Struktur*
Wegnehmen (dynamisch)	Ernie hat 7 Kekse. 3 Kekse gibt er an Bert ab. Wie viele Kekse hat Ernie jetzt noch?	c - b = ?
	Ernie hat 7 Kekse. Davon gibt er einige an Bert ab. Dann hat er noch 4 Kekse. Wie viele hat er Bert gegeben?	c - ? = a
	Ernie hat einige Kekse. Dann gibt er 3 Kekse an Bert ab. Jetzt hat er noch 4 Kekse. Wie viele hatte er zu Anfang?	? - b = a
Vergleichen (statisch)	Ernie hat 7 Kekse. Bert hat 4 Kekse weniger als Ernie. Wie viele Kekse hat Bert?	c - b = ?
	Ernie hat 7 Kekse. Bert hat 4 Kekse. Wie viele Kekse hat Bert weniger als Ernie?	c - ? = a
	Ernie hat 4 Kekse. Er hat 3 Kekse weniger als Bert. Wie viele Kekse hat Bert?	? - b = a
Ergänzen[4] (dynamisch)	Ernie hat 7 Kekse. Bert hat 3 Kekse. Wie viele Kekse muss Ernie abgeben, damit er genauso viele hat wie Bert?	c - ? = a ↓ a + ? = c

Die Grundvorstellungen legen die Sichtweise nahe, die Addition und Subtraktion nicht nur als Voranschreiten oder Zurückgehen auf der Zahlenreihe zu deuten (Idee des Hinzufügens/Wegnehmens) und an diesen zu verhaften, sondern die Rechenoperationen ebenfalls mit den weiteren Vorstellungen zu verbinden (Gerster & Schultz, 1998). Zudem wird erkenntlich, dass jede syntaktische Aufgabenstruktur, indem der semantische Gehalt angepasst wird, in allen Grundvorstellungen wiederzufinden ist.

Demnach sind die Grundvorstellungen dahingehend von Bedeutung, als dass der Zusammenhang zu und zwischen den Rechenoperationen verdeutlicht wird. Das, was hinzugefügt bzw. abgezogen wird, kann wieder rückgängig gemacht

[4] Für das Ergänzen ist lediglich eine Beispielaufgabe aufgeführt, da diese die Idee der Addition am ehesten aufgreift und diese Grundvorstellung im Kern widerspiegelt. Zwar liegt bei diesem Beispiel (aufgrund der niedrigen Zahlen) kein Ergänzen nahe, jedoch sieht die Situation anders aus, wenn Ernie 65 Kekse und Bert 63 von diesen hätte. Ein Ergänzen würde sich dann durch die Wahl der höheren sowie nahestehenden Zahlen besonders anbieten (Padberg & Benz, 2021).

werden. Der Weg hin zu den verschiedenen Grundvorstellungen und fort von der Idee des Weiter- und Rückwärtszählens bildet eine wesentliche Voraussetzung, um vom zählenden Rechnen abzulösen (Hasemann & Gasteiger, 2020). Wenn über die Grundvorstellungen verfügt wird, dann dominieren die mentalen Bilder, die zu diesen Rechenoperationen erzeugt werden können und nicht mehr Vorstellungen, die auf dem Zählen basieren (Häsel et al., 2017).

Die Grundvorstellungen zur Addition und Subtraktion tragen jedoch nur einen Teil zur Entwicklung eines ausgeprägten Operationsverständnisses bei. Damit sich dieses vollständig entfalten kann, werden ebenfalls die vier Repräsentationsebenen als zweiter Entwicklungsbereich benötigt (Rechtsteiner-Merz, 2015). Zugleich sind die Grundvorstellungen notwendig, um ein Übersetzen zwischen den einzelnen Ebenen zu ermöglichen (Wartha & Schulz, 2011). Worum genau es sich bei den Repräsentationsebenen handelt, wird im folgenden Abschnitt geklärt.

2.2.2 Repräsentationsebenen und Darstellungswechsel

Ein Verständnis von Rechenoperationen impliziert eine Bedeutung in diesen zu sehen. Dazu werden die einzelnen Repräsentationsebenen (auch: Modi) benötigt (Hasemann & Gasteiger, 2020). Es ist notwendig, dass Sachaufgaben, wie die in *Tabelle 1* und *Tabelle 2* aufgeführt, als Addition und Subtraktion erkannt werden, aber beispielsweise auch in ihrer symbolischen Form auf die konkreten Aufgaben übertragen werden können (ebd.). Insgesamt werden vier Repräsentationsebenen unterschieden: die Handlungs-, Sprach-, Bild- und Symbolebene (Kaufmann & Wessolowski, 2015). Unter Rückbezug auf Rathgeb-Schnierer und Rechtsteiner-Merz (2018, S. 100) können die einzelnen Modi wie folgt beschrieben werden:

- Auf der *Handlungsebene* erfolgt das enaktive Arbeiten unter Nutzung von Material.
- Die *Sprachebene* meint die Verwendung von mündlicher oder schriftlicher Sprache, um mathematische Sachverhalte auszudrücken (siehe Beispielaufgaben in *Tab. 1* und *Tab. 2*).
- Die *Bildebene* beinhaltet ikonische Darstellungen, die genutzt (und selbst entwickelt) werden.
- Auf der *Symbolebene* werden mathematische Symbole, wie Zahlen, Terme oder Gleichungen, verwendet.

Durch die verschiedenen Grundvorstellungen der Addition und Subtraktion kann eine Aufgabe in jedem Modus auf mehrere Weisen repräsentiert werden. Zu einem vollständig ausgeprägten Operationsverständnis braucht es jedoch nicht nur ein flexibles Übersetzen innerhalb (intramodaler Transfer) der Repräsentationsebenen, sondern ebenfalls zwischen (intermodaler Transfer) diesen Modi (Bönig, 1993; Radatz et al., 1996; Wartha & Schulz, 2011). Damit diese Übersetzungsprozesse erfolgen können und es zu einem Wechsel von Darstellungen kommen kann, müssen Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen vorhanden sein, die von der einen auf die andere Ebene übertragen werden können (Häsel-Weide, 2015). *Abb. 1* zeigt die unterschiedlichen Übersetzungsmöglichkeiten zwischen den Repräsentationsebenen.

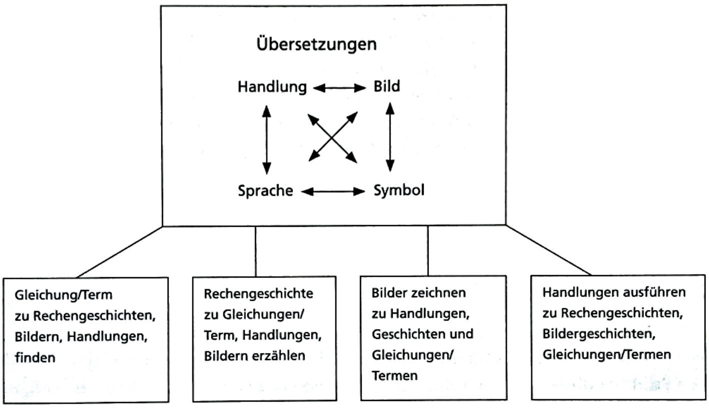

Abbildung 1 Übersetzungen zwischen den verschiedenen Repräsentationsebenen (Kaufmann & Wessolowski, 2015, S. 25)

Ein Darstellungswechsel kann erfolgen, wenn herausgefunden wird, welcher Teil der Aufgabe (z. B. das Operationszeichen, der Summand, die Differenz, etc.) zu welchem Handlungselement, welchem Bildausschnitt oder welcher Phrase gehört (Moser Opitz, 2012). Erst das Herstellen dieser Verbindung ermöglicht es, einen tieferen Einblick in die Zusammenhänge der unterschiedlichen Repräsentationsebenen zu gewinnen und eine Vorstellungsgrundlage zu bilden, welche wiederum eine Basis für ein auf Verständnis beruhendes Rechnen schafft (Schütte, 2008). Erneut lässt sich erkennen, wie die Grundvorstellungen mit den Repräsentationsebenen vernetzt sind: Die Vorstellungen werden erworben, indem sie über konkrete Handlungen auf den unterschiedlichen Ebenen miteinander in Beziehung gesetzt werden. Dies ist wiederum notwendig, um einen intermodalen Transfer zu ermöglichen, zu einem abstrakten und mentalen Operieren zu gelangen und somit ein umfassendes Operationsverständnis auszubilden, was einen Ausgangspunkt für die Entwicklung nicht-zählender Strategien darstellt (Padberg & Benz, 2021).

2.3 Entwicklung von nicht-zählenden Strategien

Das Rechnenlernen im ersten Schuljahr umfasst ebenso wie die Entwicklung eines sicheren Zahlverständnisses und den Aufbau eines tragfähigen Operationsverständnisses die Entwicklung von nicht-zählenden Strategien, was naheliegend erscheint, da die große Aufgabe in der Ablösung vom zählenden Rechnen besteht. Das Nutzen von Strategien ist von den jeweiligen Erfahrungen mit Zahlen und Operationen und den damit verbundenen Vorstellungen bestimmt (Benz, 2018). Da in der mathematikdidaktischen Literatur jedoch eine uneinheitliche Verwendung des Strategiebegriffs auszumachen ist, wird dieser nachfolgend geklärt. Es wird darauf verzichtet, die unterschiedlichen Bedeutungen der Strategie, welche in den Werken verschiedener Autor*innen zu finden sind, auszuführen. Stattdessen liegt der Fokus auf dem Strategiebegriff, welcher im weiteren Verlauf der Arbeit auch Verwendung findet.

2.3.1 Begriffsklärung Strategie

Die Strategie stellt einen Begriff dar, welcher in den vorherigen Ausführungen bereits mehrfach gefallen ist. Auch im Kerncurriculum der Primarstufe für das Fach Mathematik (Hessisches Kultusministerium, 2011) ist dieser Begriff wiederholt auffindbar. In diesem wird darauf hingewiesen, Strategien zu nutzen oder zu entwickeln. Dabei wird jedoch nicht genauer erklärt, worum es sich bei diesen anzuwendenden Strategien handelt. Rathgeb-Schnierer (2006) beschreibt, wie die Begriffe *Strategie* und *Rechenstrategie* in der Literatur oftmals äquivalent verwendet werden, doch zugleich verschieden behaftet sind. Daher wird sich im Folgenden zunächst dem Strategiebegriff angenähert.

Stern (1992) expliziert, dass bei einer vielfältigen Nutzung des Begriffs Konsens darin besteht, dass es sich bei der Strategie um „kognitive Prozesse, die sich mit den Begriffen Flexibilität, Zielorientiertheit und Effizienz charakterisieren lassen“ (S. 102), handelt. Zudem legt sie dar, dass bei der Anwendung einer Strategie auf ein Ziel hingearbeitet wird, bei dem im Gegensatz zur Prozedur das Verfahren nicht festgelegt ist, sondern auf der Übertragung von Wissen und Erfahrungen beruht (ebd.). Sich auf diese Auslegungen stützend versteht Rathgeb-Schnierer (2006) unter Strategien „übergeordnete, bewusste handlungsleitende Prinzipien, die altersabhängig, aufgabenabhängig, wissensabhängig und motivabhängig sind. Strategisches Vorgehen wird dann notwendig, wenn ein Problem gelöst werden soll, zu dem der Lösende über keine geschlossene Lösungsmethode verfügt“ (S. 55).

Der Erklärung zufolge können Strategien demnach als generelle Problemlösestrategien gesehen werden. Wenn also eine Aufgabe besteht, die nicht allein mithilfe der „Hauptstrategien des Zahlenrechnens“ (Selter, 2000, S. 231), den nach Rathgeb-Schnierer (2006) verstandenen Lösungsmethoden, gelöst werden kann, so werden unter Strategienutzung andere Werkzeuge herangezogen, mit denen das Problem gelöst wird. Worum genau es sich bei diesen Werkzeugen handelt, soll nachfolgend, in Abgrenzung zu zwei weiteren häufig verwendeten Strategiebegriffen in der mathematikdidaktischen Literatur, geklärt werden. Als Festsetzung für die weitere Verwendung des Begriffs wird unter der Strategie ebenfalls eine Art Oberbegriff gefasst, welche ein zielgerichtetes Lösen von allgemeinen Problemen auf Basis der bisher ausgebildeten Kompetenzen beinhaltet.

2.3.2 Rechenstrategien, operative Strategien, strategische Werkzeuge

Die Strategienutzung in der Mathematik, bezogen auf das Lösen einer Rechenaufgabe, hat viele Namen. Im englischsprachigen Raum sind beispielsweise die Begriffe „derived facts“ (Carpenter & Moser, 1984; Gray, 1991) oder „decomposition“ (Canobi, 2004; Siegler, 1987) auffindbar. Auch im Deutschen lassen sich zahlreiche Bezeichnungen ausmachen. Aus diesen lassen sich drei Bezeichnungen herausgreifen, die im besonderen Maße genutzt werden.

Der Begriff *Rechenstrategien* findet sich unter anderem bei Radatz, Schipper, Dröge und Ebeling (1996) wieder. Darunter verstehen sie eine Vielzahl an Möglichkeiten, um eine Aufgabe zu lösen: Das Anwenden von Zählstrategien, das Auswendigwissen der Ergebnisse von Aufgaben sowie heuristische bzw. operative Strategien fallen unter die Kategorie der Rechenstrategien (ebd.). *Heuristische* bzw. *operative Strategien* bezeichnen wiederum eine eigene Gruppe von Strategien, die speziell zur Lösung von Rechentermen verwendet werden können, und sind in dem Sinne gleichbedeutend. Bei diesen Strategien werden operative Zusammenhänge genutzt, was konkret meint, dass eine Aufgabe mit einer anderen in Verbindung gebracht wird, welche bereits auswendig beherrscht wird oder leichter zu lösen ist (Gaidoschik, 2010). Heuristische bzw. operative Strategien umfassen die sogenannten Grundstrategien. Hierzu zählen das (Fast-)Verdoppeln und Halbieren, das Zerlegen und Zusammensetzen, das gleich- und gegensinnige Verändern sowie das Nutzen von Analogieaufgaben. Weiterhin werden die Umkehr-, Tausch- und Nachbaraufgaben in die heuristischen bzw. operativen Strategien miteingeschlossen (Radatz et al., 1996).

Eine weitere Bezeichnung stellen die *strategischen Werkzeuge* dar, welche bereits in der Beschreibung von Strategien bei Rathgeb-Schnierer (2006) fallen: „Strategisches Vorgehen wird dann notwendig, wenn ein Problem gelöst werden soll, zu dem der Lösende über keine geschlossene Lösungsmethode verfügt. Um ein solches Problem zu lösen, werden *strategische Werkzeuge* [Hervorhebung hinzugefügt] benötigt" (S. 55). Mit den strategischen Werkzeugen werden Aufgaben umgeformt und vereinfacht. Hierfür werden Zahlzerlegungen und -zusammensetzungen und/oder Hilfsaufgaben verwendet. Bei den Hilfsaufgaben wird das Wissen um Analogien in Anspruch genommen, eine Aufgabe regelgestützt verändert oder es werden Nachbarbeziehungen genutzt (Rechtsteiner-Merz, 2013). Strategische Werkzeuge machen einen Teil des Lösungsprozesses aus, können mit einer Strategie jedoch nicht per se gleichgesetzt werden: „Im Gegensatz zu einer Strategie ist ein strategisches Werkzeug […] nicht aufgabenklassenunabhängig. Deshalb stehen sie [strategische Werkzeuge] zwischen geschlossenen Lösungsmethoden, die aufgabenabhängig sind und Strategien, die von allgemeiner Natur sind" (Rathgeb-Schnierer, 2006, S. 56). Im Sinne dieser Zwischenposition sind sie von Strategien abzugrenzen.

Für die weitere Arbeit wird mit dem Begriff der strategischen Werkzeuge gearbeitet. Die Entwicklung dieser sowie das Auswendigwissen von Rechensätzen stellen nach einem von Rathgeb-Schnierer (2011) entwickelten Modell diejenigen Lösungswerkzeuge dar, welche nicht auf dem Zählen basieren und mit denen somit dem Ziel des Ablösens nähergekommen wird. Genauso wie auf das verwiesene Modell wird auch auf die Lösungswerkzeuge im weiteren Verlauf (*Kap. 3*) ausführlicher eingegangen.

2.4 Zahlenblick

Mit einer gelungenen Entwicklung der drei beschriebenen Bereiche (Zahlverständnis, Operationsverständnis, nicht-zählende Strategien) und der Vernetzung dieser entsteht ein weiterer essenzieller Baustein zur Ablösung vom zählenden Rechnen: der Zahlenblick. Denn ein erfolgreiches Rechnenlernen erfolgt auch über das Sehen. Schütte (2004) versteht unter dem Zahlenblick die Fähigkeit, beim Betrachten von Zahlen oder Aufgaben unmittelbar Beziehungen zwischen diesen zu erfassen und dadurch Zahlen geschickt zerlegen und zusammensetzen zu können. Dabei wird entweder mit der Aufgabe selbst weitergearbeitet oder eine bekannte Aufgabe, die beim Lösen weiterhilft, herangezogen (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Der Zahlenblick impliziert Kenntnisse über Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen, Kenntnisse über Aufgabeneigenschaften und Aufgabenbeziehungen sowie metakognitive Kompetenzen. Auf dieser Basis werden Rechensätze auf spezifische Merkmale hin untersucht und diese zur Ergebnisberechnung verwendet (Schütte 2004, 2008). Dieser spezielle Blick für Beziehungen, aber auch für wahrgenommene Strukturen, wird für das geschickte Rechnen genutzt (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018).

Zahlenblickschulung

Weiterhin handelt es sich bei dem Zahlenblick um eine Fähigkeit, die erlernt werden kann (ebd.). Kinder, die Schwierigkeiten bei der Ablösung vom zählenden Rechnen haben, benötigen eine Förderung durch gezielte Aktivitäten, die genau diesen Zahlenblick ausbilden (Rechtsteiner-Merz, 2013). Durch die Zahlenblickschulung soll dies erreicht werden. Das Ziel der Zahlenblickschulung besteht darin, den Rechendrang aufzuhalten. Wie es häufig zu beobachten ist, werden Aufgaben gelöst, ohne diese zuvor auf Merkmale und Beziehungen hin zu analysieren. Dadurch erfolgt eine voraussichtlich mühseligere und ungeschicktere Berechnung. Indem der Rechendrang aufgehalten wird, kann der Blick auf Zahlbeziehungen sowie Aufgabenmerkmale gelenkt und die Wahrnehmung dieser gestärkt werden (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Genau dies wird mit den Aktivitäten zur Zahlenblickschulung intendiert, sie stellen im Allgemeinen eine bedeutsame Grundlage für das Rechnenlernen dar (Rechtsteiner-Merz, 2013). Zudem handelt es sich bei der Zahlenblickschulung um einen langfristigen Prozess, da sich dieser über die gesamte Grundschulzeit erstreckt. Die Entwicklung von Zahlkonzepten, des Operationsverständnisses sowie der strategischen Werkzeuge werden dabei angestrebt und stellen somit die inhaltlichen Aspekte der Zahlenblickschulung dar (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018; Rechtsteiner & Rathgeb-Schnierer, 2017).

Sehen, Sortieren, Strukturieren

Tätigkeiten zum Sehen, Sortieren und Strukturieren nehmen bei der Zahlenblickschulung eine wichtige Rolle ein. Das (strukturierende) Sehen impliziert die Wahrnehmung von Anzahlen und Zahlbeziehungen, welche dem Aufbau mentaler Zahlvorstellungen dienen (Rechtsteiner-Merz, 2015). Der Fokus liegt auf dem zügigen Wahrnehmen, welches möglichst geschickt erfolgen soll (Rathgeb-Schnierer & Rechsteiner-Merz, 2018). Zudem ermöglicht eine strukturierende Mengenwahrnehmung, den visuellen Weg zu den unterschiedlichen Operationsvorstellungen einzuschlagen sowie Vorstellungen von Zahlen aufzubauen. Daher ist das (strukturierende) Sehen für die Strategieentwicklung – vielmehr für die Entwicklung strategischer Werkzeuge – bedeutsam (Benz, 2018). Das Sortieren meint eine Zuordnung von Aufgaben oder Punktebildern nach bestimmten Kriterien (subjektiv oder objektiv). Dem Sortieren geht ein Betrachten bzw. ein Sehen voraus, um basierend auf wahrgenommenen Merkmalen Einordnungen treffen und begründen zu können. Dadurch wird der Blick auf die Zahl- und Aufgabenbeziehungen gerichtet, was zukünftig zum Lösen von Aufgaben verhilft (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Für das nicht-zählende Ermitteln von Anzahlen ist eine Strukturwahrnehmung notwendig. Diese ist ebenfalls bei der Darstellung additiver Operationen von Nutzen (Benz, 2018). Das Strukturieren impliziert ein Inbeziehungsetzen, sodass erneut

Aufgaben- und Zahlbeziehungen gebildet und wahrgenommen werden können (Rechtsteiner-Merz, 2015). Es werden bestimmte Anordnungen getroffen, die miteinander in Relation stehen, wodurch den verschiedenen Darstellungen eine zentrale Rolle beigemessen wird (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Weiterhin werden die Aktivitäten zum Sehen, Sortieren und Strukturieren von einem Ausbau der metakognitiven Kompetenzen begleitet. Die Beantwortung von Fragen, welche beispielsweise die Absichten von bestimmten Anordnungen anstreben, sind maßgeblich dafür, dass Zusammenhänge und Muster innerhalb dieser Anordnungen auch bewusstwerden (ebd.).

Zehner-/Zwanzigerfeld

Aktivitäten, bei welchen das Ergebnis nicht unverzüglich berechnet wird, sondern solche, die zunächst darauf abzielen, Aufgaben näher zu betrachten und auf Merkmale und Zusammenhänge hin zu überprüfen, fördern den Zahlenblick (Schütte, 2004). Das Zehner- bzw. Zwanzigerfeld stellt eine mögliche Grundlage für diese Aktivitäten dar. Die Felder können unterschiedlich gefüllt werden, sodass ein strukturiertes Punktebild entsteht. Generell wird zwischen der Block- und Reihendarstellung (*Abb. 2*) unterschieden (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Bei der Reihendarstellung sind die Felder von links nach rechts zu füllen, beginnend mit der oberen Reihe (Gerster & Schultz, 1998). Wie abgebildet, unterscheidet sich die Blockdarstellung dahingehend, dass beide Reihen gleichermaßen besetzt werden, um eine Zahl darzustellen und dadurch ein Block entsteht. Bei ungeraden Zahlen verfügt eine Reihe über ein zusätzlich belegtes Feld. Diese Erkenntnis stellt eine von vielen dar, die sich bei der Erkundung des Zehner- bzw. Zwanzigerfeldes entdecken lassen.

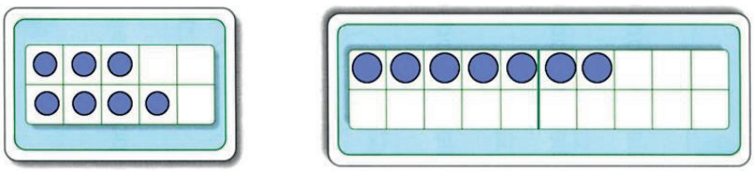

Abbildung 2: Block- und Reihendarstellung (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018, S. 120)

Durch die verschiedenen Möglichkeiten, Anzahlen bis 20 anzuordnen (Festlegungen unbeachtet), können Kinder flexible Zahlvorstellungen aufbauen und darüber reflektieren, weshalb sich bestimmte Anordnungen zur schnellen Anzahlerfassung besonders eignen. Dadurch werden die metakognitiven Kompetenzen gefördert (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Die Darstellungen am Zehner- bzw. Zwanzigerfeld sind dahingehend als vorteilhaft anzusehen, als dass sich die (quasi-)simultane Anzahlerfassung anbietet und somit nicht mehr zählend vorgegangen werden muss. Teile-Ganzes-Beziehungen werden dabei permanent genutzt (ebd.). Die Fünfermarkierungen und Zehnerreihen dienen als Anhaltspunkt, von denen aus andere Zahlen abgeleitet werden können. Die Fünferbündelung stellt dabei eine Vorbereitung auf die schwerer zu erfassende Zehnerbündelung dar (Gerster & Schultz, 1998). Schütte (2008) beschreibt, wie eine Zahl unterschiedlich aufgefasst werden kann: Es besteht die Möglichkeit, die Zahl in verschiedene Teile zu zerlegen oder über die leeren Felder zu argumentieren. Wird Letzteres als Begründung zur Anzahlerfassung herangezogen, so können Zahlensätze, die zur Summe 10 bzw. 20 führen, schnell automatisiert werden. Beim Arbeiten mit dem Zehner- bzw. Zwanzigerfeld werden demnach mentale Vorstellungen von Zahlen aufgebaut, auf welche dann beim Rechnen zurückgegriffen werden kann (Moser Opitz, 2012). Damit wird von den Zahldarstellungen zum Operieren mit Zahlen übergegangen (Schütte, 2008).

Hieraus ergibt sich, dass der Zahlenblick ebenso zentral für die Ablösung vom zählenden Rechnen ist wie die drei vorangegangenen großen Bereiche. Zudem ist festzuhalten, dass sich der Zahlenblick angeeignet werden kann und die Zahlenblickschulung bei allen Kindern stattfinden sollte. Das Zehner- bzw. Zwanzigerfeld stellt Material dar, mit welchem nicht nur Aktivitäten zum Sehen, Sortieren und Strukturieren angeregt werden können, sondern ebenfalls das Zahlverständnis, das Operationsverständnis sowie nicht-zählende Strategien aufgegriffen werden. Das damit verbundene Anstreben der Ablösung bedeutet zugleich Alternativen zum Zählen zu finden. Genau dazu braucht es weitere Lösungswerkzeuge, welche im Mittelpunkt des nächsten Kapitels stehen.

3. Lösungswerkzeuge beim additiven Rechnen

Nachfolgend wird sich mit den unterschiedlichen Werkzeugen zur Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben beschäftigt. Da diese lediglich einen Teil des Rechenprozesses ausmachen, wird zunächst ein Modell betrachtet, welches die unterschiedlichen Ebenen im Lösungsprozess aufgreift und darstellt, wie diese in Bezug zueinander stehen. Den Fokus auf die Lösungswerkzeuge legend werden diese weiter ausdifferenziert und näher beleuchtet.

3.1 Prozess des Rechnens: Modell „Ebenen im Lösungsprozess“

Rathgeb-Schnierer (2011) entwickelte im Rahmen ihrer Arbeit, in der sie sich mit dem Aufbau flexibler Rechenkompetenzen von Kindern beschäftigt, ein Mehrebenenmodell, um den komplexen Rechenprozessen, die beim Lösen einer Rechenaufgabe ablaufen, näherzukommen (*Abb. 3*). Sich auf bestehender Literatur zum Umgang mit additiven Aufgaben sowie Ergebnissen eigenbetriebener Forschung stützend konnte sie drei wesentliche Ebenen herausarbeiten, mit welchen der Lösungsprozess beschrieben werden kann (ebd.). Zwar sind die einzelnen Ebenen unterschiedlich wahrnehmbar (variierende Explikationsgrade), jedoch kommt jeder dieser Ebenen eine bestimmte Rolle zu, weshalb alle drei stets beteiligt sind (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018).

Abbildung 3: Ebenen im Lösungsprozess (Rathgeb-Schnierer, 2011, S. 16)

Bei den drei Ebenen handelt es sich um die Formen, die Referenzen und die Lösungswerkzeuge. Jede Ebene stellt einzeln betrachtet eine notwendige, jedoch keine hinreichende Voraussetzung für den Lösungsprozess dar. Dieser erfolgt erst im Zusammenspiel aller Ebenen (Rathgeb-Schnierer, 2011).

Formen

Die Formen des Rechnens beschreiben, auf welche Rechentypen während des Rechnens zurückgegriffen wird (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Wittmann (1999) unterscheidet vier Rechentypen, anhand derer gerechnet werden kann:

- Kopfrechnen (auch: mündliches Rechnen),
- Halbschriftliches Rechnen,

- Schriftliches Rechnen,
- Nutzen eines technischen Geräts: Taschenrechner.

Da der Taschenrechner erst in höheren Schulstufen Anwendung findet, wird dieser nicht weiter betrachtet. Das Kopfrechnen beinhaltet eine Berechnung, bei der keine Zwischenschritte notiert werden; es erfolgt ausschließlich mental (Krauthausen, 1993; Krauthausen & Scherer, 2007; Selter, 2000). Daneben besteht das halbschriftliche Rechnen, bei dem eine mentale Zahlzerlegung unter Nutzung von Rechengesetzen stattfindet. Im Gegensatz zum Kopfrechnen werden lediglich einzelne Zerlegungs- und Zwischenschritte, sogenannte Teilschritte, notiert (Krauthausen, 1993; Wittmann, 1999). Das schriftliche Rechnen unterscheidet sich vom Kopfrechnen und halbschriftlichen Rechnen dahingehend, dass mit den zwei letzteren Typen ein Rechnen mit ganzen Zahlen (Zahlenrechnen) beschrieben und in der Regel nach keinem bestimmten Verfahren vorgegangen wird. Beim schriftlichen Rechnen erfolgt ein Operieren mit Ziffern (Ziffernrechnen). Es wird ein algorithmisches Verfahren angewendet, demnach erfolgen die Teilschritte nach bestimmten Festlegungen (Krauthausen, 1993; Wittmann, 1999). Diese sogenannten Normalverfahren werden in Deutschland für gewöhnlich ab der dritten Klasse unterrichtet. Das Kopfrechnen stellt hingegen im ersten Schuljahr den gängigsten Rechentyp dar, da bis zu diesem Zeitpunkt noch keine Teilschritte verschriftlicht werden. Die Gemeinsamkeit aller drei Formen besteht darin, dass zumindest die Teilrechnungen bei jeder Form durch ein Kopfrechnen stattfinden (Rathgeb-Schnierer, 2011). Zudem verdeutlicht Rathgeb-Schnierer (2011), dass die Formen eine Ebene bilden, die im Lösungsprozess sichtbar ist, jedoch nicht zum Ergebnis einer Aufgabe führt, da die konkrete Lösung auf einer anderen Ebene stattfindet.

Referenzen

Mit den Referenzen wird beschrieben, worauf sich der Rechenprozess stützt. Es wird zwischen den gelernten Verfahren sowie den erkannten Merkmalen und Beziehungen als Referenzkontext unterschieden. Welcher genutzt wird, ist unter anderem von den jeweiligen Erfahrungen abhängig. Wird sich auf ein erlerntes Verfahren beim Rechenprozess gestützt, so erfolgt dieses oftmals mechanisch (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Ein mechanisches Verfahren tritt stets dann auf, wenn beispielsweise ein Algorithmus ohne jegliche Einsicht in die zugrunde liegenden Inhalte eingesetzt wird (Moser Opitz & Schmassmann, 2012). Auf Merkmale und Beziehungen wird sich wiederum immer dann gestützt, wenn Eigenschaften von Zahlen und Aufgaben erkannt und zum Lösen genutzt werden. Dies setzt ein dynamisches Zahlwissen sowie Wissen über Beziehungen voraus. Nicht immer kann sicher festgestellt werden, ob verfahrens- oder beziehungsorientiert vorgegangen wird. Daher ist der Referenzkontext nur gelegentlich sichtbar (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Die Unsicherheit darüber, ob tatsächlich Merkmale und Beziehungen erkannt werden oder doch nach einem Verfahren gehandelt wird, verdeutlicht Threlfall (2009, S. 542) anhand eines Beispiels: Wenn Schüler*innen im Unterricht beigebracht bekommen innerhalb einer Aufgabe, eine der Zahlen in eine 10 umzuformen und die Differenz hinterher auszugleichen (z. B. 8 + 7 zur 10 + 7 - 2 umgestalten), können sie ihre Vorgehensweise vielleicht mit der Zehnernähe begründen, jedoch ist dabei nicht sicher auszumachen, ob lediglich die Lehrkraft mit dieser Aussage rezitiert wird, ohne über ein jegliches Verständnis für die vorliegenden Zahlbeziehungen zu verfügen.

Lösungswerkzeuge

Die dritte Ebene des Modells stellen die Lösungswerkzeuge dar. Diese beinhalten die verschiedenen Möglichkeiten, um das Ergebnis einer Aufgabe zu ermitteln. Zu den drei Lösungswerkzeugen gehören das Zählen, der Rückgriff auf Basisfakten sowie das Nutzen strategischer Werkzeuge. Werden alle drei Ebenen kombiniert, so lässt sich der Lösungsprozess beim Rechnen rekonstruieren (Rathgeb-Schnierer, 2011). Auf der Ebene der Lösungswerkzeuge findet jedoch das eigentliche Lösen einer Aufgabe statt (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Daher sind nachfolgend die unterschiedlichen Kategorien an Lösungswerkzeugen einzeln aufgeführt und detailliert beschrieben.

3.2 Zählen

Ein sicheres Zählen ist von großer Bedeutung. Je sicherer die Zahlwortreihe beherrscht wird, desto leichter fällt ein zählendes Rechnen und umso besser gelingt die Ablösung von diesem (Radatz et al., 1996). Zudem stellt es einen wichtigen Bestandteil auf dem Weg zum Rechnenlernen dar, da dieses Lösungswerkzeug als erste bedeutsame Strategie zur Anzahlbestimmung von Mengen fungiert (Benz, 2018). Zählen entspricht einer Fähigkeit, die sich auf natürlichem Wege entwickelt. Das bedeutet, die Ausbildung des Zählens erfolgt im frühen Kindesalter automatisch. Dadurch sind Kinder bereits vor Schuleintritt in der Lage, erste Additions- und Subtraktionsaufgaben zu lösen (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Im Allgemeinen wird beim Zählen zwischen dem verbalen Zählen und einer zählenden Anzahlbestimmung (dem konkreten Abzählen) differenziert. Indem bestimmte Zählprinzipien eingehalten werden, kann das verbale Zählen, also das Aufsagen der Zahlwortreihe, zu einem zählenden Ermitteln einer Anzahl angewandt werden. Dafür können verschiedene Zählstrategien verwendet werden (Padberg & Benz, 2021).

3.2.1 Zählstrategien

Für die Addition und Subtraktion bestehen unterschiedliche Vorgehensweisen beim Zählen. Diese Zählstrategien lassen sich zunächst in die zwei Hauptkategorien *Alleszählen* sowie *Weiterzählen* einteilen und weiter ausdifferenzieren (Hasemann & Gasteiger, 2020; Padberg & Benz, 2021; Radatz et al., 1996):

Alleszählen (auch: vollständiges Abzählen)

Wie der Name vermuten lässt, wird hier alles einmal gezählt. Zunächst erfolgt das Zählen der einzelnen Summanden: Es wird bis zum ersten Summanden gezählt, dann folgt der zweite Summand. Anschließend wird die Summe durch das Zählen beider Summanden gemeinsam ermittelt. Als beispielhafte Darstellung dient die Aufgabe 4 + 5.

1. Summand	**2. Summand**	**Summe**
1, 2, 3, *4*	1, 2, 3, 4, *5*	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, *9*

Zumeist handelt es sich hierbei um die erste Zählstrategie, welche erworben und objektgebunden ausgeführt wird. Zudem wird für das vollständige Abzählen bereits das Kardinalprinzip gebraucht (Hess, 2012).

Weiterzählen

Das Weiterzählen beschreibt die Fähigkeit, von jeder Zahl aus vor- oder rückwärts zählen zu können und impliziert somit das Aufbrechen der Zahlwortreihe als Kette (ebd.). Beim Weiterzählen wird von einem Summanden aus beginnend gezählt. Dieser Summand wird im Gegensatz zum Alleszählen als Ganzes aufgefasst. Die Summe wird gebildet, indem um den nächsten Summanden weitergezählt wird. Es bestehen die Formen des *Weiterzählens vom …*

ersten Summanden aus	von 4 aus: 5, 6, 7, 8, *9;*
größeren Summanden aus	von 5 aus: 6, 7, 8, *9;*
größeren Summanden aus in Schritten	Zweierschritte: 7, *9.*

Erneut dient hier die Aufgabe 4 + 5 zur Verdeutlichung. Das Weiterzählen bedarf eines doppelten Zählens: Jedem Zahlwort wird ein Zählschritt zugeordnet (5 sind eins mehr, 6 sind zwei mehr, …). Dies muss jedoch nicht verbal geschehen, sondern kann auch durch die Hinzunahme von Hilfsmitteln erfolgen. Werden die Finger verwendet, so entspricht die Anzahl der ausgestreckten Finger den vorgenommenen Zählschritten beim Weiterzählen (Gerster & Schultz, 1998). Thompson (1999) erklärt, dass das Weiterzählen vom ersten Summanden aus üblicherweise die erste Zählstrategie darstellt, die nach dem Alleszählen erlernt wird. Das Weiterzählen vom größeren Summanden aus setzt voraus, dass zwei Zahlen verglichen werden können, um die größere von beiden zu ermitteln. Zudem wird dabei ein (implizites) Bewusstsein über die Kommutativität erlangt (ebd.).

Rückwärtszählen

Es bestehen zwei Wege, um eine Subtraktionsaufgabe (hier: 9 - 5) mithilfe des Rückwärtszählens zu lösen. Diese lauten *Rückwärtszählen …*

um eine gegebene Zahl von Schritten 8, 7, 6, 5, *4;*

bis zu einer gegebenen Zahl *8, 7, 6, 5.*

Beim Rückwärtszählen um eine gegebene Anzahl von Schritten gibt der Subtrahend diese Anzahl an. Dies stellt die gängigste Zählstrategie der Subtraktion dar und entspricht dem Wegnehmen/Abziehen als Grundvorstellung der Subtraktion. Während die Zahlwortreihe rückwärts aufgesagt wird, muss zugleich die Anzahl der genannten Zahlen berücksichtigt werden. Das Ergebnis stellt die letztgenannte Zahl dar (ebd.). Das Rückwärtszählen bis zu einer gegebenen Zahl meint, dass vom Minuenden aus begonnen und bis zum Erreichen des Subtrahenden zurückgezählt wird (Differenzbildung). Das Ergebnis entspricht der Anzahl der Zählschritte und kommt dem Vergleichen als Unterschiedsbildung (Grundvorstellung der Subtraktion) gleich.

Vorwärtszählen

Das Vorwärtszählen entspricht dem Ergänzen, da hierbei vom Subtrahenden zum Minuenden gezählt wird. Die Beispielaufgabe 9 - 5 erneut zu Hilfe nehmend sieht dies wie folgt aus: *6, 7, 8, 9*. Hier wird das Weiterzählen als Strategie genutzt, die sich besonders bei Aufgaben anbietet, bei denen die Differenz zwischen Minuenden und Subtrahenden gering ist (Benz, 2005). Hess (2012) beschreibt, wie das Vorwärtszählen als Zählstrategie zum Lösen einer Subtraktionsaufgabe bei vielen jüngeren Kindern auf ein begrenztes Verständnis stößt, da dieses für sie keinen Sinngehalt bietet: Die Addition wird hier für ein Wegnehmen genutzt, wobei dies nicht der natürlichen Idee (des Hinzufügens) der Addition entspricht.

3.2.2 Zählen als Fertigkeit

Mit dem Zählen werden erste arithmetische Fertigkeiten erworben (Wittich, Nührenbörger & Moser Opitz, 2010). Ein sicheres Zählen und Beherrschen der Zahlwortreihe stellen voraussetzende Kompetenzen für ein nicht-zählendes Rechnen dar. Das Zählen in Schritten gewährt eine Einsicht in Beziehungen sowie

Strukturen und durch die Zählstrategien wird eine erste Verbindung zu den Rechenoperationen geschaffen, wodurch sich allmählich vom Zählen losgelöst werden kann (Häsel-Weide et al., 2017). Carpenter & Moser (1984) beobachteten vier Stufen, die sich auf dem Weg zur Entwicklung in Richtung eines Rückgriffs auf Basisfakten zeigen. Dabei stellt die unterste Stufe diejenige dar, bei der Kinder noch nicht dazu in der Lage sind, additive Aufgaben zu lösen. In der weiteren Entwicklung wird sich von einem objektgebundenen Alleszählen abgelöst und zu einem verbalen/mentalen Zählen bewegt. Wenn die letzte Stufe erreicht ist, können Basisfakten als Lösungswerkzeug genutzt werden (ebd.). Diese Entwicklungslinie berücksichtigend sollte nicht voreilig zu einem Einprägen von Zahlensätzen gesprungen werden, da ein größerer Zeitraum besteht, während Kinder additive Aufgaben zählend lösen:

> *Most instruction jumps directly from the characterization of addition and subtraction through simple physical models to the memorization of number facts without acknowledging that there is an extended period during which children count-on and count back to solve addition and subtraction problems (a.a.O., S. 200).*

Zwar impliziert dies nicht, das Zählen zur Lösung von Rechenaufgaben explizit zu fördern, jedoch sollte trotz des Ziels der Ablösung auch dem Zählen ausreichend Zeit eingeräumt werden, sodass sich dieses zu einem entwicklungsgemäßen zählenden Rechnen entfalten kann. Auf diese Weise entspricht das Zählen einer Fertigkeit, die einen erfolgreichen Übergang zu den weiteren Lösungswerkzeugen gewährleistet.

3.2.3 Verfestigtes zählendes Rechnen

Bis zur Mitte des ersten Schuljahres stellt sich die (hauptsächliche) Verwendung von Zählstrategien als ein noch erwartungsgemäßes Handeln heraus. Dieses soll jedoch im Verlauf des ersten Schuljahres durch den Einsatz der zwei weiteren Lösungswerkzeuge ersetzt werden (Klewitz, Köhnke & Schipper, 2008; Lorenz, 2005; Moser Opitz, 2008). Finden Zählstrategien beim additiven Rechnen am Ende der ersten Klasse (und in den weiteren Schulstufen) immer noch vermehrt Anwendung, so gilt dies als verfestigtes zählendes Rechnen (Schipper, 2002). Während ein sicheres Zählen im kleinen Zahlenraum noch zielführend ist, stößt das zählende Rechnen im höheren Zahlenraum an seine Grenzen und führt in eine Sackgasse (Wittmann & Müller, 2017).

Zählen als Lösungswerkzeug stellt über einen längeren Zeitraum eine Erschwernis für das weitere Aufbauen von Zahlvorstellungen sowie der Entwicklung strategischer Werkzeuge dar (Benz, 2018). Wenn lediglich zählend gehandelt wird, kann kein umfangreiches Verständnis für Rechenoperationen resultieren und auch die Einsicht in operative Zusammenhänge bleibt größtenteils verwehrt (Gerster & Schultz, 1998). Des Weiteren werden keine Beziehungen und Zusammenhänge erkannt, wodurch das Ziel des eigentlichen Rechnens nicht erreicht wird (Rechtsteiner-Merz, 2013). Da beim verfestigten zählenden Rechnen Aufgaben als alleinige Aufforderung zum Vorwärts- bzw. Rückwärtszählen verstanden werden, können sich keine angemessenen Operationsvorstellungen zur Addition und Subtraktion ausbilden (Gaidoschik, 2009; Gray & Tall, 1994; Häsel-Weide, 2015). Die Umkehrung dieses Satzes gilt jedoch ebenso: Es wird beim zählenden Rechnen verblieben, da keine tragfähigen Operationsvorstellungen ausgebildet wurden (Häsel-Weide, 2015). Dass Kinder im Falle des Verbleibens beim zählenden Rechnen zukünftig größeren Schwierigkeiten in ihrer weiteren mathematischen Entwicklung ausgesetzt sind, hielten bereits Henry und Brown (2008) fest: „Not only are students who continue to rely on counting potentially deprived of opportunities to develop more robust number sense, they are also likely to face a growing problem as they tackle more complex mathematical problems" (S. 156).

Ein verfestigtes zählendes Rechnen ist jedoch nicht damit gleichzusetzen, dass den Kindern keine strategischen Werkzeuge zur Verfügung stehen, sondern dass diese schlichtweg nicht genutzt werden. Dies lässt sich dadurch erklären, dass Aufgaben, welche aufgrund von unzureichend erkannten Zahlstrukturen als schwer wahrgenommen werden, gelöst werden, indem auf das bekannte und scheinbar sichere Zählen ausgewichen wird (Schipper, 2002).

Ein weiteres Hindernis besteht beim Zählen in Einerschritten. Hierbei werden Anzahlen nicht strukturiert erfasst und es liegt oftmals lediglich ein ordinales Zahlverständnis vor. Zahlen im Zahlenraum bis 20 werden nicht als Zusammensetzung von Zehnern und Einern erfasst. Dies führt zu Schwierigkeiten bei der Einsicht in das dezimale Stellenwertsystem. Andererseits bildet auch die fehlende Einsicht in die Struktur des Stellenwertsystems mit der 10 als besondere Zahl einen weiteren Grund, weshalb beim zählenden Rechnen verblieben wird (Häsel-Weide et al., 2017; Wartha & Schulz, 2011; Wittich et al., 2010). Neben den fehlenden Einsichten, die das verfestigte zählende Rechnen mit sich bringt, stellt sich das zählende Rechnen ebenfalls als zeitaufwendig, konzentrationsaufwendig sowie fehleranfällig heraus (Gray, 1994). Beim Weiterzählen wird sich oftmals um eine Zahl verzählt, da der Beginn und das Ende eines Zählvorgangs undeutlich sind. Mehr als vier Zählschritte können nicht ohne Weiteres überblickt werden und bedürfen somit größerer Aufmerksamkeit beim Zählen (Gerster & Schultz, 1998). Der hohe Aufwand, der sich durch das Merken von

Zwischenschritten oder durch das Weiterzählen um bestimmte Zahlen ergibt, nimmt einen großen Raum im Arbeitsgedächtnis ein (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Zudem wird ein Rückgriff auf Basisfakten überdeckt, wodurch die Entwicklung dieser nur langsam vonstattengeht (ebd.).

Die Ursachen für ein Verbleiben bei den Zählstrategien sind vielseitig. Beispiele für diese bilden das einseitige Termverständnis (bei dem die Addition und Subtraktion lediglich als ein Vor- und Zurückzählen verstanden werden), eine fehlende Sensibilität für Aufgabenbeziehungen oder ungenügend Übung in der Nutzung der weiteren Lösungswerkzeuge (Gerster & Schultz, 1998). Eine Untersuchung von Rechtsteiner (2013) ergab, dass diejenigen Schüler*innen, die sich im ersten Schuljahr zu Rechnenden herauskristallisierten, zu einem bestimmten Grad Beziehungen innerhalb von Aufgaben erkannten und nutzten. Kinder, denen dies nicht gelang, konnten auch nicht vom zählenden Rechnen ablösen und lösten Aufgaben dementsprechend überwiegend zählend (ebd.).

Es lässt sich festhalten, dass ein verfestigtes zählendes Rechnen in dem Sinne problematisch ist, als dass es kein Lösungswerkzeug darstellt, welches auf lange Sicht zielführend ist. Zahlvorstellungen werden nicht ausreichend und vielseitig ausgebildet, Aufgabenbeziehungen bleiben unerkannt und das Auswendiglernen von Zahlensätzen wird erschwert (Wartha, 2009). Hierbei wird deutlich, dass die Entwicklung weiterer nicht-zählender Lösungswerkzeuge für das Voranschreiten im Lernprozess von großer Bedeutung ist.

3.3 Rückgriff auf Basisfakten

Zählend rechnende Kinder haben oftmals nur wenige Aufgaben automatisiert (Gerster & Schultz, 1998). Doch genau um diese automatisierten Aufgaben handelt es sich bei den Basisfakten. Die sogenannten Grundaufgaben des kleinen Einspluseins (und später auch Einmaleins) sollen sich nach und nach zu den Basisfakten entwickeln (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Zu den Grundaufgaben zählen nach Kaufmann und Wessolowski (2015) Aufgaben im Zahlenraum bis 10. All diejenigen Aufgaben, welche die 10 übersteigen, werden für gewöhnlich nicht automatisiert. Der Rückgriff auf Basisfakten beinhaltet ein Lösen, welches weder durch einen Zähl- noch einen Rechenprozess zustande kommt, sondern durch einen unmittelbaren Gedächtnisabruf vonstattengeht (Häsel-Weide, 2015). Das Ziel besteht darin, die additiven Grundaufgaben zu automatisieren und abrufen zu können (Wittmann & Müller, 2012). Diese sollen jedoch nicht schlichtweg auswendig gelernt, sondern auf Grundlage eines Verständnisses erlernt werden (Padberg & Benz, 2021). Die Aufgaben werden in Beziehung zueinander betrachtet. Gelingt es, eine Beziehungsorientierung in das Bewusstsein zu überführen, so reduziert sich die Menge an auswendig zu lernenden Aufgaben und Assoziationen werden geschaffen, die einen Halt beim Lernen bieten (Rasch & Schütte, 2016).

Das kleine Einspluseins beinhaltet 121 Aufgaben. Das Kommutativgesetz berücksichtigend verringert sich die Anzahl auf 66 Aufgaben, die im Regelfall beherrscht oder besonders zügig hergeleitet werden können (Gerster & Schultz, 1998). Lediglich Aufgaben mit einstelligen Zahlen werden automatisiert. Bei Aufgaben mit mehrstelligen Zahlen bzw. Ergebnissen größer als 10 ist davon auszugehen, dass ein Abruf nicht ohne Weiteres möglich ist und daher strategische Werkzeuge zum Lösen herangezogen werden (Fast, 2017; Geary, Hoard, Byrd-Craven & DeSoto, 2004; Gerster & Schultz, 1998; Thompson, 2000). Wenn eine Aufgabe automatisiert ist, beispielsweise 4 + 3, dann erscheint es schlüssig, dass die dazugehörigen Umkehraufgaben aufgrund des Zahlentripels 3 – 4 – 7 ebenfalls abgerufen werden können. Wie Baroody (1999) jedoch darlegt, ist dies nicht zwingend der Fall, denn diese Beziehungen sind für Kinder nicht immer offensichtlich, vor allem nicht dann, wenn sie sich noch mitten in der Automatisierung der Additionsaufgaben befinden. Bei dem Rückgriff auf Basisfakten handelt es sich um eine wichtige Fähigkeit, da durch die Automatisierung Rechensätze im Langzeitgedächtnis gespeichert werden und somit das Arbeitsgedächtnis entlastet wird, was wiederum mehr Raum für das Lösen von komplexeren Aufgaben schafft (Heirdsfield & Cooper, 2004). Es wird deutlich, dass das Nutzen von Basisfakten für sich, aber auch in Verbindung mit den strategischen Werkzeugen, einen wesentlichen Bestandteil im Lösungsprozess ausmacht. Wie herausgestellt, reicht es nicht aus, Aufgaben lediglich auswendig zu lernen. Wie genau die Automatisierung ablaufen sollte, wird daher als Nächstes dargelegt.

3.3.1 Automatisierung

Neben den Aufgaben des kleinen Einspluseins bis 10 zählen ebenfalls die Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben zu den besonderen Aufgaben, die es zu automatisieren gilt (Moser Opitz & Scherer, 2010). Beim Verdoppeln und Halbieren handelt es sich um Aufgaben, die Kinder aufgrund von elementaren Erfahrungen zumeist bereits automatisiert haben (Gerster & Schultz, 1998). Zwar besteht ein allgemeiner Konsens darüber, dass ein Rückgriff auf Basisfakten eine wichtige Fähigkeit darstellt, jedoch existieren verschiedene Annahmen, wie es überhaupt zu der Automatisierung der Fakten kommt (Henry & Brown, 2008). Eine weit verbreitete Theorie besagt, dass dies durch das Wiederholen der Aufgaben geschieht, wodurch stabile Assoziationen entstehen, die zu einem sicheren Abruf aus dem Langzeitgedächtnis führen (Ashcraft, 1995; Geary, 1994; Groen & Parkman, 1972). Passend zu dieser Annahme besagt das „Model of

Children’s Strategic Choices“ nach Siegler (2001), dass mit jedem Mal, bei dem das Ergebnis einer Aufgabe korrekt zählend bestimmt wird, dies zu einer stabilen Verbindung von Aufgabe und Ergebnis führt. Die einhergehenden Assoziationen im Langzeitgedächtnis von sicher-zählenden Kindern werden bis zu einem bestimmten Punkt immer weiter gestärkt. Ist dieser Punkt erreicht, wird das Zählen abgestoßen und zu einem Abruf aus dem Gedächtnis gegriffen (ebd.). Die Ergebnisse einer Untersuchung von Gray (1991) sprechen jedoch teilweise gegen die Richtigkeit von Sieglers Modell. Bei leistungsschwachen Kindern lässt ein zählendes Rechnen das Einprägen von Aufgaben erst gar nicht zu, da sich eine Aufgabe bis zur Ergebnisermittlung nicht gemerkt wird (ebd.). Dieser Befund bestärkt wiederum, dass Kinder, die beim zählenden Rechnen verbleiben, Schwierigkeiten bei der Automatisierung haben.

Wie viele Gedächtnistheorien darlegen, kann davon ausgegangen werden, dass Informationen im Langzeitgedächtnis eingespeichert werden, wenn ein Bedeutungszusammenhang gegeben ist. Konkret bedeutet dies, dass ein Rechenterm mitsamt Ergebnis genau dann verinnerlicht wird und abrufbar ist, wenn dieser in Beziehung zu bereits eingespeicherten Aufgaben gesetzt wird. Um solch einen Bedeutungszusammenhang zu gewährleisten, wird das automatisierende Üben eingesetzt. Bei diesem handelt es sich um Tätigkeiten, bei denen Merkmale und Beziehungen zwischen Aufgaben in den Vordergrund treten. Die damit gewonnene Einsicht festigt sich, wodurch ein schnelles und sicheres Abrufen gewährleistet wird. Ein Automatisieren im Sinne von einem Memorieren ist nicht als sinnvoll zu erachten, da dieses zumeist auf keinem Verständnis beruht und das Memorierte nach einer Zeit wieder vergessen wird. Beim automatisierenden Üben liegt daher der Fokus zunächst darauf, ein Verständnis zu entwickeln, bevor Rechensätze auswendig beherrscht werden (Moser Opitz & Schmassmann, 2012). Dies benötigt eine Phase, in der mit konkretem Material gearbeitet wird, damit anschließend mentale Bilder entstehen können (Kaufmann & Wessolowski, 2015).

Der Rückgriff auf Basisfakten stellt ein Lösungswerkzeug dar, mit welchem die Grundaufgaben auf Abruf gelöst werden. Hinzu kommt, dass diese nicht nur für sich genutzt, sondern ebenfalls in Kombination mit den strategischen Werkzeugen herangezogen werden (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Die Entwicklung dieser beiden Lösungswerkzeuge erfolgt nebeneinander und gemeinsam (Padberg & Benz, 2021). Verwendet werden die strategischen Werkzeuge, um noch nicht abrufbare Aufgaben oder solche, die nicht zu den Grundaufgaben gehören, mithilfe der bisherigen Basisfakten abzuleiten. Die automatisierten Aufgaben bilden somit eine Grundlage für die Anwendung der strategischen Werkzeuge (Gerster & Schultz, 1998).

3.3.2 Bezug zu den strategischen Werkzeugen

Laut dem Hessischen Kultusministerium (1995) soll im ersten bis zweiten Schuljahr das Einspluseins „zunächst handelnd, dann gedächtnismäßig im Zahlenraum bis 100“ (S. 153) gelernt werden. Da aufgrund der zu bewältigenden Menge nicht davon auszugehen ist, alle Aufgaben bis zur 100 zu automatisieren, muss dies bedeuten, dass die Basisfakten hierbei lediglich als Stützpunkt dienen und sich auf diese beim Lösen bezogen wird (Gaidoschik, 2010). Damit wird zugleich die Verbindung der Basisfakten zu den strategischen Werkzeugen beschrieben: Wenn eine Aufgabe zunächst mithilfe der strategischen Werkzeuge verändert wird, bevor sich ein Rückgriff auf Basisfakten vollzieht, so werden beide Lösungswerkzeuge in Kombination genutzt (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018).

Gaidoschik (2010) erachtet es als nicht sinnvoll, Aufgaben bis zur 20 vollständig zu automatisieren, da neben der großen Anzahl an Aufgaben die Kinder zu einem mathematischen Denken herangeführt werden sollen, was die Nutzung strategischer Werkzeuge einschließt. Baroody (1999) sowie Campbell und Xue (2001) berichten, dass eine erfolgreiche Aneignung arithmetischer Kompetenzen des Öfteren durch eine Verknüpfung der beiden Lösungswerkzeuge, der Rückgriff auf Basisfakten und die Anwendung strategischer Werkzeuge, zustande kommt. Dabei geht es darum, bestimmte Merkmale einer Aufgabe ausfindig zu machen und passend zu diesen, Veränderungen des Zahlensatzes vorzunehmen, sodass auf eine bereits beherrschte Aufgabe Bezug genommen werden kann. Auf diese Weise erfolgt die Aufgabenlösung, welche zuvor noch nicht bekannt war (Thompson, 1999). Es ist anzunehmen, dass diejenigen Kinder, die beide Lösungswerkzeuge in Kombination nutzen lernen, später ein höheres mathematisches Leistungsniveau ausbilden als Kinder, welche lediglich einen direkten Abruf von Basisfakten tätigen (Henry & Brown, 2008).

Wie sich herausstellen lässt, sind die strategischen Werkzeuge sowie der Rückgriff auf Basisfakten reziproker Natur: Basisfakten werden vor allem dann genutzt, wenn durch ein Verändern und Vereinfachen von Aufgaben Rechensätze entstehen, die bereits abgerufen werden können. Andererseits ist ein gezieltes und erfolgreiches Anwenden strategischer Werkzeuge nur dann möglich, wenn zugleich auch ein Rückgriff auf Basisfakten erfolgen kann (Gerster, 1994; Gaidoschik, 2010). Diese Beziehung berücksichtigend sind als letztes der drei Lösungswerkzeuge die strategischen Werkzeuge und die möglichen Formen dieser beschrieben.

3.4 Strategische Werkzeuge

Wie mehrfach dargelegt, stellt sich ein zählendes Rechnen als Hauptlösungswerkzeug als nicht effektiv heraus. Da es jedoch wenig sinnvoll erscheint, die Verwendung schlichtweg zu verbieten, ist es von Vorteil, den Fokus auf einfachere, sichere und erfolgversprechendere Lösungswerkzeuge, wie die strategischen Werkzeuge, zu legen, welche von den Kindern dann selbst als solche wahrgenommen werden (Gerster & Schultz, 1998). Die strategischen Werkzeuge stellen ein Lösungswerkzeug dar, welches wesentlich für die höheren Zwecke des Kopfrechnens ist (Threlfall, 2002). Während die ablaufenden Prozeduren bei der Nutzung von Zählstrategien demselben Prinzip unterliegen, handelt es sich bei den strategischen Werkzeugen um Vorgehensweisen, welche je nach Rechensatz unterschiedlich vonstattengehen (Gerster & Schultz, 1998). Sie beruhen auf numerischen Prinzipien sowie Rechengesetzen und kommen stets dann zum Einsatz, wenn keines der zwei anderen Lösungswerkzeuge zum Lösen genutzt wird. Strategische Werkzeuge sind aufgabenunabhängig und können miteinander kombiniert werden (Rathgeb-Schnierer, 2006). Sie werden mit dem Ziel verwendet, Aufgaben zu vereinfachen, indem diese verändert und von bereits vertrauten Aufgaben abgeleitet werden (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Dabei sollen Zahlbeziehungen einer Aufgabe erblickt und herangezogen werden, um zu erkennen, welche Veränderungen sich als besonders hilfreich beim Rechnen herausstellen (Häsel-Weide et al., 2017). Das Nutzen strategischer Werkzeuge erfordert daher ein Gespür für Merkmale und Beziehungen, welche es innerhalb der Zahlen und Aufgaben zu entdecken gibt (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018).

Die strategischen Werkzeuge bei der Addition und Subtraktion werden in die zwei Grundgedanken des Zerlegens und Zusammensetzens sowie des Nutzens einer Hilfsaufgabe aufgeteilt (Rechtsteiner-Merz, 2013). Diese lassen sich, wie nachfolgend dargelegt, weiter ausdifferenzieren.

3.4.1 Zerlegen und Zusammensetzen

Um einen Rechensatz zerlegen und zusammensetzen zu können, bestehen mehrere Möglichkeiten. Von Relevanz ist dabei, dass die Aufgabe dahingehend verändert wird, dass sie anschließend auswendig gewusst oder zunächst mithilfe weiterer strategischer Werkzeuge bearbeitet werden kann. Prinzipiell ist es immer möglich, das Zerlegen und Zusammensetzen als strategisches Werkzeug einzusetzen (Rathgeb-Schnierer und Rechtsteiner-Merz, 2018).

Zehnerzerlegung

Mit der Zehnerzerlegung werden innerhalb von Aufgaben Teile einer Zahl entnommen, um die andere Zahl zunächst zum vollen Zehner aufzufüllen oder herabzusetzen. Anschließend wir der restliche Teil zu dem neuen Zehner hinzuaddiert bzw. von diesem abgezogen (Torbeyns, Verschaffel & Ghesquière, 2005). Dies sieht unter anderem wie folgt aus:

$7 + 6 = 7 + 3 + 3 = 10 + 3 \qquad 13 - 8 = 13 - 3 - 5 = 10 - 5.$

Bei der Additionsaufgabe lässt sich erkennen, dass die 6 in zweimal 3 zerlegt wurde, um eine von ihnen mit der 7 neu zusammenzusetzen, sodass der Zehner getroffen wird. Bei der Subtraktionsaufgabe wird der Subtrahend zerlegt und dadurch die 10 erreicht. Die Zehnerzerlegung angewandt, kann die neue Halbierungsaufgabe 10 - 5 durch einen Rückgriff auf Basisfakten gelöst werden. Daneben ist es möglich, Zahlen in ihre Stellenwerte zu zerlegen und über die dekadische Analogie die Aufgabe zu lösen (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018).

„Kraft der Fünf“

Bei der 5 handelt es sich um eine Zahl mit einer besonderen Stärke. Durch eine vorherige intensive Auseinandersetzung mit der Fünferstrukturierung fällt ein Rechnen mit dieser Zahl besonders leicht. Die 5 spielt beispielsweise im Zehner- bzw. Zwanzigerfeld eine wichtige Rolle oder ebenfalls zu Beginn des zählenden Rechnens, wenn die Finger (fünf Finger an einer Hand) herangezogen werden. Wie die 10, auf der das Stellenwertsystem basiert, dient die 5 als Stützzahl beim Rechnen und bildet die Unterstrukturierung des Zehners. Somit kann sowohl von einer Kraft der Fünf als auch von einer Kraft der Zehn gesprochen werden (Krauthausen, 1995).

$7 + 5 = 2 + 5 + 5 = 2 + 10 \qquad 12 - 7 = 10 - 5$

Bei der Additionsaufgabe wurde der erste Summand zerlegt, um die Kraft der Fünf zu nutzen. Ähnlich sieht es bei der Subtraktion aus, bei der die Aufgabe in der Hinsicht verändert wurde, als dass sich sowohl auf die Kraft der Zehn als auch auf die Kraft der Fünf gestützt werden kann. Durch die Verminderung des Minuenden und des Subtrahenden resultiert zugleich eine Halbierungsaufgabe.

3.4.2 Nutzen einer Hilfsaufgabe

Das Nutzen einer Hilfsaufgabe kann durch unterschiedliche Veränderungen zustande kommen. Hierunter fallen die Analogiebildung, das Verändern von Aufgaben sowie das Nutzen von Nachbaraufgaben. Das Verändern von Aufgaben meint ein Vereinfachen unter Ausnutzung mathematischer Gesetze und beinhaltet die Tauschaufgabe, das gegen- und gleichsinnige Verändern sowie die Umkehraufgabe (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018).

Analogien

Analogien werden genutzt, um im höheren Zahlenraum (über 10), die Grundaufgaben anwenden zu können. Dabei werden schwierigere Rechnungen auf einfachere Aufgaben zurückgeführt, indem das dekadische Stellenwertsystem ausgeschöpft wird (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018; Padberg & Benz, 2021).

$$12 + 4 = 16, \text{ da } 2 + 4 = 6. \qquad 18 - 5 = 13, \text{ da } 8 - 5 = 3.$$

Bei den Beispielaufgaben werden zunächst die Einer betrachtet und mit ihnen gerechnet. Die Einer-Aufgaben sind zumeist automatisiert, sodass nach Abruf des Ergebnisses der Zehner lediglich wieder hinzugezogen werden muss.

Aufgaben verändern – Tauschaufgaben

Die Tauschaufgabe bildet ein strategisches Werkzeug, welches innerhalb der additiven Operationen nur bei Additionsaufgaben angewendet werden kann.

$$6 + 13 = 13 + 6$$

Summanden können in ihrer Reihenfolge frei verändert werden, da die Addition kommutativ ist. Dies ist hilfreich, wenn die Zählstrategie des Weiterzählens genutzt wird, da die Zählschritte dadurch verringert werden können und der Zählprozess daher von kürzerer Dauer ist (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018).

Aufgaben verändern – gegen- und gleichsinniges Verändern

Das gegensinnige Verändern beruht auf dem Gesetz der Konstanz der Summe bei Additionsaufgaben, das gleichsinnige Verändern auf dem Gesetz der Konstanz der Differenz bei Subtraktionsaufgaben. Dabei werden die enthaltenen Zahlen einer Aufgabe im gleichen Maße erhöht oder vermindert. Dies bietet sich vor allem bei einer Zehner- oder Fünfernähe an, da diese dann als Stützzahlen verwendet werden können. In bestimmten Fällen kann auf diesem Wege auch Zehnerübergängen, welche eine Aufgabe oftmals herausfordernder machen, ausgewichen werden (ebd.).

$$16 + 4 = 15 + 5 \qquad 12 - 7 = 10 - 5$$

Die Summanden wurden gegensinnig um eins verändert, der Minuend sowie Subtrahend werden gleichsinnig um zwei verringert. Durch die Anwendung der jeweiligen mathematischen Gesetze wird sichergestellt, dass sich die Summe bzw. Differenz trotz Veränderung der Aufgabe nicht ebenfalls ändert (Wittmann & Müller, 2017).

Aufgaben verändern – Umkehraufgaben

Durch den bestehenden Zusammenhang der Addition und der Subtraktion können die Aufgaben umgekehrt und somit vereinfacht werden (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018).

$$8 - 5 = ? \quad \leftrightarrow \quad 5 + ? = 8$$

Bei der Bildung der Umkehraufgabe werden die gleichen Zahlen verwendet und in eine neue Reihenfolge gebracht sowie mit einem neuen Operationszeichen verknüpft. Es besteht demnach die Möglichkeit, eine Additionsaufgabe zu einer Subtraktionsaufgabe umzukehren und ebenfalls eine Subtraktionsaufgabe zu einer Additionsaufgabe zu überführen (Reindl, 2016). Dies zeigen auch die aufgeführten Aufgaben, bei denen beispielsweise die Differenz durch ein Ergänzen über die dazugehörige Additionsaufgabe berechnet werden kann.

Nachbaraufgaben

Eine neue Aufgabe wird geschaffen, indem die Nachbarn der Zahlen zu Hilfe genommen werden. Dabei muss es sich nicht zwingend um die unmittelbaren Nachbarn handeln, sondern um in der Nähe liegende Zahlen (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018).

7 + 7 oder 8 + 8 hilft bei 7 + 8.   10 - 6 hilft bei 11 - 6.

Durch das Nutzen der Nachbaraufgabe entsteht eine leichter zu lösende Aufgabe, da diese bereits bekannt ist. Das Ergebnis der Nachbaraufgabe muss in einem nächsten Schritt in die richtige Richtung hin korrigiert werden, damit auch das tatsächliche Ergebnis der Ursprungsaufgabe resultiert (ebd.).

Manche strategischen Werkzeuge eignen sich eher als andere, um bestimmte Aufgaben zu lösen. Es sollte jedoch bedacht werden, dass die Auswahl dieser nicht nur auf den Merkmalen und Beziehungen beruht, welche die Aufgabe aufweist, sondern ebenfalls abhängig davon ist, welche davon von dem Kind erkannt werden. Dies hängt mit dem subjektiven Wissen zusammen und wird von den bisherigen Erfahrungen beeinflusst (Threlfall, 2002). Primär geht es darum, Zählstrategien im Laufe des ersten Schuljahres durch die strategischen Werkzeuge zu ersetzen, um ein Verfestigen des zählenden Rechnens zu umgehen (Häsel-Weide et al., 2017). Durch die bereits aufgeführten Beispielaufgaben wird ersichtlich, dass die Kombination mehrerer strategischer Werkzeuge möglich ist und diese in Verbindung mit weiteren Lösungswerkzeugen zu der Lösung einer Aufgabe führen (Rathgeb-Schnierer, 2006). Die Aufgabe 12 - 7 beispielsweise, welche zu der Aufgabe 10 - 5 verändert wird, kann sowohl einen Teilschritt der Zehnerzerlegung darstellen als auch das Ergebnis eines gleichsinnigen Veränderns sein. Sich die Kraft der Fünf zunutze machend ist davon auszugehen, dass auf die Basisfakten zurückgegriffen und somit die Aufgabe gelöst wird. Die Lösungswerkzeuge sind, wie die Ebene der Referenzen, nicht immer ohne Weiteres sichtbar. Werden im Lösungsprozess bestimmte Äußerungen von sich gegeben, können diese jedoch Sicherheit bieten, sodass die spezifischen Lösungswerkzeuge auszumachen sind (ebd.).

4. Darstellung und Begründung der empirischen Untersuchung

Die vorangegangenen Ausführungen und Erklärungen berücksichtigend wurde eine Untersuchung durchgeführt, welche mit den nächsten Abschnitten präsentiert ist. Welcher Motivation mit dem Betreiben der Untersuchung nachgegangen wurde und worin das genaue Ziel dieser bestand, ist im Folgenden dargelegt. Zudem werden Ergebnisse bereits bestehender Studien betrachtet, welche einem ähnlichen Forschungsinteresse folgen, da sie ein mögliches Resultat der eigenen Untersuchung darstellen könnten. Nach Klärung der Forschungsfragen und des derzeitigen Forschungsstandes wird das Forschungsdesign betrachtet. Es beginnt mit den methodischen Vorüberlegungen, welche die Grundlage für weitere Entscheidungen bezüglich des Aufbaus und der Umsetzung der Untersuchung schafften. Diese Entschlüsse wurden bei der Darlegung der Aufgaben, der Beschreibung des Untersuchungsverlaufs sowie der geplanten Auswertung der gewonnen Daten eingearbeitet und begründet. Unter Einbezug der darauffolgenden Ergebnisdarstellung soll eine Antwort auf die Forschungsfragen ermöglicht werden, welche abschließend formuliert ist.

4.1 Forschungsinteresse und Forschungsfragen

Mit dem Bestreben im ersten Schuljahr vom zählenden Rechnen abzulösen, entwickelt sich die Frage, ob dies im erwarteten Zeitraum auch gelingt. Wie bereits beschrieben, müssen zuvor ein umfassendes Zahlverständnis, ein tragfähiges Operationsverständnis sowie die strategischen Werkzeuge und mit diesen einhergehend der Zahlenblick entwickelt werden, um eine Grundlage für ein nicht-zählendes Rechnen zu schaffen. Eine solide Entwicklung dieser beansprucht jedoch Zeit. Die Entfaltung erfolgt nicht augenblicklich, sondern stellt einen Prozess dar, der von einer Erfahrungssammlung gekennzeichnet ist (Häsel-Weide et al., 2017). Das daraus hervorgehende Interesse bestand infolgedessen darin, herauszufinden, ob zum Ende des ersten Schuljahres die Ablösung tatsächlich stattgefunden hat und hierdurch ein erstes großes Ziel des Mathematikunterrichts der Grundschule erreicht werden konnte. Konkret sollten die verwendeten Lösungswerkzeuge der Kinder ausfindig gemacht werden, um einen Einblick darin zu gewinnen, wie stark sie noch an zählenden Strategien festhielten. Daraus ergab sich die folgende Fragestellung für die vorgenommene Untersuchung:

*Welche Lösungswerkzeuge zeigen Schüler*innen beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben gegen Ende von Klasse 1?*

Die Frage nach den Lösungswerkzeugen bildete den Schwerpunkt der Untersuchung und differenziert sich in vier weitere Forschungsfragen aus:

*Welche Lösungswerkzeuge zeigen Erstklässler*innen von sich aus und wie begründen sie diese?*

Gemeint sind die Lösungswerkzeuge, welche die Kinder anwenden, ohne Hinweise oder Impulse zu erhalten, wie eine Aufgabe (anderweitig) gelöst werden kann. Dabei sind die heranziehenden Begründungen für diese Wahl von zentraler Bedeutung. Stützen sich die Kinder auf erkannte Merkmale und Beziehungen und erklären darüber die Lösungswerkzeuge und zeigen sich Zusammenhänge zwischen den Begründungen und den gewählten Lösungswerkzeugen?

Können fremde Lösungsansätze nachvollzogen und begründet werden?

Der Unterschied zu der vorherigen Frage besteht darin, ob Lösungsansätze (konkret: gegebene Nachbaraufgaben, Umkehraufgaben sowie gegen- und gleichsinnig veränderte Aufgaben) verstanden werden, sodass die zugrundeliegenden Ideen rekonstruiert und begründet werden können. Der Fokus lag darauf, herauszufinden, ob die Kinder die Nutzung von Lösungswerkzeugen rechtfertigen konnten, obwohl sie diese nicht selbst verwendeten.

Besteht ein Unterschied bei Additions- und Subtraktionsaufgaben?

Es ging darum, der Frage nachzugehen, ob bestimmte Lösungswerkzeuge oder Begründungen stärker bei Additionsaufgaben als bei Subtraktionsaufgaben und umgekehrt gezeigt werden und dies bei einer Vielzahl der Kinder der Fall ist.

Besteht ein Unterschied bei Aufgaben mit/ohne Zehnerübergang?

Auch hier sollte herausgefunden werden, inwieweit ein Zusammenhang zwischen den gezeigten Lösungswerkzeugen sowie Begründungen und (k)einem Zehnerübergang beim Lösen additiver Aufgaben von den Kindern besteht.

Können all diese Fragen beantwortet werden, so kann auch eine ausführliche Antwort auf die eingangs gestellte Leitfrage erfolgen. Da bereits einige Studien bestehen, welche die angewandten Lösungswerkzeuge zum Ende des ersten Schuljahres von Kindern betrachten, wird als Nächstes der Fokus auf den Ergebnissen dieser gelegt. Um einen Überblick über diese getätigten Untersuchungen zu schaffen, wurden einige Studien der letzten Jahre summarisch dargestellt und ein Schluss aus diesen gezogen, welcher für die eigenen Ergebnisse von Relevanz sein könnte.

4.2 (Aktueller) Forschungsstand

Insbesondere in den letzten Jahrzehnten ist die Ablösung vom zählenden Rechnen ein fester Bestandteil von Studien auf nationaler und internationaler Ebene geworden (Rechtsteiner-Merz, 2015). Wie die unten aufgeführten Studien zeigen, besteht eine gewisse Vereinbarkeit in den Ergebnissen der Untersuchungen. Bei der Auswahl an Studien wurde berücksichtigt, dass es sich um Untersuchungen handelt, die gegen Ende des ersten Schuljahres durchgeführt wurden, Zahlaufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 20 beinhalten und die gezeigten Lösungswerkzeuge erhoben wurden. Weiterhin ist zu beachten, dass unterschiedliche Begrifflichkeiten und Ausdifferenzierungen für die Lösungswerkzeuge in den jeweiligen Studien verwendet wurden (z. B. Rechenstrategien, Ableitungsstrategien, derived facts etc.). Der Einfachheit halber werden daher die nun drei bekannten Lösungswerkzeuge aus dem Modell von Rathgeb-Schnierer (2011) verwendet, um die Ergebnisse darzustellen. Wurde ein Rückgriff auf Basisfakten als eine Kategorie mit den strategischen Werkzeugen zusammengefasst, so ist dies vermerkt.

- Gray (1991) hat Aufgaben im Zahlenraum bis 10 lösen lassen. Die strategischen Werkzeuge wurden dabei im Durchschnitt in weniger als 10% der Fälle genutzt. Darüber hinaus konnte er einen Unterschied anhand der Leistungsstände der Erstklässler*innen ausmachen: Die leistungsschwächeren Kinder zeigten zu 90% Zählstrategien und zu 10% lösten sie die Aufgaben durch einen Rückgriff auf Basisfakten. Die (über-)durchschnittlich leistungsstarken Kinder lösten die Aufgaben zu 50% durch den Abruf automatisierter Aufgaben, zu 10% durch das Anwenden strategischer Werkzeuge und zu 40% durch das Zählen.

- Auch Padberg (1993, 1994) differenzierte seine 31 untersuchten Kinder nach verschiedenen Leistungsstärken. Dabei ergab sich, dass die leistungsstarken Kinder die Aufgaben entweder mithilfe strategischer Werkzeuge oder einem Rückgriff auf Basisfakten erschlossen. Die leistungsschwächeren Erstklässler*innen nutzten überwiegend die Zählstrategien. Diejenigen Kinder, welche der Gruppe mit einer durchschnittlichen Leistungsstärke zugeordnet waren, lösten die Aufgaben teilweise zählend und teilweise durch den Abruf von Basisfakten sowie die Anwendung von strategischen Werkzeugen. Bei den Subtraktionsaufgaben nutzten sie hingegen überwiegend strategische Werkzeuge. Bei der Addition dominierte das gegensinnige Verändern sowie die Zehnerzerlegung, bei der Subtraktion vor allem die Zehnerzerlegung und bei bestimmten Aufgaben das Nutzen von Analogien.

- Geary, Hoard, Byrd-Craven und DeSoto (2004) berichten, dass mit Abstand am meisten gezählt wurde. Danach folgten die automatisierten Aufgaben, am wenigsten lösten die Kinder Aufgaben mithilfe strategischer Werkzeuge.

- Ergebnisse der durchgeführten Untersuchung von Canobi (2004) zeigen, dass Additions- und Subtraktionsaufgaben für gewöhnlich durch ein zählendes Ergänzen gelöst wurden. Zudem konnte die Mehrheit der Kinder die Aufgaben auf mehr als eine Weise lösen.

- Grube (2006) schildert, wie Additionsaufgaben ohne Zehnerübergang im Zahlenraum unter 10 nicht unbedingt zählend gelöst wurden, mit einem Zehnerübergang fand sich ein Zählen jedoch überwiegend wieder.

- Henry und Brown (2008) untersuchten den Fortschritt, den Kinder im Laufe der ersten Klasse beim Rückgriff auf Basisfakten machten, weshalb auch der Unterricht der Schüler*innen auf Basisfakten ausgelegt war. Es stellte sich heraus, dass gegen Ende des Schuljahres mehr als zwei Drittel von ihnen das Zählen als Hauptlösungswerkzeug für das Lösen der gestellten Basisfaktenaufgaben nutzten. Der Abruf automatisierter Aufgaben, das auszumachende Nutzen strategischer Werkzeuge sowie die Kombination dieser Lösungswerkzeuge erfolgte in einem geringen Maße. Weiterhin war ein Rückgriff auf Basisfakten bei Subtraktionsaufgaben noch geringer auszumachen als beim Lösen von Additionsaufgaben. Basisfakten mit einem niedrigen Ergebnis (bis 10) wurden vergleichsweise öfter abgerufen (es sei denn, es handelte sich um Verdopplungsaufgaben über 10).

- Gaidoschik (2010) führte eine Langzeitstudie durch, bei der die Lösungswerkzeuge von Erstklässler*innen zu drei Zeitpunkten des Schuljahres erhoben wurden. Wie die Ergebnisse darlegen, erfolgte zum Ende des ersten Schuljahres im Zahlenraum bis 10 am häufigsten ein Rückgriff auf Basisfakten in Kombination mit den strategischen Werkzeugen (33%). Dies war vor allem bei Verdopplungsaufgaben und bei Aufgaben mit der 1 oder 9 als Summanden/Minuenden auszumachen. Danach bildete das Zählen das meistgenutzte Lösungswerkzeug (24%). Kinder, die hauptsächlich zählten, nutzten keine strategischen Werkzeuge. Gaidoschik zieht aus diesem Ergebnis den Schluss, dass im Zahlenraum bis 10 eine zu geringe Menge an Aufgaben beherrscht wurden, sodass die damit kombinierten strategischen Werkzeuge bis zur 20 nur begrenzt eingesetzt werden konnten. Aufgaben mit Zehnerübergang wurden zu 54% mithilfe von Zählstrategien bearbeitet, nicht-zählende Lösungswerkzeuge wurden zu 28% genutzt. Dabei war ein Faktenabruf bei der Addition häufiger auszumachen als bei der Subtraktion. Insgesamt konnten um die 33% der 139 Kinder zum Ende des ersten Schuljahres ein zählendes Rechnen zum größten Teil überwinden, etwa 27% lösten die Mehrheit der Aufgaben (im Zahlenraum bis 10) noch zählend.

- In einer Folgestudie von Gaidoschik, Fellmann und Guggenbichler (2015) haben die Lehrkräfte der untersuchten Klassen zuvor an einem Programm teilgenommen, in welchem sie im Bereich der strategischen Werkzeuge in Kombination mit den Basisfakten geschult wurden und der Mathematikunterricht darauf basierend stattgefunden hat. Die Aufgaben im Zwanzigerraum wurden bei zwei von vier Klassen von weniger als 10% zählend gelöst, bei den zwei anderen Klassen waren es 0%. Alle anderen Kinder griffen auf Basisfakten und strategische Werkzeuge zurück.

Wie sich durch die Studienergebnisse herausstellt, wurden zum Schuljahresende additive Aufgaben noch überwiegend zählend gelöst, was darauf schließen lässt, dass die Ablösung weitestgehend nicht stattgefunden hat. Von den Kindern wurden zwar alle drei Lösungswerkzeuge verwendet, jedoch war dies auch abhängig von der jeweiligen Leistungsstärke. Vor allem Aufgaben mit Zehnerübergang wurden oftmals mithilfe von Zählstrategien gelöst. Bei den Studien handelt es sich jedoch um Ergebnisse, die bereits mehrere Jahre zurückliegen. Dies ist damit zu erklären, dass bei den Erstklässler*innen dieser Bereich (mit dem Ergebnis, dass größtenteils keine Ablösung stattfindet) bereits hinreichend ausgeforscht ist und in höheren Jahrgangsstufen nach den verwendeten Lösungswerkzeugen von Schüler*innen und einer einhergehenden Ablösung weitergeforscht wurde. Eine weitere Recherche dazu zeigt, dass in ähnlichen Untersuchungen wie in der von Gaidoschik, Fellmann und Guggenbichler (2015) oftmals nicht (nur) die Lösungswerkzeuge erhoben werden, sondern (ebenfalls) erforscht wird, inwieweit eine spezielle unterrichtsintegrierende Förderung, welche der Untersuchung vorausgeht, zählende Rechner*innen zur Ablösung verhilft (z. B. bei Häsel-Weide, 2013 oder Rechtsteiner-Merz, 2013).

Es ist dennoch interessant zu erfahren, ob in den letzten Jahren Veränderungen stattgefunden haben und nun weitaus weniger Zählstrategien und dafür ein höherer Rückgriff auf Basisfakten sowie strategischen Werkzeugen auszumachen sind. Herauszufinden, ob sich die Ergebnisse immer noch decken, stellte einen weiteren Grund für die Durchführung der eigenen empirischen Untersuchung dar. Für diese wurde durch Hinzunahme der bisherigen Studienergebnisse als Grundannahme festgehalten, dass als Hauptlösungswerkzeug das Zählen herangezogen wird. Ein Rückgriff wurde als zweithäufigstes Lösungswerkzeug immer dann vermutet, wenn Verdopplungsaufgaben oder Zehnersummen erkannt werden und vor allem in Kombination mit den strategischen Werkzeugen genutzt werden können. Das gleich- und gegensinnige Verändern wurde aufgrund der für das erste Schuljahr noch höheren Komplexität als am wenigsten hinzugezogenes Lösungswerkzeug erwartet. Generell wurde angenommen, dass der Großteil der Kinder noch nicht vom Zählen abgelöst hat.

4.3 Forschungsdesign und Durchführung

Nachdem das Ziel der eigenen Untersuchung vorgestellt wurde und die Resultate bisheriger Forschungen in diesem Bereich dargestellt worden sind, erfolgt als Nächstes die Beschreibung und Begründung des gewählten Forschungsdesigns. Design- und Methodenwahl wurden an die Fragestellung angepasst und für die Durchführung der Untersuchung sowie die Datenauswertung genutzt.

4.3.1 Design- und Methodenübersicht – Grundlegende Überlegungen

Ausgehend von der Leitfrage und den sich daraus ergebenden weiteren Forschungsfragen wurde die Untersuchung konzipiert. Da die gezeigten Lösungswerkzeuge der Kinder sowie die dafür zugrunde liegenden Denkprozesse erhoben wurden und Rathgeb-Schnierer (2006) bereits von den unterschiedlichen Explikationsgraden der Ebenen im Lösungsprozess berichtet, wurde sich hierbei auf eine qualitative Methode gestützt. Um die Ebene der Lösungswerkzeuge möglichst sichtbar zu gestalten und einen detaillierten Einblick in diese zu erhalten, stellt ein Paper-Pencil-Test beispielsweise keinen ausreichenden Zugang dar. Da die genutzten Lösungswerkzeuge beim Rechnen und das Denken der Kinder im Mittelpunkt standen, wurde eine Form benötigt, bei der sich auf

Äußerungen der Kinder gestützt werden kann und von diesen ausgehend Verbindungen zu den Lösungswerkzeugen gezogen werden können (ebd.). Es war also notwendig, dass die Erstklässler*innen ihren Lösungsweg mündlich explizieren, damit qualitative Aussagen über Denkprozesse getroffen werden konnten. Hierfür eignete sich eine dem Untersuchungsvorhaben angepasste Form des klinischen Interviews besonders (Selter & Spiegel, 1997).

Das Untersuchungsziel dient ebenfalls als Begründung dafür, dass sich für ein ermittelndes, halb-standardisiertes Leitfadeninterview entschieden wurde. Bei ermittelnden Interviews liegen die benötigten Informationen bei den Befragten und ein halbstandardisiertes Verfahren lässt sich an der offenen, aber dennoch teilstrukturierten Befragung ausmachen (Lamnek & Krell, 2016). Durch die Offenheit war ein flexibles Eingehen auf das Kind und dessen Erläuterungen gewährleistet. Die Orientierung an einem Leitfaden bot auf der anderen Seite die Sicherheit, auf das Untersuchungsziel hinzuarbeiten, ohne dabei übermäßig einschränkend zu sein. Zwar wurden zuvor Fragen und eine etwaige Vorgehensweise für das Interview vorformuliert, jedoch konnten diese stets dem jeweiligen Interviewverlauf angepasst werden und somit individuell und flexibel auf die Handlungen sowie Aussagen der Teilnehmenden eingegangen werden (Lamnek & Krell, 2016; Mayring, 2016). Um den Kindern den nötigen Raum für eigene Vorgehensweisen zu geben, ohne sich dabei von weiteren Kindern beeinflussen zu lassen, fand die Untersuchung in Form von Einzelinterviews statt.

4.3.2 Stichprobe

Wie die Fragestellung der Untersuchung preisgibt, handelt es sich um die Lösungswerkzeuge, welche *Erstklässler*innen* beim Lösen von additiven Aufgaben zeigen. Dementsprechend wurden Kinder, die sich in der ersten Klasse befanden, interviewt. Nach Kontaktaufnahme zu mehreren Kasseler Grundschulen meldeten sich insgesamt zehn Kinder im Alter von 6 bis 7 Jahren freiwillig als Teilnehmende. Die fünf Mädchen und fünf Jungen stammen aus sechs unterschiedlichen ersten Klassen. Das einzige Kriterium für eine Teilnahme bestand darin, dass die Kinder die erste Klasse besuchten. Es wurde keine vorherige oder nachfolgende Auswahl nach Leistungsstärke oder sonstigen Eigenschaften getroffen.

4.3.3 Interviewaufgaben

Für die Interviews wurden Zahlenaufgaben konzipiert, die von den Kindern gelöst werden sollten. Da der Fokus auf den Lösungswerkzeugen lag und die Interviewaufgaben nicht durch die zusätzliche Anforderung des Herauslösens einer Aufgabe aus dem Sachkontext bestehen sollten, wie es beispielsweise bei Textaufgaben der Fall ist, stellten sich Zahlenaufgaben als geeignet heraus. Insgesamt wurden vierzehn Aufgaben im Zahlenraum bis 20 erstellt, davon sieben Additionsaufgaben und sieben Subtraktionsaufgaben. Der Anspruch bestand darin, dass es sich um geeignete Aufgaben handelt, welche bestimmte Eigenschaften aufweisen und dadurch dazu anregen, die nicht-zählenden Lösungswerkzeuge anzuwenden. Die Auswahl an Rechenaufgaben erfolgte daher basierend auf verschiedenen Kriterien. Zum einen war es von Bedeutung, dass zwar alle drei Lösungswerkzeuge angewendet werden können, jedoch lag ein spezielles Augenmerk auf den strategischen Werkzeugen und dem Rückgriff auf Basisfakten. Dahingehend wurden stets Zahlen zu unterschiedlichen Aufgaben auf die Weise zusammengesetzt, dass bestimmte Merkmale und Beziehungen hervorstehen und sich die zwei Lösungswerkzeuge (in Kombination) zum Lösen somit besonders anbieten.

Da untersucht wurde, ob bei der Wahl der Lösungswerkzeuge neben den Additions- und Subtraktionsaufgaben auch Unterschiede bei Aufgaben mit und ohne Zehnerübergang existieren, stellte dies ebenfalls ein Kriterium für die Aufgabenzusammensetzung dar. Die Aufgaben sollten nicht nur als Einzelne das Nutzen strategischer Werkzeuge sowie das Abrufen von Basisfakten anregen, sondern ebenfalls Beziehungen zueinander aufweisen. Aus diesem Grund wurde sich für die folgenden Aufgabenpaare entschieden:

- 3+5 und 8-5 → Umkehraufgabe,
- 4+6 und 4+16 → Einergleichheit (Analogien),
- 3+13 und 3+4 → Verdopplung 3+3 für 3+4 nutzen,
- 14-7 und 6+7 → Halbierung für Fastverdopplung nutzen.

Die aufgelisteten Aufgaben haben die Gemeinsamkeit, dass wenn eine des Aufgabenpaares beherrscht wird, die andere durch die vorliegende Beziehung ebenfalls leicht abgeleitet und somit nicht-zählend gelöst werden kann. Die vierzehn Aufgaben beinhalten jeweils mindestens ein spezifisches Merkmal. Zu diesen Merkmalen zählen unter anderem Doppelt-Halb-Beziehungen, die Fünfernähe oder auch die gleichen Ziffern am gleichen Stellenwert (Zehner- bzw. Einergleichheit). Wie auch Carpenter und Moser (1984) in ihrer Langzeituntersuchung zum Lösen additiver Aufgaben berücksichtigten, wurde auch hier bei der Erstellung von Additionsaufgaben stets mit dem kleineren Summanden begonnen. Dies hatte den Vorteil, eindeutig zu erkennen, ob die Tauschaufgabe als strategisches Werkzeug genutzt wurde. Alle Interviewaufgaben sind nachfolgend dargestellt (*Tab. 3*). Dabei sind spezifische Eigenschaften der einzelnen Aufgaben und mögliche Lösungswerkzeuge, um diese nicht-zählend zu lösen, beschrieben. Es sei darauf hingewiesen, dass die aufgeführten Lösungswerkzeuge lediglich einige Möglichkeiten, jedoch nicht alle Optionen abdecken, um die jeweilige Aufgabe zu bearbeiten. Bei Verdopplungs- bzw. Halbierungsaufgaben sowie Aufgaben mit 10 als Summe wird generell davon ausgegangen, dass diese automatisiert sind.

Tabelle 3 Interviewaufgaben (in Anlehnung an Rathgeb-Schnierer, 2006, S. 125)

Aufgabe	*spezifische Eigenschaften*	*nicht-zählende Lösungswerkzeuge*
3+4	• ohne Zehnerübergang • Nähe der Summanden	• Hilfsaufgabe: Nachbarn und Verdopplung nutzen (*3+3*+1; *4+4*-1)
3+5	• ohne Zehnerübergang	• Kraft der Fünf nutzen • gegensinniges Verändern führt zur Verdopplungsaufgabe (4+4)
4+6	• ohne Zehnerübergang • Summe 10 • Fünfernähe der Summanden	• gegensinniges Verändern führt zur Verdopplungsaufgabe (5+5) • Summe 10 → automatisiert
6+7	• Zehnerübergang • Nähe der Summanden	• Hilfsaufgabe: Nachbarn und Verdopplung nutzen (*6+6*+1; *7+7*-1) • Kraft der Fünf (*5+5*+1+2) • Zehnerzerlegung (*6+4;* 10+3)
8+8	• Zehnerübergang • Verdopplungsaufgabe	• automatisiert • Zehnerzerlegung (*8+2*+6)
3+13	• ohne Zehnerübergang • Einergleichheit	• dekadische Analogie (3+3)
4+16	• ohne Zehnerübergang • Summe 20	• dekadische Analogie nutzen (4+6) • gegensinniges Verändern mit anschließender Analogienutzung (5+15 → 5+5)
8-5	• ohne Zehnerübergang	• Kraft der Fünf • Umkehraufgabe ergänzend lösen (5+? = 8)
11-6	• Zehnerübergang • Zehner- und Fünfernähe	• Hilfsaufgabe: Nachbarn und Halbierung nutzen (*12-6*-1) • gleichsinniges Verändern und Halbierung nutzen (10-5)
11-9	• Zehnerübergang • Nähe von Minuend und Subtrahend	• Ergänzen • gleichsinniges Verändern (10-8)
14-7	• Zehnerübergang	• automatisiert

	• Halbierungsaufgabe	• Zehnerzerlegung (*14-4*-3)
19-9	• ohne Zehnerübergang • Einergleichheit	• dekadische Analogie (9-9) • gleichsinniges Verändern und Halbierung nutzen (20-10) • Hilfsaufgabe: Nachbarn nutzen (*19-10*+1; *20-9*-1)
18-11	• ohne Zehnerübergang • zweistelliger und innerhalb der Aufgaben größter Subtrahend	• gleichsinniges Verändern (17-10) • Hilfsaufgabe: Nachbar nutzen (*18-10*-1) • dekadische Analogie (1-1 und 8-1)
20-7	• (atypischer) Zehnerübergang • größter Minuend im Zahlenraum bis 20	• Zahlzerlegung nutzen (20 = 10+10 → 10-7 = 3, also 3+10)

4.3.4 Durchführung der Untersuchung

Die zehn Erstklässler*innen wurden in Form von Einzelinterviews (Dauer je Kind etwa 30 Minuten) im Zeitraum von Ende März bis Anfang April 2021 eigenständig befragt. Den genauen Zeitpunkt stellte die 28. Schulwoche (Montag bis Freitag) dar, also gegen Ende des Schuljahres. Da die Interviews aufgrund der Corona-Pandemie nicht face-to-face in Präsenz stattfinden konnten, wurden diese digital, unter Nutzung eines Videokonferenzdienstes, geführt. Der Vorteil bestand darin, dass sich die Kinder während der Befragung in ihrem gewohnten Umfeld befanden, was einen positiven Effekt auf das Wohlbefinden haben kann und sich dies wiederum auf den Interviewverlauf auswirkt (Lamnek & Krell, 2016). Weiterhin fand eine Videoaufzeichnung aller Interviews statt. Dies war notwendig, um später eine präzise Datenauswertung zu gewährleisten. Um die Äußerungen der Kinder deuten zu können, genügte grundsätzlich eine Audioaufnahme. Jedoch kommen der Mimik und Gestik ebenfalls eine bedeutende Rolle zu, auf denen basierend Aussagen aufgefasst werden (ebd.). Aus diesem Grund wurden sowohl Ton als auch Bild aufgezeichnet, wofür sich eine schriftliche Einverständniserklärung der Erziehungsberechtigten eingeholt wurde.

Die Einzelinterviews folgten jedes Mal dem gleichen (organisatorischen) Ablauf. Wie beschrieben, vollzogen sich die Interviews auf Grundlage eines Leitfadens (siehe Anhang), welcher in Anlehnung an Lamnek und Krell (2016) erstellt wurde. Um eine angenehme Gesprächsatmosphäre und Transparenz zu schaffen, wurde sich bei jedem Interview zunächst gegenseitig vorgestellt und das weitere Vorgehen geschildert (Selter & Spiegel, 1997). Jedem Kind wurde mitgeteilt, dass dieses Gespräch stattfindet, da Interesse an ihren Denkwegen besteht und erfahren werden möchte, wie sie rechnen.

Als Nächstes ging es an die Interviewaufgaben. Für gewöhnlich beginnen Kinder unmittelbar damit, eine Rechenaufgabe zu lösen, ohne die beinhalteten Zahlen vorab genauer zu betrachten (Schütte, 2004). Um diese Herangehensweise an die Aufgaben zu vermeiden und ein geschicktes Lösen anzuregen, bei dem die Aufgabenmerkmale sowie Zahlbeziehungen möglichst wahrgenommen werden und somit auch eine Breite an Lösungswerkzeugen gezeigt werden kann, sollten die Kinder die Aufgaben nicht sofort zu Beginn lösen (ebd.). Den Kindern wurde erklärt, dass sie per Bildschirmübertragung mehrere Additions- und Subtraktionsaufgaben sehen werden, diese zunächst in Ruhe betrachten sollen (Phase des Betrachtens) und mit diesen anschließend eine Sortierung vornehmen. Für das Interview wurde demnach das Aufgabenformat zum Sortieren gewählt (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Bei diesem geht es darum, Aufgabenmerkmale und Zusammenhänge zu sehen und auf Grundlage dieser, die Aufgaben bestimmten Kategorien zuzuordnen. Durch das vorausgehende Sortieren muss zunächst über die Aufgaben nachgedacht werden, bevor unverzüglich losgerechnet werden kann (ebd.). Damit bildet die Sortierung von Rechenaufgaben ein Aufgabenformat, bei dem das Betrachten eine wesentliche Rolle einnimmt. Je nachdem, welchen Kategorien die Sortierung unterliegt, kann diese bei der gleichen Person unterschiedlich ausfallen. Für die Untersuchung erfolgte die Sortierung unter den drei Lösungswerkzeugen als Zuordnungskategorien. Für die Kinder wurden zum besseren Verständnis die aus dem Format bekannten Bezeichnungen *weiß ich auswendig* (Basisfakten), *kenne ich einen Trick* (strategische Werkzeuge) und *zähle ich* (zählen) übernommen (ebd.). Da es sich hierbei um subjektive Kriterien handelt, wurden die individuellen Einschätzungen der Aufgabenzuordnung der Kinder erfragt.

Für das Sortieren spielt das Wissen über Zahlen und Rechenoperationen sowie individuelle Zahlpräferenzen eine zentrale Rolle (Rathgeb-Schnierer, 2006). Somit ist die Zuordnung der Aufgaben davon abhängig, ob und welche Merkmale sowie Beziehungen erkannt werden und ob diese auch genutzt werden können. Aus diesem Grund ist nicht allein die Sortierung von Relevanz, sondern ebenfalls die Begründung, wie es zu dieser kommt. Dazu müssen sich die Kinder ihrer eigenen Vorgehensweise bewusst werden. Rechenwege zu artikulieren, stellt eine bewährte Methode dar, um unter anderem den Lösungswerkzeugen oder auch dem Referenzkontext näherzukommen (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Kognitive Prozesse an die Oberfläche zu bringen, die vermeintlich ohne Weiteres vonstattengehen, stellt jedoch eine herausfordernde Aufgabe dar (Carpenter, Blume, Hiebert, Anick & Pimm, 1982). Hinzu kommt, dass sich das Denken nicht sprachlich vollzieht, was das Verbalisieren dessen ebenfalls schwierig gestaltet (Lorenz, 2006). Mit diesem Wissen wurde der Kern des Interviews wie folgt gegliedert: Begonnen wurde mit dem Sortieren der Aufgaben, dann erfolgte die dazugehörige Begründung und das anschließende Lösen der Aufgaben mit einer Darlegung der Vorgehensweise (Rathgeb-Schnierer, 2014). Sobald das Kind sich eine Aufgabe aus dem blauen Bereich ausgesucht und diese einer Kategorienkiste zugeordnet hat (*Abb. 4*), wurde es nach der Begründung für die Sortierung bzw. der Art der Berechnung der Aufgabe gefragt, sofern das Kind dies zuvor nicht schon selbstständig angesprochen hat, sodass eindeutige Schlüsse ermöglicht wurden. Wie Siegler (1987) erklärt, können Kinder ihre strategische Vorgehensweise sorgfältig beschreiben, wenn sie gleich im Anschluss an das Lösen nach dieser gefragt werden.

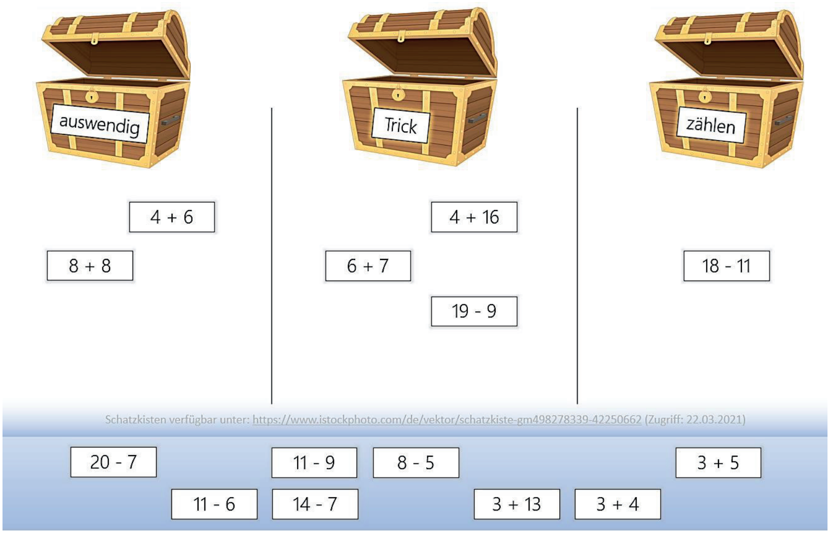

Abbildung 4 Visuelle Umsetzung des Formats „Aufgaben sortieren" – Bildschirmübertragung Interview

Fragen, wie beispielsweise „Wie konntest du die Aufgabe so schnell lösen?“, „Wie funktioniert dein Trick?“ oder „(Warum) Bist du dir sicher, dass nach deiner Veränderung der Aufgabe das gleiche Ergebnis herauskommt?“, intendierten die genaue Einordnung der Lösungswerkzeuge und boten den Kindern Hilfestellung, ihre Gedanken zielgerichtet auszudrücken. Weitere Fragen und Impulse, die den Teilnehmenden während des Interviews gegeben wurden, können dem Leitfaden (siehe Anhang) entnommen werden.

Alle Aufgaben wurden mündlich gelöst. Zwar wurde den Kindern zu Beginn einmal mitgeteilt, dass ihnen, für den Fall, dass sie Zwischenschritte notieren wollen, ein Blatt zur Verfügung steht, jedoch wurde dieses Angebot von keinem Kind in Anspruch genommen. Demnach erfolgte die Berechnung der Aufgaben stets durch ein Kopfrechnen, gelegentlich durch Hinzunahme der Finger als Stützpunktvorstellung. Um zu vermeiden, dass stets die gleichen Vorgehensweisen beim Lösen der Aufgaben angewendet werden, haben Blöte, van der Burg und Klein (2001) in ihrer Untersuchung die Aufgaben jeweils zweimal unterschiedlich lösen lassen. Hierdurch soll gezeigt werden, dass den Kindern auch alternative Vorgehensweisen möglich sind. Diese Idee wurde für die eigene Untersuchung übernommen, jedoch nicht immer von allen Kindern verlangt: Diejenigen Erstklässler*innen, bei denen zu beobachten war, dass sie immerzu auf ein Zählen zurückgriffen, wurden gefragt, ob sie eine Aufgabe auch anders lösen können. Wurde die Frage negativ beantwortet, war davon auszugehen, dass auch die nächsten Aufgaben, die zählend gelöst wurden, keiner anderen Vorgehensweise folgen können. Zudem wurden alle Kinder dazu angeregt, in den Aufgabenpool zu schauen und zu überlegen, ob sie Aufgaben finden können, die zueinander passen bzw. eine Aufgabe, die bereits automatisiert ist, als Hilfe zum Lösen einer anderen hinzuziehen können. Gelegentlich wurde den Kindern auch eine Möglichkeit gegeben, die Aufgabe zu verändern. Beispielsweise wurden sie gefragt, ob die Aufgabe 12 - 6 beim Lösen der 11 - 6 weiterhilft und wenn ja, wieso.

Nachdem die Aufgaben bearbeitet wurden, hatten die Kinder noch die Gelegenheit, ihre Zuordnungen zu überblicken und, wenn gewollt, Änderungen vorzunehmen, weitere Lösungsmöglichkeiten hinzuzufügen und offene Fragen zu stellen. Zum Schluss erfolgte die Danksagung an die Teilnehmenden und das Interview wurde beendet.

4.3.5 Verfahren der Datenauswertung

Bei der Auswertung der Daten erfolgte eine Orientierung an Mayrings (2016) strukturierender qualitativer Inhaltsanalyse. Jedes Interview wurde zunächst als Einzelnes aufbereitet, um anschließend eine Gesamtansicht zu ermöglichen. Die Auswertung der Daten selbst beinhaltete zwei Schritte. Zuerst wurde nach einer Möglichkeit gesucht, die unterschiedlichen Lösungswerkzeuge, welche beim Lösen von Aufgaben herangezogen werden können, auf eine Weise darzustellen, dass daraus ersichtlich wird, welche von ihnen tatsächlich pro Aufgabe (auch in Kombination) von dem Kind gezeigt wurden. Als Darstellungsform wurde eine Tabelle verwendet (*Tabelle 4*), welche eine abgewandelte Variante von Gaidoschiks (2010) erarbeiteten darstellt. In der ersten Spalte finden sich alle Interviewaufgaben wieder, in der ersten Zeile die möglichen Lösungswerkzeuge. Die unterschiedlichen Lösungswerkzeuge bilden die jeweiligen Kategorien, in welche die Äußerungen der Kinder zu den Interviewaufgaben eingeordnet wurden. Da es für die Fragestellung nicht von Relevanz ist, welche einzelnen Zählstrategien angewandt wurden, sondern lediglich, ob ein Zählen stattfand, wurde dieses Lösungswerkzeug, im Gegensatz zu den strategischen Werkzeugen, nicht weiter ausdifferenziert.

Im Einklang mit vorherigen Studien, in denen ebenfalls die Wahl der Lösungswerkzeuge betrachtet wurde, sind Aussagen wie „Ich weiß es einfach" oder „Ich habe es mir gemerkt" als automatisierte Aufgaben und somit als ein Rückgriff auf Basisfakten eingestuft worden (z. B. Canobi, 2004; Canobi, Reeve & Pattinson, 1998; Henry & Brown, 2008). Auch eine schnelle, richtige Lösung galt als Abruf aus dem Gedächtnis (Gaidoschik et al., 2015). Nach den durchgeführten Interviews wurde die Aussage „Ich weiß die Aufgabe auswendig, weil ich sie schon so oft gerechnet habe" passend zu den Basisfakten ergänzt. Immer dann, wenn ein Zählen durch den sichtbaren Einsatz der Finger oder das dazugehörige Aufsagen der Zahlenfolge vonstattenging, dieses also offensichtlich geschah, konnte ohne weitere Nachfragen das Lösungswerkzeug zugeordnet werden (Henry & Brown, 2008). Des Weiteren gehörten entsprechende Erklärungen der Kinder (ein Abzählen an mental vorgestellten Fingern oder Aufgaben dieser Art stets zählend lösen) ebenfalls dem Zählen an (Reindl, 2016). Dagegen konnte die Einordnung in die jeweiligen strategischen Werkzeuge nur über die Begründung bzw. die Beschreibung der Vorgehensweise erfolgen (Ausnahme: Tauschaufgabe und Kraft der Fünf). Demnach konnte beispielsweise benannt werden, dass die sogenannte *Zwergenaufgabe* (dekadische Analogie) zum Lösen genutzt wurde. Die Tauschaufgabe wurde nur dann als solche gewertet, wenn die Summanden nicht nur in umgekehrter Reihenfolge benannt wurden, sondern der Tausch ebenfalls bei der Darlegung der Berechnung ersichtlich wurde. Wenn die 5 im Gegensatz zu den anderen Zahlen zügig und als Ganzes an den Fingern dargestellt, abgezogen oder abgelesen wurde oder zur Vereinfachung der Aufgabe eine Zahl zur 5 verändert wurde, dann galt dies als Nutzen der Kraft der Fünf. Die Zuordnung zu allen weiteren strategischen Werkzeugen wurde nach den Ausführungen in *Kap. 3.4* vorgenommen.

Tabelle 4 *Datenauswertung: Lösungswerkzeuge*

Aufgabe	*Zählen*	*Basisfakten*	*strategische Werkzeuge*						
			Zerlegen & Zusammensetzen		Nutzen einer Hilfsaufgabe				
			Zehner-zerlegung	Kraft der Fünf	Ana-logien	Aufgaben verändern			Nachbar-aufgaben
						T	G&G	U	
3+4	x					x			
$3+5^F$									
4+6		x							
4+16		x	x		x				
3+13									
8+8									
(6+7)		x							x
(8-5)	x	x						x	
19-9									
18-11									
14-7	x	x						x	
11-9									
11-6	x	x							x
20-7									

T = Tauschaufgabe, G&G = gleich- und gegensinniges Verändern, U = Umkehraufgabe

Für eine erleichternde Auswertung in Hinblick auf die Forschungsfragen wurden die Additions- und Subtraktionsaufgaben nacheinander aufgelistet und die Aufgaben mit einem Zehnerübergang grau hinterlegt, um diese von denen ohne Zehnerübergang zu kontrastieren (*Tab. 4). W*ie beispielhaft dargestellt, sind Kreuzchen bei der jeweiligen Aufgabe und dem dazu gezeigten Lösungswerkzeug zu finden. Die Tabelle zeigt, dass die Aufgabe 4 + 6 durch einen Rückgriff auf Basisfakten gelöst wurde. Mehrere Kreuzchen pro Aufgabenzeile bringen die Kombination von Lösungswerkzeugen zum Ausdruck. Findet sich innerhalb einer Zeile keine Markierung bedeutet dies, dass keine Lösung erfolgte. Weitere Erklärungen zur Darstellung sind nachfolgend aufgeführt:

- Ein *F* meint, dass die Lösung vom Fingerbild abgeleitet (im Sinne einer (quasi-)simultanen Erfassung und nicht abgezählt!) wurde,[5]
- Der Einsatz von Klammern *( )* beschreibt, dass kein korrektes Ergebnis beim Lösen der Aufgabe resultierte,[6]

5 Dieser Aspekt wurde nach der Einsicht der Interviewaufnahmen zusätzlich aufgenommen, da es nicht möglich war, die Aufgabenlösung von einem der teilnehmenden Kinder ausschließlich über die Lösungswerkzeuge zu beschreiben. Durch die hinzugefügten Elemente beläuft sich die Kategorienbildung für die Datenauswertung sowohl auf einem deduktiven als auch einem induktiven Vorgehen (Mayring, 2016).

6 Wurden bei falsch gelösten Aufgaben nicht-zählende Lösungswerkzeuge gezeigt, so blieben diese Lösungswerkzeuge größtenteils unberücksichtigt. Lediglich in Hinblick auf die Fehlerquote bezüglich

- Das Nutzen von *roter Farbe* zeigt, dass die Lösung auf Grundlage eines gegebenen Lösungsansatzes stattfand, bei der das Kind feststellte, dass mit diesem die eigentliche Aufgabe ebenfalls gelöst werden kann. Der dazugehörige Lösungsweg wurde vom Kind rekonstruiert. Rote Kreuzchen können allein oder als zweite Möglichkeit die Aufgabe zu bearbeiten (also mit den schwarzen nebeneinander) erscheinen,
- Das Nutzen von *blauer Farbe* signalisiert, dass das Kind selbstständig eine weitere Möglichkeit gefunden hat, um die Aufgabe zu lösen. Blaue Kreuzchen tauchen ausschließlich gemeinsam mit mindestens einem schwarzen Kreuzchen innerhalb der Aufgabenzeile auf.

In einem zweiten Schritt wurden je Kind bestimmte Aufgaben ausgewählt, die charakteristisch für das Lösen der Aufgaben generell erschienen und die Art der Begründung besonders hervorbrachten. Hierfür wurde ebenso das vorgestellte Modell „Ebenen im Lösungsprozess“ von Rathgeb-Schnierer (2011) hinzugezogen. Dieses ermöglichte den Lösungswegen der Kinder näherzukommen und hinsichtlich der drei Ebenen begründete Folgerungen herzuleiten (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2018). Je nach Begründung konnte (teilweise) darauf geschlossen werden, ob Aufgabenmerkmale erkannt und genutzt wurden oder nach einem Verfahren gearbeitet wurde. Für die Einzelanalyse der Interviews wurde der jeweilige Gesprächsausschnitt verschriftlicht, auf eine Transkription der gesamten Interviews wurde verzichtet. Damit die Auswertung stattfinden konnte, wurde mit den Interviewaufnahmen gearbeitet, durch welche die Zuordnung der Lösungswerkzeuge erfolgen sowie bestimmte Interviewausschnitte gezielt gewählt werden konnten. Die Betrachtung der Interviews als Gesamtes erfolgte über die jeweilige Zusammenfassung des Interviews (der zusätzliche dritte Schritt), welche die wesentlichen Aspekte der ausgefüllten Tabelle sowie der Gesprächsausschnitte aufgreift. Über die Zusammenfassungen der einzelnen Befragungen ergaben sich Auffälligkeiten und Beziehungen, welche in die Gesamtansicht einflossen.

4.4 Ergebnisdarstellung der Einzelinterviews

Hiernach sind die Auswertungen der einzelnen Interviews dargestellt. Jede Auswertung beinhaltet eine bearbeitete Tabelle, ein bis zwei Gesprächsausschnitte sowie eine Zusammenfassung der Interviewergebnisse. Für die Erstellung die-

der Unterschiede bei Additions- und Subtraktionsaufgaben bzw. bei Aufgaben mit/ohne einen Zehnerübergang wurden die betroffenen Aufgaben einbezogen.

ser drei Teile wurden die Interviewaufnahmen in Hinblick auf die Forschungsfragen analysiert und interpretiert. Jeder Unterabschnitt trägt den pseudonymisierten Namen des befragten Kindes, damit die Einzelauswertungen mühelos voneinander unterschieden werden können. Um das Nachvollziehen der transkribierten Ausschnitte möglichst simpel und dennoch ausreichend detailliert zu gestalten, sodass die wesentlichen Folgerungen möglich sind, wurde sich gegen ein vollständig bestehendes Transkriptionsverfahren entschieden und lediglich die fünf am wichtigsten erscheinenden Regelungen angewandt:

- Anzahl der Punkte innerhalb von Klammern gibt die Dauer eingelegter Sprechpausen an, über drei Sekunden hinaus erfolgt die symbolische Form der Zahl, z. B. (*...*) für drei Sekunden oder (*5*) für fünf Sekunden.
- Beschreibung nonverbaler Vorgänge in Klammern, z. B. (*lacht*).
- „mhm“ als zustimmende, „äh“ und „ähm“ als nachdenkende Äußerung.
- „–“ als Wortabbruch, z. B. *Das ist eine Plusaufga– Minusaufgabe*.
- Unterstreichung als Betonung, z. B. *Das verstehe ich, <u>das</u> aber nicht*.

Dabei wurden Äußerungen der Befragten mit ihrem Anfangsbuchstaben gekennzeichnet, für die eigene Kurzform *Interviewerin* wurde ebenfalls mit dem Anfangsbuchstaben dieses Begriffes gearbeitet.

4.4.1 Tommy

Tabelle 5 Auswertung Tommy

Aufgabe	*Zählen*	*Basisfakten*	*strategische Werkzeuge*						
			Zerlegen & Zusammensetzen		Nutzen einer Hilfsaufgabe				
			Zehnerzerlegung	Kraft der Fünf	Analogien	Aufgaben verändern			Nachbaraufgaben
						T	G&G	U	
3+4		x							x
3+5		x							
4+6		x							
4+16		x	x		x				
3+13		x	x		x				
(8+8)		x							x
6+7		x							x
8-5		x						x	
19-9		x	x		x				
(18-11)	x								
14-7		x	x						
(11-9)	x								
11-6		x						x	x
20-7		x	x						

T = Tauschaufgabe, G&G = gleich- und gegensinniges Verändern, U = Umkehraufgabe

Aufgabe „6+7“

T: Ich würde einfach 6 plus 6 machen (…), weil man kann 6 plus 6 auch mit den Würfeln machen.[7]

I: Und was machst du dann?

T: Dann rechne ich einfach plus 1.

I: Warum fällt es dir leichter, das so zu machen und nicht die 6 plus 7 gleich zu rechnen?

T: (schaut zur Seite und hebt die Schultern an) Weil die 6 plus 6 haben wir auch schon mal beim Monopoly-Spielen gewürfelt.

I: Und warum weißt du so genau, dass bei beiden Aufgaben das gleiche rauskommt?

T: Weil 6 plus 1 kann man auch erst rechnen.

Der Gesprächsausschnitt zeigt, wie Tommy die Aufgabe auf eine bereits bekannte zurückführte und seinen Lösungsweg mit der Zerlegung von 7 in 6 und 1 andeutete. Auf diese Weise ging er bei einer Vielzahl der Aufgaben vor. Er erkannte Aufgabenmerkmale und Zahlbeziehungen, auf denen basierend er strategische Werkzeuge (am häufigsten Zehnerzerlegungen und Nachbaraufgaben) anwandte, sodass die neue Aufgabe oder die Teilschritte durch das Abrufen von Basisfakten gelöst werden konnten. Zumeist war davon auszugehen, dass Tommy beziehungsorientiert vorging. Bei einzelnen Aufgaben war dies, wie im ausgewählten Gesprächsausschnitt, jedoch nicht eindeutig auszumachen. Tommy legte seinen Lösungsweg dar, benannte die Nachbarbeziehung der zwei Zahlen und die damit resultierende Addition der 1 aber nicht explizit. Bei den Aufgaben 18 - 11 und 11 - 9 kann vermutet werden, dass er keine Merkmale und Beziehungen erkannt hat und daher auf das Rückwärtszählen ausgewichen ist. Wahrscheinlich war dies ebenfalls bei der Aufgabe 11 - 6 der Fall, da Tommy bei dieser, bis er einen Hinweis bekam, keinen Lösungsansatz hatte. Zwischen Aufgaben mit und ohne Zehnerübergang waren keine auffälligen Unterschiede zu erkennen. Zwei Subtraktionsaufgaben löste er zählend und erhielt dabei ein falsches Ergebnis.

[7] Die Gesprächsausschnitte der Interviews enthalten eine wörtliche Transkription. Fehler (z. B. die Grammatik betreffend) wurden somit nicht korrigiert, sondern übernommen.

4.4.2 Elena

Tabelle 6 *Auswertung Elena*

Aufgabe	*Zählen*	*Basisfakten*	*strategische Werkzeuge*						
			Zerlegen & Zusammensetzen		Nutzen einer Hilfsaufgabe				
			Zehner-zerlegung	Kraft der Fünf	Ana-logien	Aufgaben verändern			Nachbar-aufgaben
						T	G&G	U	
3+4		x							x
3+5		x							
4+6		x							
4+16		x	x		x				
3+13	x	x	x		x	x			
8+8		x							x
6+7		xx							xx
8-5		x						x	
(19-9)		x	x						x
(18-11)	x								
(14-7)	x								
(11-9)	x								
11-6	x	x		x				x	x
20-7	x								

T = Tauschaufgabe, G&G = gleich- und gegensinniges Verändern, U = Umkehraufgabe

Aufgabe „8+8“

E: 7 plus 7 ist ja 14 a– und dann nehmt man 2 zu der 14, dann sind es bei 16 und dann ist es wie bei 8 plus 8 (..)

I: Mhm.

E: Weil man zur 7 z– zur einer 7 (*zeigt mit den Händen nach links*) 1 gemacht hat, dann hab ich (.) 8 und dann bei der anderen 7 (*zeigt mit der Hand nach rechts*) 1, 1 dazu gemacht und dann habe ich wieder 8.

Aufgabe „19-9“

E: Äh, man rechnet wie bei 20 minus (.) 9, dann hat– hat man nur noch 10. Aber dann macht man eine weniger und dann hat man nur noch 9.

I: Ah, okay. Das heißt du fängst mit der 20 an, kannst du mir das noch mal erklären? Also 19 minus 9.

E: Man kann so machen, dass man auch 20 minus 9, dann ergibt das (.) das 10.

I: Okay, und dann?

E: Und dann, wenn man das 19 minus 9, ergibt das 11.

Elena konnte erklären, wieso ihre umgeformte Aufgabe das Gleiche ergeben muss wie 8 + 8. Sie stützte sich auf die Beziehung zu den Nachbarzahlen, indem sie ihr Vorgehen schilderte. Bei der Aufgabe 19 - 9 kam sie dem Ergebnis näher, indem sie eine Hilfsaufgabe eingesetzt hat und abschließend in die richtige Richtung korrigierte. Jedoch löste sie die Teilaufgabe 20 - 9 verkehrt. Um auf diesen Fehler aufmerksam zu machen, wurde noch einmal nach ihrem Trick gefragt. Daraufhin erfolgte ein anderes, inkorrektes Ergebnis. Dies stellte das einzige Mal dar, bei dem das Nutzen strategischer Werkzeuge und der Rückgriff auf Basisfakten in einem falschen Ergebnis resultierte. Viele Aufgaben löste Elena mithilfe der zwei Lösungswerkzeuge. Das Lösen einer Vielzahl an Subtraktionsaufgaben erfolgte durch ein zählendes Rechnen, wobei dies am häufigsten die Aufgaben mit Zehnerübergängen betraf. Das gleich- und gegensinnige Verändern wurde als einziges strategisches Werkzeug nicht gezeigt. Aus dem Interview konnte entnommen werden, dass Elena Merkmale und Beziehungen vor allem bei Additionsaufgaben erkannte und diese auch zum geschickten Rechnen nutzte. Bei den Subtraktionsaufgaben traf dies größtenteils nicht zu. Der Gesprächsausschnitt der Aufgabe 19 - 9 zeigt, dass Elena Merkmale erkannt hat und auf Grundlage dieser Ideen erfolgen, die Umsetzung bei dieser Rechenoperation jedoch noch ein wenig Schwierigkeiten bereitet.

4.4.3 Max

Tabelle 7 Auswertung Max

Aufgabe	*Zählen*	*Basisfakten*	*strategische Werkzeuge*						
			Zerlegen & Zusammensetzen		Nutzen einer Hilfsaufgabe				
			Zehnerzerlegung	Kraft der Fünf	Analogien	Aufgaben verändern			Nachbaraufgaben
						T	G&G	U	
3+4		x							x
3+5		x							x
4+6		x							
4+16		x	x		x				
3+13		x	x		x				
8+8		x							
6+7	x								
8-5		x						x	
19-9		x	x		x				
(18-11)		x	x		x				
(14-7)		x	x		x			x	

(11-9)		x	x		x				
(11-6)		x	x		x				
20-7		x	x						

T = Tauschaufgabe, G&G = gleich- und gegensinniges Verändern, U = Umkehraufgabe

Aufgabe „4+16“

M: Weil ich weiß, ähm, 4 plus 6 sind 10 und we– dann muss es einfach 20 ergeben.

Aufgabe „11-6“

M: Fün– Fünfzehn.

I: Wie hast du das denn so schnell herausgefunden?

M: Mit der kleinen Aufgabe. Wenn man von 6 einen wegnimmt, dann sinds 5. Und wenn man (.) groß hat, dann muss es 15 ergeben.

Bei Max stach eine Hauptvorgehensweise heraus: das Nutzen der dekadischen Analogie in Kombination mit der Zehnerzerlegung und einem Rückgriff auf Basisfakten. Die zwei verschriftlichen Ausschnitte aus dem Interview verdeutlichen, wie dies bei den Additionsaufgaben erfolgreich und bei den meisten Subtraktionsaufgaben ineffektiv verlief. Es wurde stets der kleinere Einer vom größeren abgezogen, ungeachtet dessen, ob es sich dabei um den Teil des Minuenden oder des Subtrahenden handelte. Es ist festzuhalten, dass bei Max ein Zusammenhang zwischen den zwei zählend gelösten Aufgaben und den falschberechneten Subtraktionsaufgaben mit Zehnerübergang bestand: Seine Mutter merkte an, dass im Schulunterricht noch keine Aufgaben mit Zehnerübergang thematisiert wurden. Wie sich zeigte, versuchte Max die bekannten strategischen Werkzeuge zu übertragen und nicht zählend vorzugehen. Laut eigener Angabe stellte jedoch das Zählen dasjenige Lösungswerkzeug dar, welches er für gewöhnlich bei Aufgaben dieser Art nutzt. Die Begründungen von Max erfolgten oftmals über den Lösungsweg. Konnte er bei den einstelligen Additionsaufgaben noch über Beziehungen argumentieren, fanden sich bei den zweistelligen Subtraktionsaufgaben größtenteils keine Begründungen oder die Wiederholung der Vorgehensweise wieder. Wurden Aufgaben wie 7 + 7 zur Berechnung von 6 + 7 oder die Aufgabe 18 - 10 für 18 - 11 vorgeschlagen, konnte Max diese in keinen Zusammenhang erkennen. Daher wird vermutet, dass er beim Lösen mithilfe der dekadischen Analogie sowie der Zehnerzerlegung verfahrensorientiert vorgegangen ist. Wahrscheinlich handelt es sich hierbei um ein strategisches Werkzeug, welches den Kindern in der Schule nähergebracht wurde.

4.4.4 Gerda

Tabelle 8 *Auswertung Gerda*

Aufgabe	*Zählen*	*Basisfakten*	*strategische Werkzeuge*						
			Zerlegen & Zusammensetzen		Nutzen einer Hilfsaufgabe				
			Zehner-zerlegung	Kraft der Fünf	Ana-logien	Aufgaben verändern			Nachbar-aufgaben
						T	G&G	U	
3+4		x							x
3+5^F		x		x					
4+6		x							
((4+16))	x	x	x		x	x			
3+13	x	x	x		x	x			
8+8		x							
(6+7)			x						x
8-5^F				x					
(19-9)	x								
(18-11)	x								
(14-7)	x								
(11-9)	x								
(11-6)	x								
20-7	x								

T = Tauschaufgabe, G&G = gleich- und gegensinniges Verändern, U = Umkehraufgabe

Aufgabe „3+4“

G: Das ergibt 7.

I: Warum weißt du das denn so schnell?

G: Weil ich rechne die im Kopf. Hier (*zeigt auf die 3+5*) kann man nämlich ei- 1 von der 5 abziehen. Das ergibt dann ja 7, ich rechne die ganz schnell im Kopf.

I: Und warum muss dann das Ergebnis eins weniger sein und nicht eins mehr?

G: Weil (.) sonst würde es ja nicht 7 ergeben.

I: Das stimmt, sonst würde es ja 9 ergeben. Aber warum kann 9 dabei nicht rauskommen?

G: Weil man muss, weil man muss die ja ähm (.) weniger viel machen.

I: Aber warum genau weniger?

G: Das weiß ich nicht so genau.

Der Auszug aus dem Interview spiegelt den Interviewverlauf im Ganzen wider. Es wird deutlich, dass Gerda sich (mit einzelnen Ausnahmen) entweder auf die Basisfakten berief, eine Aufgabe also im Gesamten auswendig beherrschte, oder zählte (*Tab. 8*). Wenn eine Nachbaraufgabe verwendet wurde, konnte sie das Ergebnis korrekt ableiten, die Begründung dazu fiel ihr jedoch schwer. Gerda beherrschte die Aufgabe 4 + 6 auswendig, zählte bei der 4 + 16 jedoch und erhielt das Ergebnis 19. Obwohl sie die Aufgabe ebenfalls mit der dekadischen Analogie lösen konnte, behielt sie das Ergebnis 19 bei. Dies zeigt, dass sie den Trick kannte, jedoch die Zusammenhänge nicht sah. Der Blick für Merkmale und Beziehungen fehlte, was sich vor allem bei den Aufgaben mit Zehnerübergang bemerkbar machte. Diese wurden fast ausschließlich inkorrekt gelöst. Mit der Ausnahme von 8 - 5 wurden alle Subtraktionsaufgaben zählend gelöst, die Fehlerrate war hierbei hoch. Im Interview war auszumachen, dass die Zahlwortreihe beim Rückwärtszählen noch unsicher beherrscht wurde. Generell ließ sich erkennen, dass Gerda die Additionsaufgaben als solche (inklusive des Anwendens der Tauschaufgabe) entweder als Basisfakten abgespeichert hatte oder diese mit den strategischen Werkzeugen kombinierte. Wenn Begründungen erfolgten, dann wurde sich stets auf den Lösungsweg berufen.

4.4.5 Lukas

Tabelle 9 *Auswertung Lukas*

Aufgabe	*Zählen*	*Basisfakten*	*strategische Werkzeuge*						
			Zerlegen & Zusammensetzen		Nutzen einer Hilfsaufgabe				
			Zehner-zerlegung	Kraft der Fünf	Ana-logien	Aufgaben verändern			Nachbar-aufgaben
						T	G&G	U	
3+4		xx							x
3+5		x							
4+6		xx					x		
4+16		x	x		x				
3+13		x	x		x				
8+8		x	x						
6+7		x							x
8-5		x						x	
19-9		x	x		x				
18-11		xxx	xxx		xxx			x	x
14-7		x						x	
11-9	x	x	x						
11-6		xx	x						x
20-7		x	x						

T = Tauschaufgabe, G&G = gleich- und gegensinniges Verändern, U = Umkehraufgabe

Aufgabe „11-6“

L: Die ist auswendig. Ich mach das so: Die 11 mach ich einen von der 6 da, da weniger. Und dann mach ich noch mal 5 von der 10 auch noch mal runter.

I: Denkst du man könnte auch 10 minus 5 rechnen, würde das helfen?

L: 10 minus 5. Ja, das wär leicht, weil dann sinds immer noch 5 von der 10.

I: Das stimmt, das wären dann immer noch 5. Aber findest du nicht 11 minus 6 und 10 minus 5, das sind zwei verschiedene Aufgaben?

L: (*nickt*) Ja, schon.

I: Aber warum funktioniert es denn trotzdem?

L: (*lächelt*) Weil ich schon echt gut bin.

I: (*lacht*) Ja, das ist auch 'ne gute Erklärung. Aber warum, warum geht das denn, dass beides 5 ergibt? Wie hängen die Aufgaben denn zusammen?

L: Also die Aufgabe ist eigentlich schon leicht, weil ich die eigentlich schon zehnmal gehört habe in der Schule, die 11 minus 6.

I: Wie kann es aber sein, dass beides 5 ergibt, obwohl es verschiedene Aufgaben sind?

L: Weils (*seufzt*) 10 hat man ja und 5 und 5 ergibt ja 10. Und dann nehme ich eine 5 noch mal weg.

Die oben aufgeführte Aufgabe stellt sich als Besonderheit heraus, da diese im Interview mit Lukas die einzige war, bei der keine Zahlbeziehungen wahrgenommen wurden und immer über dem wiederholten Aufsagen des Lösungsweges argumentiert wurde. Alle anderen Aufgaben konnten über die erkannten Aufgabenmerkmale und Beziehungen in Zusammenhang miteinander gebracht werden. Als zweite Vorgehensweise wurde einmal von der 11 zur 9 gezählt, um das Ergebnis zu ermitteln. Zum größten Teil wurden Basisfakten in Kombination mit strategischen Werkzeugen genutzt, in zwei Fällen war ein direkter Abruf der Aufgabe möglich. Es wurden alle Lösungswerkzeuge mindestens einmal gezeigt. Die Kraft der Fünf sowie die Tauschaufgabe konnten nicht ausgemacht werden, wobei angemerkt werden sollte, dass dies nicht zu bedeuten hat, dass sie nicht genutzt oder erkannt wurden. Weiterhin ist festzustellen, dass sowohl mehrere Lösungsmöglichkeiten einer Aufgabe gezeigt wurden als auch fremde Vorgehensweisen rekonstruiert werden konnten. Zwischen Additions- und Subtraktionsaufgaben sowie Aufgaben mit und ohne Zehnerübergang war kein signifikanter Unterschied zu bemerken. Lediglich Subtraktionsaufgaben mit zweistelligem Minuenden wurden oftmals mithilfe der Zehnerzerlegung gelöst.

4.4.6 Ella

Tabelle 10 Auswertung Ella

Aufgabe	*Zählen*	*Basisfakten*	*strategische Werkzeuge*						
			Zerlegen & Zusammensetzen		Nutzen einer Hilfsaufgabe				
			Zehner-zerlegung	Kraft der Fünf	Ana-logien	Aufgaben verändern			Nachbar-aufgaben
						T	G&G	U	
3+4	x					x			
3+5	x			x		x			
4+6F	x					x			
4+16	x					x			
3+13	x					x			
8+8	x								
6+7	x								
8-5	x								
19-9	x								
18-11	x								
14-7	x	x						x	
11-9	x								
11-6	x								
(20-7)	x								

T = Tauschaufgabe, G&G = gleich- und gegensinniges Verändern, U = Umkehraufgabe

Aufgabe „4+16“

I: Du hast die 4 und die 16 ja vertauscht. Darf man das denn?

E: Ähm (..) ja.

I: Warum darf man das denn?

E: Weil Schule mach das, mache ich das auch immer so, wenn das so schwer ist. Ich hab dann nämlich keine Finger mehr. In der Schule lernt man das.

Aufgabe „14-7“

E: (zählt mit den Fingern rückwärts) 7.

I: Weißt du auch, was 7 plus 7 sind?

E: 14, das weiß ich schon auswendig.

I: Fällt dir bei der 14 minus 7 und der 7 plus 7 was auf?

E: Vertauschen, so tauschen macht man die (überkreuzt ihre Hände). 14 minus 7 sind doch 7, 7 (.) plus 7 sind 14. Die haben so ein Tauschen gemacht (überkreuzt die Hände) und dann ein Minus gemacht. Ein Minus reingemacht, aber Plus nicht.

I: Also was für einen Trick kann ich jetzt verwenden?

E: So, 7 minus 14 jetzt?

I: Ja, 14 minus 7.

E: (beginnt von der 14 aus rückwärts zu zählen)

Alle Aufgaben wurden zählend gelöst, die Additionsaufgaben meistens mithilfe der Tauschaufgabe. Die Begründung dahinter, dass die Reihenfolge der Summanden keine Auswirkung auf die Summe haben, erfolgte nicht. Es wurde damit argumentiert, dass die Kinder das Tauschen der Summanden in der Schule beigebracht bekommen haben. Ella wusste jedoch, dass die Tauschaufgabe nur bei Additionsaufgaben und nicht bei Subtraktionsaufgaben verwendet werden kann (ohne Begründung). Der Zusammenhang zwischen der Umkehraufgabe von 14 - 7 schien zwar ansatzweise verstanden zu sein, jedoch wurde die Idee nicht in dem Maße durchdrungen, als dass diese dann tatsächlich auch zur Lösung der Aufgabe angewendet werden konnte. Wenn weitere Lösungsmöglichkeiten angeboten wurden, konnten diese nicht genutzt werden. Mit der Kraft der Fünf wurde einmal die Zahl als Ganzes an den Fingern dargestellt und von dort aus weitergezählt.

4.4.7 Milo

Tabelle 11 Auswertung Milo

Aufgabe	*Zählen*	*Basisfakten*	*strategische Werkzeuge*						
			Zerlegen & Zusammensetzen		Nutzen einer Hilfsaufgabe				
			Zehner-zerlegung	Kraft der Fünf	Ana-logien	Aufgaben verändern			Nachbar-aufgaben
						T	G&G	U	
3+4		xxx							xx
3+5		x							
4+6		x							
4+16		x	x		x				
3+13		x	x		x				
8+8		x							
6+7		xx							xx
8-5		x						x	
19-9		xx	x		x		x		
18-11		x							x
14-7		x						x	
11-9		x	x					x	x
11-6		xx		x			x		x
(20-7)	x								

T = Tauschaufgabe, G&G = gleich- und gegensinniges Verändern, U = Umkehraufgabe

Aufgabe „11-9“

M: 9 plus 1 ergibt 10 und dann muss man nur noch einen dazurechnen, das ergibt 11 und dann ergibt das 2. Weil 9 minu– weil 10 minus 9, das würde 1 ergeben (.) und 11 ist einer mehr deswegen ergibt das dann 2.

Aufgabe „11-6“

I: Könnte man auch 10 minus 5 rechnen oder ist das ne ganz andere Aufgabe?

M: Eigentlich kann man das wahrscheinlich auch rechnen.

I: Warum geht das denn?

M: Ähm (.), weil das bei jeder Zahl nur einer weniger ist, bei der 11 und bei der 6. 10 minus 5 ergibt 5, dann macht man 2 dazu.

I: Macht 11 minus 6 und 10 minus 5 einen Unterschied?

M: Nein, das si- das ist genau das gleiche, nur dass man 2 weniger macht.

I: Dürfte ich denn auch 10 minus 7 rechnen?

M: (..) Nein. Weil das eine Zahl mehr und eine weniger.

I: Was passiert denn, wenn ich das trotzdem mache?

M: Dann kommt ein anderes Ergebnis, das falsche.

Milo löste fast alle Aufgaben durch einen Rückgriff auf Basisfakten, zum großen Teil in Kombination mit den strategischen Werkzeugen. Die Aufgabe 20 - 7 zählte er, wobei ein falsches Ergebnis herauskam. Wie im Gesprächsausschnitt ersichtlich wird, konnte Milo das gleichsinnige Verändern der Aufgabe erkennen und erklären, das gegensinnige Verändern bei einer Subtraktionsaufgabe lehnte er begründet ab. Zudem erkannte er die Zahlennähe von 11 - 9 und leitete sich das Ergebnis durch das Nutzen der Umkehroperation ab. Wenn er die Aufgaben nicht durch einen direkten Abruf aus dem Gedächtnis löste, begründete er seine Lösung über die Zahlbeziehungen und Aufgabenmerkmale. Diese Begründung nutzte er ebenfalls bei gegebenen Lösungsansätzen. Ob Additions- oder Subtraktionsaufgaben mit oder ohne Zehnerübergang gelöst wurden, unterschied sich nicht sonderlich. Es fällt lediglich auf, dass Milo die Mehrheit der Additionsaufgaben automatisiert hatte.

4.4.8 Maria

Tabelle 12 Auswertung Maria

Aufgabe	*Zählen*	*Basisfakten*	*strategische Werkzeuge*						
			Zerlegen & Zusammensetzen		Nutzen einer Hilfsaufgabe				
			Zehner-zerlegung	Kraft der Fünf	Ana-logien	Aufgaben verändern			Nachbar-aufgaben
						T	G&G	U	
3+4		x							
3+5		x							
4+6		x							
4+16		x	x		x				
3+13		x	x		x				
8+8		x							
6+7		xx							xx
8-5		x						x	
19-9		x	x		x				
18-11									
14-7		x	x						
11-9		x	x					x	
11-6									
20-7		x	x						

T = Tauschaufgabe, G&G = gleich- und gegensinniges Verändern, U = Umkehraufgabe

Aufgabe „8-5“

M: Ich gucke, wie ich die 8 hinkriegen soll, was ich noch dazu machen muss. Und dann weiß ich, dass ich noch 3 dazu machen muss, dass es 8 ergibt. Also muss es eigentlich das Ergebnis 3.

I: Mhm. Und gibt es vielleicht schon eine Aufgabe, die du hier siehst, die dir dabei helfen könnte, die 8 minus 3 zu berechnen?

M: (*8, schüttelt den Kopf*)

Aufgabe „14-7“

M: 7?

I: Wie hast du das erkannt?

M: Ich habe die 14 genommen, dann hab ich (..) dann weiß ich ja, dass 7 eine größere Zahl ist als 4 und denk in meinem Kopf erst mal, ich nehme 4 von der 7 ab. Wenn ich die 4 wegnehme, ist ja gleich 3 und dann nehme ich das von der 10 weg.

Die Tabelle betrachtend fällt auf, dass Maria Subtraktionsaufgaben mit einem Zehnerübergang durch die Zuhilfenahme der Zehnerzerlegung löste. Dies erklärte sie unter anderem damit, dass ihr die Mathematiklehrerin diese Vorgehensweise beigebracht hat. Die Halbierung der 14 oder die Fastverdopplung der 6 konnte sie nicht erkennen. Zwar konnte Maria die 6 + 6 durch einen Rückgriff auf Basisfakten lösen, wusste aber nicht, wie diese Aufgabe genutzt werden kann, um mit ihr die 6 + 7 zu lösen. Dies zeigt sich ebenfalls in dem ersten Gesprächsausschnitt. An *Tab. 12* lässt sich erkennen, dass gewisse Beziehungen zweier Zahlen innerhalb einer Aufgabe erkannt wurden, Parallelen zu weiteren Aufgaben konnten jedoch kaum gezogen wurden. Bis auf zwei Aufgaben konnte Maria die Aufgaben stets auf eine Weise lösen. Wurden ihr weitere Hilfsaufgaben vorgeschlagen, konnte sie diese größtenteils nicht nutzen. Ihre Begründungen fanden teilweise über Aufgabenmerkmale und teilweise über die Erläuterung des Lösungsweges statt. Neben der Zehnerzerlegung wurde ebenfalls die dekadische Analogie, die Tauschaufgabe sowie die Umkehraufgabe als strategisches Werkzeug in Kombination mit den Basisfakten herangezogen. Einige Additionsaufgaben beherrschte Maria bereits auswendig.

4.4.9 Leon

Tabelle 13 Auswertung Leon

Aufgabe	*Zählen*	*Basisfakten*	*strategische Werkzeuge*						
			Zerlegen & Zusammensetzen		Nutzen einer Hilfsaufgabe				
			Zehner-zerlegung	Kraft der Fünf	Ana-logien	Aufgaben verändern			Nachbar-aufgaben
						T	G&G	U	
(3+4)	x	x				x			
3+5[F]	x			x					
4+6	x								
4+16	x					x			
3+13	x					x			
(8+8)	x								x
6+7		x							x
8-5	x								
19-9	x								
18-11	x								
14-7	x								
(11-9)	x								
11-6	x	x		x			x		
(20-7)	x								

T = Tauschaufgabe, G&G = gleich- und gegensinniges Verändern, U = Umkehraufgabe

Aufgabe „8+8“

I: Wie kommst du auf die 12, kannst du mir das erklären?

L: Ja, ähm, weil 7 plus 7 wär ja dann (*5*) vier– vierzehn. 7 plus 7 ist 14, dann ist 8 plus 8 (*.*) 15. Das ist ja nur eine Zahl mehr.

I: Warum genau hast du jetzt eine Zahl mehr genommen?

L: Ja, weil (*.*) das ist ja dann auch einfacher, weil 7 plus 7 ist se– ist (*lacht*) 14 und 8 plus 8 ist dann (*.*) 15, weil nur eine Zahl wär (*..*) weil nur eine Zahl mehr ist.

Aufgabe „6+7“

L: Das sind 13.

I: Wow, das ging jetzt schnell. Wie hast du das gemacht?

L: Weil man nur von der 7 eins wegzieht und dann (*.*) sofort, also ich habe ja gerade 7 plus 7 gesagt und dann habe ich gesehen hier ist 7 plus 6 und so ist es dann nur noch 13.

I: Warum genau nimmst du einen weniger und nicht einen mehr?

L: Weil (..) 7 plus 7 könnte man dann ja auch machen, 7 plus 7 minus 1 wäre ja dann wieder 6.

Die zwei Auszüge aus dem Interview stellen die einzigen Aufgabenbearbeitungen dar, in denen Leon selbst das Nutzen einer Hilfsaufgabe (abgesehen von der Tauschaufgabe) hinzugezogen hat. Bei diesen Aufgaben handelt es sich um die Additionsaufgaben mit Zehnerübergang. Bei der Aufgabe 8 + 6 schloss er durch die unmittelbaren Nachbarzahlen 7 und 8, dass ebenso das Ergebnis der Verdopplung 7 + 7 lediglich um eine Zahl erweitert werden muss. Bei der Aufgabe 6 + 7 gelang diese Vorgehensweise jedoch, da es sich nur um einen und keine zwei Nachbarn handelt. Leon erkannte die 6 und 1 als Teile der 7 und konnte auf diese Weise das strategische Werkzeug angedeutet begründen. Über eine Beziehungsorientierung argumentierte er bei der gleichsinnig veränderten Aufgabe 10 - 5. Ein Rückgriff auf Basisfakten fand selten statt. Da das Zählen das Hauptlösungswerkzeug darstellte, sind keine weiteren Auffälligkeiten innerhalb von *Tab. 13* auszumachen.

4.4.10 Milena

Tabelle 14 Auswertung Milena

Aufgabe	*Zählen*	*Basisfakten*	*strategische Werkzeuge*						
			Zerlegen & Zusammensetzen		Nutzen einer Hilfsaufgabe				
			Zehner-zerlegung	Kraft der Fünf	Ana-logien	Aufgaben verändern			Nachbar-aufgaben
						T	G&G	U	
3+4		x							
3+5		x							
4+6		x							
4+16		x	x		x				
3+13		x	x		x				
8+8^F			x						
6+7		xx	x						x
8-5		x						x	
19-9		x						x	
18-11^F	x	x	x						
14-7		x							
11-9	x							x	
11-6		x	x					x	
20-7		x	x						

T = Tauschaufgabe, G&G = gleich- und gegensinniges Verändern, U = Umkehraufgabe

Aufgabe „19-9“

M: Ich rechne 10 plus 9, das ist 19 (.) und wenn ich dann, ähm, wenn ich dann ein Minus rechne, dann muss ich einfach nur 9 wegnehmen und dann hab ich auch 10. Tauschaufgabe.

Es fällt auf, dass Milena bei Subtraktionsaufgaben oftmals die Umkehroperation nutzte. Diese zu begründen, fiel ihr nach eigener Angabe jedoch schwer. Auch die Zehnerzerlegung stellte ein häufig verwendetes Lösungswerkzeug dar, vor allem bei Aufgaben mit Zehnerübergang. Begründen konnte sie die Zehnerzerlegung nicht. Additionsaufgaben mit der Summe bis zur 10 waren automatisiert. Die dekadische Analogie wandte sie lediglich bei Additionsaufgaben an. Das Nutzen dieser erklärte sie darüber, dass sie die „Zwergenaufgaben“ automatisiert hat und sie diese Zahlen sofort sah. Unter allen Hilfsaufgaben, die ihr zur Weiterarbeit präsentiert wurden, konnte sie einen Lösungsweg über die 6 + 6 rekonstruieren und über die Zahlbeziehungen begründen. Insgesamt berechnete Milena die Ergebnisse aller Aufgaben in einer kurzen Zeit. Bei vielen Aufgaben fiel ihr die Begründung jedoch nicht leicht. Sie unterschied ihren Lösungsweg, welchen sie auf Nachfrage darlegen konnte, und die „Warum?“-Frage, welche unbeantwortet blieb oder mit der Aussage, dass sie es nicht weiß, beantwortet wurde. Generell wurde deutlich, dass ihr das Lösen der Aufgaben keine Probleme bereitete. Mehrfach merkte sie an, dass die Aufgaben sehr leicht sind. Umso verwunderlicher erscheint es, dass die gezeigten Lösungswerkzeuge kaum begründet werden konnten. Wurden ihr mehrere Impulse gegeben, wurde ersichtlich, dass sie die Merkmale und Beziehungen wahrnahm und sie auch die Zusammenhänge erläutern konnte, diese jedoch nicht zur Begründung heranzog.

4.5 Gesamtansicht

Wie sich erkennen lässt, gleicht kein Interview dem anderen. Jedes Kind hat die Aufgaben anders oder auch gleich gelöst, jedoch anders begründet als ein weiteres Kind. Trotz der vielen Unterschiede in den Details können einige Gemeinsamkeiten ausgemacht und verallgemeinernde Aussagen getroffen werden. Für die einzelnen Forschungsfragen ergeben sich daher die folgenden Ergebnisse der empirischen Untersuchung:

*Welche Lösungswerkzeuge zeigen Erstklässler*innen von sich aus und wie begründen sie diese?*

Insgesamt wurden alle Lösungswerkzeuge aufgezeigt, wobei der Rückgriff auf Basisfakten mit Abstand das meistgezeigte Lösungswerkzeug darstellt. Die Basisfakten werden mehrfach als Einzelnes bei Summen bis zur 10 genutzt. Noch häufiger treten sie in Kombination mit strategischen Werkzeugen auf. Bei diesen findet das gleich- und gegensinnige Verändern von Aufgaben am wenigsten Anwendung. Die Zehnerzerlegung sowie die Nachbaraufgaben bilden die meistgezeigten strategischen Werkzeuge. Auch die dekadische Analogie zeigt sich vielfach. Die Umkehraufgabe wird nicht gleichermaßen häufig, dennoch immer wieder einmal angewandt. Werden die drei Lösungswerkzeuge getrennt voneinander gesehen, sodass Kombinationen dieser nicht gewertet werden, wurde am meisten gezählt. Dies lässt sich über diejenigen Kinder erklären, die fast ausschließlich zählten. Da es jedoch in der Natur der Lösungswerkzeuge liegt, diese frei miteinander zu kombinieren, stellen die Basisfakten (kombiniert mit den strategischen Werkzeugen) das Hauptlösungswerkzeug dar.

Tauschaufgaben sind stets gemeinsam mit dem Zählen als Lösungswerkzeug auszumachen. Mit dem Zählen selbst wird auch das Lösungswerkzeug begründet. Die Vorgehensweise wird dabei aufgeführt und da gezählt wurde, muss den Kindern zufolge auch das Ergebnis stimmen („Warum geht das?“ „Weil ich das gezählt habe“). Oftmals wird auch keine Begründung angeführt. Die Basisfakten werden wiederkehrend damit begründet, dass eine Aufgabe als simpel eingestuft wird, die Antwort „einfach sofort im Kopf“ ist oder die Aufgabe bereits häufig berechnet wurde und nun abgespeichert ist, sodass gar nicht über diese nachgedacht wird. Weiterhin werden des Öfteren in der Nähe liegende automatisierte Aufgaben zur Begründung herangezogen: „3 plus 4 weiß ich auswendig, weil 2 plus 4 ja 6 ist und 3 plus 4 dann ja eine Zahl mehr sein muss. Aber eigentlich weiß ich 3 plus 4 auch so auswendig.“ Ähnlich wie bei Rathgeb-Schnierer (2014), werden strategische Werkzeuge entweder über erkannte Merkmale und Beziehungen oder die Darlegung des Lösungsweges begründet. Gelegentlich kann auch keine Begründung herangezogen werden. Beim Lösungsweg wird die Reihenfolge der einzelnen Teilschritte betont. Auffällig ist, dass bei der Zehnerzerlegung zumeist der Lösungsweg herangezogen wird und bei der Nachbar- und Umkehraufgabe häufiger über Beziehungen argumentiert wird. Wenn ein gleich- und gegensinniges Verändern gezeigt wird, dann erfolgt die Begründung ebenfalls über die Zahlbeziehungen. Analogieaufgaben werden zu etwa gleichen Maßen entweder über den Lösungsweg oder über den Zusammenhang zur automatisierten *Zwergenaufgabe* begründet.

Können fremde Lösungsansätze nachvollzogen und begründet werden?

Fremde Lösungsansätze können teilweise übernommen werden. Diejenigen Kinder, die hauptsächlich zählen oder zum größeren Teil den Lösungsweg als Begründung heranziehen, können die vorgegebenen Aufgaben kaum bis gar nicht nachvollziehen und erklären, dass diese Aufgabe für sie als Hilfe zum Lösen der anderen nicht geeignet ist. Damit ist das Zählen bei Kindern, die dieses primär ausführen, zumeist ihre einzige Vorgehensweise. Diejenigen, denen ein Nachvollziehen vorgegebener Lösungsansätze gelingt, zeigen diese Lösungswerkzeuge bereits von selbst beim Lösen anderer Aufgaben (nicht zwingend in dieser Kombination). Am häufigsten kann dabei eine vorgegebene Nachbaraufgabe als weitere Lösungsmöglichkeit erkannt und ein Lösungsweg darüber rekonstruiert werden. Dieser Lösungsansatz kann doppelt so oft bei Additions- wie bei Subtraktionsaufgaben nachvollzogen und begründet werden.

Besteht ein Unterschied bei Additions- und Subtraktionsaufgaben?

Neben dem zuletzt erwähnten Unterschied lässt sich feststellen, dass ausschließlich Ergebnisse von Additionsaufgaben ohne ein Heranziehen weiterer Lösungswerkzeuge abgerufen werden können. Bei Subtraktionsaufgaben wird zuvor die Umkehroperation gebildet und von dieser das Ergebnis abgeleitet. Wenn nicht hauptsächlich gezählt wird, dann findet ein zählendes Rechnen öfter bei Subtraktionsaufgaben als bei Additionsaufgaben statt. Bei den Subtraktionsaufgaben ist ein zählendes Rechnen zudem fehlerbehafteter, wobei sich beim Zählen innerhalb der Untersuchung generell eine höhere Fehlerrate ausmachen lässt. Wenn primär gezählt wird, lassen sich zwischen Additions- und Subtraktionsaufgaben keine markanten Unterschiede feststellen. Wird das Nutzen einer Nachbaraufgabe als strategisches Werkzeug gezeigt, so ist dieses häufiger bei den Additionsaufgaben wiederzufinden, das Anwenden der dekadischen Analogie zeigt sich hierbei ebenfalls etwas mehr. Zehnerzerlegungen zeigen sich wiederum ein wenig mehr bei dem Lösen von Subtraktionsaufgaben. Durch ein Hinzuziehen der bisherigen Ergebnisse ergibt sich der folgende Punkt: Das Nutzen von Nachbaraufgaben, welche zumeist über die Zahlbeziehungen erklärt werden, ist häufiger bei den Additionsaufgaben zu finden. Die Zehnerzerlegung auf der anderen Seite, welche oftmals über den Lösungsweg begründet wird, findet sich vor allem bei den Subtraktionsaufgaben wieder.

Besteht ein Unterschied bei Aufgaben mit/ohne Zehnerübergang?

Bei den Aufgaben mit Zehnerübergang fällt auf, dass diese zum einen häufiger gezählt werden und zum anderen vermehrt in einem falschen Ergebnis münden als Aufgaben ohne solch einen Übergang. Um zu einer Lösung zu gelangen, zeigen die Kinder ebenso einen mehrfachen Einsatz der Zehnerzerlegung (nicht in Kombination mit der dekadischen Analogie), wenn eine Über- oder Unterschreitung des Zehners gegeben ist. Die dekadische Analogie sowie die Tauschaufgabe finden bei diesen jedoch in einem geringeren Maße Anwendung, als dass es ohne den Zehnerübergang der Fall ist. Abweichungen, welche die Begründung der Lösungswerkzeuge betreffen, sind nicht festzustellen.

5. Schlussbetrachtung

Das Rechnenlernen im ersten Schuljahr stellt sich als ein nicht zu unterschätzender Prozess heraus. Eine wesentliche Anforderung besteht darin, vom zählenden Rechnen abzulösen. Dazu braucht es die Entwicklung eines sicheren Zahlverständnisses. Dieses setzt sich unter anderem aus umfangreichen Zahlkenntnissen, dem Wahrnehmen und Nutzen von Zahlrelationen, darunter hervorzuheben das Teile-Ganzes-Konzept, und einem umfassenden Stellenwertverständnis zusammen. Als mindestens gleichermaßen bedeutsam stellt sich die Entwicklung eines tragfähigen Operationsverständnisses heraus, für welches die Grundvorstellungen der verschiedenen Rechenoperationen und ein Darstellungswechsel zwischen den unterschiedlichen Repräsentationsebenen unerlässlich ist. Um nicht mehr auf das Anwenden von Zählstrategien angewiesen zu sein, ist zudem die Entwicklung strategischer Werkzeuge notwendig. Mithilfe der Entfaltung dieser drei Bereiche wird zugleich der Zahlenblick entwickelt, welcher sich durch das unmittelbare Wahrnehmen von Zahlbeziehungen und Aufgabenmerkmalen auszeichnet. Erst wenn all diese Hürden beherrscht werden, kann der Sprung vom Zählen zu einem verständnisbasierten und beziehungsreichen Rechnen gelingen. Zwar stellt das entwicklungsgemäße Zählen eine bedeutende Fertigkeit für das Rechnenlernen dar, verfestigt sich dieses jedoch, bringt es zahlreiche Schwierigkeiten für den weiteren Erwerb (grundlegender) arithmetischer Kompetenzen mit sich. Das Zählen bildet neben dem Rückgriff auf Basisfakten und den strategischen Werkzeugen ein mögliches Lösungswerkzeug, um eine Aufgabe zu lösen. Dabei wird sich auf Referenzen gestützt, die entweder ein gelerntes Verfahren oder das Erkennen von Merkmalen und Beziehungen einschließen und durch eine bestimmte Form des Rechnens vonstattengehen. Auf Basis dieser drei in Verbindung stehenden Ebenen kann sich dem komplexen Prozess des Rechnens angenähert werden, was sich für die Durchführung der eigenen empirischen Untersuchung als maßgebendes Wissen erwies.

Die Frage, ob zum Ende des ersten Schuljahres tatsächlich vom zählenden Rechnen abgelöst wird, stellte das große Interesse dar, mit welchem sich beschäftigt wurde. Dem Forschungsstand zufolge findet in diesem Zeitraum zum größten Teil noch keine Ablösung statt. Da die betrachteten Studien jedoch einige Jahre zurückliegen, wurde sich dazu entschlossen, Hinweise dafür zu finden, ob und inwieweit dieses Resultat weiterhin die gegenwärtige Situation widerspiegelt. Um dieser Antwort näherzukommen, ist es notwendig herauszufinden, welche Lösungswerkzeuge die Kinder zum Rechnen heranziehen. Daher wurde unter der Fragestellung *Welche Lösungswerkzeuge zeigen Schüler*innen beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben gegen Ende von Klasse 1?* eine qualitative Studie in Form von Einzelinterviews mit insgesamt zehn Erstklässler*innen durchgeführt. Die Kinder lösten additive Aufgaben im Zahlenraum bis 20 und wurden nach den Begründungen für ihre gezeigten Lösungswerkzeuge befragt. Wie eines der Hauptergebnisse erkennen lässt und mit dem Befund von Gaidoschik (2010) einhergeht, überwiegt ein Rückgriff auf Basisfakten, zumeist in Kombination mit strategischen Werkzeugen. Der Abruf automatisierter Aufgaben ohne die Hinzunahme weiterer Lösungswerkzeuge zeigt sich ausschließlich beim Lösen von Additionsaufgaben.

Während die Zehnerzerlegung, wie bei Padberg (1993, 1994), und die Nachbaraufgabe vermehrt aufzufinden sind, wird das gleich- und gegensinnige Verändern wenig gezeigt. Dies lässt sich damit erklären, dass Aufgaben, bei denen ein regelgestütztes Verändern eine geschickte Möglichkeit zum Lösen darstellt, zumeist eine Eigenschaft besitzen, die das Heranziehen von Nachbaraufgaben (z. B. 3 + 4 oder 11 - 6) oder das Anwenden der Zehnerzerlegung gemeinsam mit der dekadischen Analogie (z. B. 16 + 4 oder 19 - 9) stärker anbieten. Weiterhin ergab sich, dass ein Zählen nicht oft wiederzufinden ist, es sei denn, es wurde sich während des gesamten Interviews fast ausschließlich auf die Zählstrategien und einzelne Basisfakten gestützt. Ein zählendes Rechnen findet sich häufiger bei den Subtraktionsaufgaben wieder, wobei es hier mit mehr Fehlern auftritt. Da die Subtraktion im Vergleich zur Addition nicht selten als anspruchsvoller gewertet wird, spricht dies dafür, dass die Kinder bei herausfordernderen Aufgaben auf das vermeintlich sichere Zählen ausweichen. Entsprechend dieser Begründung findet ein Zählen häufiger bei Aufgaben mit Zehnerübergang statt, was wiederum den Ergebnissen von Grube (2006) und zum Teil denen von Gaidoschik (2010) ähnelt. Ebenfalls zeigt sich eine vermehrte Zehnerzerlegung (nicht in Kombination mit der dekadischen Analogie) bei Aufgaben mit Über- oder Unterschreitung des Zehners. Hierbei sollte jedoch bedacht werden, dass mehr (Additions-)Aufgaben ohne einen Übergang gegeben waren, wodurch die Zuverlässigkeit dieses Resultats beeinträchtigt wird. Die strategischen Werkzeuge werden im Wesentlichen über zwei Wege begründet: Entweder es werden Aufgabenmerkmale und Zahlbeziehungen herangezogen, sodass zugleich der Referenzkontext des Rechenprozesses auszumachen ist, oder die Kinder erläutern die einzelnen Schritte ihres Lösungsweges, was zumeist für eine Verfahrensorientiertheit spricht. Die Nachbaraufgaben gehen mit den Additionsaufgaben und den beziehungsorientierten Begründungen einher, die Zehnerzerlegungen (ohne dekadische Analogie) wiederum mit den Subtraktionsaufgaben und der Erläuterung des Lösungsweges.

Zusammenfassend lässt sich die Forschungsleitfrage, welche Lösungswerkzeuge Schüler*innen beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben gegen Ende von Klasse 1 zeigen, mit „Alle“ beantworten. Einige zeigten sich häufiger als andere, jedoch entspricht die Verteilung dieser nicht derjenigen, die in den meisten Studien zur Ablösung vom zählenden Rechnen zu finden ist. In den bestehenden Studien wurden die Aufgaben primär zählend gelöst. Jedoch wurde in der eigenen Untersuchung keine Unterscheidung der Kinder in der Leistungsstärke vorgenommen. Diese Kategorie berücksichtigend würden sich die eigenen Ergebnisse größtenteils mit denen der durchschnittlich starken bzw. leistungsstarken Erstklässler*innen der weiteren Studien überschneiden. Die zuvor gestellte Grundannahme, dass ein Zählen das Hauptlösungswerkzeug darstellt und darauf der Rückgriff auf Basisfakten in Kombination mit den strategischen Werkzeugen folgt, konnte mit dieser Studie nicht belegt werden. Lediglich die Annahme, dass sich ein gleich- und gegensinniges Verändern im geringsten Maße zeigt, hat sich bestätigt. Ob dies jedoch mit der für das erste Schuljahr noch höheren Komplexität zusammenhängt, wird aufgrund des bereits beschriebenen Aspekts, dass sich andere strategische Werkzeuge stärker anbieten, angezweifelt. Um dies weiter verfolgen zu können, müssten weitere Aufgaben entwickelt werden, bei denen das regelgestützte Verändern das offensichtlichste Werkzeug beim Betrachten des Zahlensatzes darstellt. Ob dies jedoch gelingen würde, erweist sich als weitere Frage, da im Allgemeinen nicht jede Person die gleichen Merkmale als offensichtlich ansieht.

Zuletzt ist noch die Annahme zu klären, ob beim Großteil der Erstklässler*innen tatsächlich keine Ablösung stattgefunden hat. Da Ella und Leon die Aufgaben fast ausschließlich zählend bearbeiteten und kaum zeigten, dass sie andere Lösungswerkzeuge einbeziehen können, ist bei ihnen von keiner Ablösung auszugehen. Bei Elena, Gerda und Max kann ebenfalls davon ausgegangen werden, dass sich noch mehrfach auf Zählstrategien berufen wird. Die zwei Mädchen zeigten zwar im Bereich der Additionsaufgaben das Nutzen nicht-zählender Lösungswerkzeuge, doch fand sich bei den Subtraktionsaufgaben hauptsächlich das Zählen wieder. Max hingegen zählte kaum. Wenn von einer Ablösung vom zählenden Rechnen gesprochen wird, ist damit auch die Vorstellung von einem verständnisbasierten Rechnen verbunden. Bei Max wurde ersichtlich, dass er (vor allem die Subtraktionsaufgaben betreffend) keine Begründung oder eine über den Lösungsweg heranzog und mehrere Aufgaben in einem falschen Ergebnis resultierten. Es wird bezweifelt, dass er beim Nutzen der nicht-zählenden Lösungswerkzeuge ein Verständnis für diese aufgebaut hat. Hinzu kommt, dass er laut eigener Angabe bei Aufgaben mit Zehnerübergang für gewöhnlich zählt. Somit kann davon ausgegangen werden, dass bei fünf Kindern gegen Ende des ersten Schuljahres noch keine Ablösung vom zählenden Rechnen stattgefunden hat. Bei den fünf weiteren Erstklässler*innen ist aufgrund der Auswertungen kein Zählen in dem Maße zu erkennen, als dass von einem (überwiegend) zählenden Rechnen zu sprechen wäre.

Würde dieses Resultat auf eine Gesamtheit der Kinder im ersten Schuljahr verallgemeinert werden, könnte davon ausgegangen werden, dass rund 50% der Schüler*innen die Ablösung gelingt. Die Ergebnisse können jedoch lediglich als vorsichtiger Hinweis verstanden werden, dass über die Jahre gegebenenfalls mehr Kinder den Sprung zum Zählen im Zwanzigerraum erreicht haben, als es noch vor einigen Jahren der Fall war. Die Untersuchung beinhaltet eine anfallende Stichprobe von zehn Kindern und kann nicht als repräsentativ angesehen werden. Zudem verzerren Faktoren, wie beispielsweise die Ungleichverteilung von Aufgaben mit und ohne Zehnerübergang, die Ergebnisse. Durch die Untersuchung tritt eindeutig hervor, dass nicht alle oder zumindest nicht die Mehrheit der Kinder gegen Ende des ersten Schuljahres vom zählenden Rechnen ablösen, was die bisherigen Untersuchungsergebnisse unterstützt und damit das große Ziel nach wie vor nicht erreicht wird. Es sollte jedoch nochmals betont werden, dass die Ebene der Lösungswerkzeuge nicht immer sichtbar ist und somit nur die Lösungswerkzeuge ausgemacht werden können, welche die Kinder in dem Interview auch zeigten. Ob diese tatsächlich alle verfügbaren Lösungswerkzeuge des Kindes darstellen, ist nicht gewiss. Da das erste Schuljahr der Kinder jedoch zugleich ein von der Corona-Pandemie beeinflusstes Jahr darstellte, einiges an Schulunterricht (hierbei von besonderer Bedeutung: der Mathematikunterricht) daher in Präsenz ausfallen musste bzw. zum Teil nur online ablaufen konnte und der Untersuchungszeitpunkt noch nicht ganz das Ende des Schuljahres darstellte, können die Resultate der eigenen Untersuchung zumindest ein minimales Indiz dafür sein, dass prozentual gesehen tatsächlich mehr Kinder als die Jahre zuvor in dem gegebenen Zeitraum den Sprung vom Zählen zum Rechnen schaffen oder sich auf einem guten Weg dahin bewegen, weshalb sich die Wiederaufnahme von Studien bei Erstklässler*innen in ein paar Jahren mit neuen Erkenntnissen eventuell wieder lohnen könnte.

Literaturverzeichnis

Ashcraft, M. H. (1995). Cognitive psychology and simple arithmetic: A review and summary of new directions. *Mathematical Cognition, 1*(1), 3–34.

Baroody, A. J. (1999). Children's relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction, 17*(2), 137–175.

Benz, C. (2005). *Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Benz, C. (2014). Identifying quantities – Children's constructions to compose collections from parts or decompose collections into parts. In U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel & R. Vogel (Hrsg.), *Early mathematics learning. Selected papers of the POEM 2012 Conference* (S. 189–203). New York: Springer.

Benz, C. (2018). Den Blick schärfen: Grundlage für arithmetische Kompetenz. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Inhalte im Fokus – Mathematische Strategien entwickeln. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2018* (S. 9–24). Bamberg: University of Bamberg Press.

Benz, C., Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung. Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Blöte, A. W., van der Burg, E. & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology, 93*(3), 627–638.

Bönig, D. (1993). Empirische Untersuchungen zum Transfer zwischen verschiedenen medialen Repräsentationsformen am Beispiel multiplikativer Operationen. In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung* (S. 25–43). Köln: Aulis Verlag Deubner.

Bruce, R. A. & Threlfall, J. (2004). One, two, three and counting. *Educational Studies in Mathematics, 55*(1/3), 3–26.

Campbell, J. I. D. & Xue, Q. (2001). Cognitive arithmetic across cultures. *Journal of Experimental Psychology: General, 130*(2), 299–315.

Canobi, K. H. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development*, *19*(1), 81–93.

Canobi, K. H., Reeve, R. A. & Pattison, P. E. (1998). The role of conceptual understanding in children's addition problem solving. *Developmental Psychology, 34*(5), 882–891.

Carpenter, T. P., Blume, G., Hiebert, J., Anick, C. M. & Pimm, D. (1982). *A review of research on addition and subtraction* (Working Paper No. 330). Madison, Wisconsin: Wisconsin Center for Education Research.

Carpenter, T. P. & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(3), 179–202.

Dudenredaktion. (o. D.). Schreibung von Zahlen bis 12. In *Duden online*. Verfügbar unter: https://www.duden.de/sprachwissen/sprachratgeber/Schreibung-von-Zahlen-0 (Zugriff: 31.05.2021).

Eckstein, B. (2011*). Mit 10 Fingern zum Zahlverständnis. Optimale Förderung für 4- bis 8-Jährige*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Fast, M. (2017). *Wie Kinder addieren und subtrahieren. Längsschnittliche Analysen in der Primarstufe*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Fritz, A., Ricken, G. & Balzer, L. (2009). Warum fällt manchen Kindern das Rechnen schwer? Entwicklung arithmetischer Kompetenzen im Vor- und frühen Grundschulalter. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 12–28). Weinheim: Beltz.

Gaidoschik, M. (2009). Didaktogene Faktoren bei der Verfestigung des „zählenden Rechnens“. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 166–180). Weinheim, Basel: Beltz.

Gaidoschik, M. (2010). *Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres* (Dissertation, Universität Wien). Verfügbar unter: http://othes.univie.ac.at/9155/1/2010-01-18_8302038.pdf (Zugriff: 10.05.2021).

Gaidoschik, M. (2015). Vermeidbare und unvermeidbare Hürden beim Rechnenlernen. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2015* (S. 25–38). Bamberg: University of Bamberg Press.

Gaidoschik, M., Fellmann, A. & Guggenbichler, S. (2015). Computing by counting in first grade: It ain’t necessarily so. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *CERME 9 – Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 259–265). Prag. Verfügbar unter: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01281842 (Zugriff: 14.05.2021).

Geary, D. C. (1994). *Children's mathematical development: Research and practical applications*. Washington, DC: American Psychological Association.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J. & DeSoto, M. C. (2004). Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology, 88(*2), 121–151.

Gerster, H.-D. (1994). Arithmetik im Anfangsunterricht. Handbuch zur Grundschulmathematik 1. In A. Abele & H. Kalmbach (Hrsg.), *Handbuch zur Grundschulmathematik* (S. 35–102). Stuttgart: Klett.

Gerster, H.-D. (2009). Schwierigkeiten bei der Entwicklung arithmetischer Konzepte im Zahlenraum bis 100. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (2. Aufl., S. 248–268). Weinheim, Basel: Beltz.

Gerster, H.-D. (2013). Anschaulich rechnen – im Kopf, halbschriftlich, schriftlich. In M. von Aster & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft,* *Psychologie, Pädagogik* (2. Aufl., S. 195–230). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Gerster, H.-D. & R. Schultz (1998). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen.* Freiburg im Breisgau: PH-Freiburg.

Gray, E. M. (1991). An analysis of diverging approaches to simple arithmetic. Preference and its consequences. *Educational Studies in Mathematics, 22*(6), 551–574.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116–140.

Groen, G. J. & Parkman, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review, 79*(4), 329–343.

Grube, D. (2006). *Entwicklung des Rechnens im Grundschulalter. Basale Fertigkeiten, Wissensabruf und Arbeitsgedächtniseinflüsse*. Münster: Waxmann.

Häsel-Weide, U. (2013). Ablösung vom zählenden Rechnen: Struktur-fokussierende Deutungen am Beispiel von Subtraktionsaufgaben. *Journal für Mathematik-Didaktik 34(*1), S. 21–52.

Häsel-Weide, U. (2015). *Vom Zählen zum Rechnen. Struktur-fokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E. & Wittich, C. (2017). *Ablösung vom zählenden Rechnen. Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen* (4. Aufl.). Seelze: Klett Kallmeyer.

Hasemann, K. & Gasteiger, H. (2020). *Anfangsunterricht Mathematik* (4., überarb. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Heirdsfield, A. M. & Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(4), 443–463.

Henry, V. J. & Brown, R. S. (2008). First-grade basic facts. An investigation into teaching and learning of an accelerated, high-demanding memorization standard. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(2), 153–183.

Hess, K. (2012). *Kinder brauchen Strategien. Eine frühe Sicht auf mathematisches Verstehen*. Seelze: Klett Kallmeyer.

Hessisches Kultusministerium (1995). *Rahmenplan Grundschule*. Wiesbaden. Verfügbar unter: https://grundschule.bildung.hessen.de/rahmenplan/Rahmenplan.pdf (Zugriff: 06.04.2021).

Hessisches Kultusministerium (2011). *Bildungsstandards und Inhaltsfelder. Das neue Kerncurriculum für Hessen. Primarstufe. Mathematik*. Wiesbaden. Verfügbar unter: https://kultusministerium.hessen.de/sites/default/files/media/kc_mathematik_prst_2011.pdf (Zugriff: 27.04.2021).

Kaufmann, S. & Wessolowski, S. (2015). *Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine* (5. Aufl.). Seelze: Klett Kallmeyer.

Klewitz, G., Köhnke, A. & Schipper, W. (2008). *Rechenstörungen als schulische Herausforderung. Handreichung zur Förderung von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnen*. Ludwigsfelde-Struveshof: LISUM. Verfügbar unter: https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/faecher/naturwissenschaften/mathematik/praevention_rechenstoerungen/Anlage4_Handreichung.pdf (Zugriff: 06.05.2021).

Krauthausen, G. (1993). Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. *Journal für Mathematik-Didaktik 14(*3/4), S. 189–219.

Krauthausen, G. (1995). Die „Kraft der Fünf" und das denkende Rechnen. In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 87–108). Frankfurt a. M.: Beltz.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.

Lamnek, S. & Krell, C. (2016). *Qualitative Sozialforschung* (6., überarb. Aufl.). Weinheim, Basel: Beltz.

Lorenz, J. H. (2005). *Lernschwache Rechner fördern. Ursachen der Rechenschwäche. Frühhinweise auf Rechenschwäche. Diagnostisches Vorgehen* (2. Aufl.). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Lorenz, J. H. (2006). Grundschulkinder rechnen anders – Die Entwicklung mathematischer Strukturen und des Zahlensinns von „Matheprofis". In E. Rathgeb-Schnierer & U. Roos (Hrsg.), *Wie rechnen Matheprofis. Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht. Festschrift für Sybille Schütte zum 60. Geburtstag* (S. 113–122). München: Oldenbourg.

Mayring, P. (2016). *Einführung in die qualitative Sozialforschung* (6. Aufl.). Weinheim, Basel: Beltz.

Moeller, K. & Nuerk, H.-C. (2012). Zählen und Rechnen mit den Fingern: Hilfe, Sackgasse oder bloßer Übergang auf dem Weg zu komplexen arithmetischen Kompetenzen? *Lernen und Lernstoerungen, 1*(1), 33–53.

Moser Opitz, E. (2008). *Zählen, Zahlbegriff, Rechnen. Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen* (3. Aufl.). Bern: Haupt.

Moser Opitz, E. (2012). Erstrechnen. In U. Heimlich & F. B. Wember (Hrsg.), *Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen. Ein Handbuch für Studium und Praxis* (2. Aufl., S. 253–265). Stuttgart: Kohlhammer.

Moser Opitz, E. & Scherer, P. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Moser Opitz, E. & Schmassmann, M. (2012). Grundoperationen. In U. Heimlich & F. B. Wember (Hrsg.), *Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen. Ein Handbuch für Studium und Praxis* (2. Aufl., S. 266–279). Stuttgart: Kohlhammer.

Padberg, F. (1993). Additionsstrategien von Erstkläßlern – eine empirische Untersuchung. *Mathematische Unterrichtspraxis, 14*(4), 1–8.

Padberg, F. (1994). Zum Einsatz von heuristischen Strategien und Zählstrategien bei der Subtraktion – eine empirische Untersuchung am Ende des ersten Schuljahres. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe*, *22*(7), 323–328.

Padberg, F. & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik. Fundiert, vielseitig, praxisnah* (5., überarb. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1996). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr.* Hannover: Schroedel.

Rasch, R. & Schütte, S. (2016). Zahlen und Operationen. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (7. Aufl., S. 66–88). Berlin: Cornelsen.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006*). Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Rathgeb-Schnierer, E. (2011). Warum noch rechnen, wenn ich die Lösung sehen kann? Hintergründe zur Förderung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Vorträge auf der 45. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 21.02.2011 bis 25.02.2011 in Freiburg* (S. 15–22). Münster: WTM.

Rathgeb-Schnierer, E. (2014). Sortieren und Begründen als Indikator für flexibles Rechnen? Eine Untersuchung mit Grundschülern aus Deutschland und den USA. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Beiträge zur 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10.03.2014 bis 14.03.2014 in Koblenz* (S. 943–946). Münster: WTM.

Rathgeb-Schnierer, E. & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln. Grundlagen – Förderung – Beispiele*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Rechtsteiner-Merz, C. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung. Entwicklung und Förderung flexibler Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen*. Münster: Waxmann.

Rechtsteiner-Merz, C. (2015). Rechnen entwickeln – Flexibilität fördern. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2015* (S. 55–70). Bamberg: University of Bamberg Press.

Rechtsteiner, C. & Rathgeb-Schnierer, E. (2017). “Zahlenblickschulung” as approach to develop flexibility in mental calculation in all students. *Journal of Mathematics Education, 10*(1), 1–16.

Reindl, S. (2016). *Lösungsstrategien Addition und Subtraktion. Eine Studie zur Nutzung und Wirkung im Grundschulalter*. Münster, New York: Waxmann.

Schipper, W. (2002). Thesen und Empfehlungen zum schulischen und außerschulischen Umgang mit Rechenstörungen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 23*(3/4), 243–261.

Schulz, A. (2009). Zahlen begreifen lernen. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 396–412). Weinheim, Basel: Beltz.

Schütte, S. (2004). Rechenwegnotation und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 25*(2), 130–148.

Schütte, S. (2008). *Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern. Für eine zeitgemäße Unterrichts- und Aufgabenkultur*. München: Oldenbourg.

Selter, C. (2000). Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21*(3/4), 227–258.

Selter, C. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett Grundschulverlag.

Siegler, R. S. (1987). The perils of averaging data over strategies: An example from children's addition. *Journal for Experimental Psychology: General, 116*(3), 250–264.

Siegler, R. S. (2001). *Das Denken von Kindern* (3. Aufl.). München: Oldenbourg.

Stern, E. (1992). Die spontane Strategieentdeckung in der Arithmetik. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg*.), Lern- und Denkstrategien. Analyse und Intervention* (S. 101–123). Göttingen, Toronto, Zürich: Hogrefe.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50*(1), 29–47.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 41*(5), 541–555.

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction. Part 1. *Mathematics in School, 28*(5), 2–4.

Thompson, I. (2000). Mental calculation strategies for addition and subtraction. Part 2. *Mathematics in School*, 29(1), 24–26.

Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2005). Simple addition strategies in a first-grade class with multiple strategy instruction. *Cognition and Instruction, 23*(1), 1–21.

Verschaffel, L., Verguts, G., Peters, G., Ghesquière, P., De Smedt, B. & Torbeyns, J. (2018). Analyzing and stimulating strategy competence in elementary arithmetic: The case of subtraction by addition. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Inhalte im Fokus – Mathematische Strategien entwickeln. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2018* (S. 57–72). Bamberg: University of Bamberg Press.

Walther, G., Selter, C. & Neubrand, J. (2016). Die Bildungsstandards Mathematik. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule* (7. Aufl., S. 16–41). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Wartha, S. (2009). Rechenstörungen jenseits der Grundschule. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Vorträge auf der 43. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 02.03.2009 bis 06.03.2009 in Oldenburg* (S. 913–916). Münster: WTM.

Wartha, S. & Schulz, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen*. Kiel: SINUS an Grundschulen. Verfügbar unter: http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_WarthaSchulz.pdf (Zugriff: 25.04.2021).

Wessel, J. (2015). *Grundvorstellungen und Vorgehensweisen bei der Subtraktion von Schülerinnen und Schülern des ersten Schuljahres*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Wittich, C., Nührenbörger, M. & Moser Opitz, E. (2010). Ablösung vom zählenden Rechnen – Eine Interventionsstudie für die Grund- und Förderschule. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Vorträge auf der 44. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 08.03.2010 bis 12.03.2010 in München* (S. 935–938). Münster: WTM.

Wittmann, E. C. (1999). Die Zukunft des Rechnens im Grundschulunterricht: Von schriftlichen Rechenverfahren zu halbschriftlichen Strategien. In E. Hengartner (Hrsg.), *Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht* (S. 88–93). Zug: Klett Balmer.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2012). *Das Zahlenbuch 1. Begleitband*. Stuttgart, Leipzig: Klett.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2017). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Stuttgart, Seelze: Klett Kallmeyer.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Anhang

<u>Interviewleitfaden</u>

Einführung

- Begrüßung und Dank für Teilnahmebereitschaft
  - „Hallo (*Name des Kindes*)! Ich freue mich, dass es geklappt hat und du heute mit mir dieses Interview machst.“

- Vorstellung und Hinführung (Transparenz schaffen)
  - „Ich bin Frau Shaka … *(kurze Vorstellung).“*
  - Mikrofoncheck → Kind stellt sich vor (Name, Alter, Schule, Klasse)
  - „Was weißt du denn schon darüber, was (genau) wir heute machen werden?“
  - „Ich habe ein paar Aufgaben vorbereitet, die sortiert werden sollen.“
    → Bildschirm teilen, Folie mit den drei Kategorien zeigen und die Bedeutung dieser erläutern

- Vorgehen
  - Phase des Betrachtens
    „Du siehst gleich ein paar Plus- und Minusaufgaben. Die schaust du dir erst einmal ganz in Ruhe an und wenn du so weit bist, suchst du dir irgendeine von diesen aus und ordnest sie einer Kiste zu.“
  - Kind als Expert*in → Ziel: verstehen, wie gerechnet wird
    „Ich werde zwischendurch immer mal wieder Fragen stellen, weil ich heute ganz viel von dir lernen möchte und verstehen will, wie und warum du das alles machst.“ → Denkwegen näherkommen
  - Zettel kann für Notizen genutzt werden, muss aber nicht → ist lediglich Hilfsmittel
  - Gespräch ca. 30 Minuten, lautes Denken wichtig, keine Scheu vor falschen Antworten

- Vertraulichkeit und Datenschutz
  - Videoaufzeichnung, vertrauliche Behandlung aller Daten, persönlichen Daten werden pseudonymisiert

- Fragen des Interviewpartners

[…]

  - „Ich würde sagen wir fangen einfach an. Wenn du mich nicht verstehst, frag gerne nach.“

⇒ AUFNAHME STARTEN!

Um den Rechen- und Denkwegen näherzukommen:	Erfahren, ob andere Lösungswerkzeuge herangezogen werden können:	Mögliche Impulse bei falschem/ keinem Ergebnis:
• „Wie hast du das denn (so schnell) herausgefunden?“ • „Kannst du mir erklären, wie du das gerechnet hast?“ • „Woher weißt du das?/ Wie bist du darauf gekommen?“ • „Warum passt der Trick so gut? Warum hilft er?“ • „Warum bist du dir sicher, dass mit der Veränderung das Gleiche herauskommt?“ • „Warum rechnest du *-1* und nicht *+1*?“	• „Kannst du die Aufgabe auch anders lösen?“ • „Kannst du die Aufgabe verändern, sodass sie einfacher wird?“ • „Kann man hier auch einen Trick verwenden?“ • „Was passiert, wenn …?“ • „Würde auch … gehen? Warum?“	• „Kannst du mir das nochmal (langsam) zeigen/erklären?“ • Ähnliche Aufgabe, die in der Nähe liegt, stellen (z. B. Verdopplungsaufgabe) und diese vergleichen lassen • Fehler ggf. stehen lassen • „Es ist gar nicht schlimm, wenn du etwas nicht weißt.“ • „Wir können die Aufgabe auch erst mal weglassen und uns später noch einmal anschauen.“

Aufgabe		Ergebnis	mögliche Auffälligkeiten und nicht-zählende Vorgehensweisen	weiterführende Fragen/Impulse
Addition	3+4	7	• Tauschaufgabe • Nachbaraufgabe einer Verdopplung (*3+3*+1; *4+4*-1) → über Basisfakten gehend	• Warum getauscht? (generell bei allen Additionsaufgaben) • Warum 3+3 leichter? → Basisfakt
	3+5	8	• Umkehraufgabe zu 8-5 • Basisfakt • Kraft der Fünf, Tauschaufgabe • gegensinniges Verändern führt zur Verdopplungsaufgabe (4+4)	-
	4+6	10	• Summe 10 → Basisfakt • Tauschaufgabe • gegensinniges Verändern führt zur Verdopplungsaufgabe (5+5)	-
	6+7	13	• Tauschaufgabe • Kraft der Fünf (*5+5*+1+2) • Zehnerzerlegung (*6+4*; 10+3) • Nachbaraufgabe einer Verdopplung → über Basisfakten gehend (*6+6*+1; *7+7*-1)	• Gleiches Ergebnis trotz unterschiedlicher Aufgaben? Geht das? Warum? • Wieso ist es so leichter zu rechnen?
	8+8	16	• vorliegende Verdopplungsaufgabe → Basisfakt • Zehnerzerlegung (*8+2*+6)	• Warum so leicht?

	3+13	16	• Tauschaufgabe • dekadische Analogie → Verdopplungsaufgabe Einer (3+3)	• Wie wird die 3+3 gelöst?
	4+16	20	• Summe 20 • Tauschaufgabe • dekadische Analogie nutzen (4+6) • gegensinniges Verändern mit anschließender Analogienutzung (5+15 → 5+5)	-
Subtraktion	8-5	3	• Umkehraufgabe zu 3+5 • Umkehraufgabe ergänzend lösen (5+? = 8) → Basisfakt • Kraft der Fünf	-
	11-6	5	• Nachbaraufgabe einer Halbierung → über Basisfakten gehend (*12-6*-1) • durch gleichsinniges Verändern zur Halbierungsaufgabe (10-5)	• Hilft 10-5? Warum (geht das)?
	11-9	2	• Nähe von Minuend und Subtrahend → Ergänzen • gleichsinniges Verändern (10-8)	• Zahlen ansehen
	14-7	7	• vorliegende Halbierungsaufgabe → Basisfakt • Zehnerzerlegung (*14-4*-3)	-
	19-9	10	• dekadische Analogie (9-9) • gleichsinniges Verändern führt zur Halbierungsaufgabe (20-10) • Nachbaraufgabe nutzen (*19-10*+1; *20-9*-1)	-
	18-11	7	• Gleichsinniges Verändern (17-10) • Nachbaraufgabe nutzen (*18-10*-1) • dekadische Analogie (1-1 und 8-1)	• Warum hilft das?
	20-7	13	• Zahlzerlegung nutzen (20 = 10+10 → 10-7 = 3, also 3+10)	-

Abschluss
- Möglichkeit für das Kind, letzte Anmerkungen zu den Aufgaben zu machen, Änderungen vorzunehmen und Fragen zu stellen
- Dank für die Teilnahmebereitschaft

ISBN 978-3-7376-1040-7

9 783737 610407