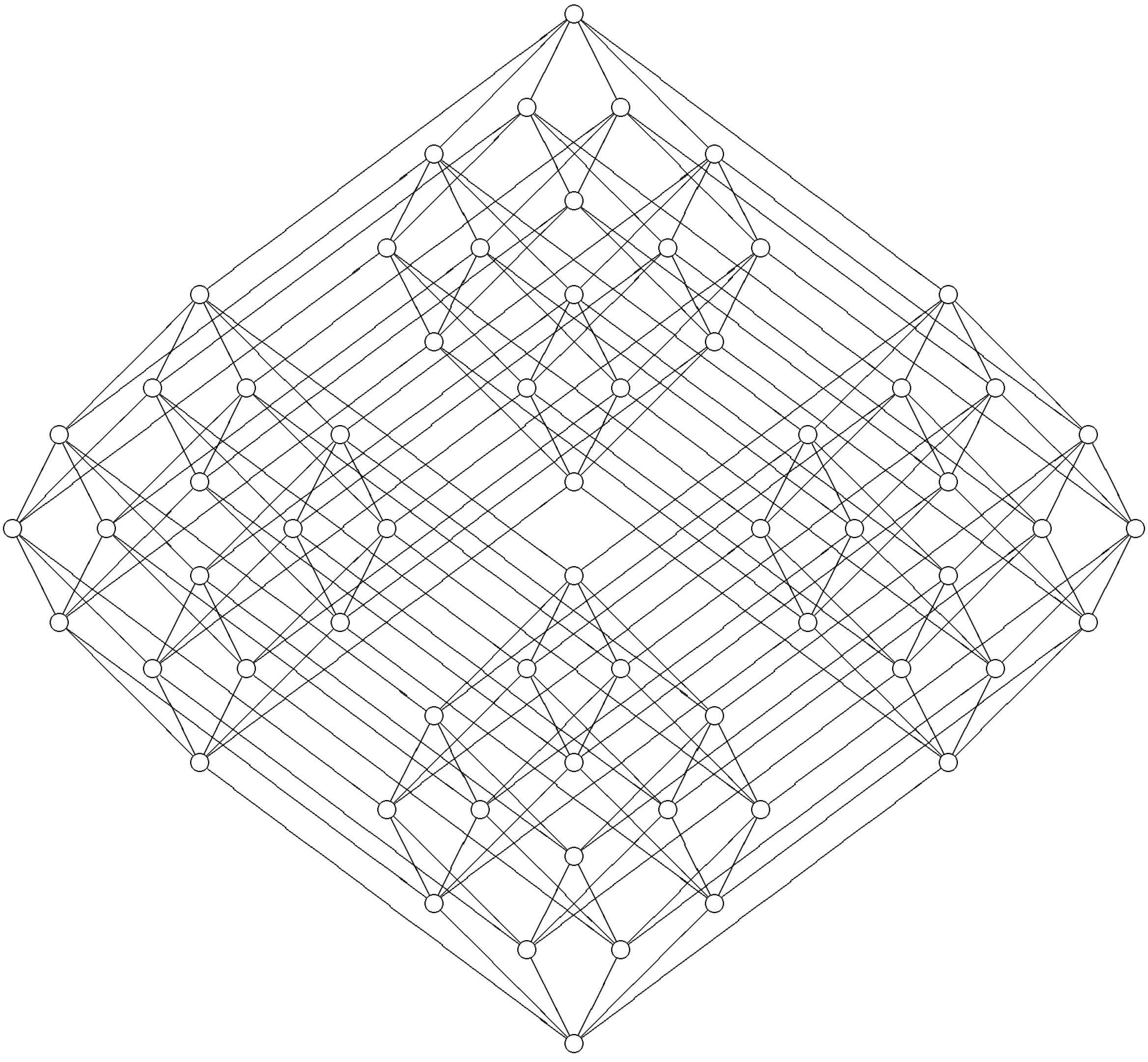
Boolesche Begriffe



Mai 1994
Diplomarbeit
von Gerd Stumme

Fachbereich
Mathematik
TH Darmstadt

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Seit ihrer Einführung vor zwölf Jahren durch R. Wille ([Wi82]) wurde die formale Begriffsanalyse in vielen mathematischen und außermathematischen Bereichen erfolgreich eingesetzt. Ein Schwerpunkt liegt hierbei auf dem dem Gebiet der Datenanalyse und Wissensverarbeitung. Die formale Begriffsanalyse basiert auf dem erstmals in der Logik von Port Royal explizit erwähnten Gedanken, nach dem ein Begriff in einen Umfang und einen Inhalt zerfällt, wobei im Umfang all die Gegenstände liegen, die dem Begriff zukommen, und im Inhalt all die Eigenschaften, die diesen Gegenständen gemeinsam sind. Dies wird mathematisch durch sogenannte *formale Begriffe* modelliert. Wichtig ist hierbei, daß nicht der Anspruch erhoben wird, alle nur denkbaren Begriffe gleichzeitig modellieren zu wollen. Mit der Einführung des *formalen Kontextes* wird eine klare Eingrenzung geschaffen.

Die Menge der formalen Begriffe trägt eine natürliche Ordnung, die die Unterbegriff–Oberbegriff–Relation widerspiegelt und die sie zu einem vollständigen Verband macht. Die Infimumbildung (also die Bestimmung des größten gemeinsamen Unterbegriffes) entspricht dem umgangssprachlichen *"und"*: Ein Gegenstand fällt genau dann unter das Infimum von zwei Begriffen, wenn er unter den einen *und* unter den anderen fällt. Die Bildung des Supremums (d. h. die Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Oberbegriffes) hingegen entspricht nicht dem *"oder"*. Im allgemeinen fallen auch Gegenstände unter das Supremum von zwei Begriffen, die weder unter den einen noch unter den anderen fallen.

Eine weitere Asymmetrie beobachtet man bei dem kleinsten und dem größten Element des Verbandes. Das größte Element entspricht dem Begriff des *Alles*, denn in seinem Umfang liegen alle Gegenstände des betrachteten Kontextes. Man könnte nun erwarten, daß das kleinste Element des Verbandes dem Begriff des *Nichts* entspricht. Im allgemeinen ist sein Umfang aber nicht leer — und das würde man doch vom Begriff des *Nichts* erwarten. Wenn das *Nichts* als formaler Begriff vorhanden wäre, könnte man die "Unvereinbarkeit" von zwei Begriffen, etwa von *Fisch* und *Warmblüter*, dadurch ausdrücken, daß ihr größter gemeinsamer Unterbegriff das *Nichts* ist.

Schließlich wird man vielleicht die Möglichkeit der Negierung von Begriffen vermissen. Es ist möglich, daß in einem Begriffsverband sowohl der Begriff *Raucher* als auch der Begriff *Nichtraucher* vorkommt, aber die Tatsache, daß der eine Begriff der zu dem anderen komplementäre ist, läßt sich aus dem Begriffsverband im allgemeinen nicht erkennen.

Beim Sprechen verknüpfen wir häufig Merkmale mittels *und, oder, entweder oder, nicht* usw. zu neuen Merkmalen. In Kapitel 1 wird beschrieben, wie dies in die formale Begriffsanalyse integriert werden kann. Mit den dort eingeführten *Booleschen Begriffsverbänden* lösen sich auch die oben aufgeführten Probleme. Sie enthalten den Begriff des *Nichts* und ermöglichen die Negierung von Begriffen. Das Supremum in einem Booleschen Begriffsverband entspricht schließlich dem *"oder"*. Dies wird erreicht, indem die Menge der Merkmale des formalen Kontextes durch die Hinzunahme der durch die oben erwähnten Verknüpfungen entstandenen neuen Merkmale erweitert wird.

Der große Nachteil der Booleschen Begriffsverbände liegt in ihrer Größe — die sogar exponentiell mit der Anzahl der Gegenstände anwächst! Deswegen wird man sich je nach Fragestellung auf eine geeignete Teilstruktur des Booleschen Begriffsverbandes beschränken. Wird diese Beschränkung durch eine Reduzierung der Merkmale erreicht, so erhält man auf natürliche Weise einen Unterhalbverband. Wir untersuchen u. a. den Unterhalbverband, der von den *definierbaren Begriffen* erzeugt wird. Das sind die Begriffe, die durch die Angabe von endlich vielen Merkmalen beschrieben werden können.

Das erste Kapitel wird durch die Beschreibung von zwei Anwendungen der Booleschen Begriffe beendet: Bei den *Implikationen zwischen Merkmalen mit Booleschen Abhängigkeiten* wird ein von B. Ganter entwickelter Algorithmus, mit dem die Implikationen zwischen den Merkmalen eines Kontextes interaktiv bestimmt werden können, dahingehend erweitert, daß er durch Boolesche Gleichungen beschreibbare Beziehungen berücksichtigt. Das *Modell eines begrifflichen Wissenssystems* basiert ebenfalls auf der Theorie der Booleschen Begriffe.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit *positiv-Booleschen Begriffen*, d. h. mit den Begriffen, die sich ohne Verwendung der Negation beschreiben lassen. Man erhält sie durch die oben beschriebene Einschränkung der Menge der Merkmale. Die positiv-Booleschen Begriffe bilden einen vollständigen Unterverband im Booleschen Begriffsverband.

Mit der *Distributiven Begriffexploration* wird ein Verfahren vorgestellt, welches die interaktive Bestimmung eines von gegebenen Begriffen erzeugten vollständigen Unterverbandes eines distributiven Begriffsverbandes ermöglicht. Das Verfahren eignet sich insbesondere für die positiv-Booleschen Begriffsverbände, da diese die Voraussetzung der Distributivität erfüllen. Durch die Einführung einer Tabellen-Notation, die dem Benutzer nur die für ihn relavanten Informationen anzeigt, läßt sich das Verfahren übersichtlich gestalten. Das Ergebnis kann dann in dem mit zusätzlichen Symbolen versehenen Liniendiagramm eines Begriffsverbandes abgelesen werden.

An dieser Stelle möchte ich all denen herzlich danken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben. Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. R. Wille, der diese Arbeit betreut und mir durch Gespräche und kritische Anmerkungen weitergeholfen hat. Danken möchte ich auch Prof. Dr. Ch. Herrmann und Dr. A. Jung für wertvolle Hinweise und Diskussionen.

Kapitel 0

Grundlagen der Verbandstheorie und der formalen Begriffsanalyse

In diesem Kapitel werden grundlegende Definitionen und Sätze aus der Verbandstheorie und der formalen Begriffsanalyse angegeben. Die Beweise sowie weitere Ergebnisse können z. B. in [GaWi93], [Gr], [Dw] oder [Halm] nachgelesen werden.

0.1 Verbände und Boolesche Algebren

Definition: Eine geordnete Menge ist ein Paar $\underline{M} := (M, \leq)$, wobei M eine Menge ist und $\leq$ eine Ordnung auf M, d. h. eine binäre Relation auf M, die reflexiv ($x \leq x$ für alle $x \in M$), antisymmetrisch ($(x \leq y$ und $y \leq x) \Rightarrow x = y$) und transitiv ($(x \leq y$ und $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$) ist.

Ein Element a heißt unterer Nachbar eines Elementes b, wenn $a < b$ gilt und es kein Element c gibt mit $a < c < b$. Das Element b ist dann ein oberer Nachbar von a. Eine untere Schranke einer Teilmenge $A \subseteq M$ ist jedes Element s mit $s \leq x$ für alle $x \in A$. Eine obere Schranke von A ist jedes Element s mit $x \leq s$ für alle $x \in A$.

Gibt es in der Menge aller unteren Schranken von A eine größte, so wird diese Infimum (oder Schnitt) von A genannt und mit $\bigwedge A$ bezeichnet. Dual wird das Supremum (oder die Verbindung) $\bigvee A$ von A definiert.

Definition: Eine geordnete Menge $\underline{V} = (V, \leq)$ ist ein Verband (engl.: *lattice*), wenn zu je zwei Elementen $x, y \in V$ das Infimum $x \wedge y$ und das Supremum $x \vee y$ existieren. Ein Verband $\underline{V}$ heißt vollständiger Verband, wenn für jede Teilmenge X von V das Infimum $\bigwedge X$ und das Supremum $\bigvee X$ existieren. Jeder vollständige Verband $\underline{V}$ hat ein größtes Element, nämlich $\bigvee V (= \bigwedge \emptyset)$, welches mit $\mathbf{1}_{\underline{V}}$ bezeichnet wird und ein kleinstes Element $\mathbf{0}_{\underline{V}} := \bigwedge V (= \bigvee \emptyset)$. Die oberen Nachbarn von $\mathbf{0}_{\underline{V}}$ heißen Atome, die unteren Nachbarn von $\mathbf{1}_{\underline{V}}$ Koatome.

In einem Verband gelten die folgenden Gleichungen:

($\mathbf{L}_1$) $x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x$

($\mathbf{L}_2$) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

($\mathbf{L}_3$) $x \vee x = x, \quad x \wedge x = x$

($\mathbf{L}_4$) $x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x$

Ist umgekehrt V eine Menge mit zwei zweistellige Operationen $\vee$ und $\wedge$, für die die Gleichungen ($\mathbf{L}_1$) bis ($\mathbf{L}_4$) gelten, so ist $(V, \leq)$ mit $x \leq y :\iff x \wedge y = x$ ($\iff x \vee y = y$) ein Verband.

In jedem Verband mit einem kleinsten Element $\mathbf{0}$ und einem größten Element $\mathbf{1}$ — insbesondere also in jedem vollständigen Verband — gelten außerdem die Gleichungen:
($\mathbf{L}_5$) $\quad x \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad x \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Definition: Ein Verband heißt distributiv, wenn er die Distributivgesetze erfüllt:
($\mathbf{D}_\wedge$) $\quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
($\mathbf{D}_\vee$) $\quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
Jedes dieser Gesetze impliziert das andere.

Ein vollständiger Verband heißt vollständig distributiv, wenn für alle Indexmengen $S, T \neq \emptyset$ gilt:
($\mathbf{D}_{\bigvee\bigwedge}$) $\quad \bigwedge\{\bigvee\{x_{s,t} | s \in S\} | t \in T\} = \bigvee\{\bigwedge\{x_{s,\varphi(s)} | s \in S\} | \varphi : S \to T\}$
Auch dieses Gesetz ist zu seinem dualen, ($\mathbf{D}_{\bigwedge\bigvee}$), äquivalent.

Definition: Ein distributiver Verband heißt Boolesche Algebra, wenn auf ihm zusätzlich eine einstellige Operation $\neg$ definiert ist, für die die folgenden Gesetze gelten:
($\mathbf{B}_\neg$) $\quad x \wedge \neg x = \mathbf{0}, \quad x \vee \neg x = \mathbf{1}$.
Das Element $\neg x$ heißt Komplement von x. Eine vollständige Boolesche Algebra ist ein vollständiger Verband, der eine Boolesche Algebra ist.

Irreduzible Elemente

Definition: Für ein Element $v \in V$ eines vollständigen Verbandes $\underline{V}$ sei $v_* := \bigvee\{x \in V | x < v\}$ und $v^* := \bigwedge\{x \in V | v < x\}$. Das Element v heißt $\bigvee$-irreduzibel, wenn $v \neq v_*$. (v_* ist dann der einzige untere Nachbar von v.) Dual heißt v $\bigwedge$-irreduzibel, wenn $v \neq v^*$. (v^* ist dann der einzige obere Nachbar von v.) Die Menge aller $\bigvee$-irreduziblen Elemente von $\underline{V}$ wird mit $M(\underline{V})$ und die Menge aller $\bigwedge$-irreduziblen Elemente mit $J(\underline{V})$ bezeichnet. Eine Teilmenge $X \subseteq V$ heißt supremum-dicht (bzw. infimum-dicht) in $\underline{V}$, wenn jedes Element von V als Supremum (bzw. Infimum) von Elementen in X beschrieben werden kann.

Satz 0.1.1 *Ein Element v eines endlichen Verbandes ist genau dann $\bigvee$-irreduzibel, wenn es genau einen unteren Nachbarn hat und genau dann $\bigwedge$-irreduzibel, wenn es genau einen oberen Nachbarn hat. Jede supremum-dichte Teilmenge enthält alle $\bigvee$-irreduziblen Elemente und jede infimum-dichte Teilmenge alle $\bigwedge$-irreduziblen. In einem endlichen Verband ist umgekehrt die Menge $J(\underline{V})$ supremum-dicht und die Menge $M(\underline{V})$ infimum-dicht.*

Unter(halb)verbände

Definition: Eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines vollständigen Verbandes $\underline{V}$ ist ein $\bigwedge$-Unterhalbverband von $\underline{V}$, wenn sie gegen Infima abgeschlossen ist, wenn also $T \subseteq U \Rightarrow \bigwedge T \in U$ gilt. Eine gegen Suprema abgeschlossene Teilmenge ist ein $\bigvee$-Unterhalbverband. Eine sowohl gegen Infima als auch gegen Suprema abgeschlossene Teilmenge ist ein vollständiger Unterverband.

Homomorphismen und Kongruenzrelationen

Definition: Eine Abbildung $\varphi\colon P \to Q$ zwischen zwei geordneten Mengen $\underline{P}$ und $\underline{Q}$ heißt Ordnungseinbettung, wenn $x \leq y \iff \varphi(x) \leq \varphi(y)$ gilt. Eine Abbildung $\psi\colon V \to W$ zwischen zwei vollständigen Verbänden $\underline{V}$ und $\underline{W}$ heißt infimum-erhaltend (oder $\bigwedge$-Morphismus), wenn für jede Teilmenge X von V gilt: $\psi \bigwedge X = \bigwedge \psi(X)$. Dual wir supremum-erhaltend definiert. Eine sowohl infimum- als auch supremum-erhaltende Abbildung heißt vollständiger (Verbands-)Homomorphismus oder Vollhomomorphismus. Ein bijektiver Vollhomomorphismus heißt Isomorphismus.

Definition: Eine vollständige Kongruenzrelation eines vollständigen Verbandes $\underline{V}$ ist eine Äquivalenzrelation Θ auf V, für die gilt:

$$x_t \Theta y_t \text{ für } t \in T \Rightarrow (\bigwedge_{t\in T} x_t)\Theta(\bigwedge_{t\in T} y_t) \text{ und } (\bigvee_{t\in T} x_t)\Theta(\bigvee_{t\in T} y_t)$$

Für $x \in V$ setzen wir $[x]\Theta := \{y \in V | x\Theta y\}$.
Der Faktorverband $\underline{V}/\Theta := \{[x]\Theta | x \in V\}$ trägt die Ordnung:

$$[x]\Theta \leq [y]\Theta :\iff x \leq y$$

Satz 0.1.2 (Homomorphiesatz) *Ist Θ eine vollständige Kongruenzrelation eines vollständigen Verbandes $\underline{V}$, dann ist $\varphi\colon x \mapsto [x]\Theta$ ein Vollhomomorphismus von $\underline{V}$ auf $\underline{V}/\Theta$ mit $\mathrm{Kern}(\varphi) := \{(x,y) \in V \times V | \varphi(x) = \varphi y\} = \Theta$.*

Ist umgekehrt $\psi\colon \underline{V} \to \underline{W}$ ein surjektiver Vollhomomorphismus zwischen vollständigen Verbänden, dann ist $\mathrm{Kern}(\psi)$ eine vollständige Kongruenzrelation von $\underline{V}$ und durch $[x]\mathrm{Kern}(\psi) \mapsto \psi(x)$ wird ein Isomorphismus von $\underline{V}/\mathrm{Kern}(\psi)$ auf $\underline{W}$ erklärt.

Satz 0.1.3 (Charakterisierung vollständiger Kongruenzrelationen) *Eine Äquivalenzrelation Θ auf einem vollständigen Verband $\underline{V}$ ist genau dann eine vollständige Kongruenzrelation von $\underline{V}$, wenn jede Äquivalenzklasse von Θ ein*

Intervall von $\underline{V}$ ist, die Menge der unteren Grenzen der Intervalle unter Suprema abgeschlossen ist und die Menge der oberen Grenzen der Intervalle unter Infima abgeschlossen ist.

Freie Verbände und freie Boolesche Algebren

In einer Klasse von Algebren ist eine Freie Algebra die "größte" Algebra, die von einer vorgegebenen Menge erzeugt werden kann. Diese Aussage wird für die von uns betrachteten freien Algebren in Satz 0.1.5 konkretisiert. Zunächst geben wir die Definition von (verallgemeinerten) Termen an:

Definition: Die Menge $\mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\perp,\top}(X)$ (oder einfach Tm) der $\perp$-$\top$-Verbandsterme über einer Menge X wird wie folgt rekursiv definiert:

- $X \subseteq \mathrm{Tm}, \quad \perp, \top \in \mathrm{Tm}$
- $s, t \in \mathrm{Tm} \Rightarrow (s \sqcap t), (s \sqcup t) \in \mathrm{Tm}$

Fordern wir zusätzlich

- $t \in \mathrm{Tm} \Rightarrow \neg t \in \mathrm{Tm}, \qquad (*)$

so erhalten wir die Menge $\mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\perp,\top}(X)$ der Booleschen Terme über X.

Analog wird die Menge $\mathrm{Tm}_{\bigsqcap,\bigsqcup,\perp,\top}(X)$ (oder ebenfalls nur Tm) der verallgemeinerten $\perp$-$\top$-Verbandsterme über einer Menge X definiert:

- $X \subseteq \mathrm{Tm}, \quad \perp, \top \in \mathrm{Tm}$
- $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Tm} \Rightarrow (\bigsqcap \mathcal{A}), (\bigsqcup \mathcal{A}) \in \mathrm{Tm}$

Schließlich erhält man die Menge $\mathrm{Tm}_{\bigsqcap,\bigsqcup,\neg,\perp,\top}(X)$ der verallgemeinerten Booleschen Terme über X, indem man auch hier die Bedingung $(*)$ hinzufügt.

Die Menge $\mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\perp,\top}(X)$ kann als Teilmenge von $\mathrm{Tm}_{\bigsqcap,\bigsqcup,\neg,\perp,\top}(X)$ (und entsprechend $\mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\perp,\top}(X)$ als Teilmenge von $\mathrm{Tm}_{\bigsqcap,\bigsqcup,\perp,\top}(X)$) aufgefaßt werden.

Wir verwenden die Zeichen $\sqcap, \sqcup, \bigsqcap, \bigsqcup, \neg, \perp$ und $\top$ in den Termen (und später in den freien Algebren), um sie von den Verbandsoperationen $\wedge, \vee, \bigwedge, \bigvee, \neg, \mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ unterscheiden zu können.

Definition: Eine Verbands-Gleichung (bzw. Boolesche Gleichung, verallgemeinerte Verbands-Gleichung, verallgemeinerte Boolesche Gleichung) ist ein Paar $(s, t) \in \mathrm{Tm} \times \mathrm{Tm}$. Anstelle von (s, t) schreiben wir auch $s{=}t$.

Die von einer Menge Σ von Verbands-Gleichungen erzeugte Gleichungstheorie $<\Sigma>$ ist die kleinste Äquivalenzrelation auf der Menge der Terme, die Σ enthält und für die gilt:

- Aus $s_1 = t_1, s_2 = t_2 \in <\Sigma>$ folgt $s_1 \sqcap s_2 = t_1 \sqcap t_2 \in <\Sigma>$ und $s_1 \sqcup s_2 = t_1 \sqcup t_2 \in <\Sigma>$.

- Aus $s(x_1, \ldots, x_n) = t(x_1, \ldots, x_n) \in <\Sigma>$ und $u_1, \ldots, u_n \in <\Sigma>$ folgt $s(u_1, \ldots, u_n) = t(u_1, \ldots, u_n) \in <\Sigma>$.

Entsprechend werden die Gleichungstheorien für Boolesche Gleichungen, verallgemeinerte Verbands-Gleichungen und verallgemeinerte Boolesche Gleichungen definiert.

Definition: Sei X eine Menge. Für die Menge von Gleichungen $\Sigma_1 = \{(\mathbf{L}_1), (\mathbf{L}_2), (\mathbf{L}_3), (\mathbf{L}_4)\}$ ist $\mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\perp,\top}(X)/<\Sigma_1>$ ein Verband, den wir den freien Verband über X nennen und mit $\mathrm{FL}(X)$ bezeichnen. Die freie Boolesche Algebra $\mathrm{FB}(X)$ über X erhalten wir durch $\mathrm{FB}(X) := \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\perp,\top}(X)/<\Sigma_2>$ mit $\Sigma_2 = \{(\mathbf{L}_1), (\mathbf{L}_2), (\mathbf{L}_3), (\mathbf{L}_4), (\mathbf{L}_5), (\mathbf{D}_\wedge), (\mathbf{D}_\vee), (\mathbf{B}_\neg)\}$. Entsprechend erhalten wir den freien vollständig distributiven vollständigen Verband $\mathrm{FCD}(X)$ durch $\mathrm{FCD}(X) := \mathrm{Tm}_{\bigsqcap,\bigsqcup,\perp,\top}(X)/<\Sigma_3>$ mit $\Sigma_3 = \{(\mathbf{L}_1), (\mathbf{L}_2), (\mathbf{L}_3), (\mathbf{L}_4), (\mathbf{L}_5), (\mathbf{D}_{\bigvee\bigwedge})\}$ und die freie vollständig distributive vollständige Boolesche Algebra $\mathrm{FCB}(X)$ durch $\mathrm{FCB}(X) := \mathrm{Tm}_{\bigsqcap,\bigsqcup,\neg,\perp,\top}(X)/<\Sigma_4>$ mit $\Sigma_4 = \{(\mathbf{L}_1), (\mathbf{L}_2), (\mathbf{L}_3), (\mathbf{L}_4), (\mathbf{L}_5), (\mathbf{D}_{\bigvee\bigwedge}), (\mathbf{B}_\neg)\}$. Im folgenden wird eine Äquivalenzklasse $[t]$ stets mit dem sie bezeichnenden Term t identifiziert, um die Schreibweisen übersichtlich zu halten.

Daß der freie Verband und die freie Boolesche Algebra existieren und daß für sie der vorstehende Satz gilt, ist ein Ergebnis der Allgemeinen Algebra (s. [Ih]). H. Gaifman und A. W. Hales zeigten 1961 unabhängig voneinander, daß freie vollständige Boolesche Algebren im allgemeinen nicht existieren, da sie zu mächtig sind, um noch als Mengen gelten zu können ([Hale]). Die freien vollständig distributiven vollständigen Booleschen Algebren sowie die freien vollständig distributiven vollständigen Verbände existieren jedoch. Aus [Hale, S. 61] folgt:

Korollar 0.1.4 *Die freie vollständige vollständig distributive Boolesche Algebra* $\mathrm{FCB}(X)$ *über* X *existiert für jede Menge* X *und ist isomorph zur Potenzmengenalgebra* $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$. *Ist die Menge* X *endlich, so ist* $\mathrm{FCB}(X)$ *isomorph zur freien Booleschen Algebra* $\mathrm{FB}(X)$ *über* X.

Über die universelle Eigenschaft der freien Algebren gibt uns der folgende Satz Auskunft:

Satz 0.1.5 *Sei* X *eine Menge. Ein Verband (bzw. eine Boolesche Algebra)* $\underline{V}$ *ist genau dann isomorph zum freien Verband (bzw. zur freien Booleschen Algebra) über* X, *wenn es eine Teilmenge* Y *von* V *mit* $|X|=|Y|$ *gibt, die* V *erzeugt, so daß jede Abbildung* φ *von* Y *auf einen Verband (bzw. eine Boolesche Algebra)* V' *zu einem Verbands-Homomorphismus (bzw. Homomorphismus Boolescher Algebren)* $\hat{\varphi}\colon V \to V'$ *erweitert werden kann.*

Ein vollständig distributiver vollständiger Verband (bzw. eine vollständig distributive vollständige Boolesche Algebra) $\underline{V}$ ist genau dann isomorph zum freien vollständig distributiven vollständigen Verband (bzw. zur freien vollständig distributiven vollständigen Booleschen Algebra) über X, wenn es eine Teilmenge Y von V mit $|X|=|Y|$ gibt, die V vollständig erzeugt, so daß jede Abbildung φ von Y auf einen vollständig distributiven vollständigen Verband (bzw. eine vollständig distributive vollständige Boolesche Algebra) V' zu einem vollständigen Verbands-Homomorphismus (bzw. vollständigen Homomorphismus Boolescher Algebren) $\hat{\varphi}: V \to V'$ erweitert werden kann.

Aus dem Satz ergibt sich insbesondere, daß wir die freie Boolesche Algebra $\mathrm{FB}(X)$ als Boolesche Unteralgebra und den freien vollständig distributiven vollständigen Verband $\mathrm{FCD}(X)$ als vollständigen Unterverband der freien vollständig distributiven vollständigen Booleschen Algebra $\mathrm{FCB}(X)$ ansehen können.

0.2 Formale Begriffsanalyse

Definition: Ein (einwertiger) formaler Kontext ist ein Tripel $\mathbb{K} := (G, M, I)$, welches aus zwei Mengen G und M und einer Relation $I \subseteq G \times M$ besteht. Die Elemente von G nennt man die Gegenstände, die Elemente von M die Merkmale des Kontextes. gIm wird gelesen als: "Der Gegenstand g hat das Merkmal m".

Für eine Teilmenge A von G definieren wir $A' := \{m \in M | gIm$ für alle $g \in A\}$ und für eine Teilmenge B von M entsprechend $B' := \{g \in G | gIm$ für alle $m \in B\}$. Die formalen Begriffe des Kontextes (G, M, I) sind die Paare (A, B) mit $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, $A' = B$ und $B' = A$. Der Umfang eines Begriffes $\mathfrak{b} := (A, B)$ ist die Menge $\mathfrak{U}(\mathfrak{b}) := A$, der Inhalt die Menge $\mathfrak{I}(\mathfrak{b}) := B$. Ein Gegenstand g fällt unter den Begriff $\mathfrak{b}$ (in Zeichen: $g \searrow \mathfrak{b}$), wenn $g \in A$ gilt. Ein Merkmal m abstrahiert von dem Begriff $\mathfrak{b}$ (in Zeichen: $\mathfrak{b} \nearrow m$), wenn $m \in B$ gilt. Mit $\mathfrak{B}(G, M, I)$ wird die Menge aller Begriffe des Kontextes (G, M, I) bezeichnet.

Sind (A_1, B_1) und (A_2, B_2) Begriffe eines Kontextes und gilt $A_1 \subseteq A_2$ (was äquivalent zu $B_1 \supseteq B_2$ ist), dann heißt (A_1, B_1) Unterbegriff von (A_2, B_2) und (A_2, B_2) Oberbegriff von (A_1, B_1) und man schreibt $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$. Die geordnete Menge $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) := (\mathfrak{B}(G, M, I), \leq)$ nennt man Begriffsverband des Kontextes (G, M, I).

Satz 0.2.1 (Hauptsatz über Begriffsverbände) *Der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ist ein vollständiger Verband, in dem Infimum und Supremum folgendermaßen beschrieben sind:*

$$\bigwedge_{t\in T}(A_t, B_t) = (\bigcap_{t\in T} A_t, (\bigcup_{t\in T} B_t)'')$$

$$\bigvee_{t\in T}(A_t, B_t) = ((\bigcup_{t\in T} A_t)'', \bigcap_{t\in T} B_t)$$

Ein vollständiger Verband $\underline{V}$ ist genau dann isomorph zu $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$, wenn Abbildungen $\gamma: G \to V$ und $\mu: M \to V$ existieren, so daß $\gamma(G)$ supremum-dicht in $\underline{V}$ und

$\mu(M)$ infimum-dicht in $\underline{V}$ ist und gIm äquivalent ist zu $\gamma g \leq \mu m$ für alle $g \in G$ und alle $m \in M$. Insbesondere gilt $\underline{V} \cong \underline{\mathfrak{B}}(V, V, \leq)$.

Definition: Die Menge $g' := \{g\}$ heißt Gegenstandsinhalt des Gegenstandes $g \in G$. Entsprechend heißt $m' := \{m\}$ Merkmalsumfang des Merkmals $m \in M$. In Übereinstimmung mit den im Hauptsatz verwendeten Bezeichnungen schreiben wir γg für den Gegenstandsbegriff (g'', g') von g und μm für den Merkmalsbegriff (m', m'') von m.

Bereinigte, reduzierte und doppelt fundierte Kontexte

Definition: Ein Kontext (G, M, I) heißt gegenstandsbereinigt, wenn für $g, h \in G$ aus $g' = h'$ stets $g = h$ folgt und merkmalsbereinigt, wenn für $m, n \in M$ aus $m' = n'$ stets $m = n$ folgt. Ein gegenstands- und merkmalsbereinigter Kontext heißt bereinigt.

Ein bereinigter Kontext heißt zeilenreduziert, wenn jeder Gegenstandsbegriff $\bigvee$-irreduzibel ist und spaltenreduziert, wenn jeder Merkmalsbegriff $\bigwedge$-irreduzibel ist. Ein sowohl zeilen- als auch spaltenreduzierter Kontext heißt reduziert.

Definition: Für $g \in G$ und $m \in M$ schreiben wir

- $g \swarrow m$, wenn $g \not\!I m$ und wenn aus $g' \subset h'$ stets hIm folgt,[1]
- $g \nearrow m$, wenn $g \not\!I m$ und wenn aus $m' \subset n'$ stets gIn folgt,
- $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$, wenn $g \swarrow m$ und $g \nearrow m$.

Ein Kontext (G, M, I) heißt doppelt fundiert, wenn es für alle $g \in G$ und $m \in M$ mit $g \not\!I m$ ein $h \in G$ mit $h \swarrow m$ und $g' \subseteq h'$ sowie ein $n \in M$ mit $g \nearrow n$ und $m' \subseteq n'$ gibt.

Ein vollständiger Verband $\underline{V}$ heißt doppelt fundiert, falls es zu je zwei Elementen $x < y$ aus V Elemente $s, t \in V$ gibt, so daß s minimal bezüglich $s \leq y$ und $s \not\leq x$ ist und t maximal bezüglich $t \geq x$ und $t \not\geq y$ ist.

Satz 0.2.2 *Jeder endliche Kontext und jeder endliche Verband ist doppelt fundiert. Ein vollständiger Verband $\underline{V}$ ist genau dann doppelt fundiert, wenn jeder Kontext $\mathbb{K}$ mit $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \cong \underline{V}$ doppelt fundiert ist.*

Satz 0.2.3 *Zu jedem doppelt fundierten Verband $\underline{V}$ gibt es bis auf Isomorphie genau einen reduzierten Kontext $\mathbb{K}$ mit $\underline{V} \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$, nämlich $\mathbb{K} = (J(\underline{V}), M(\underline{V}), \leq)$.*

Jeder Begriff eines doppelt fundierten Kontextes ist Supremum $\bigvee$-irreduzibler Begriffe und Infimum $\bigwedge$-irreduzibler Begriffe.

---

[1] $X \subset Y$ steht für $X \subseteq Y$ und $X \neq Y$

Satz 0.2.4 *In jedem Kontext gilt:*

- γg *ist* $\bigvee$*-irreduzibel* $\iff$ *Es gibt ein* $m \in M$ *mit* $g \swarrow m$.
- μm *ist* $\bigwedge$*-irreduzibel* $\iff$ *Es gibt ein* $g \in G$ *mit* $g \nearrow m$.

In jedem doppelt fundierten Kontext gilt außerdem:

- γg *ist* $\bigvee$*-irreduzibel* $\iff$ *Es gibt ein* $m \in M$ *mit* $g \mathrel{\swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow} m$.
- μm *ist* $\bigwedge$*-irreduzibel* $\iff$ *Es gibt ein* $g \in G$ *mit* $g \mathrel{\swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow} m$.

Kapitel 1

Boolesche Begriffsverbände

Die Konstruktion der *Booleschen Begriffsverbände* basiert auf der These, daß bei einem gegebenen Kontext (G, M, I) bereits diejenigen Merkmale implizit mit gegeben sind, die sich aus den in M liegenden Merkmalen zusammensetzen lassen. Die Verknüpfungen zwischen den Merkmalen werden — wie in der Aussagenlogik — durch eine Boolesche Algebra modelliert.

Aufgrund der Definition der formalen Begriffe ist das *und* bereits dadurch gegeben, daß die Gegenstände, die unter einen Begriff fallen, mit *allen* Merkmalen, die im Inhalt des Begriffes liegen, inzidieren müssen. Da die Mächtigkeit des Inhaltes nicht beschränkt ist, kann dieses *und* also eine beliebige Stelligkeit besitzen. Wir werden deshalb auch für das *oder* beliebige Stelligkeiten zulassen. Die Merkmalmenge M des Kontextes $\mathbb{K}$ wird daher im *Booleschen Kontext* zur freien vollständig distributiven vollständigen Booleschen Algebra (und nicht nur zur freien Booleschen Algebra) über M erweitert.

1.1 Boolesche Kontexte und Boolesche Begriffsverbände

Definition: Sei $\mathbb{K} := (G, M, I)$ ein Kontext. Dann heißt $\mathbb{K}^b := (G, M^b, I^b)$ mit

- $M^b := \mathrm{FCB}(M)$
- $gI^b\top$ und $g\not I^b\bot$ für alle $g \in G$
- $gI^bm :\iff gIm$, für alle $m \in M$
- $gI^b(\bigsqcap\mathcal{A}) :\iff (gI^bt$ für alle $t \in \mathcal{A})$
- $gI^b(\bigsqcup\mathcal{A}) :\iff (gI^bt$ für ein $t \in \mathcal{A})$
- $gI^b(\neg t) :\iff g\not I^bt$

der Boolesche Kontext zu $\mathbb{K}$. Die Begriffe von $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K}) := \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}^b)$ heißen Boolesche Begriffe von $\mathbb{K}$ und $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ ist der Boolesche Begriffsverband von $\mathbb{K}$. Wir lesen $s \sqcap t$ als s *und* t, $s \sqcup t$ als s *oder* t und $\neg t$ als *nicht* t.

Der Boolesche Begriffsverband bildet nun auf natürliche Weise ebenfalls eine Boolesche Algebra:

Satz 1.1.1 (Hauptsatz über Boolesche Begriffsverbände)
Der Boolesche Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}^b(G, M, I)$ ist eine vollständig distributive vollständige Boolesche Algebra, in der die Operationen wie folgt gegeben sind:

$$\boldsymbol{0}_{\underline{\mathfrak{B}}^b} = (\emptyset, M^b), \qquad \boldsymbol{1}_{\underline{\mathfrak{B}}^b} = (G, \{\top\}'')$$

$$\bigwedge_{t\in T}(A_t, B_t) = (\bigcap_{t\in T} A_t, (\bigcup_{t\in T} B_t)'')$$

$$\bigvee_{t\in T}(A_t, B_t) = (\bigcup_{t\in T} A_t, \bigcap_{t\in T} B_t)$$

$$\neg(A, B) = (G \setminus A, \{\neg \textstyle\bigsqcap B\}'')$$

Eine vollständig distributive vollständige Boolesche Algebra $\underline{B}$ ist genau dann isomorph zum Booleschen Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ eines Kontextes $\mathbb{K} = (G, M, I)$, wenn Abbildungen $\gamma\colon G \to B$ und $\mu\colon M \to B$ existieren, so daß $\gamma(G)$ supremum-dicht in $\underline{B}$ ist, $\mu(M)$ die Boolesche Algebra $\underline{B}$ vollständig erzeugt, und wenn für alle $g \in G$, $m \in M$ gilt: $(g, m) \in I \iff \gamma g \leq \mu m$.

Insbesondere ist $\underline{B}$ isomorph zum Booleschen Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}^b(B, B, \leq)$.

Beweis: Wegen $\bot{\in}M^b$ gilt $M^{b\prime}{\subseteq}\bot'{=}\emptyset$, also $\mathbf{0}_{\underline{\mathfrak{B}}^b}{=}(\emptyset, M^b)$. Aus $\top'{=}G$ folgt $\mathbf{1}_{\underline{\mathfrak{B}}^b} = (G, \{\top\}'')$. Die Gleichung für das Infimum gilt nach Satz 0.2.1. Für das Supremum ist nur zu zeigen, daß $\bigcup_{t\in T} A_t$ ein Umfang ist: Es gilt $\bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T}(\bigsqcap B_t)' = (\bigsqcup_{t\in T}(\bigsqcap B_t))'$. Es bleibt die Negation: Wegen $\{\neg\bigsqcap B\}' = G\setminus A$ ist $(G\setminus A, \{\neg\bigsqcap B\}'')$ ein Begriff. Es ist klar, daß $(A, B)\wedge(G\setminus A, \{\neg\bigsqcap B\}'') = \mathbf{0}_{\underline{\mathfrak{B}}^b}$ und $(A, B)\vee(G\setminus A, \{\neg\bigsqcap B\}'') = \mathbf{1}_{\underline{\mathfrak{B}}^b}$ gilt.

Hieraus folgt, daß die Menge der Begriffsumfänge $\mathfrak{U}(\underline{\mathfrak{B}}^b(G, M, I))$ bzgl. der Operationen $\bigcap, \bigcup, \cdot^c, \emptyset$ und G abgeschlossen ist und somit eine vollständig distributive vollständige Boolesche Algebra bildet.

"$\Leftarrow$": Wenn $\mu(M)$ ganz B erzeugt, dann gibt es genau einen surjektiven Vollhomomorphismus $\mu^b\colon \mathrm{FCB}(M) \to V$, der μ fortsetzt. Also ist $\mu^b(\mathrm{FCB}(M))$ infimum-dicht, $\gamma(G)$ supremum-dicht und für alle $g \in G$ und $t \in \mathrm{FCB}(M)$ gilt $gI^bt \iff \gamma g \leq \mu^b t$. Nun kann Satz 0.2.1 angewendet werden.

"$\Rightarrow$": Sei nun $V \cong \underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K}) = \underline{\mathfrak{B}}(G, \mathrm{FCB}(M), I^b)$. Ist zunächst $V = \underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$, so ergeben sich durch $\gamma g := (g'', g')$ für $g \in G$ und $\mu m := (m', m'')$ für $m \in M$ die gewünschten Abbildungen. Ist allgemeiner $V \cong \underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ und ist $\varphi\colon \underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K}) \to V$ ein Isomorphismus, so kann man $\gamma g := \varphi(g'', g')$ und $\mu m := \varphi(m', m'')$ setzen. $\square$

Der Hauptsatz besagt unter anderem, daß wir (bis auf Isomorphie) jede vollständig distributive vollständige Boolesche Algebra als Booleschen Begriffsverband erhalten.

Die Operationen $\bigvee$, $\bigwedge$ und $\neg$ entsprechen den Mengenoperationen $\bigcup$, $\bigcap$ und dem Mengenkomplement auf der Menge $\mathfrak{U}(\mathbb{K}^b)$ der Umfänge. Die Gegenstandsbegriffe sind daher genau die Atome des Booleschen Begriffsverbandes $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$. Über die Menge $\mathfrak{I}(\mathbb{K}^b)$ der Inhalte gibt der folgende Satz Auskunft:

Definition: Ein (Verbands-)Filter eines Verbandes $\underline{V}$ ist eine Teilmenge $F \subseteq V$, für die gilt:

- $\mathbf{0}_{\underline{V}} \notin F$
- $x \in F, x \leq y \Rightarrow y \in F$
- $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$

Ein Hauptfilter ist ein Filter, der ein kleinstes Element a besitzt. Er wird auch mit $[a)$ bezeichnet. Ein maximaler Filter heißt Ultrafilter.

Satz 1.1.2 *Sei* $\mathbb{K} = (G, M, I)$ *ein Kontext. Dann ist* $\mu\colon \mathrm{FCB}(M) \to \underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ *mit* $m \mapsto (m', m'')$ *ein surjektiver Vollhomomorphismus Boolescher Algebren. Die Begriffsinhalte von* $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ *sind genau die Hauptfilter* F *von* $\mathrm{FCB}(M)$*, für die* $F' \subseteq t' \Rightarrow t \in F$ *(*) gilt, sowie ganz* $\mathrm{FCB}(M)$*. Die Begriffsinhalte der Gegenstandsbegriffe sind genau die Ultrafilter auf* $\mathrm{FCB}(M)$*, die (*) erfüllen.*

Beweis: Aufgrund der Definition der Relation I^b ist klar, daß μ ein Vollhomomorphismus ist. Für $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ gilt $(A, B) = \mu(\bigsqcap B)$. Also ist μ surjektiv.

"$\Rightarrow$": Seien $(A, B) \in \mathfrak{B}^b$, $s, t \in F$. Dann ist auch $s \wedge t \in F$ und für $u \geq t$ gilt $u \in F$, denn wegen $u \geq t \iff u = u \vee t$ gilt $gI^bt \Rightarrow gI^b(t \vee u) \iff gI^bu$. Also ist F ein Filter. Wegen $\top \in F$ ist F nicht leer. Sei $t \in \mathrm{FCB}(M)$ mit $F' \subseteq t'$. Es gilt $t \in t'' \subseteq F'' = F$. Wegen $\bigsqcap F \in F$ ist F ein Hauptfilter.

"$\Leftarrow$": Sei nun F ein Hauptfilter von $\mathrm{FCB}(M)$ mit $(F' \subseteq t' \Rightarrow t \in F)$ und sei $t \in F''$. Also $F' = F''' \subseteq t'$ und nach Voraussetzung folgt $t \in F$. Also $F = F''$.

Für $g \in G$ und $t \in \mathrm{FCB}(M)$ gilt entweder gI^bt oder $gI^b\neg t$. Also ist der Begriffsinhalt von γg ein Ultrafilter (s. [Dw]). Ist umgekehrt $\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}^b(\mathbb{K})$ kein Gegenstandsbegriff, so gibt es $g, h \in \mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ mit $g' \neq h'$. D. h. für $t \in \{g\}' \setminus \{h\}'$ gilt weder $t \in \mathfrak{I}(\mathfrak{a})$ noch $\neg t \in \mathfrak{I}(\mathfrak{a})$. Also ist $\mathfrak{I}(\mathfrak{a})$ kein Ultrafilter. $\square$

Beispiel: Der mehrwertige Kontext in Abbildung 1.1 ist ein Auszug aus einer Tabelle im Katalog eines Mainzer Bergsportgeschäftes ([Si]), die über Trekking-Zelte Auskunft gibt. Der einwertige Kontext entsteht aus dem mehrwertigen durch Skalierung[1] (wobei der Typ nominal und alle anderen Merkmale ordinal skaliert werden).

[1] Die Technik der Skalierung wird in [GaWi93] beschrieben.

Trekking-Zelte	Personen	Typ	Gewicht	Apsiden	Innenzelt-Fläche	Liegelänge	wintertauglich	Preis
Mark 3	3	Kunnel	3500 g	2	3,5 m^2	215 cm	nein	579 DM
Space 2	2–3	Kuppel	3000 g	2	3,5 m^2	215 cm	nein	459 DM
Polar 87	2	Tunnel	3800 g	1	2,5 m^2	210 cm	ja	529 DM
Foxlite	2	Kunnel	2100 g	1	2,3 m^2	265 cm	nein	769 DM
Dragon	2–3	Kunnel	3200 g	2	3,4 m^2	225 cm	nein	579 DM
Termite	2	Kunnel	2500 g	2	2,1 m^2	220 cm	nein	479 DM

Trekking-Zelte	Personen			Typ			Gewicht					Innenzelt-Fläche					Preis		
	≥ 2	$\geq$ 2–3	≥ 3	Tunnel	Kunnel	Kuppel	$\leq$ 2200 g	$\leq$ 2700 g	$\leq$ 3200 g	$\leq$ 3700 g	2 Apsiden	$\geq 2,5m^2$	$\geq 3m^2$	$\geq 3,5m^2$	$\geq$ 220 cm Liegelänge	wintertauglich	$\leq$ 500 DM	$\leq$ 550 DM	$\leq$ 600 DM
Mark 3	×	×	×		×					×	×	×	×	×					×
Space 2	×	×				×			×	×	×	×	×	×			×	×	×
Polar 87	×			×								×				×		×	×
Foxlite	×				×		×	×	×	×	×				×				
Dragon	×	×			×				×	×	×	×	×		×				×
Termite	×				×			×	×	×	×				×		×	×	×

Abbildung 1.1: Eigenschaften von einigen Trekking-Zelten

Aus dem Hauptsatz ergibt sich, daß wir das Diagramm eines Booleschen Begriffsverbandes nicht mit allen Merkmalen aus FCB(M) beschriften müssen. In dem Liniendiagramm des Booleschen Begriffsverbandes des einwertigen Kontextes sind daher nur die Merkmalsbegriffe der Merkmale aus M beschriftet. Das Liniendiagramm ist als *gestuftes Liniendiagramm* gezeichnet. Sind zwei eingekreiste Teildiagramme durch eine aufsteigende Linie verbunden, so ist dies so zu lesen, als ob von jedem unteren Punkt eine aufsteigende Linie zum entsprechenden oberen Punkt geht.

Aus dem Liniendiagramm kann man nun z. B. ablesen, daß die Wintertauglichkeit und die Eigenschaft, nicht weniger als 3700 g zu wiegen, gleichwertig sind, da $\mu(\text{wintertauglich}) = \neg\mu(\leq 3700\text{g})$ gilt. Diese Aussage gilt natürlich (wie alle Aussagen, die aus diesem Diagramm abgelesen werden können) nur für die sechs ausgewähl-

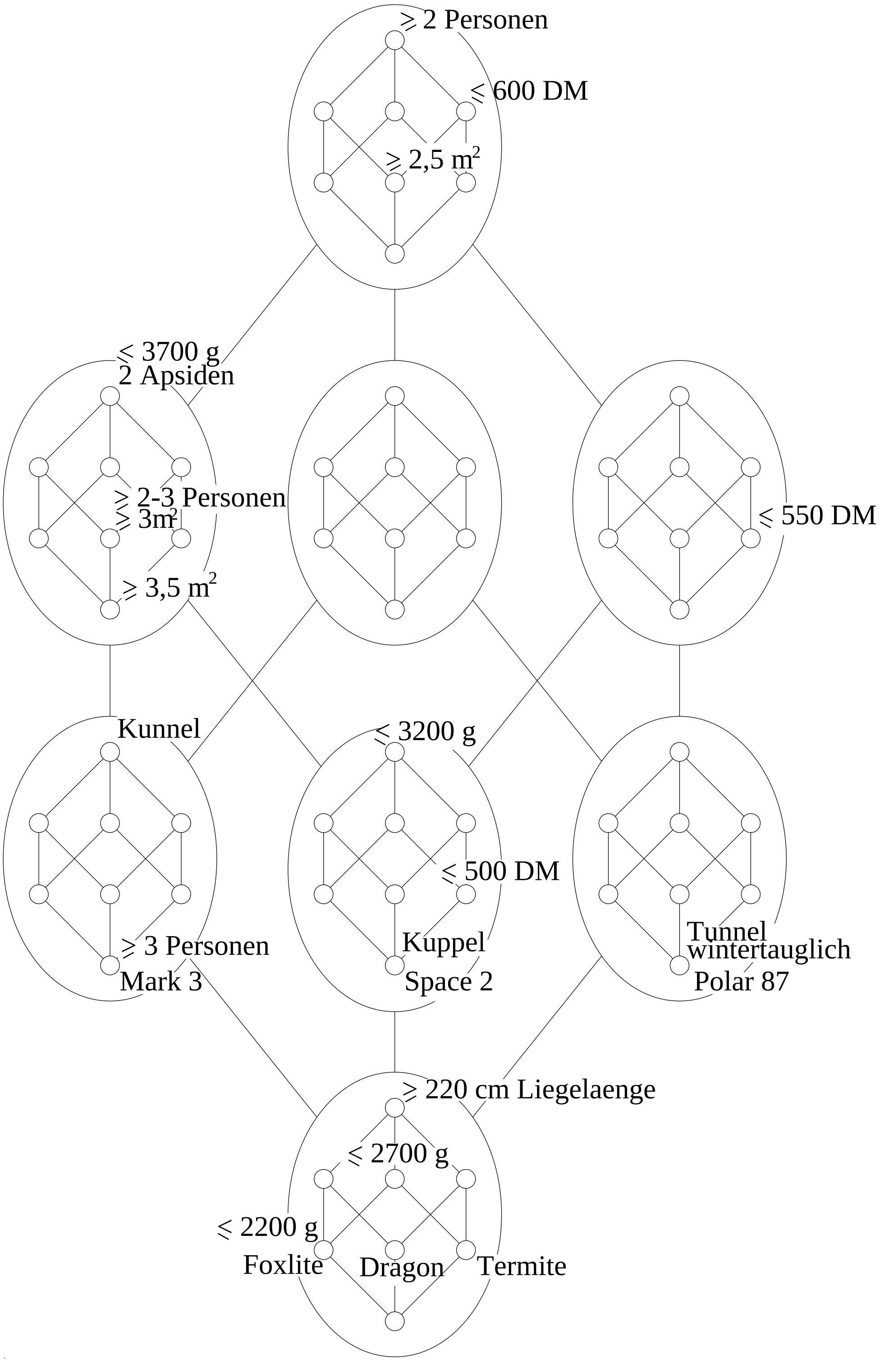


Abbildung 1.2: Boolescher Begriffsverband des Kontextes in Abb. 1.1

ten Zelte und kann nicht für alle Trekking-Zelte verallgemeinert werden. Daß die Innenzelt-Fläche für die betrachteten Zelte, die für mindestens drei Personen gedacht sind, mindestens 3,5 m^2 beträgt, wird durch $\mu(\geq 3 \text{ Personen}) \vee \neg\mu(\geq 3,0\text{m}^2) = \mu(\top)$ erkannt. Die Ungleichung $\mu(2 \text{ Apsiden}) \wedge \mu(\leq 500\text{DM}) \neq \mu(\bot)$ beschreibt die Tatsache, daß es mindestens ein Zelt gibt, welches zwei Apsiden hat und weniger als 500 DM kostet. Im Gegensatz dazu steht $\mu(\text{Kunnel}) \wedge \mu(\leq 3200\text{g}) = \mu(\bot)$ für die Aussage, daß es kein Kunnelzelt gibt, welches weniger als 3200 g wiegt. Wenn man feststellen möchte, wodurch sich die teureren Zelte auszeichnen, so stößt man auf die im Booleschen Begriffsverband gültige Ungleichung $\neg\mu(\leq 600\text{DM}) \leq \mu(\leq 3200\text{g})$, die aussagt, daß alle über 600 DM teuren Zelte weniger als 3200 g wiegen.

1.2 Unterhalbverbände und lokale Suprema

Der Boolesche Begriffsverband erlaubt einen sehr detaillierten Blick auf die durch einen Kontext gegebenen Daten. Er ist allerdings auch bei recht kleinen Kontexten meist schon zu groß, um im Ganzen als Liniendiagramm dargestellt werden zu können. Aus Satz 1.1.1 ergibt sich ja, daß $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ genau $2^{|G|}$ Boolesche Begriffe enthält, falls der Kontext $\mathbb{K}$ gegenstandsbereinigt ist.

Möchte man ein Teilgebiet des im formalen Kontext beschriebenen Wissens untersuchen, kann man sich auf eine Teilmenge $N \subseteq \text{FCB}(M)$ der Merkmale des Booleschen Kontextes beschränken (die im Allgemeinen wesentlich kleiner sein wird als $\text{FCB}(M)$).

Definition: Sei $\mathbb{K} := (G, M, I)$ ein Kontext und N eine Teilmenge von $\text{FCB}(M)$. Den Kontext $\mathbb{K}^N := (G, N, I^b \cap G \times N)$ nennen wir N-Teilkontext von $\mathbb{K}^b$.

Sein Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}^N)$ findet sich dann in $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ als vollständiger $\bigwedge$-Unterhalbverband wieder, wie das folgende Lemma besagt:

Lemma 1.2.1 *Für $N \subseteq M$ ist die Abbildung $\varepsilon_N\colon \underline{\mathfrak{B}}(G, N, I \cap G \times N) \to \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ mit $(A, B) \mapsto (A, A')$ eine $\bigwedge$-erhaltende Ordnungseinbettung.*
Es gilt $\bigvee_{t \in T}(\varepsilon_N(A_t, B_t)) \leq \varepsilon_N(\bigvee_{t \in T}(A_t, B_t))$.

Beweis: Da jeder Spaltenumfang von $(G, N, I \cap G \times N)$ auch ein Spaltenumfang von (G, M, I) ist, und da jeder Begriffsumfang Durchschnitt von Spaltenumfängen ist, ergibt sich, daß jeder Begriffsumfang von$(G, N, I \cap G \times N)$ auch ein Begriffsumfang von (G, M, I) ist. $\square$

Wir können also den Begriffsverband $\mathfrak{B}(\mathbb{K}^N)$ mit seinem Bild $\varepsilon_N(\mathfrak{B}(\mathbb{K}^N))$ identifizieren und bezeichnen ihn daher als *N-Unterhalbverband* von $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$. Wir erhalten so für jede Teilmenge N von $\text{FCD}(M)$ ein *lokales Supremum (bzgl. N)* als partielle Abbildung auf $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$:

Definition: Für $\mathfrak{b}_t \in \underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ mit $\mathfrak{a}_t \in \underline{\mathfrak{B}}(G, N, I^b \cap G \times N), \mathfrak{b}_t = \varepsilon_N(\mathfrak{a}_t)$ für $t \in T$ bezeichnen wir $\bigvee_{t\in T}^N(\mathfrak{b}_t) := \varepsilon_N(\bigvee_{t\in T}\mathfrak{a}_t)$ als lokales Supremum der $\mathfrak{b}_t, t \in T$ bzgl. N.

Die Menge $\varepsilon_N(\mathfrak{B}(G, N, I^b \cap G \times N)) \subseteq \mathfrak{B}^b(\mathbb{K})$ wird also mit $\bigwedge$ und $\bigvee^N$ zu einem vollständigen Verband. Je kleiner man die Teilmenge $N \subseteq \mathrm{FCB}(M)$ gewählt hat, desto größer wird das lokale Supremum:

Lemma 1.2.2 *Seien $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \mathrm{FCB}(M)$ und seien $\mathfrak{b}_t \in \varepsilon_{N_1}(\mathfrak{B}(G, N_1, I^b \cap G \times N_1))$ für $t \in T$. Dann gilt auch $\mathfrak{b}_t \in \varepsilon_{N_2}(\mathfrak{B}(G, N_2, I^b \cap G \times N_2))$ für $t \in T$ und es gilt: $\bigvee_{t\in T}^{N_1}\mathfrak{b}_t \geq \bigvee_{t\in T}^{N_2}\mathfrak{b}_t$.*

Beweis: Jeder Begriff $\mathfrak{b}_t \in \varepsilon_{N_1}(\mathfrak{B}(G, N_1, I^b \cap G \times N_1))$ läßt sich darstellen als Infimum von Merkmalsbegriffen von Merkmalen aus N_1. Also läßt er sich auch darstellen als Infimum von Merkmalsbegriffen von Merkmalen aus N_2. Damit gilt $\mathfrak{b}_t \in \varepsilon_{N_2}(\mathfrak{B}(G, N_2, I^b \cap G \times N_2))$. Aus $\mathfrak{I}(\bigvee_{t\in T}^{N_1}\mathfrak{b}_t) = (\bigcap_{t\in T}\mathfrak{I}(\mathfrak{b}_t) \cap N_1)'' \subseteq (\bigcap_{t\in T}\mathfrak{I}(\mathfrak{b}_t) \cap N_2)'' = \mathfrak{I}(\bigvee_{t\in T}^{N_1}\mathfrak{b}_t)$ folgt die behauptete Ungleichung. $\square$

Wählen wir die Menge M als Teilmenge von $\mathrm{FCB}(M)$ aus, erhalten wir auf obige Weise natürlich den Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$:

$$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) = (\mathfrak{B}(\mathbb{K}), \bigwedge, \bigvee) \cong (\varepsilon_M(\mathfrak{B}(G, M, I^b \cap G \times M), \bigwedge, \bigvee^M) = \varepsilon_M(\mathfrak{B}(\mathbb{K}), \bigwedge, \bigvee^M)$$

Schränkt man sich für eine Teilmenge N von M auf $\mathrm{FCB}(N) \subseteq \mathrm{FCB}(M)$ ein, so erhält man mit dem $\mathrm{FCB}(N)$-Unterhalbverband eine vollständige Boolesche Unteralgebra von $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$. Das lokale Supremum entspricht in diesem Fall also dem globalen. Diese Tatsache ermöglicht es uns, in begrifflichen Wissenssystemen (die in Abschnitt 1.5 eingeführt werden) global gültige Gleichungen bereits durch die Erkundung eines Teilgebietes des zu untersuchenden Wissens festzustellen.

Zwei weitere Teilmengen von $\mathrm{FCB}(M)$ verdienen eine nähere Betrachtung: Der freie vollständig distributive vollständige Verband $\mathrm{FCD}(M) \subseteq \mathrm{FCB}(M)$ führt zu den *positiv-Booleschen Begriffen*, die im Kapitel 2 untersucht werden. Im nächsten Abschnitt werden die sogenannten *definierbaren Begriffe* eingeführt, die man erhält, wenn man nur die endlich zusammengesetzten Merkmale aus $\mathrm{FCB}(M)$ auswählt.

1.3 Definierbare Begriffe

In DIN-Norm 2330 ([DIN]), die von Begriffen und Benennungen handelt, werden Definitionen wie folgt beschrieben:

"Definitionen dienen dazu, einen möglichst eindeutigen Zusammenhang zwischen Begriffen und Benennungen herzustellen. Sie grenzen einen Begriff ab, indem er zu anderen (bekannten oder bereits definierten) in Beziehung gesetzt wird. [...] Dabei ist die klassische Form die Inhaltsdefinition. [...] Eine Inhaltsdefinition besteht in der Angabe der Merkmale, die den Inhalt eines Begriffes kennzeichnen. [...]"

Unter "Benennung" wird dabei "die mindestens ein Wort umfassende Bezeichnung eines Begriffes" verstanden.

Die folgende einfache Modellierung der Inhaltsdefinition in der Sprache der Booleschen Begriffe kann noch dahingehend erweitert werden, daß bei einer Definition die Verwendung bereits definierter Begriffe ermöglicht wird.

Definition: Sei $\mathbb{K} := (G, M, I)$ ein Kontext und sei $t \in \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\perp,\top}(M)$. Dann nennen wir den Term t einen Definitionsterm des Begriffes $\mu([t])$, wobei $[t]$ die Äquivalenzklasse von t in $\mathrm{FCB}(M)$ ist. Im weiteren werden wir — wie bisher schon — auch $[t]$ der Einfachheit halber mit t bezeichnen. Ist $\mathfrak{b}$ ein definierbarer Begriff, dann bezeichnen wir mit $\mathrm{Def}(\mathfrak{b})$ die Menge aller Definitionsterme von $\mathfrak{b}$. Die Menge $\mathfrak{D}(\mathbb{K}) := \mu(\mathrm{FB}(M)) \subseteq \mathfrak{B}^b(\mathbb{K})$ ist die Menge der definierbaren Begriffe von $\mathbb{K}$.

Wesentlich ist hier die Beschränkung auf $\mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\perp,\top}(M) \subseteq \mathrm{Tm}_{\bigsqcap,\bigsqcup,\neg,\perp,\top}(M)$, also auf die Menge der endlich gebildeten Terme, um Definitionen auch effektiv angeben zu können.

Den Zusammenhang zwischen einem Begriff und seiner Benennung kann nun so beschrieben werden: Ist $t \in \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\perp,\top}(M)$ ein Definitionsterm eines Begriffes $\mathfrak{b}$ und b ein Name, so nennen wir die Zuordnung $b \mapsto t$ eine *(formale) Definition* des Begriffes $\mathfrak{b}$ und b eine *(formale) Benennung* von $\mathfrak{b}$.

Da μ ein Homomorphismus Boolescher Algebren ist und $\mathrm{FB}(M)$ eine Boolesche Unteralgebra von $\mathrm{FCB}(M)$, ist $\mathfrak{D}(\mathbb{K})$ eine Boolesche Unteralgebra von $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$, die allerdings im allgemeinen nicht vollständig ist. Sie kann deswegen nicht als Begriffsverband beschrieben werden.

Es besteht ein Zusammenhang zwischen der Definierbarkeit der Gegenstandsbegriffe eines Booleschen Begriffsverbandes $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ und dem $\bigwedge$-Unterhalbverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}^{\mathrm{FB}(M)})$:

Satz 1.3.1 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Jeder Boolesche Begriff ist Infimum von definierbaren Begriffen.*
2. *Der* $\mathrm{FB}(M)$*-Unterhalbverband von* $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ *ist ganz* $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ *(d. h. es gilt* $\varepsilon_{\mathrm{FB}(M)}\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}^{\mathrm{FB}(M)}) = \underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$*).*
3. *Der* $\mathrm{FB}(M)$*-Teilkontext von* $\mathbb{K}^b$ *ist doppelt fundiert.*
4. *Alle Gegenstandsbegriffe von* $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ *sind definierbar.*

Beweis: "*1.* $\Longleftrightarrow$ *2.*": Dies gilt, weil jeder Begriff Infimum von Merkmalsbegriffen ist.
"*2.*$\Rightarrow$*3.*": $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ ist isomorph zur Potenzmengenalgebra $(G_{/\Phi}, \subseteq)$ und somit ein doppelt fundierter Verband. Nach Satz 0.2.2 ist jeder Kontext $\mathbb{K}'$ mit $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}') \cong \underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ doppelt fundiert, also insbesondere auch $\mathbb{K}^{\mathrm{FB}(M)}$.

“*3.⇒4.*”: Sei $g \in G$. Wegen $g \not I^b \perp$ und $\perp' = \emptyset \subseteq \{s\}'$ für alle $s \in \mathrm{FB}(M)$ gibt es ein $t \in \mathrm{FB}(M)$ mit $g \nearrow t$. Nun ist $\neg t$ eine Definition für γg: Angenommen, es gäbe $h \in \mathfrak{U}(\mu(\neg t))$ mit $h' \neq g'$. Dann gibt es ein $s \in \mathrm{FB}(M)$ mit $g \not I^b s$ und $h I^b s$. Es folgt $\mu(s \sqcup t) = \mu s \vee \mu t > \mu t$. Wegen $g \nearrow t$ gilt also $g \swarrow \mu(s \sqcup t)$. Dies steht aber im Widerspruch zu $g \not I^b s$ und $g I^b s$.
“*4.⇒2.*”: Für jeden Begriff $\mathfrak{b} \in \underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ setze $X_{\mathfrak{b}} := \{\neg t \in \mathrm{FB}(M) | t \in \mathrm{Def}(\gamma g)$ für ein $g \in G$ mit $g \swarrow \mathfrak{b}\}$. Dann gilt $\mathfrak{b} = \bigwedge\{\mu s | s \in X_{\mathfrak{b}}\}$, also $\mathfrak{b} \in \varepsilon_{\mathrm{FB}(M)} \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}^{\mathrm{FB}(M)})$. □

Der Satz gibt also insbesondere an, unter welchen Bedingungen wir jeden Gegenstand eines gegebenen Kontextes durch endlich viele Merkmale beschreiben können. Daraus kann allerdings noch nicht gefolgert werden, daß jeder Begriff des Booleschen Begriffsverbandes definierbar ist: In $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{N}, \mathbb{N}, =)$ sind alle Gegenstandsbegriffe definierbar, aber es kann nur abzählbar viele definierbare Begriffe geben (da $\mathrm{FB}(M)$ abzählbar ist), während der Boolesche Begriffsverband überabzählbar ist.

1.4 Implikationen zwischen Merkmalen mit Booleschen Abhängigkeiten

Die Struktur eines Begriffsverbandes ist bereits bekannt, wenn das Hüllensystem der Begriffsinhalte gegeben ist. Dieses kann durch eine Menge von *Implikationen* zwischen den Merkmalen beschrieben werden. B. Ganter hat in [Ga] einen Algorithmus angegeben, mit dem eine minimale Menge von Implikationen berechnet werden kann.

Der Algorithmus erlaubt eine Modifikation. Damit können die Implikationen auch dann bestimmt werden, wenn der Kontext nicht explizit gegeben ist. Der Benutzer wird jeweils gefragt, ob eine vorgeschlagene Implikation gültig ist oder nicht. Verneint der Benutzer dies, so muß er ein Gegenbeispiel eingeben, d. h. einen Gegenstand, der dieser Implikation widerspricht. Der Algorithmus berechnet eine Basis von Implikationen, also eine minimale Menge von Implikationen, aus denen sich alle anderen Implikationen herleiten lassen.

Das hier vorgestellte Verfahren der *Merkmalexploration mit vorgegebenen Abhängigkeiten* ist eine Erweiterung des Verfahrens von B. Ganter. Zu Beginn des Verfahrens können Abhängigkeiten, die zwischen den Merkmalen bestehen, als Boolesche Gleichungen eingegeben werden. Der Algorithmus bestimmt dann eine Menge von Implikationen, die, zusammen mit den vorgegebenen Gleichungen, das System der Begriffsinhalte des Kontextes beschreibt. Werden keine Gleichungen vorgegeben, so entspricht dieses Verfahren dem von B. Ganter.

Zuerst betrachten wir den Fall, in dem der Kontext $\mathbb{K} := (G, M, I)$ vollständig vorliegt. Im folgenden gehen wir stets davon aus, daß M endlich ist.

Definition: Eine Implikation zwischen Merkmalen (in M) ist ein Paar (A, B) von Teilmengen von M. Wir bezeichnen es mit $A \to B$ und lesen es *A impliziert B*. Eine

Teilmenge $T \subseteq M$ respektiert eine Implikation, wenn $A \not\subseteq T$ oder $B \subseteq T$ ist. T respektiert eine Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen, wenn T jede einzelne Implikation in $\mathcal{L}$ respektiert. $A \to B$ gilt in einem Kontext $\mathbb{K}$, wenn sie im System der Zeileninhalte gilt. Wir sagen dann auch, $A \to B$ sei eine Implikation des Kontextes $\mathbb{K}$.

Lemma 1.4.1 *Eine Implikation $A \to B$ gilt in $\mathbb{K}$ genau dann, wenn $B \subseteq A''$ ist. Sie gilt dann auch für das System aller Begriffsinhalte.*

Definition: Eine Implikation $A \to B$ folgt (semantisch) aus einer Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen zwischen Merkmalen, falls jede Teilmenge von N, die $\mathcal{L}$ respektiert, auch $A \to B$ respektiert.

Definition: Eine Gleichung $s{=}t \in \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\perp,\top}(M) \times \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\perp,\top}(M)$ gilt in $\mathbb{K}$, wenn $\{s\}^{I^b} = \{t\}^{I^b}$ in $\mathbb{K}^b$ gilt.

Angenommen, wir hätten bereits eine Menge $\Sigma \subseteq \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\perp,\top}(M) \times \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\perp,\top}(M)$ von Gleichungen gegeben, die in $\mathbb{K}$ gelten. Gesucht ist nun eine möglichst kleine Menge von Implikationen, aus der sich, zusammen mit den Gleichungen in Σ, alle Implikationen zwischen den Merkmalen aus M herleiten lassen.

Definition: Mit $<\!\Sigma\!>$ bezeichnen wir die von Σ erzeugte Kongruenzrelation auf $\mathrm{FB}(M)$. Für $A \subseteq M$ sei $\overline{A} := \{m \in M | [m] \geq [\bigwedge A] \text{ in } \mathrm{FB}(M)_{/<\Sigma>}\}$ und wir setzen $\mathcal{L}_\Sigma := \{A \to \overline{A} | A \subseteq M\}$.

Es ist klar, daß die Implikationen aus $\mathcal{L}_\Sigma$ in $\mathbb{K}$ gelten. Die Abbildung $A \mapsto \overline{A}$ ist ein Hüllenoperator auf M.

Definition: Eine Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen von $\mathbb{K}$ heißt Σ-vollständig, wenn jede Implikation von $\mathbb{K}$ aus $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}_\Sigma$ folgt. Eine Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen von $\mathbb{K}$ heißt Σ-reduziert, wenn keine Implikation $A \to B \in \mathcal{L}$ aus $(\mathcal{L} \setminus \{A \to B\}) \cup \mathcal{L}_\Sigma$ folgt.

Um eine Σ-vollständige und Σ-reduzierte Menge von Implikationen angeben zu können, benötigen wir den Begriff des Σ-Pseudoinhalts:

Definition: Eine Teilmenge P von M heißt Σ-Pseudoinhalt von $\mathbb{K}$, wenn $P = \overline{P} \neq P''$ und wenn für jeden Σ-Pseudoinhalt $Q \subset P$ schon $Q'' \subseteq P$ gilt.

Satz 1.4.2 *Die Menge $\mathcal{L} := \{P \to P'' | P\ \Sigma\text{-Pseudoinhalt}\}$ ist eine Σ-vollständige und Σ-reduzierte Menge von Implikationen von $\mathbb{K}$.*

Beweis: Offenbar gelten die Implikationen von $\mathcal{L}$ in $\mathbb{K}$.

Um zu zeigen, daß $\mathcal{L}$ Σ-vollständig ist, zeigen wir, daß jede Teilmenge T von M, die $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}_\Sigma$ respektiert, ein Begriffsinhalt ist: Da $T \to \overline{T} \in \mathcal{L}_\Sigma$, gilt $T = \overline{T}$. Außerdem respektiert T insbesondere alle $Q \to Q''$ mit Q Σ-Pseudoinhalt und $Q \subseteq T$. Wäre nun $T \neq T''$, so wäre T nach Definition ein Σ-Pseudoinhalt und somit würde $T \to T'' \in \mathcal{L}$ gelten. Widerspruch, da T diese Implikation nicht respektiert.

Sei nun $P \to P'' \in \mathcal{L}$. Wir zeigen, daß $P \to P''$ sich nicht aus $\mathcal{L}' := (\mathcal{L} \setminus \{P \to P''\}) \cup \mathcal{L}_\Sigma$ herleiten läßt (und beweisen damit die Σ-Reduziertheit), da P alle Implikationen aus $\mathcal{L}'$ respektiert: Da $P = \overline{P}$ gilt, respektiert P alle Implikationen aus $\mathcal{L}_\Sigma$. Ist nun $Q \to Q'' \in \mathcal{L} \setminus \{P \to P''\}$ mit $Q \subseteq P$, so gilt auch $Q'' \subseteq P$, da P ein Σ-Pseudoinhalt ist. Also respektiert P auch $Q \to Q''$. □

Die Menge aller Begriffs- und Σ-Pseudoinhalte bildet ein Hüllensystem auf M. Dies ist eine Konsequenz aus dem nächsten Satz:

Satz 1.4.3 *Sind P und Q Begriffsinhalte oder Σ-Pseudoinhalte mit $P \not\subseteq Q$ und $Q \not\subseteq P$, so ist $P \cap Q$ ein Begriffsinhalt.*

Beweis: Sowohl P als auch Q, und damit auch $P \cap Q$ respektieren alle Implikationen in $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}_\Sigma$ mit Ausnahme von $P \to P''$ und $Q \to Q''$. Wegen $P \not\subseteq P \cap Q$ und $Q \not\subseteq P \cap Q$ respektiert $P \cap Q$ auch diese Implikationen, ist also ein Begriffsinhalt. □

Korollar 1.4.4 *Die Menge aller Begriffs- und Σ-Pseudoinhalte bildet ein Hüllensystem auf M.*

Zu diesem Hüllensystem erhalten wir den Hüllenoperator $\mathcal{H}_\Sigma$ durch:

$$\mathcal{H}_\Sigma(X) := X \cup X^\odot \cup X^{\odot\odot} \cup \ldots \text{ mit } X^\odot := \overline{X \cup \bigcup\{B | A \to B \in \mathcal{L}, A \subset X\}}$$

Im Folgenden nehmen wir der Einfachheit halber an, daß $M = \{1, \ldots n\}$ ist:

Definition: Durch $A < B :\Longleftrightarrow \exists i \in B \backslash A : A \cap \{1, 2, \ldots, i\perp 1\} = B \cap \{1, 2, \ldots, i\perp 1\}$ für $A, B \subseteq M$ wird die lektische Ordnung auf $\mathfrak{P}(M)$ definiert.

Für $A, B \subseteq M$, $i \in M$ sei

- $A <_i B :\Longleftrightarrow i \in B \setminus A$ und $A \cap \{1, 2, \ldots, i\perp 1\} = B \cap \{1, 2, \ldots, i\perp 1\}$
- $A \oplus i := \mathcal{H}_\Sigma((A \cap \{1, 2, \ldots, i\perp 1\}) \cup \{i\})$

Der folgende Algorithmus gibt alle Begriffs- und Σ-Pseudoinhalte in lektischer Ordnung aus:

Algorithmus: Der lektisch kleinste Begriffs- oder Σ-Pseudoinhalt ist $\overline{\emptyset}$. Für eine gegebene Teilmenge $B \subseteq M$ erhält man den lektisch nächsten Begriffs- oder Σ-Pseudoinhalt, indem man alle Elemente i von $M \backslash B$ prüft, beginnend mit dem größten und dann in absteigender Folge, bis erstmals $B <_i B \oplus i$ ist. $B \oplus i$ ist dann der lektisch nächste Begriffs- oder Σ-Pseudoinhalt. Der lektisch größte Begriffs- oder Σ-Pseudoinhalt ist M.

Jetzt können wir die *Merkmalexploration mit vorgegebenen Abhängigkeiten* beschreiben: Angenommen, wir hätten bereits eine Menge Σ von booleschen Gleichungen gegeben, die in einem Kontext $\mathbb{K}$ gelten. Nun soll eine Σ-vollständige und Σ-reduzierte Menge von Implikationen von $\mathbb{K}$ mit Hilfe eines Computers bestimmt werden, ohne daß der gesamte Kontext eingegeben werden muß.

Genau wie beim Algorithmus von B. Ganter erlaubt der obige Algorithmus eine Modifikation: Während der Bestimmung der Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen können noch Gegenstände zum Kontext hinzugefügt werden. Gelten für sie alle Gleichungen aus Σ und respektieren ihre Zeileninhalte alle bereits bestimmten Implikationen, so kann das Verfahren mit den bis dahin berechneten Ergebnissen fortgeführt werden:

Lemma 1.4.5 *Sei $\mathbb{K}$ ein Kontext und $\Sigma \subseteq \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\perp,\top}(M) \times \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\perp,\top}(M)$ eine Menge von in $\mathbb{K}$ gültigen Gleichungen. Es seien $P_1, P_2, \ldots, P_n$ die ersten n Σ-Pseudoinhalte von $\mathbb{K}$ in lektischer Ordnung. Sei $\mathbb{K}_g = (G\dot{\cup}\{g\}, M, I_g)$ ein Kontext mit $I_g \cap G \times M = I$, in dem die Gleichungen aus Σ sowie die Implikationen $P_i \to P_i'', i = 1, \ldots n$ gelten. Dann sind $P_1, P_2, \ldots, P_n$ auch die ersten n Σ-Pseudoinhalte in lektischer Ordnung.*

Beweis: Es gilt $P_i^{II} = P_i^{I_g I_g}$ für $i = 1, \ldots n$, da die Menge $\{g\}^{I_g}$ die Implikationen $P_i \to P_i^{II}$ respektiert. Da jeder Σ-Pseudoinhalt $Q \subset P_j$ von $\mathbb{K}$ lektisch kleiner als P_j ist, ergibt sich das Lemma direkt aus der Definition des Σ-Pseudoinhaltes. $\Box$

Die Modifikation des Algorithmus funktioniert also folgendermaßen: Sie beginnt mit einem Teilkontext $(H, M, I \cap H \times M)$ des Kontextes (G, M, I). Dabei kann die Gegenstandsmenge H auch leer sein. Dann wird der lektisch erste Σ-Pseudoinhalt P_1 bestimmt. Der Benutzer wird gefragt, ob die Implikation $P_1 \to P_1''$ gilt. Entweder bejaht er dies oder er erweitert den Kontext $(H, M, I \cap H \times M)$ um ein Gegenbeispiel. Das Verfahren wird dann fortgesetzt, bis alle Σ-Pseudoinhalte bestimmt sind.

Beispiel: Wir betrachten die folgenden Eigenschaften von Dreiecken in der Euklidischen Ebene: *rechtwinklig(rw), schiefwinklig(schw), stumpfwinklig(stw), spitzwinklig(spw), gleichseitig(gs), ungleichseitig(ugs)* und *gleichschenklig(gsch)*. Offensichtlich gelten die Gleichungen in $\Sigma = \{schw = \neg rw, schw = stw \vee spw, ugs = \neg gs\}$.

Der Dialog mit dem Computer wird dann wie folgt aussehen:
Computer: "Gilt die Implikation $\emptyset \to \{rw,\ schw,\ stw,\ spw,\ gs,\ ugs,\ gsch\}$?"
(Der erste Σ-Pseudoinhalt ist die leere Menge)
Experte: "Nein! Gegenbeispiel: Dreieck D_1 hat die Merkmale *rw* und *ugs*."
C: "Gilt $\emptyset \to \{rw,\ ugs\}$?"
(Der erste Σ-Pseudoinhalt ist immer noch die leere Menge, aber jetzt gilt $\emptyset'' = \{rw,\ ugs\}$)

	rw	*schw*	*stw*	*spw*	*gs*	*ugs*	*gsch*
D_1	×					×	
D_2		×		×	×		×
D_3	×					×	×
D_4		×		×		×	
D_5		×	×			×	×
D_6		×		×		×	×
D_7		×		×		×	×

D_1	$(\perp 1,0),(1,0),(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$
D_2	$(\perp 1,0),(1,0),(0,\sqrt{3})$
D_3	$(\perp 1,0),(1,0),(0,1)$
D_4	$(\perp 1,0),(1,0),(\frac{1}{2},1)$
D_5	$(\perp 1,0),(1,0),(0,\frac{1}{2})$
D_6	$(\perp 1,0),(1,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
D_7	$(\perp 1,0),(1,0),(0,\frac{3}{2})$

$\{gs\} \to \{schw,\ spw,\ gsch\}$
$\{schw,\ stw\} \to \{ugs\}$
$\{schw,\ stw,\ spw,\ ugs\} \to \{rw,\ gs,\ gsch\}$
$\{rw\} \to \{ugs\}$

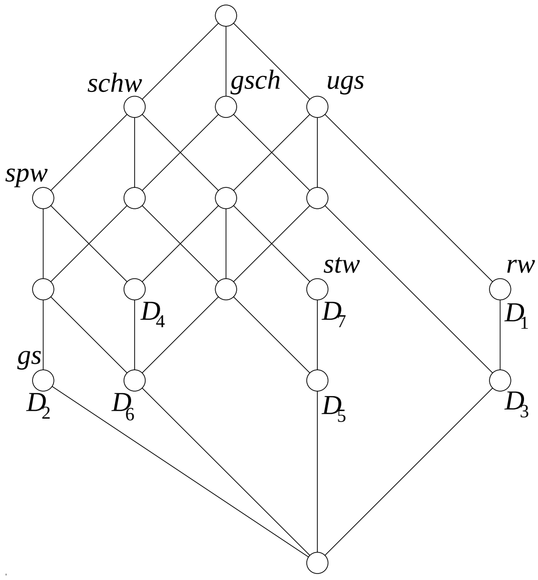


Abbildung 1.3: Gegenbeispiele und Implikationen der Merkmalexploration

E: "Nein! Gegenbeispiel: Dreieck D_2 hat die Merkmale *schw, spw, gs* und *gsch*."
C: " Gilt $\{gsch\} \to \{schw,\ stw,\ gs\}$?"
E: "Nein! Gegenbeispiel: Dreieck D_3 hat die Merkmale *rw, ugs* und *gsch*."
C: " Gilt $\{gsch\} \to \{schw,\ stw,\ gs\}$?"
E: "Nein! Gegenbeispiel: Dreieck D_3 hat die Merkmale *rw, ugs* und *gsch*."

Im weiteren Verlauf bestätigt der Experte die Implikationen $\{gs\} \to \{schw,\ spw,\ gsch\}$, $\{schw,\ stw\} \to \{ugs\}$, $\{schw,\ stw,\ spw,\ ugs\} \to \{rw,\ gs,\ gsch\}$ und $\{rw\} \to \{ugs\}$, und gibt zu den anderen vorgeschlagenen Implikationen die Gegenbeispiele D_4 bis D_7 an.

Als Ergebnis der Merkamlexploration erhalten wir also die Liste der Implikationen und den Begriffsverband in Abbildung 1.4. Hätten wir das Verfahren begonnen, ohne vorher Gleichungen anzugeben (d. h. mit $\Sigma = \emptyset$), so hätten wir denselben Begriffsverband erhalten, die Liste der Implikationen hätte jedoch wie folgt ausgesehen:

$$\{gs\} \to \{schw,\ spw,\ gsch\}$$

$$\{spw\} \to \{schw\}$$

$$\{stw\} \to \{schw,\ ugs\}$$

$$\{schw,\ spw,\ gs,\ ugs, gsch\} \to \{rw,\ stw\}$$

$$\{schw,\ stw,\ spw,\ ugs\} \to \{rw,\ gs,\ gsch\}$$

$$\{rw\} \to \{ugs\}$$

$$\{rw,\ schw,\ ugs\} \to \{stw,\ spw,\ gs,\ gsch\}$$

Allgemein kann man das Verfahren von B. Ganter (und die oben beschriebene Erweiterung) verstehen als ein interaktives Vefahren, welches den von einer gegebenen Menge von (Merkmals-)Begriffen erzeugten vollständigen $\bigwedge$-Unterhalbverband eines Booleschen Begriffsverbandes bestimmt. In Kapitel 2 wird das Verfahren der *Distributiven Begriffexploration* vorgestellt, mit dem der vollständige Unterverband bestimmt werden kann, der von gegebenen Begriffen erzeugt wird. Ein Verfahren zur Bestimmung der von gegebenen Begriffen erzeugten vollständigen Booleschen Unteralgebra steht bisher noch aus.

1.5 Modell eines begrifflichen Wissenssystems

Unter einem begrifflichen Wissenssystem verstehen wir eine Struktur, die die Möglichkeit bietet, einen Teil des begrifflichen Wissens, der in einem klar abgegrenzten Wissensgebiet vorhanden ist, zu speichern und zugänglich zu machen. Um diesen Ansatz den Methoden der formalen Begriffsanalyse zugänglich zu machen, gehen wir von der grundlegenden Annahme aus, daß das Wissensgebiet durch einen formalen Kontext $\mathbb{U} = (G_{\mathbb{U}}, M_{\mathbb{U}}, I_{\mathbb{U}})$, den wir *begriffliches Universum* nennen, beschrieben wird.

Es hat sich als nötig erwiesen, die Sprache der Begriffsanalyse — also die der vollständigen Verbände — zu erweitern, um Aussagen, die die Negation und die Disjunktion mit einbeziehen, mit in das System aufnehmen zu können. P. Luksch und R. Wille haben hierfür in [LuWi] die Erweiterung des Begriffsverbandes zur *Algebra der Halbbegriffe* vorgeschlagen. Das hier vorgestellte alternative Modell basiert dagegen auf der Erweiterung des Begriffsverbandes zum Booleschen Begriffsverband.

Definition: Ein (einwertiges) begriffliches Wissenssystem nennen wir ein Tupel $\mathbb{W} := (G, M, B, I, \Sigma)$, wobei G, M und B endliche disjunkte Mengen sind, Σ eine Menge von Booleschen Gleichungen über $M \cup B$ und I eine binäre Relation zwischen G und $\mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\perp,\top}(M \cup B)$. Die in I enthaltenen Paare nennen wir Zugehörigkeiten. Anstelle von $(g, t) \in I$ schreiben wir auch $g \rightharpoondown t$.

Wir beschränken uns bei dem Modell auf endliche Mengen, um einer möglichen Implementierung auf dem Computer gerecht zu werden. Dies hat auch den Vorteil, daß wir nicht mit den verallgemeinerten Termen aus $\mathrm{Tm}_{\prod,\coprod,\neg,\bot,\top}(M\cup B)$ operieren müssen. Die nächste Definition gibt an, wann (und wie) ein begriffliches Wissenssystem ein Universum beschreibt:

Definition: Ist $\mathbb{U} := (G_{\mathbb{U}}, M_{\mathbb{U}}, I_{\mathbb{U}})$ ein begriffliches Universum, $\mathbb{W} := (G, M, B, I, \Sigma)$ ein begriffliches Wissenssystem mit $G \subseteq G_{\mathbb{U}}$ und $M \subseteq M_{\mathbb{U}}$, und ist $\beta\colon B \to \underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{U})$ eine Abbildung, so definieren wir die Abbildung $[\![\cdot]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}}\colon \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M\cup B) \to \underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{U})$ durch:

$$[\![t]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}} := \begin{cases} \mu(t) & \text{für } t \in M \\ \beta(t) & \text{für } t \in B \\ \mathbf{0}^b_{\underline{\mathfrak{B}}}(\mathbb{U}) & \text{für } t \equiv \bot \\ \mathbf{1}^b_{\underline{\mathfrak{B}}}(\mathbb{U}) & \text{für } t \equiv \top \\ [\![u]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}} \wedge [\![v]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}} & \text{für } t \equiv u \sqcap v \\ [\![u]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}} \vee [\![v]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}} & \text{für } t \equiv u \sqcup v \\ \neg[\![u]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}} & \text{für } t \equiv \neg u \end{cases}$$

Ist der Bezug auf $\mathbb{U}$ und β eindeutig, so schreiben wir auch kürzer $[\![t]\!]$ für $[\![t]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}}$.

Wir sagen, daß das begriffliche Wissenssystem $\mathbb{W}$ in einem Universum $\mathbb{U} := (G_{\mathbb{U}}, M_{\mathbb{U}}, I_{\mathbb{U}})$ gilt, wenn G eine Teilmenge von $G_{\mathbb{U}}$ ist, M eine Teilmenge von $M_{\mathbb{U}}$, und wenn es eine Abbildung $\beta\colon B \to \mathfrak{B}^b(\mathbb{U})$ gibt, so daß gilt:

$$(g,t) \in I \Rightarrow g \lrcorner [\![t]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}}, \qquad (s,t) \in \Sigma \Rightarrow [\![s]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}} = [\![t]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}}$$

Das Paar $(\mathbb{U}, \beta)$ heißt dann auch Modell von $\mathbb{W}$. Ein begriffliches Wissenssystem heißt konsistent, wenn es ein Modell besitzt.

In einem begrifflichen Wissenssystem können wir insbesondere auch Definitionen abspeichern: Ist $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}^b(\mathbb{U})$ ein definierbarer Begriff, den wir mit $b \in B$ benennen wollen, und ist $t \in \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M)$ ein Definitionsterm für $\mathfrak{b}$, dann können wir die Definition $b \mapsto t$ als Gleichung $b{=}t$ in die Relation Σ aufnehmen.

Ist in einem begrifflichen Wissenssystem bereits Wissen über ein begriffliches Universum erfaßt, so stellt sich die Frage, inwieweit hieraus weiteres Wissen über das zu untersuchende Universum gefolgert werden kann. Wir geben einen semantischen Folgerungsbegriff an:

Definition: Eine Gleichung $(s,t) \in \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M\cup B) \times \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M\cup B)$ folgt aus einem Wissenssystem $\mathbb{W}$ (in Zeichen: $\mathbb{W} \models s{=}t$), wenn $[\![s]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}} = [\![t]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}}$ in jedem Modell $(\mathbb{U}, \beta)$ von $\mathbb{W}$ gilt. Eine Zugehörigkeit $(g,t) \in G \times \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M\cup B)$ folgt aus $\mathbb{W}$ (in Zeichen: $\mathbb{W} \models g \lrcorner t$), wenn $g \lrcorner [\![t]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}}$ in jedem Modell $(\mathbb{U}, \beta)$ von $\mathbb{W}$ gilt. Das begriffliche Wissenssystem $\mathbb{W}^{\models} := (G, M, I^{\models}, B, \Sigma^{\models})$ mit

$I^{\models} := \{(g,t) \in G \times \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M\cup B) \mid \mathbb{W} \models g \lrcorner t\}$ und
$\Sigma^{\models} := \{(s,t) \in \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M\cup B) \times \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M\cup B) \mid \mathbb{W} \models s{=}t\}$

heißt der logische Abschluß von $\mathbb{W}$.

Lokale Vollständigkeit

Ein begriffliches Wissenssystem wird im allgemeinen nicht das gesamte vorgegebene begriffliche Universum erfassen, es wird also nicht vollständig sein. Die Grenze dessen, was das Wissenssystem maximal an Wissen speichern kann, wird durch die Festlegung der Mengen G, M und B gezogen. Erreicht das System diese Grenze, so nennen wir es lokal vollständig:

Definition: Ein begriffliches Wissenssystem $\mathbb{W}$ heißt Σ-vollständig auf einer Teilmenge N von $\mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M\cup B)$, wenn für alle $s,t \in \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M\cup B)$ entweder $[\![s]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}} = [\![t]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}}$ in jedem Modell $(\mathbb{U},\beta)$ von $\mathbb{W}$ gilt oder wenn $[\![s]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}} \neq [\![t]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}}$ in jedem Modell gilt. $\mathbb{W}$ heißt Σ-vollständig, wenn es Σ-vollständig auf $\mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M\cup B)$ ist.

Ein begriffliches Wissenssystem $\mathbb{W}$ heißt I-vollständig auf $H \times N$ für $H \subseteq G$ und $N \subseteq \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M\cup B)$, wenn für alle $g \in G$ und $t \in N$ entweder in jedem Modell $g \llcorner [\![t]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}}$ oder in jedem Modell $g \not\llcorner [\![t]\!]^{\beta}_{\mathbb{U}}$ gilt. $\mathbb{W}$ heißt I-vollständig auf $N \subseteq \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M\cup B)$, wenn es I-vollständig auf $G \times N$ ist. $\mathbb{W}$ heißt lokal vollständig, wenn es sowohl I-vollständig als auch Σ-vollständig ist.

Die Σ-Vollständigkeit kann mit dem in $\mathbb{W}$ enthaltenen Wissen festgestellt werden, wenn eine hinreichende Anzahl von Gegenständen vorhanden ist:

Ein begriffliches Wissenssystem $\mathbb{W}$ ist Σ-vollständig auf $N \subseteq \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M\cup B)$, wenn für alle $s,t \in N$ entweder $\mathbb{W} \models s{=}t$ gilt oder wenn es einen Gegenstand $g{\in}G$ mit $\mathbb{W} \models g \llcorner (s \sqcap \neg t)$ oder mit $\mathbb{W} \models g \llcorner (\neg s \sqcap t)$ gibt. Die Relation $\models$ entspricht der semantischen Folgerung der Aussagenlogik, für die es einen korrekten und vollständigen Kalkül gibt. Die Bedingung kann also algorithmisch getestet werden.

Die I-Vollständigkeit kann ebenfalls algorithmisch getestet werden. Ein Wissenssystem ist insbesondere dann I-vollständig, wenn für alle $g \in G$ und alle $x \in M\cup B$ entweder $g \llcorner x \in I$ oder $g \llcorner \neg x \in I$ gilt.

Prinzipiell unmöglich ist es dagegen, nur aufgrund der Kenntnis des in einem Wissenssystem gespeicherten Wissens festzustellen, zu welchem Anteil das System das durch das gesamte begriffliche Universum gegebene Wissen abdeckt. Hierzu ist die Kenntnis des ganzen begrifflichen Universums notwendig.

Erweiterungen des Modells

In dem oben vorgestellten Modell eines begrifflichen Wissenssystems kann die Verschiedenheit von zwei Begriffen nur dadurch beschrieben werden, daß man einen Gegenstand angibt, der unter den einen der beiden Begriffe fällt, aber nicht unter den anderen. Ist man daran interessiert, die Verschiedenheit von zwei Begriffen auch ohne die explizite Angabe eines solchen Gegenstandes ausdrücken zu können, so kann man das Modell des begrifflichen Wissenssystems durch eine weitere Relation $\overline{\Sigma} \subseteq \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M\cup B) \times \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(M\cup B)$ erweitern. Ein Paar $(\mathbb{U},\beta)$ ist dann ein Modell von $(G,M,I,B,\Sigma,\overline{\Sigma})$, wenn es ein Modell von (G,M,I,B,Σ) ist und wenn zusätzlich für $(s,t) \in \overline{\Sigma}$ in jedem Modell $[\![s]\!]_{\mathbb{U}}^{\beta} \neq [\![t]\!]_{\mathbb{U}}^{\beta}$ gilt.

In vielen Anwendungen erlauben Merkmale verschiedene Ausprägungen, so daß das zu untersuchende Wissensgebiet nicht als einwertiges begriffliches Universum aufgefaßt werden kann. Es bietet sich an, das Wissensgebiet dann als mehrwertiges begrifflichen Universum gegeben zu denken, worunter wir einen mehrwertigen Kontext $\mathbb{U} = (G_{\mathbb{U}}, M_{\mathbb{U}}, W_{\mathbb{U}}, I_{\mathbb{U}})$ verstehen. [2]

Ein mehrwertiges Universum könnte dann einen dreistufigen Aufbau besitzen: In der untersten Stufe befindet sich ein mehrwertiger Kontext $\mathbb{K} := (G, M, W, I)$, der das durch die Relation $I_{\mathbb{U}}$ beschriebene Wissen erfassen kann, d. h. für den $G \subseteq G_{\mathbb{U}}$, $M \subseteq M_{\mathbb{U}}$, $W \subseteq W_{\mathbb{U}}$ und $I \subseteq I_{\mathbb{U}} \cap (G \times M \times W)$ gilt.

Die zweite Stufe besteht aus einer Familie $\mathbb{S}{:=}(\mathbb{S}_s)_{s\in S}$ von Skalen $\mathbb{S}_s{:=}(G_s, M_s, I_s)$ mit $G_s \subseteq W^N$ für eine Teilmenge N von M,[3] die für die für den Benutzer des Systems interessanten Fragestellungen relevant sind.

Auf diesen Skalen basiert die dritte Stufe: Eine Menge Σ von Booleschen Gleichungen über der Vereinigung $\dot{\bigcup}_{s\in S} M_s$ der Merkmalsmengen der Skalen (sowie eventuell über einer Menge B von Begriffsnamen wie im einwertigen Fall) beschreibt bekannte Beziehungen zwischen diesen Merkmalen. Außerdem gibt es die Möglichkeit, in einer Relation $\hat{I} \subseteq G \times \mathrm{Tm}_{\sqcap,\sqcup,\neg,\bot,\top}(\dot{\bigcup}_{s\in S} M_s)$ für Gegenstände ihr Verhalten bezüglich der Skalen festzuhalten, selbst wenn die zugrundeliegenden Merkmalsausprägungen nicht genau bekannt sind.

Beispiel: Wir betrachten erneut das Beispiel der Trekking-Zelte auf Seite 15. Als begriffliches Universum nehmen wir den mehrwertigen Kontext $\mathbb{U} = (G_{\mathbb{U}}, M_{\mathbb{U}}, W_{\mathbb{U}}, I_{\mathbb{U}})$ an, wobei $G_{\mathbb{U}}$ die Menge all der Zeltmodelle sei, die das Bergsportgeschäft 1993 angeboten hat, und $M_{\mathbb{U}}$ die Menge all der Merkmale, die in Bezug auf Trekking-Zelte relevant sind.

Den in Abbildung 1.1 dargestellten mehrwertigen Kontext können wir nun als den mehrwertigen Kontext $\mathbb{K}$ des Wissenssystems $\mathbb{W}$ auffassen. Die Menge $\mathbb{S}$ enthalte die Skalen, nach denen wir den einwertigen Kontext in Abbildung 1.1 gewonnen haben.

Die auf Seite 16 angegebenen Gleichungen sind in unserem Universum natürlich nicht mehr allgemein gültig. Angenommen, wir wüßten aber, daß auch bei allen anderen angebotenen Zelten, die für drei Personen oder mehr gedacht sind, die Innenzeltfläche mehr als 3,0 m^2 beträgt. Dann können wir die Gleichung $(\geq 3 \text{ Personen}) \sqcup \neg(\geq 3{,}0\ \mathrm{m}^2) = \top$ in die Gleichungsmenge Σ aufnehmen. Die Relation $\hat{I}$ benötigen wir in diesem Fall nicht, da der mehrwertige Kontext $\mathbb{K}$ vollständig ist, also in jedem Feld einen Eintrag hat. Wenn wir aber z. B. über die Innenzeltfläche des Zeltes Dragon nur wüßten, daß sie zwischen 3 und 3,5 m^2 liegt, so könnten wir dieses Wissen durch $(\text{Dragon}, (\geq 3\mathrm{m}^2) \sqcap \neg(\geq 3{,}5\mathrm{m}^2)) \in \hat{I}$ festhalten.

[2] Der mit mehrwertigen Kontexten nicht vertraute Leser sei auf [GaWi93] verwiesen.

[3] Diese Konstruktion erlaubt die Skalierung über mehrere Merkmale gleichzeitig (vgl. [VoWaWi])

Kapitel 2

Positiv-Boolesche Begriffsverbände

In vielen Anwendungen der formalen Begriffsanalyse sind nur die Merkmale von Bedeutung, die nicht durch Negierung entstehen. Ihre Teilmenge in der freien vollständig distributiven vollständigen Booleschen Algebra $\mathrm{FCB}(M)$ bildet genau den freien vollständig distributiven vollständigen Verband $\mathrm{FCD}(M)$ über M. Wir erhalten die *positiv-Booleschen Begriffe* als $\mathrm{FCD}(M)$-Unterhalbverband des Booleschen Begriffsverbandes.

2.1 Positiv-Boolesche Kontexte und positiv-Boolesche Begriffsverbände

Definition: Sei $\mathbb{K} := (G, M, I)$ ein Kontext und sei $M^p := \mathrm{FCD}(M) \subseteq \mathrm{FCB}(M)$. Der M^p-Teilkontext von $\mathbb{K}^b$ heißt der positiv-Boolesche Kontext zu $\mathbb{K}$. Wir bezeichnen ihn mit $\mathbb{K}^p = (G, M^p, I^p)$. Die Begriffe von $\underline{\mathfrak{B}}^p(\mathbb{K}) := \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}^p)$ heißen positiv-Boolesche Begriffe.

Das Bild von $\underline{\mathfrak{B}}^p(\mathbb{K})$ unter ε_{M^p} bildet einen vollständigen Unterverband des Booleschen Begriffsverbandes, da $\bigwedge_{i\in I}\mu(t_i) = \mu(\bigsqcap_{i\in I} t_i)$ und $\bigvee_{i\in I}\mu(t_i) = \mu(\bigsqcup_{i\in I} t_i)$ für $t_i \in \mathrm{FCD}(M), i \in I$ in $\underline{\mathfrak{B}}^b(\mathbb{K})$ gilt. Für die positiv-Booleschen Begriffe ist das lokale Supremum also gleich dem globalen, d. h. $\bigvee^{M^p} = \bigvee_{|\varepsilon_{M^p}(\underline{\mathfrak{B}}^p(\mathbb{K}))}$.

Den Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ finden wir nach Lemma 1.2.1 auch in $\underline{\mathfrak{B}}^p(\mathbb{K})$ als $\bigwedge$-Unterhalbverband wieder.

Im Liniendiagramm eines positiv-Booleschen Begriffsverbandes $\underline{\mathfrak{B}}^p(\mathbb{K})$ ist es — wie bereits bei den Booleschen Begriffsverbänden — nicht nötig, alle Merkmalsbegriffe mit den entsprechenden Merkmalen aus $\mathrm{FCD}(M)$ zu beschriften. Es genügt, die Merkmalsbegriffe der Merkmale aus M zu beschriften. Dies ergibt sich aus dem folgenden Satz, den wir analog zum Hauptsatz über Boolesche Begriffsverbände formulieren:

Satz 2.1.1 *Ein vollständig distributiver vollständiger Verband V ist genau dann isomorph zu dem positiv-Booleschen Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}^p(\mathbb{K})$ eines Kontextes $\mathbb{K} :=$*

Forum Romanum	Baedecker	Les Guides Bleues		Michelin			Polyglott
	≥ 1	≥ 1	≥ 2	≥ 1	≥ 2	≥ 3	≥ 1
Triumphbogen des Septimus Severus	×	×		×	×		×
Titusbogen	×	×	×	×	×		
Basilica Julia				×			
Maxentius-Basilica	×						
Phocassäule		×		×	×		
Curia							×
Haus der Vestalinnen				×			
Portikus der zwölf Götter		×		×			×
Tempel des Antonius und der Fausta	×	×		×	×	×	×
Tempel des Castor und Pollux	×	×	×	×	×	×	×
Tempel des Romulus	×						
Tempel des Saturn				×	×		×
Tempel des Vespasian				×	×		
Tempel der Vesta		×	×	×	×		×

Abbildung 2.1: Kontext zu Sehenswürdigkeiten im Forum Romanum

(G, M, I), wenn Abbildungen $\gamma: G \to V$ und $\mu: M \to V$ existieren, so daß $\gamma(G)$ supremum-dicht in V ist, $\mu(M)$ den Verband V vollständig erzeugt, und wenn für alle $g \in G$, $m \in M$ gilt: $(g, m) \in I \iff \gamma g \leq \mu m$.
Insbesondere ist V isomorph zum positiv-Booleschen Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}^p(V, V, \leq)$.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz 1.1.1 $\square$

Da distributive Verbände sich als Unterverbände von Produkten von Ketten darstellen lassen, ergeben sich oft sehr übersichtliche Liniendiagramme, die z. B. als additive Liniendiagramme gezeichnet werden können. Allerdings gibt es bis jetzt auch für distributive Begriffsverbände noch keinen Algorithmus, der automatisch "schöne" Diagramme zeichnet.

Beispiel: Der Kontext in Abbildung 2.1 gibt an, mit wievielen Sternen einige Sehenswürdigkeiten im Forum Romanum durch die Reiseführer Baedecker, Les Guides Bleues, Michelin und Polyglott bewertet werden.

In Abbildung 2.2 ist der zugehörige Begriffsverband abgebildet, in Abbildung 2.3

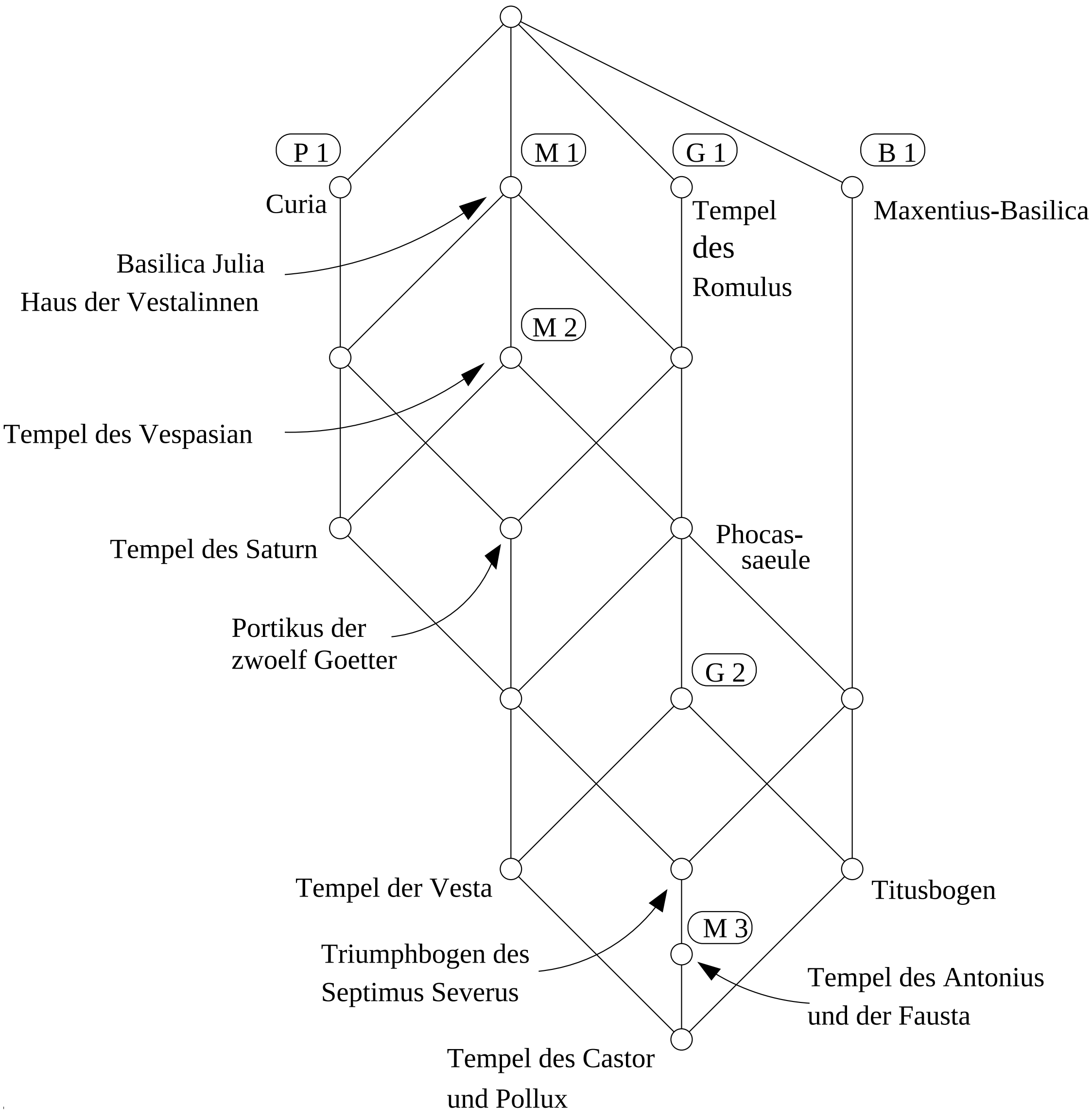


Abbildung 2.2: Begriffsverband zum Kontext in Abb. 2.1

der positiv-Boolesche Begriffsverband. Der Boolesche Begriffsverband läßt sich nicht mehr als Ganzes abbilden, da er 2^{13} Elemente enthält! Die $\bigwedge$-Halbverbandseinbettung von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ in den positiv-Booleschen Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}^p(\mathbb{K})$ ist durch die ausgefüllten Kreise im Liniendiagramm in Abbildung 2.3 angedeutet.

Möchte man z. B. die Sehenswürdigkeiten des Forum Romanums feststellen, die mit mindestens einen Stern im Polyglott oder Baedecker sowie mindestens einem Stern im Michelin ausgezeichnet wurden, so erhält man diese als Begriffsumfang des Begriffes $\mu(((\text{Polyglott } \geq 1) \vee (\text{Baedecker } \geq 1)) \wedge (\text{Michelin } \geq 1))$: Es sind die Sehenswürdigkeiten Phocassäule, Tempel des Saturn, Portikus der zwölf Götter, Triumphbogen des Septimus Severus, Tempel der Vesta, Titusbogen, Tempel des Antonius und der Fausta sowie der Tempel des Castor und Pollux.

An dem positiv-Booleschen Begriffsverband erkennt man sehr gut, daß die Bewertungen im Baedecker stark von den Bewertungen der anderen Reiseführer abweichen: Durch den Begriff $\mu(\text{Baedecker} \geq 1)$ wird fast die Hälfte des Verbandes erzeugt.

2.2 Begriffexploration

Gehen wir von einer (endlichen) Menge $\mathcal{B}$ von Begriffen eines Kontextes $\mathbb{K}$ aus, den sogenannten Grundbegriffen, so stellt sich die Frage, welche weiteren Begriffe wir aus diesen konstruieren können. Mit anderen Worten, wie sieht der von diesen Begriffen erzeugte vollständige Unterverband U von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ aus?

Vollständige Unterverbände können durch abgeschlossene Teilrelationen beschrieben werden:

Definition: Eine Teilrelation $J \subseteq I$ heißt abgeschlossene Teilrelation des Kontextes (G, M, I), wenn jeder Begriff des Kontextes (G, M, J) auch ein Begriff von (G, M, I) ist.

Satz 2.2.1 *Wenn J eine abgeschlossene Teilrelation des Kontextes (G, M, I) ist, dann ist $\mathfrak{B}(G, M, J)$ ein vollständiger Unterverband von $\mathfrak{B}(G, M, I)$. Ist umgekehrt U ein vollständiger Unterverband von $\mathfrak{B}(G, M, I)$, so ist $J := \bigcup\{A \times B | (A, B) \in U\}$ eine abgeschlossene Teilrelation und es gilt $U = \mathfrak{B}(G, M, J)$.*

Beweis: Siehe [GaWi93]. □

Ist also der Kontext $\mathbb{K}$ vollständig gegeben, so läßt sich der von den Grundbegriffen erzeugte vollständige Unterverband leicht berechnen. Häufig wird jedoch der Kontext so groß sein, daß man ihn nicht vollständig angeben möchte. R. Wille hat daher in [Wi87] vorgeschlagen, ein Verfahren zu entwickeln, welches den Unterverband U aus möglichst wenigen vom Benutzer einzugebenden Informationen berechnet[1].

Es kann vorkommen, daß der erzeugte Unterverband (auch bei einer endlichen Menge von Grundbegriffen!) unendlich ist. Dies liegt daran, daß bereits der freie Verband über drei Elementen unendlich groß ist. In einem solchen Fall wird das Verfahren nicht terminieren.

Wissen wir jedoch, daß der Begriffsverband distributiv ist — etwa, weil es sich um einen positiv-Booleschen Begriffsverband handelt —, so können wir dies ausnutzen. Der Unterverband U ist dann homomorphes Bild des freien vollständig distributiven vollständigen Verbandes $\text{FCD}(\mathcal{B})$ (und somit endlich). Gesucht ist nun eine

[1] In [KlMa] haben U. Klotz und A. Mann dann ein erstes Verfahren angegeben

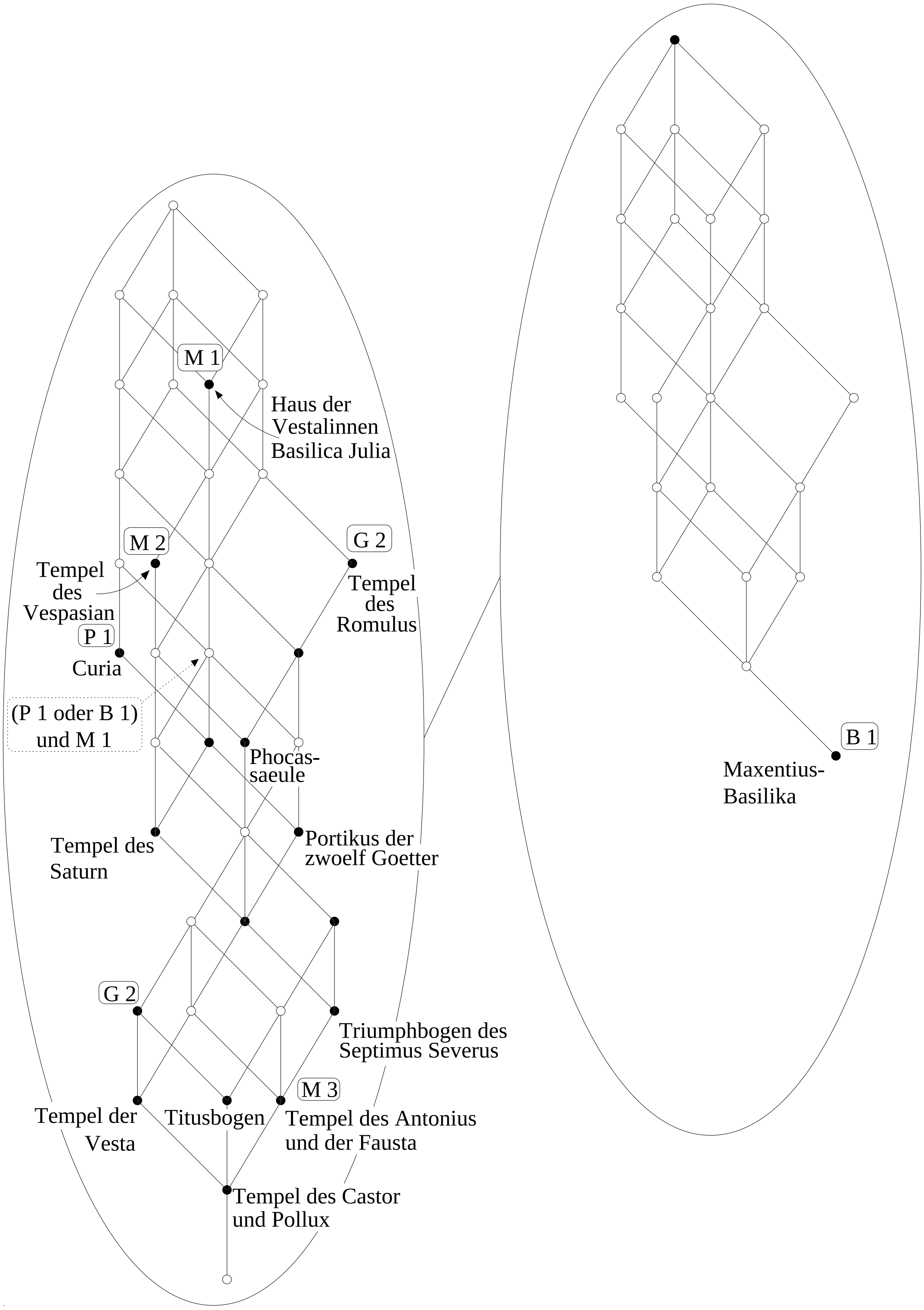


Abbildung 2.3: Positiv-Boolescher Begriffsverband zum Kontext in Abb. 2.1

(möglichst kleine) Menge von Ungleichungen zwischen Elementen von FCD($\mathcal{B}$), so daß die davon erzeugte Kongruenzrelation gerade der Kern dieser Abbildung ist. Aufgrund des Homomorphiesatzes 0.1.2 erhält man damit eine Darstellung von U.

Außerdem soll für alle Begriffe $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in U$ mit $\mathfrak{a} \not\leq \mathfrak{b}$ ein *trennendes Gegenstand-Merkmal-Paar* bestimmt werden:

Definition: Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Begriffe in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U})$ mit $\mathfrak{a} \not\leq \mathfrak{b}$. Ein trennendes Gegenstand-Merkmal-Paar für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist ein Paar $(g, m) \in G_{\mathbb{U}} \times M_{\mathbb{U}}$ mit $(g, m) \notin I$, $g \swarrow \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b} \nearrow m$.

Unser Verfahren zur Begriffexploration bearbeitet die gegebenen Grundbegriffe nacheinander: Ist der von den ersten i Grundbegriffen erzeugte vollständige Unterverband U_i bestimmt, so wird der nächste Grundbegriff $\mathfrak{b}_{i+1}$ hinzugefügt. Der Benutzer wird dann nach Unterbegriff-Oberbegriff-Beziehungen zwischen den neu hinzukommenden Begriffen gefragt. Dieser Vorgang kann als Bestimmung einer vollständigen Kongruenzrelation auf dem Tensorprodukt von U_i mit dem dreielementigen Verband $\mathbf{0} < \mathfrak{b}_i < \mathbf{1}$ beschrieben werden.

2.2.1 Tensorprodukte und vollständige Kongruenzrelationen

Wir geben hier kurz die für unser Verfahren benötigten Definitionen und Sätze an. Weiterführende Ergebnisse finden sich in [Wi85] bzw. [GaWi93].

Tensorprodukte

Definition: Für vollständige Verbände $\underline{V_1}$ und $\underline{V_2}$ nennen wir $\underline{V_1} \otimes \underline{V_2} := \underline{\mathfrak{B}}(V_1 \times V_2, V_1 \times V_2, \nabla)$ mit $(x_1, x_2) \nabla (y_1, y_2) :\Longleftrightarrow x_1 \leq y_1$ oder $x_2 \leq y_2$ das Tensorprodukt von $\underline{V_1}$ und $\underline{V_2}$.

In [Wi85] wird gezeigt, daß das Tensorprodukt das freie Produkt in der Kategorie der vollständig distributiven vollständigen Verbände mit vollständigen Homomorphismen ist. Damit ist das Tensorprodukt $\underline{V_1} \otimes \underline{V_2}$ von zwei vollständig distributiven vollständigen Verbänden $\underline{V_1}$ und $\underline{V_2}$ der "größte" vollständig distributive vollständige Verband, der von $\underline{V_1}$ und $\underline{V_2}$ erzeugt werden kann.

Wir erhalten natürliche vollständige Einbettungen von $\underline{V_1}$ und $\underline{V_2}$ in $\underline{V_1} \otimes \underline{V_2}$ durch
$\varepsilon_1 \colon V_1 \to V,\ x_1 \mapsto ([0, x_1] \times V_2 \cup V_1 \times \{0\}, [x_1, 1] \times V_2 \cup V_1 \times \{1\})$ und
$\varepsilon_2 \colon V_2 \to V,\ x_2 \mapsto (V_1 \times [0, x_2] \cup \{0\} \times V_2, V_1 \times [x_2, 1] \cup \{1\} \times V_2)$.

Es liegt nahe, das Tensorprodukt von Begriffsverbänden auf der Ebene der Kontexte zu beschreiben:

Definition: Das direkte Produkt der Kontexte $\mathbb{K}_1 := (G_1, M_1, I_1)$ und $\mathbb{K}_2 := (G_2, M_2, I_2)$ ist der Kontext $\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2 := (G_1 \times G_2, M_1 \times M_2, \nabla)$ mit

$$(g_1, g_2) \nabla (m_1, m_2) :\Longleftrightarrow (g_1, m_1) \in I_1 \text{ oder } (g_2, m_2) \in I_2.$$

Satz 2.2.2 $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1) \otimes \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2) \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2)$

Beweis: Siehe [Wi85]. $\square$

Dieser Satz zeigt die Unabhängigkeit des Tensorproduktes (bis auf Isomorphie) von den zugrundeliegenden Kontexten.

Satz 2.2.3 *Sind $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ reduzierte Kontexte, so ist auch $\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$ reduziert.*

Beweis: Siehe [Wi85]. $\square$

Vollständige Kongruenzrelationen

Vollständige Kongruenzrelationen eines Begriffsverbandes können durch sogenannte *verträgliche Teilkontexte* beschrieben werden. Die nachfolgenden Definitionen und Sätze sind aus [GaWi93] übernommen.
Definition: Sei $\mathbb{K} := (G, M, I)$ ein Kontext, $H \subseteq G$, $N \subseteq M$. Dann heißt $(H, N, I \cap H \times N)$ ein Teilkontext von $\mathbb{K}$. Ein Teilkontext heißt verträglich, wenn für jeden Begriff $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ das Paar $(A \cap H, B \cap N)$ ein Begriff des Teilkontextes ist.

Satz 2.2.4 *Sei $(H, N, I \cap H \times N)$ ein Teilkontext von (G, M, I). Dann sind äquivalent:*

- *$(H, N, I \cap H \times N)$ ist ein verträglicher Teilkontext von (G, M, I).*
- *Durch $(A, B) \mapsto (A \cap H, B \cap N)$ wird ein surjektiver Vollhomomorphismus $\Pi_{H,N}$ von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ auf $\underline{\mathfrak{B}}(H, N, I \cap H \times N)$ definiert.*

Definition: Ein Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ eines bereinigten Kontextes (G, M, I) heißt pfeilabgeschlossen, wenn gilt:

$$\begin{gathered} h \nearrow m, h \in H \Rightarrow m \in N \\ g \swarrow n, n \in N \Rightarrow g \in H \end{gathered}$$

Satz 2.2.5 *Jeder verträgliche Teilkontext eines bereinigten Kontextes ist pfeilabgeschlossen. Ist der Kontext doppelt fundiert, so ist auch jeder pfeilabgeschlossene Teilkontext verträglich.*

Satz 2.2.6 *Jeder verträgliche Teilkontext eines bereinigten (bzw. reduzierten bzw. doppelt fundierten) Kontextes ist bereinigt (bzw. reduziert bzw. doppelt fundiert). Die Pfeilrelationen vererben sich auf verträgliche Teilkontexte.*

Definition: Eine vollständige Kongruenzrelation Θ von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ heißt durch einen verträglichen Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ induziert, wenn $\Theta = \Theta_{H,N} := Ker\Pi_{H,N}$ gilt.

Satz 2.2.7 *Ist der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ doppelt fundiert, so ist jede vollständige Kongruenzrelation auf $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ durch einen Teilkontext von $\mathbb{K}$ induziert. Ist $\mathbb{K}$ reduziert, so ist der Teilkontext eindeutig bestimmt.*

Definition: Ein Kontext $\mathbb{K}$ heißt (vollständig) distributiv, wenn der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ (vollständig) distributiv ist.

Das unten vorgestellte Verfahren zur Begriffsexploration arbeitet mit reduzierten distributiven Kontexten. In diesen lassen sich die verträglichen Teilkontexte besonders leicht finden — sie entsprechen genau den Teilmengen von G. Dies ergibt der folgende Satz:

Satz 2.2.8 *Sei $V = \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ doppelt fundiert. Dann sind äquivalent:*

- *V ist distributiv*
- *V ist vollständig distributiv*
- $g \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m, g \nearrow n \Rightarrow \mu m = \mu n$
- $g \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m, h \searrow m \Rightarrow \gamma g = \gamma m$

Ist außerdem (G, M, I) reduziert, so ist dies äquivalent zu:

- $g \nearrow m \Rightarrow g \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m, \qquad g \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m, g \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow n \Rightarrow m = n,$
  $g \swarrow m \Rightarrow g \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m, \qquad g \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m, h \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m \Rightarrow g = h$

Korollar 2.2.9 *Sei (G, M, I) ein doppelt fundierter reduzierter distributiver Kontext. Dann sind die verträglichen Teilkontexte genau die Teilkontexte $(H, N, I \cap H \times N)$ mit $H \subseteq G$ und $N = \{m \in M | \exists h \in H : h \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m\}$.*

Der folgende Satz gibt Auskunft darüber, welche Kongruenzrelationen welchen Teilmengen von G entsprechen:

Satz 2.2.10 *Sei (G, M, I) ein endlicher reduzierter distributiver Kontext und seien $g \in G$, $m \in M$ mit $g \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m$. Dann ist $\Theta_{G\setminus\{g\}, M\setminus\{m\}}$ genau die vollständige Kongruenzrelation auf $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$, die von $(\gamma g, \gamma g \wedge \mu m)$ erzeugt wird.*

Beweis: Der Kontext $(G \setminus \{g\}, M \setminus \{m\}, I \cap (G \setminus \{g\}) \times (M \setminus \{m\}))$ ist pfeilabgeschlossen, also auch ein verträglicher Teilkontext. Die verträglichen Teilkontexte $(H, N, I \cap H \times N)$ mit $g \notin H$ und $m \notin N$ sind genau diejenigen, für die $(\gamma g, \gamma g \wedge \mu m) \in \Theta_{H,N}$ gilt, da $\mathfrak{U}(\Pi_{H,N}(\gamma g \wedge \mu m)) = \mathfrak{U}(\Pi_{H,N}((\gamma g)_*)) = g'' \cap H = \mathfrak{U}(\Pi_{H,N}(\gamma g))$ genau dann gilt, wenn $g \notin H$. Unter diesen Teilkontexten ist $(G \setminus \{g\}, M \setminus \{m\}, I \cap (G \setminus \{g\}) \times (M \setminus \{m\}))$ der größte und induziert daher die kleinste vollständige Kongruenzrelation, die $(\gamma g, \gamma g \wedge \mu m)$ enthält. $\square$

2.2.2 Distributive Begriffexploration

Es wird nun das Verfahren zur Begriffsexploration beschrieben. Die einzige Voraussetzung ist die, daß der zu dem Kontext gehörende Begriffsverband distributiv ist.[2] Sei also im folgenden $\mathbb{U} = (G_{\mathbb{U}}, M_{\mathbb{U}}, I_{\mathbb{U}})$ ein distributiver Kontext und sei $\mathcal{B} = \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n\} \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{U})$.

Definition: Ein Tupel $\underline{\mathbb{E}} := (\mathbb{E}, \mathbf{g}, \mathbf{m})$ nennen wir Explorationskontext i-ter Stufe, wenn

- $\mathbb{E} := (G_{\mathbb{E}}, M_{\mathbb{E}}, I_{\mathbb{E}})$ ein Kontext ist mit $G_{\mathbb{E}} \subseteq \mathop{\times}_{k=1}^{i}\{\mathfrak{b}_k, \mathbf{1}\}$, $M_{\mathbb{E}} \subseteq \mathop{\times}_{k=1}^{i}\{\mathbf{0}, \mathfrak{b}_k\}$
- und $\mathbf{g}\colon G_{\mathbb{E}} \to G_{\mathbb{U}}$ und $\mathbf{m}\colon M_{\mathbb{E}} \to M_{\mathbb{U}}$ partielle Abbildungen sind. [3]

Das Verfahren arbeitet "stufenweise": Auf der i-ten Stufe wird der von den ersten i Begriffen $\mathfrak{b}_1$ bis $\mathfrak{b}_i$ erzeugte vollständige Unterverband U_i bestimmt. Dabei werden jeweils zwei Explorationskontexte i-ter Stufe benötigt: $\underline{\mathbb{E}}_i$ und $\underline{\tilde{\mathbb{E}}}_i$.

Der Explorationskontext $\underline{\tilde{\mathbb{E}}}_i$ beschreibt U_i: Die Gegenstands- und Merkmalsmengen $\tilde{G}_i$ bzw. $\tilde{M}_i$ sind Mengen von i-Tupeln, um der Konstruktion des direkten Produktes von Kontexten zu entsprechen. Sie können aber als Verbandsterme gedeutet werden, und zwar $(x_1, \ldots, x_i) \in G_{\mathbb{E}}$ als "$x_1 \wedge \ldots \wedge x_i$" und $(y_1, \ldots, y_i) \in M_{\mathbb{E}}$ als "$y_1 \vee \ldots \vee y_i$". Die Tupel in $\tilde{G}_i$ beschreiben genau die supremum-irreduziblen Elemente von U_i, die Tupel in $\tilde{M}_i$ die infimum-irreduziblen Elemente und $(\vec{x}, \vec{y}) \in \tilde{I}_i$ ist äquivalent mit $\bigwedge \vec{x} \leq \bigvee \vec{y}$ in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U})$.

Die Abbildungen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{m}$ geben die trennenden Gegenstand-Merkmal-Paare an: Für $\vec{x} \swarrow\!\!\!\nearrow \vec{y}$ in $\underline{\tilde{\mathbb{E}}}_i$ ist $(\mathbf{g}(\vec{x}), \mathbf{m}(\vec{y}))$ ein trennendes Paar für die Begriffe $\bigwedge \vec{x}$ und $\bigvee \vec{y}$ von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U})$.

Der Explorationskontext $\underline{\mathbb{E}}_i$ wird als Zwischenschritt bei der Berechnung von $\underline{\tilde{\mathbb{E}}}_i$ benötigt: Der Kontext $\mathbb{E}_i$ ist das direkte Produkt von $\tilde{\mathbb{E}}_{i-1}$ mit dem Kontext $(\{\mathbf{1}, \mathfrak{b}_i\}, \{\mathfrak{b}_i, \mathbf{0}\}, \{(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_i)\})$. Der Kontext $\tilde{\mathbb{E}}_i$ ist dann ein verträglicher Teilkontext von $\underline{\mathbb{E}}_i$. Die gestrichenen Zeilen-Spalten-Paare entsprechen nach Satz 2.2.10 Ungleichungen, die in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U})$ gültig sind.

Die Abbildungen $\mathbf{g}_i$ und $\mathbf{m}_i$ ergeben sich aus $\tilde{\mathbf{g}}_i$ und $\tilde{\mathbf{m}}_i$ und aus Abfragen an den Benutzer, ob jeweils $\tilde{\mathbf{g}}_i(\vec{x}) \swarrow \mathfrak{b}_i$ bzw. $\mathfrak{b}_1 \nearrow \tilde{\mathbf{m}}_i(\vec{y})$ gilt.

Das Verfahren beginnt mit dem Explorationskontext 0. Stufe $\underline{\mathbb{E}}_0 := (\mathbb{E}_0, \mathbf{g}_0, \mathbf{m}_0)$ mit $\mathbb{E}_0 = (\{\mathbf{1}\}, \{\mathbf{0}\}, \emptyset)$ und $\operatorname{dom} \mathbf{g}_0 = \operatorname{dom} \mathbf{m}_0 = \emptyset$. Da nun $\mathbf{g}_0(\mathbf{1})$ sowie $\mathbf{m}_0(\mathbf{0})$ undefiniert sind, wird der Benutzer gefragt: "Gilt $\mathbf{1} \leq \mathbf{0}$ im Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U})$?"

Antwortet der Benutzer mit "*nein*", so muß er ein trennendes Gegenstand-Merkmal-Paar (g, m) für die Begriffe $\mathbf{1}$ und $\mathbf{0}$ angeben.

[2] Genaugenommen wird sogar nur benötigt, daß der zu untersuchende vollständige Unterverband distributiv ist. Aber wie soll man das vor Durchführung der Exploration wissen?

[3] Mit $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ bezeichnen wir im folgenden das kleinste Element $\mathbf{0}_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U})}$ und das größte Element $\mathbf{1}_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U})}$ von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U})$.

Wir erhalten dann den Explorationskontext $\tilde{\underline{\mathbb{E}}}_0 := (\tilde{\mathbb{E}}_0, \tilde{\mathbf{g}}_0, \tilde{\mathbf{m}}_0)$ mit $\tilde{\mathbb{E}}_0 := \mathbb{E}_0$, $\tilde{\mathbf{g}}_0(\mathbf{1}) := g$ und $\tilde{\mathbf{m}}_0(\mathbf{0}) := m$.

Antwortet der Benutzer mit "*ja*", so streichen wir die entsprechende Zeile und Spalte und erhalten somit $\tilde{\underline{\mathbb{E}}}_0 := ((\emptyset, \emptyset, \emptyset), \emptyset, \emptyset)$. Damit wäre allerdings das Verfahren auch schon zuende, denn das würde ja bedeuten, daß der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U})$ nur aus einem einzigen Begriff bestehen würde!

Ist nun der Explorationskontext $\tilde{\underline{\mathbb{E}}}_i$ bereits berechnet, so ergibt sich der Explorationskontext $i+1$-ter Stufe $\underline{\mathbb{E}}_{i+1} := (\mathbb{E}_{i+1}, \mathbf{g}_{i+1}, \mathbf{m}_{i+1})$ durch

$$\mathbb{E}_{i+1} := \tilde{\mathbb{E}}_i \times (\{\mathfrak{b}_{i+1}, \mathbf{1}\}, \{\mathbf{0}, \mathfrak{b}_{i+1}\}, \{(\mathfrak{b}_{i+1}, \mathfrak{b}_{i+1})\})$$

sowie

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{i+1}((\vec{x}, b_{i+1})) &:= \begin{cases} \tilde{\mathbf{g}}_i(\vec{x}) & \text{falls } \tilde{\mathbf{g}}_i(\vec{x}) \swarrow \mathfrak{b}_{i+1} \text{ in } \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U}) \text{ gilt} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases} \\
\mathbf{g}_{i+1}((\vec{x}, \mathbf{1})) &:= \begin{cases} \tilde{\mathbf{g}}_i(\vec{x}) & \text{falls } \tilde{\mathbf{g}}_i(\vec{x}) \not\swarrow \mathfrak{b}_{i+1} \text{ in } \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U}) \text{ gilt} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases} \\
\mathbf{m}_{i+1}((\vec{y}, b_{i+1})) &:= \begin{cases} \tilde{\mathbf{g}}_i(\vec{y}) & \text{falls } \mathfrak{b}_{i+1} \nearrow \tilde{\mathbf{m}}_i(\vec{y}) \text{ in } \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U}) \text{ gilt} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases} \\
\mathbf{m}_{i+1}((\vec{y}, \mathbf{0})) &:= \begin{cases} \tilde{\mathbf{g}}_i(\vec{y}) & \text{falls } \mathfrak{b}_{i+1} \not\nearrow \tilde{\mathbf{m}}_i(\vec{y}) \text{ in } \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U}) \text{ gilt} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Angaben, ob $\tilde{\mathbf{g}}_i(\vec{x}) \swarrow \mathfrak{b}_{i+1}$ bzw. ob $\mathfrak{b}_{i+1} \nearrow \tilde{\mathbf{m}}_i(\vec{y})$ in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U})$ gilt, müssen jeweils vom Benutzer erfragt werden. Hierbei kann jedoch ausgenutzt werden, daß für $\vec{x} \in \tilde{G}_i$ und $\vec{y} \in \tilde{M}_i$ mit $\vec{x} \swarrow\!\!\!\nearrow \vec{y}$ von den beiden Fragen "Gilt $\tilde{\mathbf{g}}_i(\vec{x}) \swarrow \mathfrak{b}_{i+1}$ in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U})$?" bzw. "Gilt $\mathfrak{b}_{i+1} \nearrow \tilde{\mathbf{m}}_i(\vec{y})$ in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U})$?" höchstens eine mit "*ja*" beantwortet werden kann, da $(\tilde{\mathbf{g}}_i(\vec{x}), \tilde{\mathbf{m}}_i(\vec{y}))$ ein trennendes Gegenstand-Merkmal-Paar war.

Jetzt können wir $\tilde{\underline{\mathbb{E}}}_{i+1}$ bestimmen. Für jedes Paar $(\vec{x}, \vec{y}) \in G_{i+1} \times M_{i+1}$ mit $\vec{x} \swarrow\!\!\!\nearrow \vec{y}$ in $\mathbb{E}_i$, für das es noch kein trennendes Gegenstand-Merkmal-Paar gibt, d. h. für das $\mathbf{g}_{i+1}(\vec{x})$ oder $\mathbf{m}_{i+1}(\vec{y})$ undefiniert ist, muß der Benutzer angeben, ob $\bigwedge \vec{x} \leq \bigvee \vec{y}$ in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U})$ gilt.

Antwortet er mit "*ja*", so werden die entsprechende Zeile und Spalte gestrichen. Nach Satz 2.2.10 induziert der so entstehende Teilkontext die von $\bigwedge \vec{x} \leq \bigvee \vec{y}$ erzeugte Kongruenzrelation auf $\underline{\mathbb{E}}_{i+1}$.

Die Antwort "*nein*" muß der Benutzer mit einem Gegenstand-Merkmal-Paar $(g_{\vec{x}}, m_{\vec{y}})$ begründen. Dabei kann es vorkommen, daß entweder $\mathbf{g}_{i+1}(\vec{x})$ oder $\mathbf{m}_{i+1}(\vec{y})$ schon definiert sind. Diese können dann (aber müssen nicht) für das Gegenstand-Merkmal-Paar verwendet werden.

Wir erhalten so den Kontext $\tilde{\mathbb{E}}_{i+1} := (\tilde{G}_{i+1}, \tilde{M}_{i+1}, I_{i+1} \cap \tilde{G}_{i+1} \times \tilde{M}_{i+1})$ mit $\tilde{G}_{i+1} := \{\vec{x} | \bigwedge \vec{x} \not\leq \bigvee \vec{y}$ für $\vec{x} \swarrow\!\!\!\nearrow \vec{y}$ in $\mathbb{E}_{i+1}\}$ und $\tilde{G}_{i+1} := \{\vec{y} | \bigwedge \vec{x} \not\leq \bigvee \vec{y}$ für $\vec{x} \swarrow\!\!\!\nearrow \vec{y}$ in $\mathbb{E}_{i+1}\}$ und die Abbildungen

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{g}}_{i+1}(\vec{x}) &:= \begin{cases} \mathbf{g}_{i+1}(\vec{x}) & \text{falls } \mathbf{g}_{i+1}(\vec{x}) \text{ und } \mathbf{m}_{i+1}(\vec{y}) \text{ mit } \vec{x} \swarrow\!\!\!\nearrow \vec{y} \text{ definiert sind} \\ g_{\vec{x}} & \text{sonst} \end{cases} \\
\tilde{\mathbf{m}}_{i+1}(\vec{y}) &:= \begin{cases} \mathbf{m}_{i+1}(\vec{y}) & \text{falls } \mathbf{g}_{i+1}(\vec{x}) \text{ und } \mathbf{m}_{i+1}(\vec{y}) \text{ mit } \vec{x} \swarrow\!\!\!\nearrow \vec{y} \text{ definiert sind} \\ m_{\vec{y}} & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Das Verfahren ist beendet, wenn wir $\tilde{\mathbb{E}}_n$ bestimmt haben. Der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\tilde{\mathbb{E}}_n)$ ist isomorph zu dem von $\mathcal{B}$ vollständig erzeugten Unterverband U von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U})$. Die erzeugenden Begriffe $\mathfrak{b}_i$ finden wir in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{E}_n)$ wieder als $\bigvee_{x_i=\mathfrak{b}_i} \vec{x}$ (oder als $\bigwedge_{y_i=\mathfrak{b}_i} \vec{y}$).

Das Paar $(\tilde{\mathbf{g}}_n, \tilde{\mathbf{m}}_n)$ ist ein Kontext-Isomorphismus von $\tilde{\mathbb{E}}_n$ auf den Kontext $\tilde{\mathbb{K}} := (\tilde{\mathbf{g}}_n(\tilde{G}_n), \tilde{\mathbf{m}}_n(\tilde{M}_n), \{(\tilde{\mathbf{g}}_n(\vec{x}), \tilde{\mathbf{m}}_n(\vec{y}))|(\vec{x}, \vec{y}) \in \tilde{I}_n\})$ der trennenden Paare. Dies ist der Kontext, den wir auch durch Reduzieren von (G, M, J) mit $J := \bigcup_{(A,B)\in U} A \times B$ erhalten hätten.

Auf der anderen Seite kann U beschrieben werden als Faktorverband von $\mathrm{FCD}(\mathcal{B})$ beschrieben werden. Ist $\mathcal{L}$ die Menge all der Paare $(\vec{x}, \vec{y})$, für die der Benutzer die Frage "Gilt $\bigwedge \vec{x} \leq \bigvee \vec{y}$ in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{U})$?" bejaht hat, dann gilt $U \cong \mathrm{FCD}(\mathcal{B})/\Theta$, wobei Θ die von $\{\bigwedge \vec{x} \leq \bigvee \vec{y} | (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{L}\}$ erzeugte vollständige Kongruenzrelation ist.

Beispiel: Betrachten wir ein Beispiel aus der Zahlentheorie (vgl. [Wi87], [KlMa]). Zuerst legen wir den Kontext $\mathbb{K}$ fest als positiv-Booleschen Kontext zum Kontext $(\mathbb{N}_0, \{(k_1, \ldots, k_i \bmod m) | m \in \mathbb{N}_0, k_1, \ldots, k_i < m\}, I)$ mit $nI(k_1, \ldots, k_i \bmod m) :\Longleftrightarrow n \equiv k_1 \bmod m$ oder $\ldots$ oder $n \equiv k_i \bmod m$.

Wir wollen den vollständigen Unterverband von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ bestimmen, der von $\mathcal{B} = \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_4\}$ mit $\mathfrak{b}_1$:=*Gerade Zahl*, $\mathfrak{b}_2$:=*Quadratzahl*, $\mathfrak{b}_3$:=*Summe von zwei Quadratzahlen* und $\mathfrak{b}_4$:=*Summe von drei Quadratzahlen* erzeugt wird.

In den folgenden Abbildungen sind die Explorationskontexte schematisch dargestellt. Jeweils links von einem Gegenstand $g \in G_{\mathbb{E}}$ steht $\mathbf{g}(g)$, falls definiert. Ansonsten bleibt das Feld leer. Entsprechend wird $\mathbf{m}(m)$ über $m \in M_{\mathbb{E}}$ eingetragen.

Während des Verfahrens ist es für den Benutzer nicht nötig, die Relation I_i bzw. $\tilde{I}_i$ des Kontextes zu sehen. Er benötigt lediglich die Information, welche Gegenstände mit welchen Merkmalen in der $\swarrow\!\!\!\nearrow$-Relation stehen. Die in der rechten Spalte alternativ angegebene Schreibweise nutzt diese Tatsache aus. Sie entsteht aus der linken Darstellung durch Weglassen der Relation I und durch "Herunterklappen" der beiden oberen Zeilen. Dadurch stehen die Gegenstände und Merkmale, die durch einen Doppelpfeil verbunden sind, nebeneinander. Außerdem werden die Tupel, die Gegenstände und Merkmale des Explorationskontextes sind, als Verbandsterme umgeschrieben.

$\mathbb{E}_0$		
		0
	1	$\swarrow\!\!\!\nearrow$

$\mathbb{E}_0$			
	1	**0**	

F: "Gilt $\mathbf{1} \leq \mathbf{0}$?"
A: *"Nein! Ein trennendes Paar ist* 2 *und* (0,1 m 4)."

?	**1**	**0**	?

$\tilde{\mathbb{E}}_0$		(0,1 m4)
		0
2	**1**	$\nearrow\!\!\!\!\swarrow$

$\tilde{\mathbb{E}}_0$			
2	**1**	**0**	(0,1 m 4)

F: "Gilt $2 \hookrightarrow \mathfrak{b}_1$?"
A: *"Ja!"*
F: "Gilt $\mathfrak{b}_1 \curvearrowright$ (0,1 m 4)?"
A: *"Nein!"*
(Die zweite Antwort folgt direkt aus der ersten (s. S. 40))

$g \hookrightarrow \mathfrak{b}_1$?				$\mathfrak{b}_1 \curvearrowright m$?	
$\times$	2	**1**	**0**	(0,1 m 4)	

(In jeder Zeile darf also höchstens ein $\times$ gesetzt werden.)

$\mathbb{E}_1$		$(0{,}1\ m\ 4)$	
		$(\mathbf{0},\mathbf{0})$	$(\mathbf{0},\mathfrak{b}_1)$
2	$(\mathbf{1},\mathfrak{b}_1)$	$\nearrow\!\!\!\!\swarrow$	$\times$
	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$		$\nearrow\!\!\!\!\swarrow$

$\mathbb{E}_1$			
2	$\mathfrak{b}_1$	**0**	(0,1 m 4)
	1	$\mathfrak{b}_1$	

F: "Gilt $\bigwedge(\mathbf{1},\mathbf{1}) \leq \bigvee(\mathbf{0},\mathfrak{b}_1)$?"
A: *"Nein! Ein trennendes Paar ist* 1 *und* (0 m 2)."

2	$\mathfrak{b}_1$	**0**	(0,1 m 4)
?	**1**	$\mathfrak{b}_1$	?

$\tilde{\mathbb{E}}_1$		$(0{,}1\ m\ 4)$	$(0m2)$
		$(\mathbf{0},\mathbf{0})$	$(\mathbf{0},\mathfrak{b}_1)$
2	$(\mathbf{1},\mathfrak{b}_1)$	$\nearrow\!\!\!\!\swarrow$	$\times$
1	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$		$\nearrow\!\!\!\!\swarrow$

$\tilde{\mathbb{E}}_1$			
2	$\mathfrak{b}_1$	**0**	(0,1 m 4)
	1	$\mathfrak{b}_1$	

F: "Gilt $2 \hookrightarrow \mathfrak{b}_2$?"
A: *"Nein!"*
F: "Gilt $\mathfrak{b}_2 \curvearrowright$ (0,1 m 4)?"
A: *"Ja!"*
F: "Gilt $1 \hookrightarrow \mathfrak{b}_2$?"
A: *"Ja!"*
F: "Gilt $\mathfrak{b}_2 \curvearrowright$ (0 m 2)?"
A: *"Nein!"*

$g \hookrightarrow \mathfrak{b}_2$?				$\mathfrak{b}_2 \curvearrowright m$?	
	2	$\mathfrak{b}_1$	**0**	(0,1 m 4)	$\times$
$\times$	1	**1**	$\mathfrak{b}_1$	(0 m 2)	

$\underline{\mathbb{E}}_2$			(0 m 2)	(0,1 m 4)	
		$(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$	$(\mathbf{0},\mathfrak{b}_1,\mathbf{0})$	$(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathfrak{b}_2)$	$(\mathbf{0},\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2)$
	$(\mathbf{1},\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2)$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$	$\times$
1	$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathfrak{b}_2)$		$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$
2	$(\mathbf{1},\mathfrak{b}_1,\mathbf{1})$		$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$
	$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})$				$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$

$\underline{\mathbb{E}}_2$			
	$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2$	$\mathbf{0}$	
1	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_1$	(0 m 2)
2	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2$	(0,1 m 4)
	$\mathbf{1}$	$\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2$	

Das Verfahren wird fortgesetzt, bis $\underline{\tilde{\mathbb{E}}}_4$ erreicht ist. Die Kontexte $\underline{\tilde{\mathbb{E}}}_2$, $\underline{\mathbb{E}}_3$, $\underline{\tilde{\mathbb{E}}}_3$, $\underline{\mathbb{E}}_4$ und $\underline{\tilde{\mathbb{E}}}_4$ geben wir nur in der alternativen Schreibweise an:

$\underline{\tilde{\mathbb{E}}}_2$			
4	$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2$	$\mathbf{0}$	(1 m 2)
1	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_1$	(0 m 2)
2	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2$	(0,1 m 4)
3	$\mathbf{1}$	$\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2$	(0,1,2 m 4)

$\underline{\mathbb{E}}_3$			
4	$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3$	$\mathbf{0}$	(1 m 2)
1	$\mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_1$	(0 m 2)
2	$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_2$	(0,1 m 4)
	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2$	
	$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_3$	
	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_3$	
	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{b}_3$	
3	$\mathbf{1}$	$\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{b}_3$	(0,1,2 m 4)

$\underline{\tilde{\mathbb{E}}}_3$			
4	$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3$	$\mathbf{0}$	(1 m 2)
1	$\mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_1$	(0 m 2)
2	$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_2$	(0,1 m 4)
5	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2$	(0,1,2,4,6 m 8)
6	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{b}_3$	(0,1,2,4,5 m 8)
3	$\mathbf{1}$	$\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{b}_3$	(0,1,2 m 4)

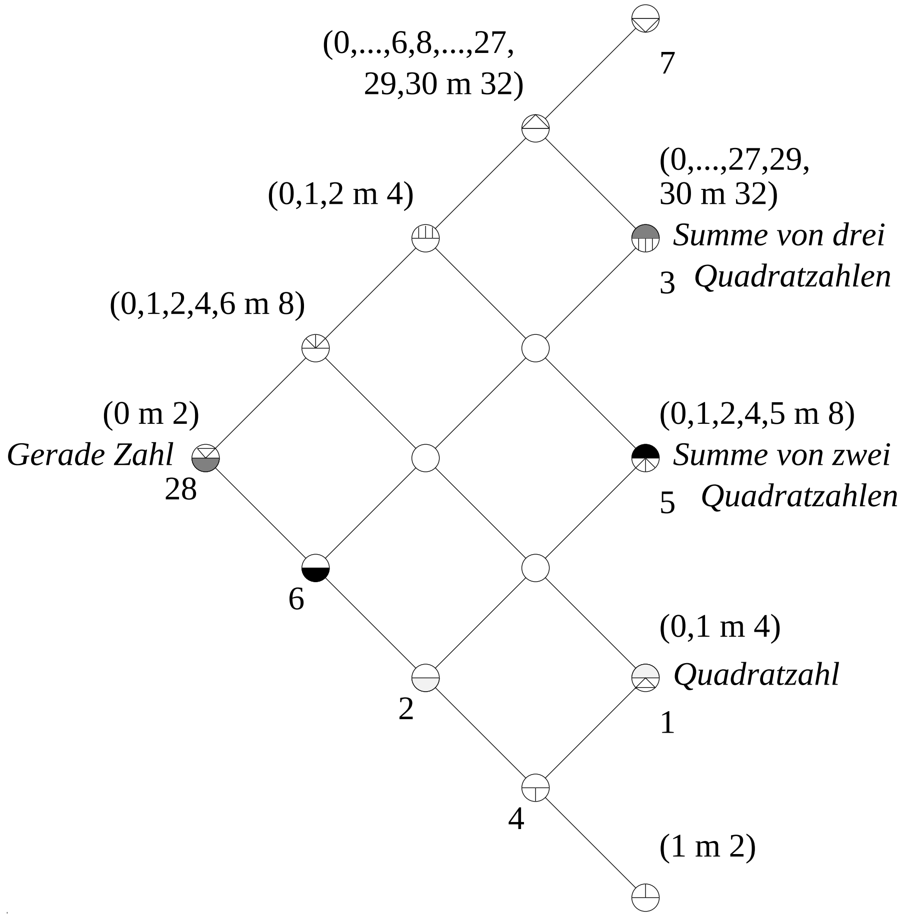


Abbildung 2.4: Von $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ und $\mathfrak{b}_4$ erzeugter vollst"andiger Unterverband

$\mathbb{E}_4$			
4	$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4$	$\mathbf{0}$	(1 m 2)
1	$\mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4$	$\mathfrak{b}_1$	(0 m 2)
2	$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4$	$\mathfrak{b}_2$	(0,1 m 4)
5	$\mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4$	$\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2$	(0,1,2,4,6 m 8)
6	$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_4$	$\mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{b}_3$	(0,1,2,4,5 m 8)
3	$\mathfrak{b}_4$	$\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{b}_3$	(0,1,2 m 4)
	$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_4$	
	$\mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_4$	
	$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{b}_4$	
	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{b}_4$	
	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{b}_3 \vee \mathfrak{b}_4$	
	$\mathbf{1}$	$\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{b}_3 \vee \mathfrak{b}_4$	

$\underline{\tilde{\mathbb{E}}}_4$			
4	$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4$	$\mathbf{0}$	(1 m 2)
1	$\mathfrak{b}_2 \wedge \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4$	$\mathfrak{b}_1$	(0 m 2)
2	$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4$	$\mathfrak{b}_2$	(0,1 m 4)
5	$\mathfrak{b}_3 \wedge \mathfrak{b}_4$	$\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2$	(0,1,2,4,6 m 8)
6	$\mathfrak{b}_1 \wedge \mathfrak{b}_4$	$\mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{b}_3$	(0,1,2,4,5 m 8)
3	$\mathfrak{b}_4$	$\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{b}_3$	(0,1,2 m 4)
28	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{b}_3 \vee \mathfrak{b}_4$	(0,...,27,29,30 m 32)
7	$\mathbf{1}$	$\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{b}_3 \vee \mathfrak{b}_4$	(0,...,6,8,...,27,29,30 m 32)

Damit ist das Verfahren beendet. Hier ist der Explorations-Kontext $\underline{\tilde{\mathbb{E}}}_4$ in ausgeschriebener Form:

$\underline{\tilde{\mathbb{E}}}_4$		(1 m 2) $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$	(0 m 2) $(\mathbf{0},\mathfrak{b}_1,\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$	(0,1 m 4) $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathfrak{b}_2,\mathbf{0},\mathbf{0})$	(0,1,2,4,6 m 8) $(\mathbf{0},\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathbf{0},\mathbf{0})$	(0,1,2,4,5 m 8) $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3,\mathbf{0})$	(0,1,2 m 4) $(\mathbf{0},\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3,\mathbf{0})$	(0,...,27,29,30 m 32) $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3,\mathfrak{b}_4)$	(0,...,6,8,...,27,29,30 m 32) $(\mathbf{0},\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3,\mathfrak{b}_4)$
4	$(\mathbf{1},\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3,\mathfrak{b}_4)$	⤢	×	×	×	×	×	×	×
1	$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3,\mathfrak{b}_4)$		⤢	×	×	×	×	×	×
2	$(\mathbf{1},\mathfrak{b}_1,\mathbf{1},\mathfrak{b}_3,\mathfrak{b}_4)$		×	⤢	×	×	×	×	×
5	$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathfrak{b}_3,\mathfrak{b}_4)$				⤢	×	×	×	×
6	$(\mathbf{1},\mathfrak{b}_1,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathfrak{b}_4)$		×		×	⤢	×	×	×
3	$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathfrak{b}_4)$						⤢	×	×
28	$(\mathbf{1},\mathfrak{b}_1,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})$		×		×		×	⤢	×
7	$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})$								⤢

Der zugehörige Begriffsverband ist in Abbildung 2.2.2 zu sehen. In ihm sind die trennenden Gegenstand-Merkmal-Paare jeweils durch ein Symbol gekennzeichnet: Daß der Gegenstand 6 und das Merkmal (0,1,2,4,5 m 8) ein trennendes Paar bilden, erkennt man im Diagramm daran, daß ihr Gegenstands- bzw. Merkmalsbegriff jeweils durch einen ausgefüllten Halbkreis markiert ist.

Man beachte, daß in diesem Liniendiagramm nur die Relation J, die den Unterverband beschreibt (vgl. die Definition auf Seite 2.2), abgelesen werden kann, nicht aber die Relation I des Kontextes $\mathbb{K}$. Aus $\gamma g \leq \mu m$ kann man gJm und damit auch gIm folgern, aber $\gamma g \not\leq \mu m$ bedeutet <u>nicht</u>, daß g nicht mit m inzidiert. Dies kann im Liniendiagramm nur für die trennnenden Gegenstand-Merkmal-Paare abgelesen werden.
Der vorgestellte Algorithmus ist nicht optimal in der Hinsicht, daß er eine minimale Anzahl von Gleichungen berechnet, die die auf Seite 41 angegebene Kongruenzrelation Θ erzeugt. Das Verfahren optimiert jedoch die Anzahl der trennenden Gegenstand-Merkmal-Paare.

Literaturverzeichnis

[Bo] M. Bocheński: Formale Logik. 3. Auflage, Verlag Karl Alber, Freiburg, München 1956

[Bu] P. Burmeister: Merkmalsimplikstionen bei unvollständigem Wissen. In: W. Lex (Hrsg.): *Arbeitstagung Begriffsanalyse und Künstliche Intelligenz, Informatik–Bericht 89/3.* TU Clausthal-Zellerfeld 1991, 15–46

[DIN] Deutsches Institut für Normung: DIN 2330; Begriffe und Benennungen: Allgemeine Grundsätze. Beuth, Berlin, Köln 1979

[Du] V. Duquenne: Contextual implications between attributes and some repesentation properties for finite lattices. In: B. Ganter, R. Wille, K. E.Wolff (Hrsg.): *Beiträge zur Begriffsanalyse.* B. I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien Zürich 1987, 213–239

[Dw] P. Dwinger: Introduction to Boolean Algebras. Physica-Verlag, Würzburg 1961

[Ga] B. Ganter: Algorithmen zur Begriffsanalyse. In: B. Ganter, R. Wille, K. E.Wolff (Hrsg.): *Beiträge zur Begriffsanalyse.* B. I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien Zürich 1987, 241–254

[GaWi87] B. Ganter,R. Wille: Implikationen und Abhängigkeiten zwischen Merkmalen. In: P. O. Degens, H.-J. Hermes, O. Opitz (Hrsg.): *Die Klassifikation und ihr Umfeld.* INDEKS Verlag 1987, 171–185

[GaWi93] B. Ganter, R. Wille: Skript zur Einführung in die formale Begriffsanalyse. Sommersemester 1993, TH Darmstadt

[Gr] G. Grätzer: Lattice Theory. First concepts and distributive lattices. Freeman, San Francisco 1971

[Hale] A. W. Hales: On the non-existence of free complete Boolean algebras. Fund. Math. **54**, 1964, 45–66

[Halm] P. R. Halmos: Lectures on Boolean Algebras. D. van Nostrand Company, Princeton 1963

[Ih] T. Ihringer: Allgemeine Algebra. Teubner, Stuttgart 1988

[KlMa] U. Klotz, A. Mann: Begriffexploration. Diplomarbeit, TH Darmstadt 1988

[Lo] P. Lorenzen: Formale Logik. 2. Auflage, de Gruyter, Berlin 1962

[LuWi] P. Luksch, R. Wille: A mathematical model for conceptual knowledge systems. In: H.-H. Bock, P.Ihm (Hrsg.): *Classification, data analysis and knowledge organization.* Springer, Berlin, Heidelberg 1991, 156–162

[MoBo] J. D. Monk, R. Bonnet (Hrsg.): Handbook of Boolean Algebras, Vol. 1. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, New York, Oxford 1989

[Schr] E. Schröder: Vorlesungen über die Algebra der Logik, Bd. I+II. 2. Auflage, Chelsea Publicity, New York 1966 (ursprünglich erschienen 1890 und 1891 in Leipzig)

[Si] SINE-Mainz GmbH: Katalog 1993

[VoWaWi] F. Vogt, C. Wachter, R. Wille: Data analysis based on a conceptual file. In: H.-H. Bock, P.Ihm (Hrsg.): *Classification, data analysis and knowledge organization.* Springer, Berlin, Heidelberg 1991, 131–140

[Wi82] R. Wille: Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts. In: I. Rival (Hrsg.): *Ordered sets.* Reidel, Dordrecht–Boston 1982, 445–470

[Wi85] R. Wille: Tensorial decomposition of concept lattices. In: *Order* **2**, 1985, 81–95

[Wi87] R. Wille: Bedeutungen von Begriffsverbänden. In: B. Ganter, R. Wille, K. E.Wolff (Hrsg.): *Beiträge zur Begriffsanalyse.* B. I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich 1987, 161–211

[Wi89] R. Wille: Knowledge acquisition by methods of formal concept analysis. In: E. Diday (Hrsg.): *Data analysis, learning symbolic and numeric knowledge.* Nova Science Publisher, New York, Budapest 1989, 365–380

[Wi91] R. Wille: Local completeness of conceptual knowledge systems. In: E. Diday, Y. Lechevallier (Hrsg.): *Symbolic-numeric data analysis and learning.* Nova Science Publisher, New York, Budapest 1991, 347–356

[Wi92a] R. Wille: Concept lattices and conceptual knowledge systems. In: *Computers & Mathematics with Applications* **23**, 1992, 493–515

[Wi92b] R. Wille: Begriffiche Datensysteme als Werkzeug der Wissenskommunikation. Preprint Nr. 1504, Fachbereich Mathematik, TH Darmstadt 1992