In: Erziehungswissenschaft und Beruf, Vierteljahresschrift für Unterrichtspraxis und Lehrerbildung, unter ständiger Mitarbeit des Bundesarbeitskreises der Seminar- und Fachleiter e.V. (BAK), Hrsg.: Speth, 26. Jahrgang, 1978, Merkur Verlag, Rinteln, S. 48-58

WERNER BLUM

Lineares Optimieren mit zwei Variablen im Mathematikunterricht

1. Einleitung

Mathematik wird heute in immer mehr Disziplinen nutzbringend angewandt. Das jüngste und auffallendste Gebiet anwendbarer Mathematik (vgl. [14]) ist zweifellos die sogenannte Operationsforschung (Operations Research), wobei der Teilbereich des *Linearen Optimierens*[1] als für die Praxis wichtigstes und mathematisch zugänglichstes Gebiet eine Sonderstellung einnimmt. LO ist erst in den letzten 20 Jahren zu einer geschlossenen Theorie entwickelt worden. Kurz gesagt handelt es sich hierbei darum, Extrema einer linearen Funktion mehrerer Variabler unter Beachtung linearer Nebenbedingungen zu finden. Planungs- und Entscheidungsprobleme, die auf eine derartige Form gebracht werden können, gibt es in der Praxis in großer Zahl. Genannt seien z.B. Transport-, Produktions-, Mischungs-, Zuschnitts-, Investitions- oder Lagerhaltungsprobleme in den verschiedensten Disziplinen, einschließlich dem Militärwesen, wo das LO seinen Ausgangspunkt hatte.

Seit den 60er Jahren und verstärkt in jüngster Zeit ist LO immer wieder als Thema für den *Mathematikunterricht* der Sekundarstufe vorgeschlagen worden (vgl. etwa [20], [13], [8], [22], [15], [11], [12], [17], [2], [1], [19]). In fast allen Lehrbuchwerken für die allgemeinbildende Sekundarstufe und für das berufsbildende Schulwesen kaufmännischer Fachrichtung wird LO behandelt. Dabei kommen derzeit für diejenigen Schularten, die uns hier primär interessieren, nämlich für die *allgemeinbildende Sekundarstufe I* sowie für *Berufsfachschule, Berufsaufbauschule, Fachschule* und *Fachoberschule,* vom mathematischen Aufwand her nur LO-Probleme mit wenigen, insbesondere solche mit *zwei Variablen* in Frage. Derartige Probleme sind zwar meist Vereinfachungen einer komplexeren Realität; die schulische Behandlung solcher *vereinfachten Probleme* ist jedoch legitim, sofern keine Verfälschungen auftreten, die Vereinfachungen dem Lernenden bewußt gemacht werden und Ausbaumöglichkeiten gewährleistet sind. Da sich die Grund-Prinzipien der Probleme und der Lösungsverfahren des LO bereits am Fall zweier Variabler exemplarisch deutlich machen lassen, ist der Absolvent eines Kurses in LO mit zwei Variablen besser vorbereitet auf ein verständiges Umgehen auch mit realen LO-Problemen. Auf solche realen Probleme mit sehr vielen Variablen wollen wir hier nicht näher eingehen, da zu ihrer Lösung Verfahren erforderlich sind[2], welche mathematisch nur in Leistungs- oder Zusatzkursen der Sekundarstufe II zugänglich sind und i. a. die Zuhilfenahme von Computern erfordern.

Die große Mehrzahl der bisherigen Publikationen zum LO im Schulunterricht beschränkte sich im wesentlichen auf einen mathematischen „Nachhilfeunterricht", da das Gebiet LO wohl noch nicht genügend vielen Lehrern bekannt ist; didaktische Argumente sind in größerem Maße nur in [12] für die Hauptschule und in

[17] für die Kollegstufe zu finden. Daher sollen hier – in Abschnitt **3** – einige *Begründungen* genannt werden, die für eine Behandlung von LO-Problemen mit zwei Variablen im Mathematikunterricht sprechen (vgl. dazu [2]). Eine genauere Abwägung von LO gegen andere Gebiete des Mathematikunterrichts muß hier unterbleiben. Ein weiteres Defizit betrifft die übliche schulische Behandlung von LO-Problemen mit zwei Variablen, die auf eine frühe Mechanisierung des graphischen Lösungsverfahrens hinausläuft und sowohl ein Verständnis dieses Verfahrens als auch ein Erkennen des Wechselverhältnisses zwischen Mathematik und Realität behindert. (Dies gilt auch für die Schulbücher.) Hier wird – in Abschnitt **4** – eine mehrfach erprobte genetisch orientierte *Lernsequenz* vorgestellt, welche eine verständige Handhabung der Lösungsverfahren ermöglichen und den Beziehungszusammenhang zwischen Mathematik und Umwelt verdeutlichen soll. Zuvor werden – in Abschnitt **2** – exemplarisch zwei Beispiele für LO-Aufgaben mit zwei Variablen gelöst (vgl. dazu [3]), zum einen, um den Leser auf das Thema LO einzustimmen und zum anderen, um eine Basis für die Ausführungen in den beiden folgenden Abschnitten zu legen. *Nicht* eingehen werden wir hier auf eventuelle neue Möglichkeiten, die sich durch den Einsatz von *Taschenrechnern* bei der Behandlung von LO-Problemen – auch mit mehr als 2 Variablen – ergeben können. Hierzu sind gesonderte didaktische Analysen notwendig.

2. Beispiele für LO-Aufgaben in zwei Variablen

Aufgabe 1:

Es sollen Vitamin-Rationen zum Versand in ein Katastrophen-Gebiet zusammengestellt werden. Diese Rationen sollen durch Mischung zweier Vitamin-Präparate, Multivit und Vitasan, hergestellt werden. 1 g von M enthält u.a. 1 E (1 Einheit, das sind 0,1 g) Vitamin B, 3 E Vitamin C und 1 E Vitamin E. 1 g von V enthält u.a. 2 E Vitamin B, 1 E Vitamin C und kein Vitamin E. Eine Ration soll mindestens 10 E Vitamin B, 15 E Vitamin C und 2 E Vitamin E enthalten; sie darf aber höchstens 13 g wiegen. 1 g von M kostet 2,— DM, 1 g von V 1,— DM. Wieviel g von M und wieviel g von V muß eine Mischungskombination enthalten, die unter allen möglichen Kombinationen am wenigsten kostet?

Mathematisierung:

Wir fassen die Aufgabenstellung in Tabellenform zusammen:

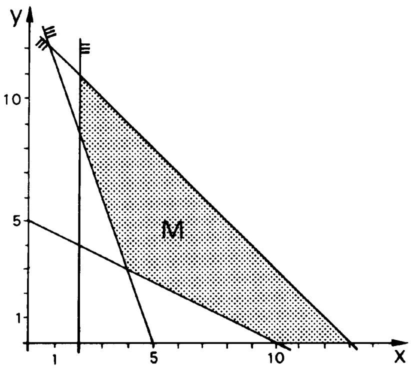
	1 g M	1 g V	1 Ration
	enthält [in E]	enthält [in E]	soll enthalten [in E]
Vitamin B	1	2	mind 10
Vitamin C	3	1	mind 15
Vitamin E	1	–	mind 2
			soll wiegen [in g] höchstens 13
	kostet [in DM]	kostet [in DM]	soll kosten
	2	1	möglichst wenig

Nun führen wir Variable ein: Eine Ration enthalte x g von M und y g von V. Die Aufgabenstellung lautet dann also:

$$\begin{array}{ll} x \geq 0 \quad y \geq 0 & \text{(Vorzeichen-Bedingungen)} \\ x + 2y \geq 10 & \\ 3x + y \geq 15 & \\ x \geq 2 & \text{(Neben-Bedingungen)} \\ x + y \leq 13 & \\ 2x + y \rightarrow \text{Min!}^3 & \text{(Optimierungs-Bedingung)} \end{array}$$

Lösung:

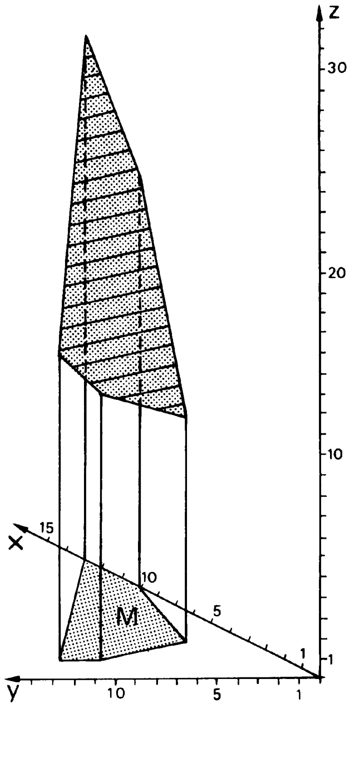
Abb. 1



Wir stellen diese Bedingungen graphisch dar: Jede der Ungleichungen bestimmt eine Halbebene in der x-y-Ebene. Die gemeinsamen Punkte (d.h. die Punkte des Durchschnitts) aller dieser Halbebenen bilden das *„Planungsvieleck"* M (siehe Abb. 1); M ist also die Menge all derjenigen Punkte, deren Koordinaten *alle* Bedindungen zugleich erfüllen.

Innerhalb dieser Menge M sollen nun diejenigen Punkte[4] (x|y) bestimmt werden, für welche der Term 2x + y den kleinstmöglichen Wert hat; d.h. also: Auf M soll die Funktion $(x|y) \rightarrow z = 2x + y$, die jedem Punkt (x|y) die Zahl 2x + y zuordnet, minimiert werden.

Abb. 2

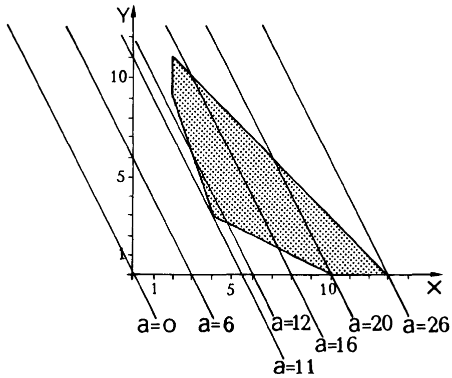


Um diese Aufgabe besser überschauen zu können, stellen wir für den Moment diese *„Zielfunktion"* (x|y) → z graphisch dar. Ihr *„Graph"* ist eine ebene Fläche im x-y-z-Raum (siehe Abb. 2). Gesucht sind also tiefste Punkte dieser Fläche.

Wir haben in Abb. 2 auch einige *Höhenlinien* dieser Fläche eingezeichnet; unter einer Höhenlinie verstehen wir die Menge alle Punkte (x|y|z) der Fläche, welche dieselbe dritte Koordinate z = a besitzen. Da die Fläche eben ist, sind die Höhenlinien Strekken bzw. Punkte. Zu den gesuchten tiefsten Punkten der Fläche kommen wir, indem wir an einer Stelle „starten" und – die Höhenlinien quasi als „Stufen" benutzend – in Richtung fallender z-Werte „vorausschreiten".

Den Höhenlinien entsprechen – wie bei einer Landkarte – Linien in der x-y-Ebene. Wenn wir sie über M hinaus fortsetzen, so handelt es sich hierbei um untereinander parallele Geraden (siehe Abb. 3). Eine solche *„Zielgerade"* besteht aus lauter Punkten $(x|y)$, für die der Wert $2x + y$ der Zielfunktion derselbe ist; die Gleichungen der Zielgeraden haben demnach alle die Form $2x + y = a$ (a reell), oder in Normalform geschrieben $y = -2x + a$. Diejenige Zielgerade, die noch Punkte mit M gemeinsam hat und für die (unter allen Geraden mit dieser Eigenschaft) der Parameter a minimalen Wert hat, liefert die Lösung unserer Aufgabe. Wir erkennen in Abb. 3: Dies ist die Gerade $2x + y = 11$; sie bestimmt eindeutig den Lösungspunkt $(x_0|y_0) = (4|3)$.

Abb. 3



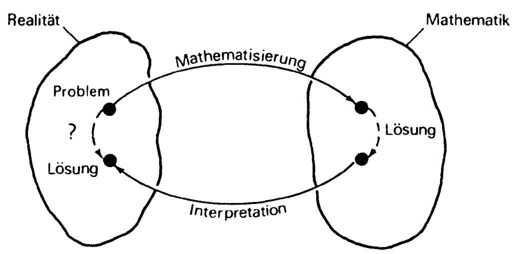
Interpretation der Lösung:

Es gibt also genau eine billigste Mischungskombination. Sie besteht aus 4 g M und 3 g V und sie kostet 11 DM.

Sie enthält: 10 E Vitamin B (Mindestmenge)
15 E Vitamin C (Mindestmenge)
4 E Vitamin E (2 E mehr als Mindestmenge)
und wiegt: 7 g (6 g weniger als Höchstgewicht)

Damit ist der *Prozeß der Lösungsfindung* abgeschlossen:

Abb. 4



Wir haben diesen Prozeß bewußt so ausführlich dargestellt, da wir sämtliche auftretenden Schritte auch für die Schule für wichtig halten; dies gilt insbesondere auch für die graphische Darstellung der Zielfunktion (siehe Abschnitt **3** und **4**). Um LO-Aufgaben mit zwei Variablen rationell zu lösen, genügt es jedoch, sich auf wenige Schritte zu beschränken. Wir erläutern ein solches Lösungsverfahren an Hand eines zweiten Beispiels, wobei wir uns auf den mathematischen Teil beschränken. Das zugehörige Anwendungsproblem könnte z.B. ein Produktionsproblem sein, bei dem der Gewinn maximiert werden soll.

Aufgabe 2:

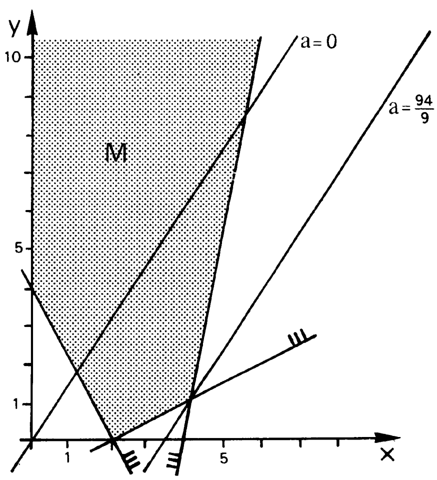
Zu lösen ist das Problem:

$x \geq 0 \quad y \geq 0$ (Vorzeichen-Bedingungen)
$2x + y \geq 4$
$x - 2y \leq 2$ (Neben-Bedingungen)
$5x - 2y \leq 20$
$3x - 2y \rightarrow$ Max! (Optimierungs-Bedingung)

Lösung:

1. Graphische Darstellung des Planungsvielecks M
2. Einzeichnen einer beliebigen Zielgeraden, etwa $3x - 2x = 0$
3. Parallelverschiebung dieser Geraden in Richtung wachsender Werte für $a = 3x - 2y$ so lange, bis eine Gerade mit maximalem Wert für a erreicht ist, die noch Punkte mit M gemeinsam hat.
4. Ablesen des (hier wieder eindeutig bestimmten) Lösungspunktes: Es ist der Schnittpunkt der beiden Geraden mit $x - 2y = 2$ und $5x - y = 20$
5. Berechnung des Lösungspunktes durch Schnitt der beiden Geraden liefert als Lösung $(x_0|y_0) = (\frac{38}{9}|\frac{10}{9})$ mit $3x_0 - 2y_0 = \frac{94}{9}$.

Abb. 5



Das Auffinden von für den Unterricht geeigneten (d.h. insbesondere *nicht realitätsverfälschenden, lerngruppenrelevanten* und *vom außermathematischen Problem her faßlichen)* LO-Aufgaben mit zwei Variablen ist ein Problem, mit dem wir uns im Rahmen dieses Aufsatzes nicht beschäftigen können. Jedenfalls sind sehr viele der in den Schulbüchern gebrachten Beispiele realitätsverfälschend, nicht schülergemäß und oft auch in der Formulierung nicht klar und konkret genug; bzgl. einiger geeigneter Beispiele vgl. etwa [13], [11], [12], [16], [1], sowie Schulbücher und Fachliteratur zum LO.

Wir verzichten hier auf eine ausführlichere *mathematische Sachanalyse* von LO-Aufgaben mit zwei Variablen (siehe dazu [3]), da die wesentlichen Züge bereits an Hand der Beispiele klargeworden sind. Ergänzend muß jedoch noch erwähnt werden, daß eine LO-Aufgabe gar keine Lösung zu haben braucht, entweder weil die Vorzeichen- und Neben-Bedingungen in der Aufgabenstellung nicht miteinander verträglich sind oder weil die zur Zielfunktion gehörige ebene Fläche im Raum gar keine tiefsten Punkte besitzt (wir beschränken uns für den Moment auf Minimum-Aufgaben; entsprechende Überlegungen gelten für höchste Punkte der Fläche bei Maximum-Aufgaben). *Wenn* es solche tiefsten Punkte gibt (was z.B. beim beschränkten nicht-leeren Planungsvieleck stets der Fall ist), *dann* gibt es offenbar entweder genau einen tiefsten Punkt – der dann notwendigerweise über einer *Ecke* von M liegt –, oder es gibt eine ganze *Kante* von tiefsten Punkten – die dann über einer Kante von M liegen, worunter sich als Randpunkt auch mindestens eine Ecke von M befinden muß. Es gilt also:

Wenn eine LO-Aufgabe eine Lösung besitzt, dann ist mindestens eine Ecke des Planungsvielecks Lösung (Hauptsatz des LO).

Dieser Satz legt ein *rechnerisches Lösungsverfahren* („Eckpunktverfahren") nahe, welches allerdings nur dann anwendbar ist, wenn man weiß, daß die LO-Aufgabe eine Lösung besitzt:

Man berechne sämtliche Ecken des Planungsvielecks; sodann berechne man die Werte der Zielfunktion in all diesen Eckpunkten;, dann suche man das Minimum unter diesen Zahlen; jeder zugehörige Punkt ist Lösung der LO-Aufgabe!

Wir haben vorhin das *graphische Lösungsverfahren* angewandt:

Man zeichne das Planungsvieleck M; ist M nicht-leer, so zeichne man eine beliebige Zielgerade; man verschiebe diese solange parallel, bis eine Ecke von M mit minimalem a erreicht ist; falls es einen solchen Eckpunkt gibt, so ist er Lösung der LO-Aufgabe; man berechne seine Koordinaten durch Schnitt der entsprechenden Randgeraden.

Obwohl mit dem Vordringen der Taschenrechner auch aufwendigere rechnerische Lösungsverfahren (insbesondere für mehr als 2 Variable) zugänglich und damit wohl auch zunehmend schulrelevant werden, steht das graphische Verfahren bei LO-Aufgaben mit 2 Variablen wohl weiterhin im Vordergrund, da es anschaulicher und immer noch einfacher handhabbar ist. Jedenfalls verbaut dieses Verfahren mit seiner „stufenweisen" Annäherung an die Lösung nicht die Erweiterung zu den ähnlich „schrittweise" ablaufenden praxisrelevanten rechnerischen Verfahren für LO-Probleme mit vielen Variablen.

Außer den beiden genannten gibt es noch weitere Lösungsverfahren für LO-Aufgaben mit zwei Variablen, so insbesondere für *Transportprobleme.* Wir können hierauf im Rahmen dieses Aufsatzes nicht näher eingehen (vgl. etwa [18]). Ebenso verzichten wir hier auf eine spezielle Diskussion der *ganzzahligen Optimierung.*

3. Begründungen für die schulische Behandlung des Linearen Optimierens mit zwei Variablen

1. LO bietet die Möglichkeit, daß der Mathematikunterricht *anwendungsorientiert* und *„beziehungshaltig"* ([10, S. 100]) gestaltet werden und dadurch seine emanzipatorische Potenz zum Tragen kommen kann[5]. Da LO-Probleme mit zwei Variablen i.a. große Vereinfachungen enthalten, tragen sie weniger zu einem *unmittelbaren* Verstehen und Bewältigen realer Problemsituationen bei; vielmehr bilden solche vereinfachten Probleme – sofern sie geeignet gewählt sind, was eine wichtige Aufgabe für Lehrer und Schüler ist – *Modelle* für eine komplexere Realität und liefern Möglichkeiten zur Behandlung außermathematischer Situationen auf einer frühen Stufe im Lernprozeß (im Sinne des Brunerschen *Spiralprinzips*[6]). Um die Beziehungen zwischen Mathematik und Umwelt modellhaft deutlich werden zu lassen, muß im Unterricht der in Abb. 4 dargestellte Kreislauf durchgeführt und auch reflektierend thematisiert werden; die Phasen der *Mathematisierung* und der *Interpretation* bzw. *Anwendung* müssen dabei also genügend berücksichtigt werden. Dazu gehört auch eine kritische Diskussion der gestellten Aufgabe und eine kritische Reflexion der gefundenen Lösung, etwa bei ökonomischen Problemen (z.B. wenn aus Gewinn-Maximierungsgründen in einer Montageabteilung ohne Kommentar „die Besetzung reduziert" wird; siehe [16, S. 43]). Der Schüler soll also nicht nur (selbstverständlich notwendige) Fertigkeiten im innermathematischen Lösen von LO-Aufgaben erlangen, sondern auch den Modellcharakter der Pro-

bleme erfassen (ein anspruchsvolles Lernziel!). Hier bietet sich – insbesondere in beruflichen Schulen der kaufmännischen Fachrichtung – eine *Verbindung* des Mathematikunterrichts *mit anderen Fächern* an.

Damit der Lernende nicht auf vereinfachte Probleme mit zwei Variablen und das nur hierfür geeignete graphische Verfahren fixiert wird, sondern offen bleibt gegenüber einem Ausbau zu komplexeren Problemen und den zugehörigen rechnerischen Verfahren, sollten in einem Kurs zum LO mit 2 Variablen auf jeden Fall graphische *und* rechnerische Verfahren benutzt und ihre gemeinsamen Prinzipien betont werden.

2. LO ist in besonderem Maße *schüleradäquat* und *motivierend* und trägt dadurch zur Förderung affektiver Lernziele bei, vor allem durch die gegebene *Problemorientierung* – vorausgesetzt, die Beispiele sind geeignet ausgewählt –, die weitgehenden Möglichkeiten für *Eigenaktivitäten* und damit verbunden für Erfolgserlebnisse der Schüler (siehe Abschnitt 4) sowie die *Anschaulichkeit* des Stoffes, welche es erlaubt, sämtliche Brunerschen Ebenen[7] (enaktiv, ikonisch, verbal/formal) zu durchlaufen und *Lernziele für alle Differenzierungsstufen* zu formulieren.

3. LO trägt zur *Förderung allgemeiner Lernziele* des Mathematikunterrichts bei. So werden die von Wittmann [21, S. 40f.] zusammengestellten Lernziele *(kognitive Strategien:* Argumentieren, sich kreativ verhalten, Mathematisieren; *intellektuelle Techniken:* Klassifizieren, Ordnen, Spezialisieren, Analogisieren, Formalisieren) beim LO sämtlich angesprochen; z.B.

- muß der Schüler bei der Begründung eines Lösungsverfahrens für LO-Aufgaben argumentieren,
- kann sich der Schüler beim Auffinden solcher Verfahren kreativ betätigen,
- können die Punkte des Planungsvielecks in Klassen gleichen Zielwertes zusammengefaßt und nach wachsendem Zielwert geordnet werden u. a. m.

LO trägt auch zur *Förderung struktureller und algorithmischen Denkens* bei. Die in [21, S. 84f.] allgemein genannten Möglichkeiten zur *Förderung kognitiver Strategien* (wie entdeckendes Lernen, divergentes Denken, offene Probleme, heuristische Strategien, intuitives Argumentieren u.a.m.) werden durch LO in hervorragender Weise genutzt. So z.B.

- wird das enge zweidimensionale Denken durchbrochen, wenn bei LO-Problemen mit 2 Variablen der Graph der Zielfunktion räumlich gedeutet wird,
- wird das graphische Lösungsverfahren aus einer „Kotierung" des Planungsvielecks und der räumlichen Deutung entdeckend erarbeitet u. v. a. m.

4. LO ist ein vorzügliches *Anwendungsfeld* für die *vertiefende Wiederholung mathematischer Themen,* so z.B. aus

- Geometrie (Koordinatensystem, Geraden, Halbebenen, Schnittmengen von Geraden bzw. Halbebenen, konvexe Mengen),
- Algebra (Gleichungen/Ungleichungen und deren Lösungsmengen),
- Funktionenlehre (lineare Funktionen mit 1 bzw. 2 Variablen).

Durch Hervorheben – nicht notwendig explizites Thematisieren – des *Funktionscharakters der Zielfunktion* (vgl. [20, S. 116], [13, S. 400], [8, S. 245], [3, S. 19]) wird der Funktionsbegriff von der Ebene gelöst und dadurch verdeutlicht. Insbesondere kann durch die räumliche Darstellung der Zielfunktion auch *räumliches Anschauungsvermögen* geschult werden. Die aus dieser Darstellung resultierenden didaktischen Möglichkeiten im Falle zweier Variablen – vor allem eine verständige Interpretation des graphischen Verfahrens und eine Veranschaulichung des Hauptsatzes – sind bisher kaum beachtet worden.

Weiter bereiten LO mit zwei Variablen im Sinne des Spiralprinzips auf weitergehende mathematische Themen der Sekundarstufe II vor, wie

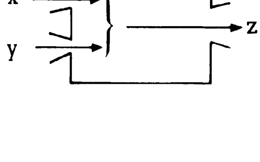
- Lineare Algebra (Vektoren, Matrizen, Geometrie in Ebene und Raum)
- Analysis (Extremwertaufgaben).

4. Vorschlag für eine Lernsequenz

Im folgenden wird eine das bisher Gesagte berücksichtigende, aus Unterrichtserfahrungen[8] entwickelte *Lernsequenz* zum LO in zwei Variablen in groben Zügen vorgestellt (vgl. auch [2]). Es gibt hierzu sicherlich noch vielerlei Variationen und Differenzierungsmöglichkeiten nach oben und nach unten, worauf wir im einzelnen nicht eingehen können. Insbesondere hängen die Auswahl der Beispiele und der detaillierte Ablauf der Unterrichtssequenz natürlich von der jeweiligen Lerngruppe ab. *Kognitive Lernziele* zu dieser Lernsequenz sind in [3, S. 39–41] angegeben.

An *Voraussetzungen* wird eine gewisse Übung im Umgehen mit linearen Gleichungen und Ungleichungen in 1 und 2 Variablen benötigt. Zumindest sollten die graphische Darstellung von Geraden und Halbebenen sowie die rechnerische und zeichnerische Lösung linearer Gleichungssysteme in 2 Variablen bekannt sein. Günstig wäre auch die Kenntnis der zeichnerischen Lösung linearer Ungleichungssysteme in 2 Variablen. Sämtliche Voraussetzungen werden zwar innerhalb der Problemkontexte des LO wiederholend behandelt; Vorkenntnisse sind dennoch sinnvoll, um *Schwierigkeiten* besser *isolieren* zu können.

Der *Einstieg* in die Lernsequenz erfolgt über ein konkretes Problem; wir betrachten hier das in Abschnitt **2** als Aufgabe 1 angegebene *Mischungsproblem*. Der Preis der Präparate und die Optimierungsbedingung werden noch nicht gegeben. Die Aufgabe wird (mehr oder weniger ausführlich) diskutiert. Dann werden die Daten *tabellarisch* übersichtlich gefaßt. Einige zulässige Lösungen (als Zahlenpaare) können abgelesen und in einer Tabelle festgehalten werden. Auf natürliche Weise ergibt sich so der Übergang zu *Variablen*. Die bereits gefundenen zulässigen Punkte können nun in ein *Koordinatensystem* eingetragen werden, und es stellt sich die Frage, welche Punkte „gerade eben noch" zulässig sind. Die Schüler finden so (etwa in Gruppenarbeit) einige Begrenzungsgeraden des zulässigen Bereichs und lesen deren Gleichungen ab. Diese Gleichungen werden anhand der Aufgabenstellung interpretiert, was zur Aufstellung des *linearen Ungleichungssystems* führt. Dessen graphische Darstellung ergibt dann den gesamten zulässigen Bereich, das *Planungsvieleck* (siehe Abb. 1). Dieses Vieleck wird nochmals formal (als Lösung des Ungleichungssystems) und inhaltlich (als Menge der zulässigen Vitamin-Kombinationen) interpretiert. Spätestens hier stellt sich die Frage, wie aus den unendlich vielen möglichen Mischungen eine Auswahl getroffen wird. Die Schüler finden die Kosten als natürliches Kriterium. Die Aufgabenstellung wird dann vervollständigt. Die Schüler berechnen nun in Einzelarbeit die Kosten für einige mögliche Mischungen. Dabei wird von Anfang an der *Funktionscharakter* betont:



x g von M und y g von V : $(x|y) \rightarrow z$.
kosten z DM

Hier kann schon $z = 2x + y$ festgehalten werden, sofern der Wunsch von den Schülern kommt; ansonsten ist dies auch später möglich.

Dadurch, daß jeder Schüler seine eigene Entscheidung treffen und diese mit den Entscheidungen anderer Schüler vergleichen kann, entsteht eine Art fruchtbarer *Wettbewerbssituation.* Nun werden die einzelnen z-Werte gesammelt und an den jeweiligen Punkt $(x|y)$ notiert, so daß eine *„Kotierung"* des Planungsvielecks entsteht. Die optimale Lösung $(4|3)$ wird hier von vielen Schülern schon vermutet. An dieser Stelle ist es wichtig, Zweifel an der Richtigkeit dieser Lösung zu wecken, um die Schüler dazu herauszufordern, argumentativ die Lösung $(4|3)$ zu verteidigen oder eine neue zu finden. Hier sollte nun zur *räumlichen Interpretation* der Zielfunktion übergeleitet werden, da dies an späterer Stelle, wenn der Lösungskalkül schon erarbeitet ist, kaum noch motivierbar ist. Dazu muß beim Schüler der Gedanke geweckt werden, die z-Werte in der dritten Dimension abzutragen. Wenn der Lehrer dies – wie es in einem genetisch orientierten Unterricht sinnvoll ist – nicht einfach angeben will, kann dieser Vorstoß in den Raum für den einzelnen Schüler je nach Voraussetzung beim ersten Mal recht schwierig sein. Die dadurch erreichte Einsicht und die Schulung des räumlichen Anschauungsvermögens lohnen jedoch allemal die Mühe. Wir geben einige *methodische Hinweise,* welche diese räumliche Interpretation erleichtern.

Eine große Hilfe kann dadurch gegeben werden, daß – in Form eines Lehrerimpulses – die Analogie der Kotierung des Planungsvielecks zur Darstellung auf Landkarten bewußt gemacht wird. Ansonsten kann der Lehrer – mehr oder weniger zufällig – Schüleräußerungen wie „tiefster Punkt" statt „kostengünstigster Punkt" aufgreifen und fruchtbar machen. Eine andere methodische Möglichkeit besteht darin, sich vorzustellen, daß die Kosten an einigen Punkten konkret als Turm, bestehend aus Markstücken, auf das Planungsvieleck aufgesetzt sind. Des weiteren kann auf die Graphen reeller Funktionen verwiesen werden, die ja nicht durch Kotierung der reellen Achse, sondern durch Abtragen der Funktionswerte in die zweite Dimension dargestellt werden.

Die räumliche Interpretation führt zur graphischen Darstellung der Zielfunktion[9]. Außerordentlich wichtig ist jetzt ein *räumliches Modell*[10], das vom Lehrer oder noch besser von einer Schülergruppe zu Hause gebaut wird[11]. Spätestens hier zeigt sich, wie sehr die räumliche Darstellung den Sachverhalt einsichtig macht. Jetzt „sehen" die Schüler die optimale Lösung. Als nächstes wird nun die Beobachtung gedeutet, daß bei der Kotierung verschiedene Punkte mit gleichem z-Wert alle kollinear sind. Dies führt sofort (Analogie zu Landkarten!) auf die *Höhenlinien* der ebenen Fläche im Raum[12] und deren Projektionen, die Schar paralleler *Zielgeraden* in der Ebene. Schließlich können eventuell noch die Gleichungen dieser Geraden erkannt und inhaltlich gedeutet werden. All dies wird von den Schülern selbst erarbeitet.

Damit ist an Hand des ersten Beispiels bereits das gesamte mathematische Instrumentarium intuitiv entwickelt und vor allem der räumliche Gedanke ins Spiel gebracht worden[13]. Die nächsten LO-Aufgaben müssen nun dazu beitragen, die mathematische Formulierung und die graphische Darstellung solcher Aufgaben zu üben, rationelle Lösungsverfahren zu entwickeln, die Interpretation der Lösungen zu schulen und den Hauptsatz des LO bewußt zu machen.

Wenn – wie bei uns – als Einstiegsbeispiel eine Minimum-Aufgabe behandelt worden ist, wird als *zweites Beispiel* eine Maximum-Aufgabe gewählt werden, beispielsweise ein Produktionsproblem mit Gewinnmaximierung. Die Schüler erarbeiten das Ungleichungssystem und als dessen Lösungsmenge das Planungsvieleck. Spätestens hier wird das Optimalitätskriterium gegeben, und die Schüler suchen diejenige Produktion, die maximalen Gewinn abwirft. Eine (schnell vorgenommene) Kotierung des Planungsvielecks führt mit Hilfe der beim ersten Beispiel erarbeiteten räumlichen Darstellung rasch auf die Schar paralleler Zielgeraden und damit auf die Lösung. Für die meisten Schüler ist hier schon kein konkretes Modell mehr nötig; überhaupt dient das Modell lediglich als methodisches Instrumentarium, welches bald entbehrlich werden soll. Das graphische Verfahren kann nun herauspräpariert, als ökonomische Möglichkeit zur Lösung von LO-Aufgaben festgehalten und – an Hand der räumlichen Darstellung – begründet werden. Anschließend wird die Lösung diskutiert. An dieser Stelle können bereits Fragen der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung in Verbindung mit der Abänderung der Ausgangsdaten besprochen werden. Auch der Hauptsatz kann herausgearbeitet und – ebenfalls mit der räumlichen Darstellung – begründet werden, womit die Grundlage für die Eckpunkt-Methode geschaffen ist.

In den *nächsten Beispielen* wird das graphische Verfahren mechanisiert; rechnerische Verfahren treten hinzu. Auch „schwächere" Schüler können die Lösungsmethode erfolgreich anwenden, wenn – was bekanntlich oft die größten Schwierigkeiten macht – das mathematische Modell aufgestellt ist. Da die meisten LO-Aufgaben im Prinzip auf eine analoge Weise gelöst werden können, kann die Lernsequenz bald sinnvoll zu Ende gehen. Um die Beschränktheit des zweidimensionalen Ansatzes aufzuzeigen, können noch LO-Probleme mit 3 und mehr Variablen andiskutiert werden. Nützlich wäre auch die Aufstellung eines Flußdiagramms zum graphischen und/oder zum rechnerischen Verfahren.

Anmerkungen

1 Auch **Lineares Programmieren** genannt; im folgenden meist kurz: LO.

2 Vor allem das von Dantzig entwickelte **Simplexverfahren** (siehe [7] oder [6]).

3 Wir schreiben – in Anlehnung an [6] – hier und im folgenden kurz „→Min!" um auszudrücken, daß diejenigen Einsetzungen in den betreffenden Term gesucht sind, die unter allen zulässigen – d. h. den Ungleichungen genügenden – einen minimalen Wert liefern. Über Existenzfragen ist dabei nichts gesagt.

4 Wir identifizieren stets der Einfachheit halber Paare $(x|y)$ reeller Zahlen mit den entsprechenden Punkten der x-y-Ebene. Für den Lernenden kann eine Unterscheidung zwischen der algebraischen und der geometrischen Deutung und damit ein Bewußtmachen des Transfers zwischen symbolischer und ikonischer Ebene (vgl. Fußnote 7) hilfreich sein.

5 Eine allgemeine Erörterung von Begründungen für eine Anwendungsorientierung des Mathematikunterrichts in allgemein- und in berufsbildenden Schulen – Mathematik als Hilfsmittel zum Verstehen und Bewältigen von Problemen aus Beruf und Alltag, Anwendungsprobleme zur Motivation, zur Veranschaulichung und zum besseren Verständnis mathematischer Inhalte, ausgewogeneres Bild der Wissenschaft Mathematik durch Berücksichtigung von Anwendungen, Möglichkeiten zur Milderung der starren Fächertrennung – kann hier aus Platzgründen nicht geleistet werden; vgl. dazu auch [4].

6 Siehe [5] und [21, S. 66 ff.]

7 Vgl. [21, S. 15/16 und S. 70 ff.]

8 Solche Erfahrungen liegen aus mehreren Klassen an allgemein- und berufsbildenden Schulen vor. Für diesbezügliche Unterstützung danke ich den Herren W. Focke, F. Siebrecht, C. Umbach und H. Vaupel (alle Kassel).

9 Daß der Graph eine ebene – und nicht eine irgendwie „gekrümmte" – Fläche ist, wird kaum als Problem empfunden. Sollten von den Schülern diesbezüglich Zweifel angemeldet werden, können diese bei einer genaueren Diskussion über die Höhenlinien ausgeräumt werden. Ansonsten wird – im Sinne des Spiralprinzips – die Gestalt des Graphen naiv als unproblematisch angesehen.

10 Das Wort „Modell" hat hier natürlich eine andere Bedeutung als in Abschnitt 3!

11 Es werden Holz- oder Drahtstäbchen der entsprechenden Länge in einige Punkte des auf geeigneter Unterlage gezeichneten Planungsvielecks gesteckt (vgl. [11, S. 245] und [9]) und durch eine Platte aus Glas oder durchsichtigem Plastik abgedeckt.

12 Im Modell können die Höhenlinien mit einem Filzstift auf der abdeckenden Platte eingezeichnet werden. Wenn die Höhenlinien mittels Stäben horizontal auf der Platte befestigt werden, lassen sie sich leicht mittels eines Projektors auf das Planungsvieleck projizieren, wodurch die Zielgeradenschar sofort erkennbar wird (vgl. [9]).

13 Der zeitliche Aufwand beträgt bei geeigneter Hausaufgabenstellung 4 – 6 Unterrichtsstunden bis hierher.

Literatur

1. Beck, U.: Elementares lineares Optimieren – Ein Beispiel für eine problemorientierte Unterrichtseinheit *Lernzielorientierter Unterricht* 4/1975, S. 15–22.
2. Blum, W.: Didaktische Fragen des linearen Optimierens in der Sekundarstufe I. *Beiträge zum Mathematikunterricht* 1975, Hannover 1975, S. 15–19.
3. Blum, W.: Lineares Optimieren mit zwei Variablen. *Lernzielorientierter Unterricht* 2/1977, S. 30–41.
4. Blum W.: Mathematikunterricht im beruflichen Schulwesen in: *Kritische Stichwörter zum Mathematikunterricht* (Hrsg. D. Volk), München 1978.
5. Bruner, J. S.: *Der Prozeß der Erziehung.* Düsseldorf 1972.
6. Collatz, L./Wetterling, W.: *Optimierungsaufgaben.* Berlin ^{2}1971.
7. Dantzig, G. B.: *Lineare Programmierung und Erweiterungen.* Berlin 1966.
8. Fletscher, T. J. (Hrsg.): *Exemplarische Übungen zur modernen Mathematik.* Freiburg 1967.
9. Focke, W.: *Erstellung einer Unterrichtsreihe mit dem Thema „Lineares Optimieren" im beruflichen Schulwesen unter Berücksichtigung des Einsatzes von Arbeitsblättern, Informationsblättern, räumlichen Anschauungsmodellen und ihrer Erprobung in einer Technikerklasse.* Zweite Staatsexamensarbeit, Kassel 1976.
10. Freudenthal, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1.* Stuttgart 1973.
11. Glaser, K.-H.: Zum Begriff „Lineare Optimierung" im Mathematikunterricht. *Mathematik in der Schule* **8** (1970), H. 3, S. 203–208.
12. Glatfeld, M.: Zum Funktionsbegriff im Mathematikunterricht der Hauptschule. In: *Mathematik in der Hauptschule II* (Hrsg.: E. Meyer), Stuttgart 1972, S. 88–99.
13. Ineichen, R.: Elementare Beispiele zur linearen Programmierung und zur Spieltheorie. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* **16** (1963), H. 9, S. 398–404.
14. Laugwitz, D.: Anwendbare Mathematik heute. In: *Grundlagen der modernen Mathematik* (Hrsg.: H. Meschkowski), Darmstadt 1972, S. 224–252.
15. Oberschelp, W.: Klassische Extremwertaufgaben und moderne Optimierungsprobleme. *Der Mathematikunterricht* **15** (1969), H. 5, S. 45–65.
16. Schick, K.: *Lineares Optimieren.* Frankfurt 1973.
17. Schick, K.: *Die Mathematik in der Kollegstufe (Kollegstufenversuch in NW), Mathematische Optimierungsprobleme in der Kollegstufe.* Dissertation PH Rheinland 1974.
18. Schick, K./ Schmitz, G.: *Wirtschaftsmathematik I – Optimierungsprobleme.* Düsseldorf 1974.
19. Thun, G.: Einführung in die „Lineare Optimierung" (Maximumproblem), Erziehungswissenschaft und Beruf **23** (1975), H. 4, S. 453–461.
20. Wigand, K.: Linear Programming. *Praxis der Mathematik* **1** (1959), H. 5, S. 113–117.
21. Wittmann, E.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Braunschweig ^{4}1976.
22. Woskressenski, S. A.: Aufgaben zur linearen Optimierung im Mathematikunterricht. *Mathematik in der Schule* **6** (1968), H. 9, S. 710–712, H. 10, S. 790–793.