In: Didaktik der Mathematik, 3. Jahrgang, 1975, Bayerischer Schulbuch-Verlag, München, S. 163-184

Werner Blum

Ein Grundkurs in Analysis[1]

1. Einleitung

In der neueren didaktischen Diskussion findet die Analysis mehr und mehr Beachtung. Ein wichtiges Problem ist hierbei die inhaltliche und methodische Ausgestaltung eines *Grundkurses zur Analysis*, der in der reformierten Oberstufe zum Pflichtbereich gehört. Wir machen in diesem Aufsatz einen Vorschlag für einen solchen halbjährigen Grundkurs (etwa 50–60 Unterrichtsstunden). Und zwar beschreiben wir in Kapitel 3. die hierzu benötigten Voraussetzungen, formulieren und begründen in Kapitel 4. die Lernziele unseres Kurses und geben in Kapitel 5. Beispiele für Testaufgaben zu diesen Lernzielen. Zuvor jedoch machen wir in Kapitel 2. einige allgemeine Bemerkungen zu einem Grundkurs in Analysis. Adressaten sind Oberstufenschüler ab Klasse 11, 2. Halbjahr, wobei wir nicht nur an die gymnasiale Oberstufe denken, sondern im Sinne der Empfehlungen der Bildungskommission des Deutschen Bildungsrates[2] auch Bildungsgänge an *integrierten Oberstufen* miteinbeziehen, was bisher wohl noch nicht versucht worden ist. Insbesondere kann unser Kurs als ein erster konkreter Vorschlag für einen polyvalenten Analysis-Kurs im Sinne von [22] aufgefaßt werden.

2. Allgemeine Bemerkungen zu einem Analysis-Grundkurs

Es erübrigt sich hier wohl, eine vollständige Begründung für die zentrale Stellung der Analysis in der Oberstufe zu geben (vgl. etwa [20]). Einer der wesentlichen Gründe ist zweifellos ihre *Anwendbarkeit* in außermathematischen Disziplinen, vor allem in Natur- und Wirtschaftswissenschaften. Da nun der primäre Adressat unseres Grundkurses der spätere Nicht-Mathematiker ist, kommt es uns nicht in erster Linie auf die innermathematische Bedeutung des Stoffes an, sondern auf eine *verständige Handhabung der Begriffe, Methoden und Regeln der Differential- und Integralrechnung*, insbesondere als *Mittel zur adäquaten Erfassung von Problemen* aus Natur- und Wirtschaftswissenschaften. Das Unterrichten einer „beziehungshaltigen" Analysis (in Sinne von Freudenthal [10a, S. 75ff.]), bei der Anwendungsprobleme integraler Bestandteil sind, gehört also zu den Kernpunkten unseres Vorschlags[3]. Wie wenig dies heute i.a. berücksichtigt wird, zeigen Untersuchungen wie die von Nägerl u.a. [29]. Wir können in Kapitel 4. zwar nur

1 Diese Arbeit ist aus einem Seminar hervorgegangen, das ich im Sommersemester 1974 an der Gesamthochschule Kassel zusammen mit Herrn A. Kirsch durchgeführt habe. Ich danke Herrn Kirsch für seine wertvollen Anregungen und seine Hilfe bei der Abfassung dieses Aufsatzes; zahlreiche Formulierungen stammen von ihm, und viele der folgenden Vorschläge sind durch seine langjährigen Unterrichtserfahrungen abgesichert.

2 Strukturplan für das Bildungswesen, Bonn 1970. Zur Neuordnung der Sekundarstufe II, Bonn 1974.

3 Vgl. auch Freudenthal [10b, S. 525]: „... der Analysis auf der Schule nur durch größere Wirklichkeitsnähe zu helfen ist".

wenige Anwendungen explizit erwähnen; jedoch sei die Wichtigkeit des Anwendungsaspektes – und darüber hinausgehend einer Integration verschiedener Fächer (vgl. etwa [24]) – schon hier betont. Mit all dem ist natürlich kein nackter Utilitarismus gemeint, sondern ein Vermitteln *grundlegender Einsichten in die Analysis*, die gerade im Zusammenhang mit deren Anwendungen am ehesten zu gewinnen sind.

Das zweifache Ziel, eine anwendbare Mathematik zu erarbeiten und rasch zu diesen Anwendungen vorzustoßen, hat wichtige Konsequenzen. Wie etwa in [11] ausführlich begründet ist, steht für die Schule *die Bedeutung der Begriffe Ableitung und Integral weit über dem Stetigkeitsbegriff*, der im wesentlichen nur innermathematisch relevant ist. Aus diesem Grund verzichten wir (wie auch Koch [21], Karcher [16], Griesel [14] oder Kroll [23]) auf eine vorhergehende Behandlung der Stetigkeit. Auch Grenzwerte brauchen nicht vorher behandelt zu werden[1]. Vielmehr beginnt unser Grundkurs sofort mit dem Tangentenproblem, was eine enorme Zeitersparnis bringt. Eine eingehendere Betrachtung von Konvergenz- und Stetigkeitsfragen, die im Rahmen der Differential- und Integralrechnung auftreten, insbesondere eine *exakte Klärung* dieser Begriffe, ist zwar notwendig, gehört aber aus didaktischen Gründen erst in die Leistungskurse.

Ein rascher Vorstoß zu den für die Anwendung notwendigen Begriffen und Sätzen ist laut Vorbemerkung (S. 350) auch das Ziel von Kroll [23] (der wohl als erster einen Vorschlag für einen Analysis-Grundkurs publiziert hat). Ein solch rasches Vordringen wird aber durch einen langen Vorspann mit „Berührfunktionen" verhindert. Seine Begründung hierfür ist der Wunsch, sich nicht wie früher üblich auf die bloße Präsentation des Kalküls und seine Einübung zu beschränken, was wir unterstützen. Der wesentliche Grund scheint jedoch ein *Streben nach perfekter mathematischer Exaktheit* schon bei der ersten Einführung in die Analysis zu sein. Insofern unterscheidet sich Kroll nicht wesentlich von anderen „modernen" Analysiskursen, die alle von diesem Streben geprägt sind, was im Extrem dazu führt, eine Universitäts-Analysis in mehr oder weniger verdünnter Form für die Schule anzubieten. Dieser Vorwurf trifft insbesondere die Mehrzahl der modernen Schulbücher (z. B. [6]). Auch der Karchersche Vorschlag [16], der scheinbar in unsere Richtung zielt, hat primär mathematische Exaktheit (wenn auch für reduzierte Begriffe) im Auge, wie sich an vielen Stellen unschwer nachweisen läßt, und löst nicht die didaktischen Probleme eines Grundkurses in Analysis auf der Schule[2]. Alle diese Vorschläge haben also gemeinsam, daß schon beim ersten Durchgang der Analysis nach einem vorgegebenen mathematischen System unterrichtet wird, ohne daß die Schüler die dahinterstehenden mathematischen Skrupel des Lehrers teilen könnten. Freudenthal [10a, S. 100] hat dieses Unterrichten nach einem vorgegebenen System treffend als *„antididaktische Inversion"* bezeichnet. Es führt im Endeffekt nur zum Konsum einer fertigen Mathematik durch den Schüler.

Auf der anderen Seite stehen Kurse, die durch einen weitgehenden *Verzicht auf mathematische Überlegungen* charakterisiert sind, was zur Beschränkung auf *empirisches Vorgehen* oder zur *Vermittlung von Rezepten* führt. Dies gilt vor allem für ältere Kurse, die beim Schüler oft den Eindruck hinterlassen haben, daß die Analysis eine unexakte Diszi-

1 Es ist aber auch mit den Prinzipien unseres Kurses verträglich, wenn erste Konvergenzbetrachtungen in anderem Zusammenhang schon vor der Differentialrechnung auftauchen.

2 Wohl können sich Karchers Ideen in Leistungskursen gewinnbringend verwenden lassen.

plin sei. Ein erschreckendes Beispiel sind die Schulbücher [25ab]. Auch Koch [21] treibt Empirie, allerdings mit dem Hauptziel der Vorbereitung auf eine exakte Behandlung.

Die beiden geschilderten Extreme – mathematische Perfektion bzw. Verzicht auf Mathematik – lassen sich zusammenfassend als „*Alles-oder-Nichts-Standpunkt*" bezeichnen, welcher heute (nicht nur in der Analysis) weit verbreitet ist. Beispiele aus der Analysis sind etwa die Behandlung des Grenzwertbegriffs, des Ableitungsbegriffs oder des Integralbegriffs. Hier wollen wir exemplarisch die Behandlung transzendenter Funktionen anführen, wie sie in einigen Büchern und Aufsätzen für die Schule vorgeschlagen werden. So werden etwa im Kurs [8] die trigonometrischen Funktionen überhaupt nicht behandelt, sondern erst in einem Anhang mittels Integralen eingeführt. In ähnlicher Weise geht Bergold [3] vor. Die Vorstellungen in [2] gehen dahin, Exponentialfunktion und Logarithmus axiomatisch einzuführen. Auch die Definition des Logarithmus als Hyperbelflächenfunktion ist ein Beispiel für eine antididaktische Inversion, die ansatzweise sogar Freudenthal [10] begeht. Während er allerdings diese Definition auf natürliche Weise schon vor der Integralrechnung bringen möchte, verzichten die meisten modernen Schulbücher (wie etwa [6a]) völlig auf Exponential- und Logarithmusfunktionen, bis die exakte Integraldefinition möglich wird. Weitere Beispiele können wir aus Platzgründen nicht aufzählen.

Wir distanzieren uns gleichermaßen von abwegigen Forderungen nach endgültiger Strenge und Exaktheit wie von resignierendem Verzicht auf jegliche mathematische Argumentation. Beides trägt nicht zur Förderung von Verständnis bei. In unserem Grundkurs soll dagegen auf einem „mittleren" Niveau *aktive Mathematik* getrieben werden, kein steriles Klären von Begriffen und kein stumpfsinniges Rezepteanwenden. Ziel ist der *Aufbau adäquater Vorstellungen von den grundlegenden Begriffen der Analysis*, jedoch noch nicht in ihrer abschließenden formalen Fassung. Die Begriffe und Methoden entwickeln sich bei uns aus *Problemkontexten* und sind deshalb oft intuitiv und noch nicht endgültig gefaßt, insbesondere da sie in möglichst großem Umfang *von den Schülern selbst erarbeitet* werden sollen. Des weiteren werden einige Resultate mit Hilfe der Anschauung[1] gewonnen, wie überhaupt eine enge *Verbindung zwischen Analysis und Geometrie* angestrebt wird. Sämtliche Überlegungen lassen sich jedoch im Sinne des *Brunerschen Spiralprinzips* ausbauen und in einem späteren zweiten Durchgang (etwa in Leistungskursen) mathematisch exakt fassen (d.h. an keiner Stelle des Kurses werden Überlegungen geführt, die man später zurücknehmen müßte). Ein Beispiel hierfür ist der Grenzwertbegriff (siehe 4.1.). In diesem Sinne ist unser Kurs *genetisch* aufgebaut (vgl. Wittmann [32, S. 97ff.]). Ein entsprechendes Konzept für einen Anfängerkurs in Analysis vertreten übrigens Artin [1] und Lang [27]; keineswegs bedeutet unser Vorschlag also einen Rückschritt zur unexakten Analysis früherer Zeiten (bzg. des Problems der „Strenge" vgl. [27, Vorwort]). Wir *vereinfachen* didaktisch, *verfälschen aber nichts*. Gerade durch heuristische Überlegungen an einigen Stellen wird Platz geschaffen für eine saubere Klärung grundlegender Probleme der Analysis auf der Schule.

Ein weiterer wichtiger Aspekt sei schon einleitend erwähnt. Wir heben in der Differentialrechnung von Beginn an auf die Bedeutung differenzierbarer Funktionen als „im Kleinen linearer" Funktionen ab. Dieser Gesichtspunkt der *lokalen Approximationseigenschaft der Tangente*, der sich durch den ganzen Kurs ziehen sollte, entspricht der heute üblichen

[1] Vgl. [17, S. 161]: „Der Anschaulichkeit … gebührt ein Ehrenplatz".

Auffassung von der Differentialrechnung als der Disziplin, die „komplizierte Funktionen mit Hilfe linearer Funktionen untersucht" (siehe [11]). Die wesentlichen Gründe, weshalb wir diesen Aspekt betonen, sind jedoch nicht innermathematischer, sondern didaktischer Natur. Die lineare Approximation von Funktionen ist nämlich genau die Intention, die man bei Anwendungsproblemen (etwa bei Bewegungsvorgängen in der Physik) verfolgt, so daß diese Auffassung besonders gut dazu beiträgt, unser eingangs formuliertes Lernziel einer verständigen Handhabung der Analysis bei Anwendungsproblemen zu erreichen. Auch für die äußerst nützliche Fehler- und Näherungsrechnung bildet die Linearisierung die Grundlage. Außerdem werden die Beweise einiger Regeln, insbesondere der Kettenregel, durchsichtiger.

Allerdings wird dieser Linearisierungsaspekt bei einem genetisch orientierten Kurs nicht der primäre sein, jedenfalls nicht in dem Sinne, daß man den Begriff „Approximierbarkeit" formal definiert[1]. Wenn beim Tangentenproblem die Bestimmung und nicht die Existenz von Tangenten interessiert (vgl. 4.1.), so ist wohl am natürlichsten die Betrachtung benachbarter Sekanten und Grenzübergang. Dies ist auch der Standpunkt von Wittmann [31a, S. 37ff.], der ja das Approximationsprinzip ansonsten besonders stark in den Vordergrund stellt (siehe [30; 31b]). Der Unterschied wird ganz deutlich, wenn man die Behandlung von Beispielen via Grenzübergang mit derjenigen in Kursen vergleicht, welche Differenzierbarkeit über die lineare Approximation definieren (wie etwa [8] oder [23a]). Es ist einfach falsch, wenn in [23a, S. 354] gesagt wird, man könne Grenzwerte nicht ausrechnen. Bei Benutzung einfacher Grenzwertregeln, die im ersten Durchgang nur festgehalten, aber nicht bewiesen zu werden brauchen, berechnet man z. B. für $f(x) = \frac{1}{x}$ sofort

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

oder für $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Man vergleiche gerade diese Beispiele mit [23a] (oder auch [8; 16])! Hier wird noch einmal deutlich, daß obige Vorwürfe berechtigt sind.

Wir fassen zusammen. Nach unserer Ansicht ist es weniger wichtig, was in einem Kurs gemacht worden ist; vielmehr kommt es darauf an, was am Ende tatsächlich bei den Schülern vorhanden ist. Aus Untersuchungen wie [29] folgt zwingend, daß der Oberstufen- und insbesondere der Analysisunterricht von Grund auf durchdacht werden muß. Wir meinen, daß der oben in seinen didaktischen Prinzipien und in Kapitel 4. in seinen Inhalten, Zielen und Methoden beschriebene erste Durchgang der Analysis als erste Stufe des Lernprozesses nicht übersprungen werden darf. Er ist unentbehrliche Voraussetzung für ein Verständnis der exakten Begriffe und Methoden der Analysis. Es ist jedoch nicht das primäre Ziel unseres Grundkurses, den Schüler von der unbedingten Notwendigkeit

1 höchstens in dem Sinn, daß man die approximierende lineare Funktion zu *bestimmen* versucht. Das im folgenden zur Approximierbarkeit Gesagte trifft jedoch hierauf genauso zu.

von Vertiefungen und Ergänzungen zu überzeugen (wie dies etwa bei Koch [21] der Fall ist). Vielmehr soll der Kurs schon für sich genommen einen vertretbaren Abschluß darstellen. Er soll (im Sinne des Spiralprinzips wenigstens vorläufig) abgeschlossene Resultate liefern, wobei der Schüler zwischen strengen Beweisen und Plausibilitätsüberlegungen unterscheiden können soll. Es muß gerade für den späteren Nicht-Mathematiker möglich sein, sich auf der Grundlage dieses Analysis-Kurses mit den analytischen Methoden in seinem fachlichen Schwerpunkt erfolgreich zu beschäftigen. Dies schließt keineswegs aus, daß die Absolventen dieses Grundkurses einer vertiefenden und erweiternden Beschäftigung mit Analysis gegenüber offen sind und bei Wahl eines mathematisch-naturwissenschaftlichen Schwerpunktes weitere Kurse in Analysis besuchen.

Wir müssen uns bei der nun folgenden Beschreibung des Kurses notgedrungen an vielen Stellen kurz fassen; insbesondere muß die methodische Fein-Ausarbeitung selbstverständlich dem jeweiligen Lehrer überlassen bleiben. An einer Stelle (nämlich beim Einstieg in die Differentialrechnung) wird exemplarisch ein Teil des Kurses detaillierter beschrieben. Es ist zu hoffen, daß auf der Grundlage unserer einleitenden Bemerkungen im folgenden hinreichend deutlich wird, wie ein solcher Kurs konkret aussehen sollte. Außerdem ist es vertretbar, ja notwendig, Zielvorstellungen und Forderungen zu artikulieren, auch ohne den Anspruch zu erheben, sie alle im Detail abschließend zu erfüllen. Insofern sind diese Ausführungen als Anregung für den Lehrer[1] und Didaktiker und als ein Beitrag zur Diskussion über die Analysis auf der Schule zu verstehen.

Zum Schluß dieses Kapitels sei bemerkt, daß der im folgenden vorgeschlagene Grundkurs wohl das Maximum dessen darstellt, was innerhalb 50–60 Stunden erarbeitet werden kann[2]. Unabdingbare Voraussetzung für diesen Zeitansatz ist ein Vorkurs, in dem vor allem das Umgehen mit Funktionen eingehend geübt und genügend Beispielmaterial zur Verfügung gestellt wird (siehe 3.). Des weiteren muß beachtet werden, daß die hier vorgeschlagene Art etwa der Herleitung der Ableitungsregeln oder der Gewinnung der Ableitung spezieller Funktionen weniger Zeit als üblich erfordert. Sollte der Kurs in der dargestellten Form jedoch mehr Zeit benötigen, als zur Verfügung steht, so wäre es mit obigen Prinzipien natürlich nicht vereinbar, wenn nur um Zeit zu gewinnen Schüleraktivität durch Lehrervortrag ersetzt würde. Vielmehr müßten dann *Kürzungen* vorgenommen werden, schlimmstenfalls durch *Streichung der Integralrechnung*. Eine Beschränkung auf ganzrationale Funktionen, wie sie für Grundkurse oft vorgeschlagen wird, ist jedoch mit unseren Prinzipien (vor allem dem Anwendungsbezug) nicht verträglich.

3. Voraussetzungen

Wir listen nun die Vorkenntnisse auf, welche für unseren Grundkurs notwendig sind. Sie werden zum Teil schon in der Sekundarstufe I vorbereitet und in einem „Vorkurs“ im ersten Teil von Klasse 11 fundiert bzw. neu geschaffen.

1 Dabei ist zu beachten, daß unser Kurs sicherlich einige Anforderungen an das didaktische Urteilsvermögen und die pädagogischen Fähigkeiten des Lehrers stellt.

2 Es wäre in jedem Falle besser, einen 4- oder 5-stündigen Grundkurs oder gar zwei halbjährige Grundkurse für die Analysis zur Verfügung zu haben. Unser Vorschlag versucht dennoch, den Rahmenbedingungen *eines* 3-stündigen halbjährigen Kurses gerecht zu werden.

Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen steht aus der Mittelstufe zur Verfügung; das Rechnen in $\mathbb{R}$ kann im Vorkurs wiederholend behandelt werden. Die Vollständigkeitseigenschaft von $\mathbb{R}$ – wie etwa der Satz von der Intervallschachtelung und der Satz des Archimedes – wird intuitiv verwendet, aber noch nicht genau artikuliert. Eine axiomatische Charakterisierung von $\mathbb{R}$ mit Vollständigkeitsbetrachtungen ist zu diesem Zeitpunkt nicht motiviert; dies gilt auch für den Verlauf des Grundkurses. Eine Diskussion der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ etwa bei der Einführung des Integrals „drängt sich auf" ([16, S. 46]) höchstens für den Mathematiker, nicht aber für den Schüler. Axiomatische Überlegungen gehören rückschauend ans Ende der Analysis (vgl. Artin [1] oder Griesel [13ab]), wo sie einen bedeutenden Beitrag zur Vertiefung des Verständnisses leisten können.

Die wichtigsten Vorkenntnisse für die Differential- und Integralrechnung betreffen die *Funktionenlehre*[1]. Der Schüler muß vertraut sein mit dem Funktionsbegriff: Funktion als eindeutige Zuordnung, Charakterisierung durch Definitionsbereich und Zuordnungsvorschrift, Unterscheidung von Funktion f und Funktionsterm f(x) bzw. Funktionswert $f(x_0)$ an der Stelle x_0, Graph[2], Wertebereich. Weiter sollen ihm der Begriff der Umkehrfunktion injektiver Funktionen sowie Addition (Superposition) und Verkettung von Funktionen bekannt sein. Eine unverzichtbare Voraussetzung für die Analysis ist ausreichende Übung im Zeichnen des Funktionsgraphen bei gegebener Gleichung und – in einfachen Fällen – im Aufstellen der Funktionsgleichung bei gegebenem Graphen. Hierbei sollen auch verschiedene Bezeichnungen für die 1. und 2. Achse und verschiedene Maßstäbe auf den Achsen vorgekommen sein. Weiter sollte dem Schüler klar sein, wie sich der Funktionsterm ändert, wenn auf den Graphen einfache geometrische Abbildungen angewandt werden: Translationen in Richtung der 1. oder 2. Achse, Spiegelungen oder senkrechte Affinitäten bezüglich der 1. oder der 2. Achse (siehe Kirsch [19]).

Als „Grundfunktionen" müssen (nicht zuletzt aufgrund ihrer Bedeutung für die außermathematischen Anwendungen) zur Verfügung stehen die Potenzfunktionen $\mathrm{pot}_s : x \mapsto x^s$ ($s \in \mathbb{R}$, vor allem $s \in \{-2, -1, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\}$), die (naiv eingeführten) Exponentialfunktionen $\exp_a : x \mapsto a^x$ ($a \in \mathbb{R} > 0$; vor allem $a \in \{2, 10\}$), die Winkelfunktionen sin und cos (naiver Winkelbegriff im Bogenmaß, natürlich ohne Problematisierung der Rektifizierbarkeit des Kreisbogens) sowie spezielle Funktionen wie die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$, die Signumfunktion $x \mapsto \operatorname{sign} x$ oder die Ganzteilfunktion $x \mapsto [x]$. Wenn der Logarithmenbegriff in der Mittelstufe schon angesprochen worden ist, können die Logarithmusfunktionen $\log_a : x \mapsto \log_a x$ ($a \in \mathbb{R} > 0$, vor allem $a \in \{2, 10\}$) wiederholend behandelt werden. Im anderen Fall bieten sich diese Funktionen als schöne Beispiele für Umkehrfunktionen an. Für unseren Grundkurs gehen wir in jedem Fall davon aus, daß auch die Logarithmusfunktionen zu den bekannten Grundfunktionen gehören. Wie schon in 2. bemerkt worden ist, lehnen wir für einen Grundkurs die Einführung des Logarithmus als Hyperbelflächenfunktion ab, da wir als Lösung von Flächenproblemen zunächst einmal bekannte und nicht neu zu definierende Funktionen wünschen. Dies ist wohl auch der Grund, warum sich dieser alte Vorschlag (F. Klein 1924) im Unterricht bisher nicht hat durchsetzen können.

1 Vgl. dazu auch [18].
2 Eine begriffliche Unterscheidung von Funktionen und ihren Graphen ist nicht ganz so wichtig; insbesondere identifizieren wir lineare Funktionen oft mit den (die zweite Achse schneidenden) Geraden.

Schließlich werden elementare Kenntnisse in Analytischer Geometrie benötigt (Steigung und Gleichungen bei Geraden).

4. Lernziele

Wir geben nun Lernziele für unseren Grundkurs an. Ihre Reihenfolge entspricht nicht ihrer Wichtigkeit, sondern ihrem ungefähren Auftreten im Kursverlauf. Ihre Gültigkeit ist aber nicht auf die Stelle beschränkt, an der sie festgehalten werden, sondern bezieht sich auf größere Abschnitte oder gar (wie z. B. bei den Lernzielen 4.1.4. und 4.2.2.) auf den gesamten Kurs. Man muß sich im folgenden also stets vor Augen halten, daß ein Katalog von Lernzielen nebst methodischen Bemerkungen gegeben wird, an dem sich eine unterrichtliche Lernsequenz orientieren muß, nicht jedoch eine Beschreibung dieses zeitlichen Verlaufs selbst. Nur für den Einstieg in die Differentialrechnung schildern wir den Kurs detaillierter.

Es sollte nicht von Lernzielen die Rede sein, wenn nicht die damit verbundene Problematik mitbedacht würde. Hier können nur einige stichwortartige Bemerkungen gemacht werden (genaueres siehe etwa [28]). Zum ersten werden unsere Lernziele, die einen mittleren Allgemeinheitsgrad haben, nicht differenziert und operationalisiert, da Unterricht nicht im Detail vorgeplant werden kann und auch komplexere Ziele angestrebt werden, die nicht „atomisierbar“ sind; zweitens sagen Lernziele über die Lernprozesse, die zu ihnen hinführen, i. a. nicht viel aus; und drittens entscheiden nicht die Lernziele über die Inhalte, sondern werden Inhalte auf andere Weise vorentschieden (siehe Kapitel 2.) und dann erst in Lernziele gefaßt.

4.1. Einführung in die Differentialrechnung

Wir beschreiben einen möglichen Einstieg etwas ausführlicher. Wie schon gesagt beginnen wir sogleich mit dem *Tangentenproblem.* Dabei soll der Akzent von Anfang an auf der Tangente als einer Geraden liegen, die sich lokal „dem Graphen optimal anpaßt“ ([31 a, S. 37]), und nicht auf der Tangente als Stützgerade. Als erstes konkretes Beispiel bietet sich das Tangentenproblem bei $x \mapsto x^2$ etwa an der Stelle $x_0 = 1$ an. Dabei ist im Rahmen dieses ersten Einstiegs keineswegs die *Existenz* der Tangente problematisch, wie dies einige moderne Schulbücher zur Analysis glauben machen wollen, sondern es interessiert die *Bestimmung* der offenbar vorhandenen Tangente, d. h. also die *Berechnung der Tangentensteigung.* Auch die Eindeutigkeit der Tangente braucht nicht problematisiert zu werden; eventuelle Zweifel werden im Verlauf der Behandlung des Beispiels ausgeräumt.

Die gesuchte Tangente gehört zum Geradenbüschel durch $P_0 = (1 \mid 1)$. Die Schüler stellen fest, daß für Punkte P „links“ von P_0 die Steigung m_{PP_0} der *Sekante* PP_0 kleiner und für die Punkte „rechts“ von P_0 größer als die gesuchte Tangentensteigung m_0 ist. Dies führt zur Berechnung einiger *Sekantensteigungen* für Punkte „nahe“ bei P_0. Bald wird die Vermutung $m_0 = 2$ geäußert. Die Begründung hierfür geschieht in üblicher Weise: Ein

Punkt $P \neq P_0$ auf dem Graph von $f: x \mapsto x^2$ hat die Form $P = (1+h \mid f(1+h)) = (1+h \mid (1+h)^2)$ mit $h \neq 0$. Die Sekantensteigung ist dann gleich dem *Differenzenquotienten*

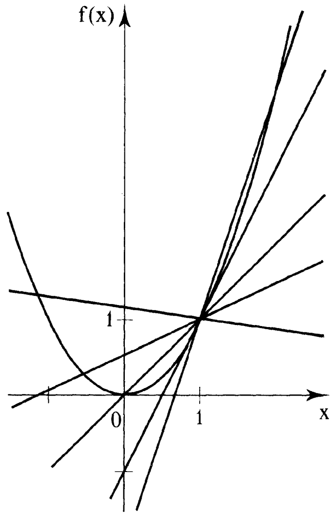

Fig. 1

$$m_{PP_0} = \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h.$$

Dieser Wert ist für $h > 0$ größer als 2 und für $h < 0$ kleiner als 2. Nun lassen wir P „immer näher" an P_0 heranrücken, d.h. h „gegen 0 gehen". Dadurch nähern sich die Sekanten PP_0 immer mehr der Tangente in P_0, so daß die approximativen Werte $m_{PP_0} = 2 + h$ die Tangentensteigung m_0 „immer besser annähern". Als einzige Möglichkeit kommt $m_0 = 2$ in Frage, wodurch das Problem gelöst ist. Die Berechnung der Tangentengleichung $y = 2x - 1$ ist nun einfach.

Im nächsten Schritt kann das Tangentenproblem für $f: x \mapsto x^2$ bei beliebiger Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ gelöst werden. Die Sekantensteigungen sind $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 2x_0 + h$, und analog wie eben ergibt sich als Tangentensteigung $m_0 = 2x_0$.

Allgemeiner kann nun festgehalten werden: Ist eine Funktion f und eine Stelle $x \in D$ gegeben, so sagen wir

> f hat an der Stelle x die *Tangentensteigung* $m :\Leftrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ strebt gegen m, wenn h gegen 0 geht.

Die *Tangente* in $P = (x \mid f(x))$ ist dann die Gerade durch P mit der Steigung $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Ein intuitiver Grenzwertbegriff in dieser (oder einer ähnlichen) Form ist keinesfalls „unmathematisch", sondern stellt durchaus eine geeignete Präzisierungsstufe für einen Einstieg in die Analysis dar[1]. Eine entsprechende Fassung des Limesbegriffs für einen Anfänger-Kurs in Analysis haben z. B. Artin [1, S. 23] oder Lang [27, S. 50] vorgeschlagen. Hierdurch ist sehr wohl (im Gegensatz zur Meinung von Kroll [23a, S. 35]) ein ausreichendes Fundament gegeben[2]. Die scheinbare didaktische Schwierigkeit, daß Zähler und Nenner des Differenzenquotienten gleichzeitig gegen 0 gehen, tritt in den ersten konkreten Beispielen noch nicht auf, da hier $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ durch h kürzbar ist. Allerdings ist darauf zu achten, daß nicht einfach $h=0$ gesetzt wird, da obiger Ansatz ja unter der Voraussetzung $h \neq 0$ vorgenommen wurde, sondern daß der *Grenzübergang* mit konkreten kleinen $|h|$ *im Sinne einer „immer besseren Annäherung"* deutlich wird (vgl. 5., Aufgabe 1c). Das „gegen ... gehen" ist dann in diesem ersten Anlauf klar und unproblematisch. Die Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten werden, sobald sie benötigt werden, ohne Begründung festgehalten. Im weiteren Verlauf des Kurses bietet sich dann Gelegenheit, die Präzisierung des Limesbegriffs ein Stück weiterzutreiben, etwa wenn die Ableitung der Sinusfunktion im Nullpunkt diskutiert wird.

Eine sofortige exakte „ε-Fassung" des Grenzwertbegriffs, wie sie in den modernen Schulbüchern propagiert wird, wäre dagegen ein Musterbeispiel für eine antididaktische Inversion. Sie würde in erster Linie zur Beruhigung des mathematischen Gewissens des Lehrers dienen; ihre Notwendigkeit kann jedenfalls von den Schülern noch nicht erkannt werden. Ebenso abzulehnen ist ein rein empirischer Tangentenbegriff, wie er etwa in [21, S. 15] beschrieben ist. Vielmehr kommt es – wie schon in 2. erläutert – hier (wie überhaupt in unserem Kurs) darauf an, auf einem Mittelweg zwischen Perfektion und Empirie mathematische Begriffe und Methoden zu entwickeln, die gegenstandsadäquat sind und eine spätere Präzisierung erlauben. Genau dies erfüllt der Artinsche Grenzwertbegriff.

Wir fahren fort in der Beschreibung des Kursverlaufes. Da wir die Analysis in engem Zusammenhang mit Anwendungen entwickeln wollen (siehe 2.), sollten möglichst frühzeitig Problemkontexte aus Physik, Wirtschaft o. a. miteinbezogen werden. Es ist allerdings wohl nicht zweckmäßig, sofort mit einem Anwendungsproblem in die Differentialrechnung einzusteigen, um nicht Schwierigkeiten zu häufen. Infolgedessen bietet sich direkt nach der Lösung des Tangentenproblems für $y = x^2$ eine analoge Behandlung etwa des *Geschwindigkeitsproblems*[3] (Momentangeschwindigkeit als Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeiten) für eine Weg-Zeit-Beziehung der Form $s = ct^2$ an. Da es sich zeigt, daß die Rechnungen genau wie oben verlaufen, liegt eine Erweiterung unserer Limes-Definition in dem Sinne nahe, daß die geometrische und physikalische Interpretation des Grenzwertes der Differenzenquotienten unter einen Hut gebracht werden (vgl. z. B. [7]). Auf diese Weise werden die Begriffe *Differenzierbarkeit* und *Ableitung* (*Differentialquotient*) festgehalten.

Indem jedem Zeitpunkt t des Beispiels die Momentangeschwindigkeit $v = 2ct$ zugeordnet wird, erhalten wir die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion. Dem entspricht allgemeiner für $f: x \mapsto cx^2$ die *Ableitungsfunktion* $f': x \mapsto 2cx$, die jeder Stelle x die Ableitung

1 Die im Grenzwertbegriff steckenden Quantoren lassen sich natürlich nicht wegzaubern, aber lernpsychologisch geeignet verpacken.
2 Dies wird durch unterrichtliche Erfahrungen voll bestätigt.
3 Die verbreitete Vertrautheit mit Tachometern macht erneut deutlich, daß nicht die *Existenz*, sondern die *Bestimmung* des Differentialquotienten problematisch ist.

(Tangentensteigung) $f'(x)$ zuordnet. Damit ist schon hier der Übergang vom Differentialquotienten (lokaler Ableitungsbegriff) zur Ableitung als Funktion (globaler Ableitungsbegriff) vollzogen.

Nach der Erarbeitung des Ableitungsbegriffs über das Tangenten- und das Geschwindigkeitsproblem bei quadratischen Funktionen kann im Unterricht die kubische Potenzfunktion $x \mapsto x^3$ besprochen werden. Vor allem die Diskussion über die Tangente im Nullpunkt ist sehr fruchtbar und festigt den Differenzierbarkeitsbegriff. Weiter tritt hier erstmals das Phänomen auf, daß Tangenten die Kurve noch in weiteren Punkten schneiden.

Im weiteren Verlauf müssen auch Gegenbeispiele wie $x \mapsto |x|$ oder $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ im Nullpunkt vorkommen. Wir brechen die ins Detail gehende Kursbeschreibung aus Platzgründen jedoch an dieser Stelle ab und beschränken uns im weiteren auf die Angabe der Lernziele und einzelner methodischer Hinweise. Zuerst fassen wir die Lernziele zusammen, die bis hierher schon angesprochen worden sind[1]:

Lernziel 4.1.1.:
Die Begriffe Sekante und Differenzenquotient[2] kennen. Sekantensteigungen zeichnerisch und rechnerisch bestimmen können.

Lernziel 4.1.2.:
Die Methode des Grenzübergangs vom Differenzen- zum Differentialquotienten[3] kennen und in einfachen Fällen ausführen können. Wissen, daß der Differentialquotient als Tangentensteigung gedeutet werden kann.

Lernziel 4.1.3.:
Den Begriff der Differenzierbarkeit[4] kennen; Beispiele und Gegenbeispiele[5] hierfür angeben können.

Lernziel 4.1.4.:
Einige wichtige außermathematische Anwendungen der Differentialrechnung kennen. Bei geeigneter Interpretation von x bzw. f(x) als (geometrische, physikalische oder sonstige) Größen die jeweilige Bedeutung des Differentialquotienten erläutern können.

Welche Anwendungen in welchem Umfang behandelt werden, soll hier offen bleiben. Neben den üblichen physikalischen Anwendungen seien erwähnt Bezüge zur Wirtschaft (etwa Grenzkosten) oder zur Biologie (vgl. [12]). Anregungen hierzu sind in jedem Schulbuch zu finden, meist allerdings säuberlich vom „mathematischen" Teil getrennt (siehe auch [10b, S. 470ff.]). All dies gilt für die Integralrechnung entsprechend.

1 und die, wie eingangs erwähnt, über die Stelle hinaus, an der sie auftreten, Bedeutung haben.
2 Um Mißverständnissen entgegenzutreten sei angemerkt, daß dieses Lernziel deshalb festgehalten wird, weil es für die am natürlichsten erscheinende Methode der Ableitungsbestimmung wichtig ist. Ansonsten haben Differenzenquotienten für uns wenig Bedeutung.
3 wie schon gesagt im Sinne einer immer besser werdenden Approximation.
4 Es versteht sich von selbst, daß im folgenden (wie auch im Unterricht) stets von differenzierbaren Funktionen die Rede ist, wenn Aussagen über Ableitungen gemacht werden. Dazu muß der Schüler natürlich auch nicht-differenzierbare Funktionen kennen.
5 Natürlich muß gesagt werden, daß die Behandlung von Gegenbeispielen auf der Basis unseres Ableitungsbegriffs nicht unproblematisch ist. Der Aspekt der lokalen Approximation ist hier eine große Hilfe.

Lernziel 4.1.5.:
Die Funktionsgleichung der Tangente (für eine Funktion an einer Stelle) aufstellen können.

Lernziel 4.1.6.:
Den Begriff der Ableitung kennen: Wissen, daß die Ableitung die Funktion ist, die jeder Stelle den betreffenden Differentialquotienten zuordnet. Ableitungen graphisch gegebener Funktionen (näherungsweise) graphisch bestimmen können.

Der letzte Satz in 4.1.6. zielt nicht nur auf ein rein empirisches Vorgehen ab. So kann etwa die Ableitung der „Halbkreisfunktion" $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ mittels geometrischer Überlegungen exakt ermittelt werden.

Lernziel 4.1.7.:
Stellen von vorgegebener Tangentensteigung (zu gegebener Funktion) bestimmen können.

Die „Grundfunktionen" aus Kapitel 3. werden im Verlaufe des Kurses sämtlich abgeleitet:

Lernziel 4.1.8.:
Die Ableitungen der Funktionen pot_s, $\exp_a$, $\log_a$, sin, cos angeben können.

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen können geometrisch bestimmt werden (siehe etwa [26, S. 170]). Die Ableitungen der Exponentialfunktionen können bis auf spezifische (vorerst unbekannte) konstante Faktoren ermittelt werden:

$$\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h-1}{h}, \text{ also } \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = C_a \cdot a^x,$$

wobei die Existenz des Limes $C_a = \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$ unproblematisch ist. Dabei kann noch ganz einfach festgestellt werden, daß $C_a = 1$ ist für ein bestimmtes a zwischen 2 und 3 (siehe etwa [9]), nämlich für $a = e$ (Eulersche Zahl). Aus der Ableitungsregel für $f(cx)$ (siehe Lernziel 4.1.9.) folgt dann $C_a = \ln(a)$, wobei $\ln = \log_e$ gesetzt wird. Die Bestimmung des genauen Werts der Konstanten e kann durchaus bis zur Integralrechnung aufgeschoben werden. Die Ableitung $\log_a'$ ergibt sich geometrisch durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden. Oder aber kann in bekannter Weise $\log_a' x = C_a' \cdot \frac{1}{x}$ berechnet werden, wobei der Limes

$$C_a' = \lim_{h\to 0} \log_a\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)$$

jedoch viel größere didaktische Schwierigkeiten bereitet.

Bei der Bestimmung der Ableitung von ganzrationalen Funktionen tritt erstmals das Bedürfnis nach Ableitungsregeln auf. Weitere Beispiele verlangen nach und nach sämtliche Regeln, um das Differenzieren zu erleichtern:

Lernziel 4.1.9.:

Die wesentlichen Ableitungsregeln (für $(af)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$, $\left(\frac{f}{g}\right)'$ und $(f \circ g)'$) kennen, begründen und anwenden können. Die Regeln für $(f+a)'$, $(af)'$, $(x \mapsto f(x+a))'$ und $(x \mapsto f(ax))'$ geometrisch interpretieren können.

Die geforderten geometrischen Interpretationen bringen zum Ausdruck, wie sich der Graph der Ableitung ändert, wenn auf den gegebenen Funktionsgraphen eine der in Kapitel 3. genannten geometrischen Abbildungen angewandt wird. Sie lassen sich zu exakten Beweisen ausbauen (s. [19]), so daß die letzteren vier Regeln geometrisch begründet werden können (vgl. [21, S. 25/26]). Die übrigen Ableitungsregeln müssen rechnerisch bewiesen werden. Es sei betont, daß die Regeln für $(f(x+a))'$ und $(f(ax))'$ im Sinne unseres genetischen Aufbaus nicht erst als Spezialfälle der Kettenregel behandelt werden, sondern dieser vorausgehen und zu ihr hinführen.

Falls nicht schon vorher das Verhalten des Zählers des Differenzenquotienten besprochen worden ist, wird erstmals beim Beweis der Produktregel die Eigenschaft

$$f(x+h) \to f(x) \quad \text{für} \quad h \to 0,$$

d.h. die *Stetigkeit* der betrachteten Funktion benötigt. Hier tritt also dieser Begriff in ganz natürlicher Weise auf und kann festgehalten sowie intuitiv am Graphen interpretiert werden[1]. Daß *jede differenzierbare Funktion stetig* ist (didaktisch vielleicht geschickter ist die Kontraposition dieses Satzes, vgl. [13a, S. 76]), ist auch bei unserem Aufbau sofort einsichtig. Deshalb spielt die Stetigkeit in der Differentialrechnung für uns überhaupt keine Rolle; auch dies entspricht dem Artinschen Konzept [1] (vgl. auch Freudenthal [10b, S. 508ff.]).

Bei großem Zeitmangel ist es vertretbar, auf Produkt- und Quotientenregel zu verzichten und die Kettenregel auf die Spezialfälle $(f(x+a))'$ und $(f(ax))'$ zu beschränken; bzgl. der hieraus resultierenden Konsequenzen für die zugrundeliegende Funktionenklasse siehe [18].

Der Beweis der Kettenregel wird recht einfach, wenn der lokale Approximationsaspekt beachtet wird (s. etwa [14]). Mit diesem Gesichtspunkt, den wir schon in 2. herausgestellt haben, beschließen wir unsere Erörterungen der Anfänge der Differentialrechnung. Er sollte wie gesagt bereits bei der Definition des Differentialquotienten ins Spiel kommen und sich durch den gesamten Kurs ziehen. Dadurch wird das Verständnis für den Tangentenbegriff wesentlich gefördert[2]. Die lineare Approximationseigenschaft der Tangente soll beim Schüler mit der Vorstellung

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0) \quad \text{für kleine} \quad |h|$$

(die durchaus intuitiv sein darf, vgl. Wittmann [26, S. 185]) verbunden werden, d.h. in der Umgebung von x_0 wird f durch die Tangentenfunktion

$$x \mapsto f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)$$

1 Zur Bedeutung der Stetigkeit für den Graphen vgl. [15].

2 Vgl. Fußnote 5 auf Seite 172.

ersetzt[1]. Wir können für den Grundkurs in diesem Zusammenhang kein Lernziel formulieren, das einigermaßen operational ist. Ein Lernziel folgender Art, das in einem aufbauenden Kurs angestrebt werden müßte, wird jedoch in unserem Kurs schon vorbereitet: *Verstehen, daß die Tangente die gegebene Funktion in der Nähe der Berührstelle besser annähert als jede andere lineare Funktion.* Wir kommen in Abschnitt 4.3. im Zusammenhang mit Funktionswertabschätzungen nochmals hierauf zurück.

4.2. Einführung in die Integralrechnung

Als die beiden gängigen Möglichkeiten zum Einstieg in die Integralrechnung bieten sich an das Flächenproblem (*bestimmtes Integral*) oder das Problem der Umkehrung des Differenzierens (*unbestimmtes Integral*). Bei zweitem erscheint der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung als Definition, was zwar ein schnelles Berechnen von Integralen und dadurch einen scheinbar schnellen Vorstoß zu den Anwendungen erlaubt, jedoch ein Verständnis für die Analysis eher untergraben kann (siehe das extreme Negativ-Beispiel [25b]). Daher entscheiden wir uns in diesem Vorschlag für die erste Alternative. Ziel ist jedoch auch in unserem Kurs ein rasches Vordringen zum Hauptsatz und zu den Anwendungen. Deshalb hat Teil 1 von Lernziel 4.2.1. geringere Bedeutung.

Es gibt eine weitere, bisher in der didaktischen Literatur nicht erwähnte Möglichkeit des Einstiegs in die Integralrechnung, nämlich das Flächenproblem mit variabler oberer Grenze (*Integralfunktion*)[2]. Die Lösung dieses Problems – welches im übrigen Lernziel 4.1.4. entspricht – führt sofort zum Hauptsatz und vermeidet den Umweg über Ober- und Untersummen. Möglicherweise würde dieser Einstieg am besten in die Konzeption unseres Kurses passen, auch wegen des sich ergebenden zeitlichen Vorteils. Wir wählen dennoch den Weg über das bestimmte Integral, da hier größere Erfahrungen vorliegen und auf diese Weise der Hauptsatz am deutlichsten als der „Höhepunkt" der Analysis erscheint. In der noch zu schildernden Form (nur kurze Integralberechnungen mittels Näherungssummen, dann schnelle Hinführung zum Hauptsatz) trifft auch dieser Weg völlig die Intentionen unseres Kurses und bleibt im zeitlichen Rahmen.

Wir beginnen also die Integralrechnung mit dem Flächenproblem, etwa bei der Funktion $x \mapsto x^2$ nach kurzer Betrachtung linearer Funktionen. Analog 4.1. ist dabei nicht die *Existenz* des Flächeninhalts problematisch, sondern seine *Berechnung*[3] (vgl. [1, S. 47]). Diese erfolgt durch Approximation mittels Ober- und Untersummen[4] bei äquidistanter Intervalleinteilung. Durch Grenzübergang läßt sich dann der Flächeninhalt $\int_a^b f$ in Bei-

1 Mathematisch handelt es sich um die Beziehung $f(x_0+h) = f(x_0) + h \cdot d_{f,x_0}(h)$, wobei d_{f,x_0} eine in der Umgebung von $h=0$ definierte und dort stetige – und das bedeutet in diesem Zusammenhang soviel wie „annähernd konstante" – Funktion mit $d_{f,x_0}(0) = f'(x_0)$ ist. Für $h \neq 0$ ist d_{f,x_0} die Differenzenquotientenfunktion, die in [8] und [14] eine zentrale Rolle bei der Definition der Ableitung spielt (wobei dort jedoch der Akzent nicht auf dem „annähernd konstant sein" liegt).

2 In ähnlicher Weise führt Artin [1, S. 47ff.] in die Integralrechnung ein. Vgl. auch das Referat von A. Kirsch am 21. 10. 1974 in der Reinhardswaldschule bei Kassel.

3 Welche Eigenschaften einer noch zu bestimmenden Inhaltsfunktion (Bewegungsinvarianz, Additivität etc.) tatsächlich benutzt werden, kann einer vertiefenden Analyse in Leistungskursen vorbehalten bleiben.

4 Es sei nochmals betont, daß Ober- und Untersummen für uns nur kurzzeitig Bedeutung zur Berechnung bestimmter Integrale haben, solange der Hauptsatz noch nicht bekannt ist.

spielen berechnen[1]. Zum Grenzwertbegriff wurde schon in 4.1. das Wesentliche gesagt (Approximation!):

Lernziel 4.2.1.:
Bestimmte Integrale in einfachen Fällen (elementargeometrisch oder mittels Ober- und Untersummen) berechnen können. Wissen, daß das bestimmte Integral für nichtnegative Funktionen als Flächeninhalt gedeutet werden kann.

Zu beachten ist dabei, daß schon frühzeitig negative Funktionswerte auftreten. Zum Verständnis dafür, daß Flächen unterhalb der x-Achse negativ zählen, verhelfen physikalische Beispiele. (Es erübrigt sich, von „orientierten Flächen" zu reden). Überhaupt sollte wieder möglichst rasch der Anwendungsaspekt ins Spiel gebracht werden. So kann analog 4.1. direkt nach dem Flächenproblem das Arbeitsproblem (variable Kraft längs eines Weges) behandelt werden. Wir formulieren entsprechend 4.1.4. ein Lernziel, das für die gesamte Integralrechnung von Bedeutung ist und erst nach Erarbeitung des Hauptsatzes richtig zum Tragen kommen kann:

Lernziel 4.2.2.:
Einige wichtige außermathematische Anwendungen der Integralrechnung kennen. Bei geeigneter Interpretation von x bzw. f(x) als (geometrische, physikalische oder sonstige) Größen die jeweilige Bedeutung des bestimmten Integrals erläutern können.

Hierbei sollten auch Integrale der Form $\int_a^b Q$ behandelt werden, wo $x \mapsto Q(x)$ die Querschnittsfunktion eines Körpers (nicht notwendig eines Rotationskörpers) ist.

Zur Vereinfachung der Berechnung des bestimmten Integrals in Beispielen werden Ableitungsregeln benötigt:

Lernziel 4.2.3.:
Die Regeln für $\int_a^b f + \int_b^c f$, $\int_a^b cf$ und $\int_a^b (f \pm g)$ kennen, geometrisch begründen und anwenden können.

Anfangs genügt dabei die Beschränkung auf Integrale $\int_a^b f$ mit $a \leqq b$. Die Regel $\int_b^a f = -\int_a^b f$ wird in natürlicher Weise bei der Besprechung der Integralfunktion (siehe 4.2.4.) auftauchen. Die Begründung der Regel für $\int_a^b (f \pm g)$ kann bis nach dem Hauptsatz aufgeschoben werden, wo sie zwanglos abfällt.

Schon von Beginn an sollten Beispiele auftreten, bei denen die obere Intervallgrenze variabel ist, um den Hauptsatz vorzubereiten. Dies wird durch Beispiele aus der Physik (etwa Arbeit) o.a. motiviert. Dann kann der Begriff der Integralfunktion erarbeitet werden:

1 Es ist klar, daß im folgenden (wie auch im Unterricht) stets von integrierbaren Funktionen die Rede ist, wenn Aussagen über Integrale gemacht werden. Daß stetige Funktionen integrierbar sind, wird der Anschauung entnommen (vgl. [10b, S. 519]).

Lernziel 4.2.4.:
Den Begriff der Integralfunktion kennen: Wissen, daß die Integralfunktion $x \mapsto \int_a^x f$ als Flächenfunktion beschrieben werden kann. Die Integralfunktion in einfachen Fällen bestimmen können.[1]

Bisher hatte die Integralrechnung mit der Differentialrechnung noch nichts zu tun. Nun läßt sich durch Bestimmung der Flächenfunktion $F: x \mapsto \int_a^x f$ in konkreten Beispielen der Hauptsatz in seiner Form $F' = f$ schon vermuten. Der Beweis kann in bekannter Weise geführt werden: Es ist

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0 + h} f,$$

und elementargeometrisch gilt offenbar (für $h > 0$)

$$h \cdot \min_{x \in [x_0;\, x_0 + h]} f(x) \leq \int_{x_0}^{x_0 + h} f \leq h \cdot \max_{x \in [x_0;\, x_0 + h]} f(x),$$

so daß (nach entsprechender Betrachtung für $h < 0$) bei Grenzübergang $F'(x_0) = f(x_0)$ resultiert, sofern nur für $h \to 0$ auch $f(x_0 + h) \to f(x_0)$ geht, d.h. sofern f stetig ist. Es zeigt sich auch hier wieder, daß die *Stetigkeit* in natürlicher Weise auftritt und bei Bedarf diskutiert werden kann. Sie ist ansonsten auch in der Integralrechnung von untergeordneter Bedeutung, da die von uns betrachteten Funktionen (insbesondere in den Anwendungen) meist die Ableitungen mehrfach differenzierbarer Funktionen sind.

Lernziel 4.2.5.:
Den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der ersten Form kennen: Wissen und begründen können, daß die Ableitung der Integralfunktion einer (stetigen) Funktion gleich dieser Funktion ist (Differenzieren als Umkehrung des Integrierens).

Es sollte deutlich herausgearbeitet werden, daß der Hauptsatz sozusagen die „Krönung" der Analysis ist. Er ist aber vor allem ungemein nützlich, indem er in seiner zweiten Form die Integralberechnung auf die Ableitungsberechnung zurückführt. Die Begründung kann in unserem Kurs so geführt werden: Ist F eine Stammfunktion zu f und ist $G(x) = \int_a^x f$, so gilt nach dem Hauptsatz in erster Form $F' = G'$, d.h. $(F - G)' = 0$. Aus der Anschauung ist unmittelbar ersichtlich, daß Funktionen mit verschwindender Ableitung konstant sein müssen. Mathematisch kommt hier natürlich der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (oder eine äquivalente Vollständigkeitseigenschaft, vgl. etwa [5]) ins Spiel, doch im ersten Durchgang auf unserem „mittleren" Niveau sind Anleihen aus der Anschauung erlaubt, ja notwendig (siehe auch [4]). Eine solche Anleihe schmälert nicht den mathematischen Charakter der Begründung des Hauptsatzes – wenn sie nur *bewußt* geschieht – und steht einer späteren Präzisierung in Leistungskursen nicht im Wege. Infolgedessen können wir oben weiter schließen, daß sich F und G nur um eine Konstante unterscheiden. Wir halten allgemeiner als Lernziel fest:

1 auch elementargeometrisch!

Lernziel 4.2.6.:
Den Begriff der Stammfunktion kennen. Wissen und anschaulich begründen können, daß sich zwei Stammfunktionen derselben Funktion[1] nur um eine Konstante unterscheiden.

Die Konstante zu F und G ist schnell bestimmt, so daß wir weiter formulieren:

Lernziel 4.2.7.:
Den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der zweiten Form kennen: Wissen und begründen können, daß das bestimmte Integral einer Funktion f mittels einer Stammfunktion F als $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ berechnet werden kann (Integrieren als Umkehrung des Differenzierens).

Schließlich ist klar

Lernziel 4.2.8.:
Den Hauptsatz (zweite Form) zur Integralberechnung anwenden können. Die Stammfunktionen der „Grundfunktionen" (pot_s, exp_a, sin, cos) angeben können.

4.3. Innermathematische Anwendungen der Differentialrechnung

Wir kommen in diesem Abschnitt zu den geläufigen *Funktionsuntersuchungen* und *Extremwertaufgaben* sowie zu Elementen der *Fehler- und Näherungsrechnung*. Aus Zeitgründen sind Beschränkungen in der Stoffauswahl hier notwendig und möglich. Wir schlagen einen weitgehenden Verzicht auf die 2. Ableitung und eine begrenzte Behandlung von Extremwertaufgaben vor. Notfalls läßt sich dieser Abschnitt noch weiter straffen.

Bereits im Vorkurs (siehe Kapitel 3.) werden *Monotonie* und *Extrema* von Funktionen bei der Besprechung der „Grundfunktionen" behandelt. Es ist wichtig, daß der Schüler (strenge) Monotonie bzw. absolute oder relative Extrema einer Funktion mit Hilfe des Funktionsterms *charakterisieren* und in einfachen Fällen (wie etwa bei quadratischen Funktionen) Extrema auch ohne Differentialrechnung bestimmen kann. Dagegen soll der Schüler die Ableitung zu *Kriterien* für das Vorliegen oder Nicht-Vorliegen von Monotonie oder Extrema verwenden. Es geht hier also (eigentlich entgegen der Überschrift) vor allem um ein *vernünftiges Umgehen mit Funktionen*, wozu die Differentialrechnung nur ein Hilfsmittel darstellt. In diesem Sinne sind die folgenden Lernziele zu verstehen:

Lernziel 4.3.1.:
Auf der 1. Ableitung basierende hinreichende Kriterien für strenge Monotonie kennen, anschaulich begründen und an geeigneten Beispielen verifizieren können.

Ein exakter Beweis erfordert bekanntlich (etwa) den Mittelwertsatz, so daß hier wiederum Tatsachen bewußt der Anschauung entnommen werden (vgl. [4] und Abschnitt 4.2.).

1 definiert auf einem Intervall.

Lernziel 4.3.2.:
Wissen und geometrisch begründen können, daß an relativen Extrema die 1. Ableitung verschwindet.

Dieses Kriterium kann etwa bei der *Bestimmung von Funktionen* aus vorgegebenen Daten angewandt werden.

Lernziel 4.3.3.:
Auf der 1. Ableitung basierende hinreichende Kriterien für relative Extrema kennen, geometrisch begründen und auf geeignete Beispiele anwenden können.

Diese Kriterien sind im Vergleich zu denjenigen mittels 2. Ableitung weniger bekannt. Sie besagen, daß f an der Stelle x_0 ein relatives Maximum bzw. Minimum hat, wenn $f'(x_0) = 0$ ist und f' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel von „+" nach „−" bzw. von „−" nach „+" hat. Hierdurch wird das Verständnis mehr gefördert als durch die üblicherweise benutzten (und natürlich bei uns nicht verbotenen) Kriterien mittels 2. Ableitung. Die Begründung basiert auf dem Kriterium aus Lernziel 4.3.1.

Lernziel 4.3.4.:
Einfache Funktionen und deren Graphen nach folgenden Gesichtspunkten diskutieren können:

a) Symmetrie

b) Achsenschnittpunkte

c) Monotonie

d) Extrema.

Teile solcher Kurvendiskussionen gehören schon in den Vorkurs.

Extremwertaufgaben sollten auf wenige und wirklichkeitsnahe Beispiele (z. B. aus Geometrie oder Physik) beschränkt werden. Dabei sollten auch Beispiele mit Randextrema behandelt werden, um das verbreitete Rezepteanwenden zu verhindern und Monotonieargumente zu üben. Auch elementar lösbare Aufgaben sollten eingestreut werden, um das Urteilsvermögen für die Verwendung angemessener mathematischer Werkzeuge zu schärfen:

Lernziel 4.3.5.:
Geeignete Extremwertaufgaben (elementar oder mittels Differentialrechnung) lösen können.

Um den lokalen Approximationsaspekt durchgängig zu berücksichtigen (siehe 2. und 4.1.), können als weitere Anwendung der Differentialrechnung erste Anfänge der Fehler- und Näherungsrechnung behandelt werden. Wir erwähnen hier die näherungsweise Funktionswertberechnung. Sie basiert auf der schon erläuterten Ersetzung einer Funktion f in der Umgebung einer Stelle x_0 durch die Tangentenfunktion:

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0).$$

Beispiele für $x_0 = 0$ sind etwa $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ oder $\ln(1+x) \approx x$:

Lernziel 4.3.6.:
Die Approximationseigenschaft der Tangente zur näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten verwenden können.

5. Testaufgaben

Wir geben abschließend noch Testaufgaben für einige der in Kapitel 4. besprochenen Lernziele an. Dabei beschränken wir uns auf solche Aufgaben, die nicht völlig selbstverständlich sind. Die Nummer der Testaufgabe stimmt mit derjenigen des zugehörigen Lernziels (oder eines Teils desselben) überein.

4.1.1./4.1.2.
Gegeben seien die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{10} x^2$ und der Punkt $P_0 = (x_0 | f(x_0))$ mit $x_0 = 4$.

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Steigungen der Sekanten durch P_0 und die Punkte $P = (x | f(x))$ mit $x = 0$; $x = 8$; $x = 2$; $x = 6$; $x = 3$, $x = 5$; $x = 3{,}5$; $x = 4{,}5$;

b) Bestimmen Sie durch Grenzübergang die Tangentensteigung in P_0;

c) Für welche Werte von x unterscheidet sich die Steigung der Sekante durch P_0 und $P = (x | f(x))$ um weniger als 0,01 von der Tangententsteigung in P_0?

4.1.3.
Sind folgende Funktionen f an den angegebenen Stellen x_0 differenzierbar?

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$, $x_0 = 0$;

b) $f(x) = |x^2 - 1|$, $x_0 = 1$;

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$.

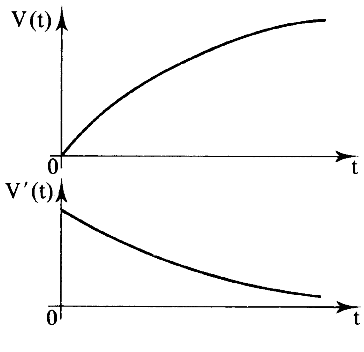

Fig. 2

4.1.4.
Nebenstehend sind die Graphen einer Funktion $t \mapsto V(t)$ und deren Ableitungsfunktion gegeben. V(t) gibt für die Füllung eines Schwimmbeckens das Wasser-Volumen zur Zeit t an. Erläutern Sie die physikalische Bedeutung von V′ und interpretieren Sie den Verlauf des Graphen von V′.

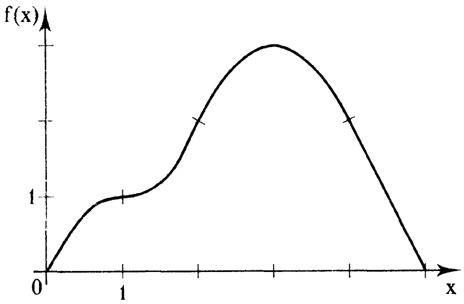

Fig. 3

4.1.6.
Bestimmen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion der graphisch gegebenen Funktion f (die Kurve y = f(x) setzt sich zusammen aus Teilen von nach oben oder unten geöffneten verschobenen Normalparabeln und einem Geradenstück).

4.1.7.
In welchen Punkten sind die Tangenten an den Graphen von $f: x \mapsto \frac{1}{6}x^3$ parallel zur 1. Winkelhalbierenden?

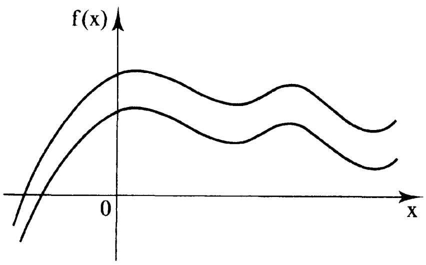

Fig. 4

4.1.9.
Gegeben seien die Graphen zweier Funktionen f_1 und f_2. Was können Sie über die Ableitungsfunktionen f_1' und f_2' aussagen?

4.2.1.
Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_0^2 (x+1)\,dx$;

b) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Die Testaufgabe 4.2.1. ist für den Beginn der Integralrechnung gedacht, bevor die Integrale mittels Stammfunktionen berechnet werden können.

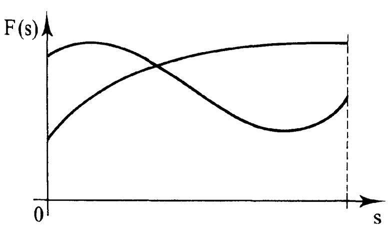

Fig. 5

4.2.2.
Bei welchem der nebenstehend graphisch dargestellten Vorgänge 1 und 2 wurde die größere Arbeit aufgewendet? (Begründung!)

4.2.3.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt der „Halbellipse" zwischen der x-Achse und dem Graphen von

$$f:[-1;1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}.$$

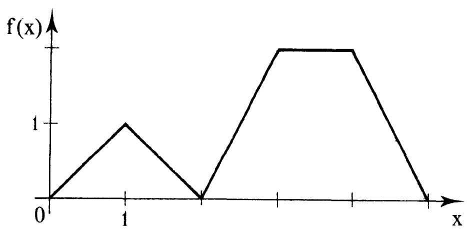

Fig. 6

4.2.4.
Bestimmen Sie zur graphisch gegebenen Funktion f graphisch die Funktion F: $x \mapsto \int_0^x f$.

4.2.5.
Es sei $F:[0;3] \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $F(u)$ = Flächeninhalt zwischen Gerade $x = u$, positiver x-Achse und Graph der Sinus-Funktion. Was ist die Ableitung F' von F?
Diese Aufgabe muß natürlich gestellt werden, bevor der Sinus explizit integriert werden kann.

4.2.6.
Nach der Kettenregel ist für $F(x) = (\sin x)^2$ und $G(x) = -(\cos x)^2$

$$F'(x) = 2\sin x \cos x = G'(x).$$

Was folgt hieraus für die Graphen von F und G?

4.3.1.
In welchem Intervall $[0; b]$ $(b > 0)$ steigt der Graph der Funktion f mit $f'(x) = 2x\cos x$?

4.3.2.
Bestimmen Sie eine kubische Parabel $y = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, die durch 0 geht und in $(-1\,|\,5)$ ein relatives Maximum hat.

4.3.3.
An welchen Stellen zwischen $x = 1$ und $x = 5$ hat der Graph der Funktion $x \mapsto \sin x - x \cdot \cos x$ Extrema, und welcher Art sind sie?

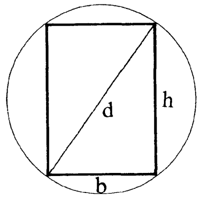

Fig. 7

4.3.5.
Aus einem zylindrischen Baumstamm von kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser d) soll ein Trägerbalken von rechteckigem Querschnitt (Breite b, Höhe h) so herausgesägt werden, daß die horizontale Tragfähigkeit T des Balkens möglichst groß wird. T ist direkt proportional zu b und zu h^2. Be-

weisen Sie, daß sich Breite b_0 und Höhe h_0 des Balkens mit maximaler Tragfähigkeit zu d wie $b_0 : h_0 : d = \sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ verhalten.

4.3.6.
Es ist $\ln 2 \approx 0{,}693$. Berechnen Sie näherungsweise (ohne Tafel) $\ln 2{,}06$ und $\ln 1{,}98$.

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. Werner Blum, Gesamthochschule, 35 Kassel, Heinrich-Plett-Str. 40

Eingangsdatum: 23.12.1974

Literatur

[1] Artin, E.: A Freshman Honors Course in Calculus and Analytic Geometry. Taught at Princeton University. University of Virginia 1957.
[2] Baumgartner, E.: Zur Einführung der Logarithmus- und Exponentialfunktionen in der Sekundarstufe II. In: Didaktik der Mathematik 1 (1975), S. 1–28.
[3] Bergold, H.: Winkelfunktionen im Unterricht. In: Didaktik der Mathematik 1 (1973), S. 12–23.
[4] Blum, W.: Bemerkungen zum Analysisunterricht am Beispiel des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. In: Didaktik der Mathematik 4 (1974), S. 305–313.
[5] Coers, H.: Lokales Ordnen um den sogenannten Schrankensatz der Differentialrechnung. In: Der Mathematikunterricht 4 (1969), S. 83–93.
[6a/b] Corbach, W. et al.: Mathematikwerk für Gymnasien, Oberstufe, Analysis I/II. Düsseldorf: Schwann [5]1973/74.
[7] Deleeuw, K.: Calculus. New York: Harcourt, Brace and World 1966.
[8] Diller, J. u. A. Breitkopf: Telekolleg II Mathematik, Differential- und Integralrechnung II. München: TR-Verlagsunion 1973.
[9] Dücker, H.: Zur Einführung der Exponentialfunktion. In: Praxis der Mathematik 5 (1963), S. 126.
[10a/b] Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1/2. Stuttgart: Klett 1973.
[11] Führer, L. u. H. Karcher: Wie man Mathematik nicht unterrichten sollte. Manuskript Universität Bonn 1973.
[12] Greger, K.: Einige mathematische Modelle biologischen Wachstums. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 5 (1973), S. 279–284.
[13a/b] Griesel, H.: Analysis I/II. Hannover: Schroedel [5]1974/[3]1973.
[14] Griesel, H.: Einführung in die Analysis. Vortrag Gesamthochschule Kassel 1974.
[15] Kahle, D.: Charakterisierung der Stetigkeit reeller Funktionen durch Eigenschaften ihrer Graphen. In: Mathematisch-Physikalische Semesterberichte 1 (1971), S. 55–60.
[16] Karcher, H.: Analysis auf der Schule. In: Didaktik der Mathematik 1 (1973), S. 46–69.
[17] Kemper, H.: Kritische Bemerkungen zu einigen Kursen der Kollegstufe. In: Didaktik der Mathematik 2 (1974), S. 159–162.
[18] Kirsch, A.: Vorschläge zur Orientierung und Beschränkung der Funktionenlehre an der Schule. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 1 (1959), S. 16–19.
[19] Kirsch, A.: Ein geometrischer Zugang zu den Grundbegriffen der Differentialrechnung. In: Der Mathematikunterricht 2 (1960). S. 5–21.
[20] Klingen, L.: Empirische Ansätze zur Neuorientierung des Curriculum. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1971, S. 103–116. Hannover: Schroedel 1972.
[21] Koch, A.: Eine propädeutische Behandlung der Analysis. In: Der Mathematikunterricht 5 (1968), S. 12–37.
[22] Kollegstufe NW. Strukturförderung im Bildungswesen des Landes Nordrhein-Westfalen, Heft 17. Ratingen: Henn 1972.
[23a/b] Kroll, W.: Ein Vorschlag zur Behandlung der Analysis in der zukünftigen Kollegstufe, Teil I/II. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 6 (1974), S. 350–360, 7 (1974), S. 420 bis 426.

[24] Krygowska, A. Z.: Processus de la mathématisation dans l'enseignement. In: Educational studies in mathematics 1/2 (1968), S. 9–16.
[25a/b] Kusch, L. u. H.-J. Rosenthal: Mathematik für Schule und Beruf. Teil 3: Differentialrechnung Teil 4: Integralrechnung. Essen: Girardet ^{4}1973/^{2}1974.
[26] Lambacher, T. u. W. Schweizer: Analysis. Stuttgart: Klett ^{9}1974.
[27] Lang, S.: A First Course in Calculus. Reading: Addison-Wesley ^{3}1973.
[28] Messner, R.: Funktionen der Taxonomien für die Planung von Unterricht. In: Zeitschrift für Pädagogik (1970), S. 755–779.
[29] Nägerl, H. et al.: Über die Schwierigkeiten der Studienanfänger in Medizin im Umgang mit der Mathematik. In: Didaktik der Mathematik 2 (1973), S. 143–157.
[30] Wittmann, E.: Die Approximation als verbindendes Element in der Analysis. In: Mathematisch-Physikalische Semesterberichte 2 (1972), S. 174–186.
[31a/b] Wittmann, E.: Infinitesimalrechnung I/II in genetischer Darstellung. Ratingen: Henn 1973.
[32] Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: Vieweg 1974.