In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1975. Vorträge auf der 9. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 11. bis 14. März 1975 in Saarbrücken, Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover, S. 15-19

Werner BLUM, Kassel

Didaktische Fragen des linearen Optimierens in der Sekundarstufe I

0. Einleitung

Lineares Optimieren (kurz: LO) gehört heute zu den wichtigsten Gebieten der anwendbaren Mathematik. Auch für den Schulunterricht wurde die Behandlung von LO vorgeschlagen. Die diesbezüglichen didaktischen Publikationen beschränkten sich bisher jedoch meist im wesentlichen auf einen mathematischen Nachhilfeunterricht. Didaktische Argumente sind in größerem Maße nur von Glatfeld [1] (für die Hauptschule) und von Schick [2] (für die Kollegstufe) gegeben worden.

Im folgenden wird versucht, eine zusammenfassende Darstellung einiger wesentlicher didaktischer Fragen des LO in der Sekundarstufe I zu geben. Gleichzeitig sind diese Ausführungen ein Plädoyer für eine stärkere Berücksichtigung des LO im Unterricht.

1. Weshalb LO in der Mittelstufe?

1. Optimierungsaufgaben bieten die Möglichkeit, reale Problemsituationen auf elementarem Niveau zu mathematisieren.

2. LO-Aufgaben können in besonderem Maße zur Motivation der Schüler beitragen, vor allem durch
   - den Umweltbezug der Probleme
   - eine aus interessanten Fragestellungen erwachsende Neugierhaltung der Schüler
   - den schüleradäquaten Stoff
   - die Möglichkeit des Experimentierens
   - die Möglichkeit überraschender Lösungen
   - Erfolgserlebnisse infolge eigener Lösungen
   - die Anschaulichkeit bei Problemen mit 2 Variablen.

3. Beim LO können die Schüler weitgehend alles in Eigenaktivitäten erschließen, so z.B. die graphische Darstellung, das graphische Lösungsverfahren oder den Hauptsatz.

4. LO ermöglicht problemorientierten und interdisziplinär angelegten Unterricht. Insbesondere können ökonomische Probleme kennengelernt, durchschaut und hinterfragt werden (emanzipatorische Funktion der Mathematik). Gerade kritische Überlegungen zu ökonomischen Prozessen sind aber in der bisherigen didaktischen und Schulbuch-Literatur völlig ausgespart worden.

5. Die Winter/Wittmannschen allgemeinen Lernziele für den Mathematikunterricht - kognitive Strategien (argumentieren, kreativ sein, mathematisieren) und intellektuelle Techniken, siehe [3, S.39/40] - werden beim LO sämtlich angesprochen. Dies kann nur von wenigen Stoffgebieten behauptet werden. Vor allem trägt LO zur Förderung kognitiver Strategien (siehe [3, S.83/84]) bei.

6. LO ist ein vorzügliches Anwendungsfeld für die vertiefende Wiederholung mathematischer Themen, so z.B. aus Geometrie, Algebra oder Funktionenlehre. Durch Hervorheben - nicht notwendig explizites Thematisieren - des Funktionscharakters der Zielfunktion wird der Funktionsbegriff von der Ebene gelöst und damit verdeutlicht. Die hieraus resultierenden didaktischen Möglichkeiten im Falle zweier Variabler - wie z.B. die räumliche Interpretation des graphischen Verfahrens oder die räumliche Veranschaulichung des Hauptsatzes - scheinen bisher noch nicht erkannt worden zu sein.

   Des weiteren bereitet LO in der Mittelstufe im Sinne des Spiralprinzips auf Themenstellungen der Oberstufe wie lineare Algebra (Vektoren, Matrizen) und Analysis (Extremwertaufgaben) vor.

2. Voraussetzungen

Benötigt wird Übung im Umgehen mit linearen Gleichungen und Ungleichungen in 1 und 2 Variablen. Zwar werden sämtliche Voraussetzungen innerhalb der Problemkontexte des LO wiederholend angesprochen; sie sollten jedoch zur Isolierung der Schwierigkeiten schon vorher behandelt worden sein.

3. Lernziele

Alles folgende bezieht sich im wesentlichen auf 2 Variable.

1. A. Wissen, daß LO-Probleme durch Bedingungen und Zielfunktion gegeben sind.
   B. Bei gegebenen (einfachen) Problemsituationen erkennen können, ob eine LO-Aufgabe vorliegt, und gegebenenfalls die Variablen, die Bedingungen und die Zielfunktion in mathematischer Form aufstellen können.

2. A. Ein gegebenes System linearer Ungleichungen graphisch darstellen können ("Planungsvieleck").
   B. Das Planungsvieleck zu einem gegebenen Problem bzgl.des Ungleichungssystems (formal) und bzgl. der Bedingungen des Problems (inhaltlich) interpretieren können.

3. Die (lineare) Zielfunktion eines gegebenen Problems kennen:
   A. Wissen, daß ihr Definitionsbereich das Planungsvieleck ist.
   B. Wissen und erläutern können, daß ihr Graph als eine ebene Fläche im $\mathbb{R}^3$ gedeutet werden kann, die über dem Planungsvieleck liegt.
   C. Wissen, daß die (auf ganz $\mathbb{R}^2$ erweiterte) Zielfunktion auf parallelen Geraden konstant ist.
   D. Wissen, daß diese Geraden den Höhenlinien der ebenen Fläche im Raum entsprechen.

4. A. LO-Aufgaben (in einfachen Fällen) zeichnerisch und rechnerisch lösen können.
   B. Das graphische Lösungsverfahren kennen und begründen können.
   C. Wissen und Bedingungen dafür angeben können, daß eine LO-Aufgabe keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzen kann.

Im Vordergrund steht hier zweifellos die zeichnerische Lösungsmethode, da sie einfacher, anschaulicher und für alle Differenzierungsstufen geeignet ist. Doch soll ein stures Rezepteanwenden verhindert werden. Dazu muß ein <u>Verständnis</u> für das graphische Verfahren entwickelt werden. Dies geschieht mit Hilfe der räumlichen Interpretation der Zielfunktion, durch welche der Schüler die Parallelverschiebung der Zielgeraden als Wandern auf den Höhenlinien verstehen und die Lösung damit räumlich vor Augen sehen kann.

5. A. Die mathematische Lösung von LO-Aufgaben am gegebenen Problem interpretieren und kritisch werten können.
   B. Die Auswirkungen von Änderungen der gegebenen Bedingungen bzw. der gegebenen Zielfunktion auf die gefundene Lösung erläutern können.

6. Den Hauptsatz des LO kennen: Wissen und erläutern können, daß eine Lösung einer LO-Aufgabe stets in (mindestens) einer Ecke des Planungsvielecks angenommen wird (sofern eine Lösung existiert).

4. Beispiele

Die meisten der in der bisherigen didaktischen und Schulbuch-Literatur gewählten Beispiele müssen nach einem der folgenden vier Aspekte kritisiert werden:

a) Unrealistische Beispiele (etwa Belegen von Fußböden ohne Berücksichtigung der Lebensdauer)

b) Unkritische Behandlung von Beispielen (meist Gewinnmaximierung ohne Reflexion der Folgen)

c) Schülerfremde Beispiele (etwa Medikamentenkonsum)

d) Schlecht formulierte Beispiele.

Wir fordern dagegen:

a) Wenn auch LO-Probleme mit 2 Variablen nie die Realität treu wiedergeben können, so müssen sie doch realistisch in dem Sinne sein, daß die notwendigen Vereinfachungen nicht zu Verfälschungen werden.

b) Bei der unterrichtlichen Behandlung von LO-Aufgaben sollen Aufgabenstellung und Lösung kritisch besprochen werden; insbesondere muß wenigstens ansatzweise über die Probleme diskutiert werden, die mit Gewinn-Maximierung verbunden sind.

c) LO-Aufgaben sollen am konkreten Erfahrungsbereich der Schüler ansetzen.

d) LO-Aufgaben müssen einwandfrei, klar und konkret formuliert sein. Dies ist insbesondere für untere Differenzierungsstufen unerläßlich, wenn die bekannten Schwierigkeiten beim sinnentnehmenden Lesen von Texten beachtet werden.

Das Einstiegsbeispiel soll darüberhinaus übersichtlich, aber nicht zu einfach sein und eine eindeutig bestimmte Lösung haben.

5. Skizzierung einer Lernsequenz[1]

Im folgenden beschränke ich mich auf Stichworte.

Einstiegsbeispiel (ohne Optimierungsbedingung) → Ablesen einiger zulässiger Lösungen (als Zahlenpaare) → Übergang zu Variablen → Eintragen der Punkte in ein Koordinatensystem → "Gerade eben noch zulässige" Punkte → Begrenzungsgeraden → zur Aufgabe gehöriges Ungleichungssystem → Graphische Darstellung → Planungsvieleck → Interpretation formal und

1 In mehreren Realschul- und Gymnasial-Klassen unterrichtlich erprobt.

inhaltlich → Vervollständigung der Aufgabenstellung durch Optimalitätsbedingung, z.B. Kostenminimierung → Berechnung einiger Kosten in Einzelarbeit unter Betonung des Funktionscharakters → Eintragen in das Planungsvieleck ("Kotierung") → räumliche Interpretation (also vor Erarbeitung des Lösungskalküls!), d.h. graphische Darstellung der Zielfunktion, möglichst mit einem konkret gebauten Modell → Lösung der Optimierungsaufgabe → Höhenlinien der ebenen Fläche im Raum → Zielgeradenschar im Planungsvieleck. Bis hierher bei geeigneter Hausaufgabenstellung 4 - 6 Unterrichtsstunden.

Ein methodischer Hinweis zur Hinführung auf die räumliche Interpretation der Zielfunktion: Man stellt sich vor, die Kosten seien an einigen Punkten als Turm, bestehend aus Markstücken, auf das Planungsvieleck aufgesetzt.

Zweite Aufgabe, z. B. Gewinnmaximierung → Ungleichungssystem → Planungsvieleck → Kotierung → Zielgeradenschar → graphische Lösung → Herauspräparieren und Begründung des graphischen Verfahrens → Herausarbeiten und heuristische Begründung des Hauptsatzes.

Nächste Beispiele: Mechanisierung des graphischen Verfahrens; rechnerische Verfahren; stärkere Beachtung der Lernziele 4C und 5.

Literatur:

[1] Glatfeld, M.: Zum Funktionsbegriff im Mathematikunterricht der Hauptschule. In: Mathematik in der Hauptschule II, Stuttgart 1972, S. 88-99.

[2] Schick, K.: Mathematische Optimierungsprobleme in der Kollegstufe. Dissertation PH Rheinland 1974.

[3] Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig 1974.