

SCHRIFTENREIHE DIDAKTIK DER MATHEMATIK BAND 18
Anschauliches Beweisen
Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1989 - Verlag B. G. Teubner, Stuttgart

WERNER BLUM UND ARNOLD KIRSCH

**WARUM HABEN NICHT-TRIVIALE LÖSUNGEN VON $f' = f$ KEINE NULLSTELLEN ?
BEOBACHTUNGEN UND BEMERKUNGEN ZUM "INHALTLICH-ANSCHAULICHEN
BEWEISEN"**

1. Eine Unterrichtssituation

In einer (vom ersten Verfasser betreuten) schulpraktischen Veranstaltung führte ein Student¹ in einer 12. Klasse einer Kasseler Schule (im Januar 1988) die e-Funktion nach einem Vorschlag von F. Raith (1957) als Lösung der Differentialgleichung $f' = f$ ein. Die Klasse war vorher in "schulklassischer" Weise (d.h. geometrisch orientiert) in die Differentialrechnung eingeführt worden und hatte einige innermathematische Anwendungen, insbesondere Funktionsuntersuchungen, mit ganzrationalen Funktionen behandelt.

Nachdem in der betreffenden Stunde die Idee des Richtungsfeldes erarbeitet war, wurde das Feld zu $f' = f$ gezeichnet (wobei die untere Halbebene ausgeschlossen wurde). Die triviale Lösung $f = 0$ wurde bald von den Schülern gefunden, und nicht-triviale Lösungen wurden im Richtungsfeld skizziert. Nach kurzer Zeit schon wurde (wie übrigens auch bei Raith) von Schülern die Frage gestellt: "Kann eine solche (nicht-triviale) Funktion Nullstellen haben?"

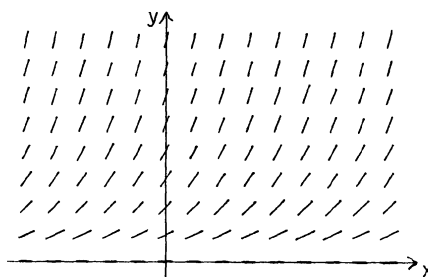


Abb. 1

Der Student hatte sich in seiner Unterrichtsplanung vorgenommen, dieses Problem (das bei Raith in recht formaler Weise, nämlich i.w. durch Herleitung der Funktionalgleichung der e-Funktion und Verwendung der Stetigkeit gelöst wird) herabzuspielen. Er gab daher den Schülern "nur" die folgende anschauliche Begründung: "Angenommen, wir sind auf der x-Achse. Dort ist die Steigung überall gleich 0. Wenn wir nun im Richtungsfeld nach rechts gehen, müssen wir uns stets waagrecht weiterbewegen, d.h. wir kommen niemals von der x-Achse weg. Also...". Die meisten Schüler waren hiermit zufrieden. Allerdings blieb bei einigen Schülern - wie auch beim Betreuer - ein gewis-

¹ Herr S. v. Verschuer, ein Student für das gymnasiale Lehramt in Mathematik und Physik, der inzwischen sein Examen abgelegt hat. Wir danken Herrn v. Verschuer auch für einige anregende Diskussionen über unser Thema.

ses Unbehagen, das sich in verschiedenen Nachfragen artikuliert. Dem Studenten gelang es dann aber, die Schüler (i.w. durch Wiederholung seiner Argumentation) zu "beruhigen" und den Blick auf eine neue Frage zu lenken, nämlich wie man eine konkrete (Näherungs-)Lösung von $f' = f$ rechnerisch finden kann; das Unbehagen des Betreuers blieb jedoch.

2. Inhaltlich-anschauliche Beweise

Zufälligerweise am Tag nach dieser Unterrichtsstunde besuchten wir einen Vortrag von E. Wittmann in Paderborn mit dem Thema "Wann ist ein Beweis ein Beweis?" (siehe Wittmann/Müller 1988). In Anlehnung an Branford (1913) unterscheidet Wittmann drei Stufen von Beweisen:

- Experimentelle "Beweise"
- Inhaltlich-anschauliche Beweise
- Formale ("wissenschaftliche") Beweise

Zur Charakterisierung der zweiten Stufe zitiert Wittmann Branford: "Diese Beweisstufe stellt allgemeine und streng gültige Wahrheiten auf, beruft sich dabei aber, wenn es nötig wird, auf Postulate der sinnlichen Erfahrung. Sie stellt die Wahrheit auf eine unabhängige eigene Basis durch unmittelbare Berufung auf erste Prinzipien." Nach Wittmann verläuft die Grenzlinie zwischen "Beweisen" (die keine sind) und (wirklichen) Beweisen nicht zwischen der zweiten und der dritten Stufe, d.h. zwischen inhaltlich-anschaulichen und "rein logischen" Beweisen, sondern zwischen der ersten und der zweiten, d.h. zwischen der bloßen "Verifikation einer endlichen Zahl von Beispielen" und substantieller Argumentation auf "intuitiv-anschaulicher" Grundlage.

Wittmann plädiert für eine Betonung inhaltlich-anschaulicher Beweise in Schule und Lehrerbildung. Dies tut z.B. auch F. Wille (1982, S.37): "Viele Inhalte der Mathematik sind ihrem Wesen nach anschaulich... . Man sollte diese Inhalte anschaulich handhaben lernen und Grundsätze für irrtumsfreies anschauliches Schließen entwickeln" (Hervorhebung durch Verf.²). Auch wir selbst haben mehrfach dafür plädiert, der Schüler solle im Mathematikunterricht "die Fähigkeit zum Argumentieren üben und ausbilden. Dabei denken wir nicht in erster Linie an formale Beweise, sondern an ein inhaltliches Argumentieren, das durchaus korrekt und 'intellektuell ehrlich' sein soll" (Blum/Kirsch 1979, S.7).

² Übrigens waren die Veranstalter des Klagenfurter Workshops 1988 etwas vorsichtiger, indem sie in ihrer Ankündigung von "irrtumsfreiem, anschaulichem Schließen" (mit Komma!) gesprochen und damit offen gelassen haben, ob es ihrer Ansicht nach so etwas wie "anschauliches Schließen" gibt.

Die eben geschilderte anschauliche Argumentation des Studenten scheint nun ein schönes Beispiel dafür zu sein, wie solche Forderungen eingelöst werden können. In der Diskussion zum Paderborner Vortrag fragten wir nach der Einordnung dieses Beispiels. Wittmann gab spontan dieselbe Begründung wie der Student ("...da man auf der x-Achse stets die Information erhält, horizontal weiterzulaufen...") und bestätigte, daß dies ein Beispiel für eine angemessene "inhaltlich-anschauliche Argumentation" sei. Trotzdem: Unser Unbehagen blieb (wenn auch vielleicht etwas abgeschwächt).

3. Übertragung der Argumentation

Die Problematik des Beispiels (und damit der Kern des Unbehagens) wird schlagartig deutlich, wenn man die Argumentation wörtlich auf (z.B.) die Differentialgleichung $f' = \sqrt{f}$ (bzw. allgemeiner auf $f' = f^{1-\epsilon}$ mit $0 < \epsilon < 1$) überträgt (wir beschränken uns wieder auf $y \geq 0$, d.h. auf x-Achse und obere Halbebene). Das Richtungsfeld sieht ganz ähnlich aus, und die Voraussetzung der Argumentation ist erfüllt. Aber nun haben bekanntlich auch die nicht-trivialen Lösungen Nullstellen; denn für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < c \\ \frac{1}{2}(x-c)^2 & \text{für } x \geq c \end{cases}$$

(allgemeiner³: $(\epsilon(x-c))^{1/\epsilon}$) eine Lösung, und dies sind alle nicht-trivialen. Demnach sind alle Punkte der x-Achse Verzweigungspunkte; von da aus kommen Lösungen sehr wohl "von der x-Achse weg".

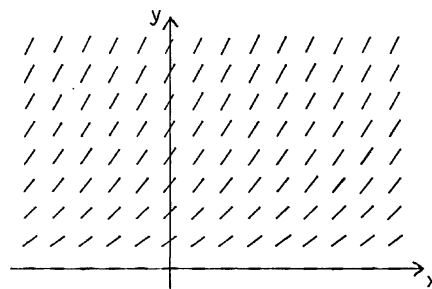


Abb. 2

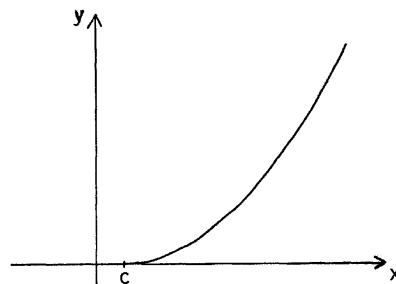


Abb. 3

³ Der Fall $f'=f$ ist offenbar gerade der "Grenzfall" von $f'=f^{1-\epsilon}$ für $\epsilon \rightarrow 0$. Die jeweilige ausgezeichnete Nullstelle $x=-\frac{1}{\epsilon}$ der Lösung $f(x) = (\epsilon x+1)^{1/\epsilon}$ mit $f(0) = 1$ wandert für $\epsilon \rightarrow 0$ immer weiter nach links, und der Grenzwert $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon x+1)^{1/\epsilon} = e^x$ hat keine Nullstelle mehr.

Die Existenz von Verzweigungspunkten zeigt, daß die anschauliche Vorstellung, das Richtungsfeld gebe in jedem Punkt eindeutig an, "wie es weitergeht", nicht tragfähig ist. Der zitierte "inhaltlich-anschauliche Beweis" ist nicht in Ordnung, und zwar nicht etwa nur in dem Sinne, daß ein formal argumentierender Mathematiker "pathologische" Gegenbeispiele angeben könnte. Der "Beweis" ist beispielsweise auch für einen mit dem "gesunden Menschenverstand" argumentierenden Physiker, der solche Gegenbeispiele als irrelevant einstufen würde, nicht zu retten. Damit stellen sich folgende Aufgaben:

- Genaueres Fassen des Konzepts "inhaltlich-anschauliches Beweisen"
- Finden eines "wirklich" inhaltlich-anschaulichen Beweises unserer Behauptung der Nicht-Existenz von Nullstellen nicht-trivialer Lösungen von $f' = f$.

4. Zum Konzept des inhaltlich-anschaulichen Beweises

Ohne Anspruch auf wissenschaftstheoretische Tiefe und Vollständigkeit wollen wir eine Art "Arbeitsdefinition" des hier diskutierten Beweisbegriffs geben.

In Anlehnung an Semadenis Konzept "prämathematischer Beweise" (Beispiele hierzu bei Kirsch 1979) wollen wir hier unter einem inhaltlich-anschaulichen Beweis eine Kette von korrekten Schlüssen verstehen, die auf nicht-formale Prämissen zurückgreifen, d.h. insbesondere auf inhaltlich-anwendungsbezogene Grundideen (wie z.B. Ableitung als lokale Änderungsrate) oder auf intuitiv evident, "allgemein geteilte", "psychologisch offenkundige" Aussagen (letzteres nach Thom 1973). Die Schlüsse sollen in ihrer "psychologisch natürlichen" Ordnung aufeinanderfolgen. Sie müssen vom konkreten, inhaltlich-anschaulich gegebenen Fall direkt verallgemeinerbar sein, wobei diese Übertragbarkeit auf den allgemeinen Fall intuitiv erkennbar sein soll, und sie müssen bei Formalisierung der jeweiligen Prämissen korrekten formal-mathematischen Argumenten entsprechen.

Solche inhaltlich-anschaulichen Beweise dürfen auch - im Gegensatz zu Semadeni - induktive Argumente ("usw.") oder indirekte Argumente ("Wir stellen uns vor..." oder "Was wäre, wenn...") enthalten, jeweils bezogen auf inhaltlich-anschauliche Gegebenheiten. Was solch "inhaltlich-anschauliche", "offenkundige" etc. Argumentations-Grundlagen sind, entscheiden die jeweils betroffenen Individuen (hier: die Schüler der Klasse 12 jener Kasseler Schule) auf der Basis ihres Wissens.

Wir möchten hiervon unterscheiden einen "prämathematischen" (so der ursprüngliche Terminus von Semadeni), "präformalen" (so bei Heidenreich 1987) oder besser einen

handlungsbezogenen Beweis ("action proof"). Ein solcher besteht (siehe Kirsch 1979) kurz gesagt aus gewissen konkreten Handlungen (zuerst wirklich ausgeführt, dann nur vorgestellt), die korrekten mathematischen Argumenten entsprechen. Hierbei sind sowohl die Prämissen als auch die Schlüsse enaktiv dargestellt, so daß man auch von einer enaktiven Repräsentation eines formal-exakten Beweises sprechen kann.

Von beiden genannten Beweisarten zu trennen sind auf der einen Seite bloß experimentelle Verifizierungen von Spezialfällen oder z.B. "unvollständige Induktion" nach Bestätigung an Sonderfällen, auf der anderen Seite rein formale Beweise. Wir schlagen also vor, die folgenden vier Stufen zu unterscheiden⁴:

- Experimentelle "Beweise"

- | | | |
|-----------------------------------|---|--------------------|
| - Handlungsbezogene Beweise | } | Präformale Beweise |
| - Inhaltlich-anschauliche Beweise | | |
| - Formale Beweise | | |

Unsere Argumentation aus Abschnitt 1 ist deshalb kein präformaler Beweis, weil die Schlüsse keinen korrekten formal-mathematischen Argumenten entsprechen. Wie könnte ein inhaltlich-anschaulicher Beweis aussehen? Wir geben nun zwei Beweise, die in wesentlichen Teilen inhaltlich-anschaulichen Charakter haben.

5. Beweise für die Positivität von nicht-trivialen Lösungen von $f' = f$

Wir beschränken uns im folgenden wiederum auf die obere Halbebene einschließlich der ersten Achse, d.h. wir betrachten nur Lösungen f der Differentialgleichung $f'=f$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $f'(x) \geq 0$ für alle x , d.h. alle Lösungen sind jedenfalls monoton wachsend, in der oberen Halbebene sogar streng (vgl. Abb. 1). Damit ist (wegen der Stetigkeit) klar: Ist eine Lösung irgendwo positiv, d.h. oberhalb der x -Achse, so "erst recht" rechts davon; ist eine Lösung irgendwo gleich Null, d.h. auf der x -Achse, so erst recht links davon (diese Argumentation findet sich i.w. schon bei Raith 1957). Wir zeigen nun (unabhängig voneinander):

⁴ Es ist eine interessante Frage, inwiefern sich die Grenze zwischen "Beweisen" und Beweisen durch Möglichkeiten des Experimentierens mit Computern womöglich zur ersten Stufe hin verschiebt (nach einer Diskussionsbemerkung von R. Schaper).

A: Ist eine Lösung f von $f' = f$ irgendwo positiv, so kann sie nie Null gewesen sein; d.h. ist eine Lösung irgendwo oberhalb der x -Achse, so kann sie auch nach links nie zur Achse herunterkommen (formal: Gilt $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so gilt $f(x) > 0$ auch für alle $x < x_0$ und somit für alle $x \in \mathbb{R}$).

B: Ist eine Lösung f von $f' = f$ irgendwo gleich Null, so kann sie nie positiv werden; d.h. ist eine Lösung irgendwo auf der x -Achse, so kann sie auch nach rechts nie davon wegkommen (formal: Gilt $f(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so gilt $f(x) = 0$ auch für alle $x > x_0$ und somit für alle $x \in \mathbb{R}$).

Beweis zu A (W. Blum): Es sei $f(x_0) > 0$. Die Tangente an f im Punkt $(x_0 | f(x_0))$ hat die Steigung $f'(x_0) = f(x_0)$. Sie schneidet die x -Achse deshalb (unabhängig vom Wert $f(x_0)$) an der Stelle $x_0 - 1$. Wegen $f'' = f' = f \geq 0$ ist f nirgends rechtsgekrümmt und wegen $f''(x_0) = f(x_0) > 0$ in der Umgebung von x_0 sogar linksgekrümmt. Deshalb verläuft f überall außer in x_0 echt oberhalb dieser Tangente. Somit ist f im ganzen Intervall $[x_0 - 1; x_0]$ positiv. Nun wiederholen wir diese Argumentation bis $x_0 - 2$, dann bis $x_0 - 3$, "usw.". Damit ist Behauptung A bewiesen⁵.

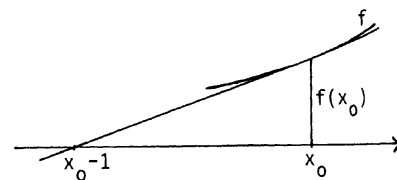


Abb. 4

Beweis zu B (A. Kirsch, nach Unterrichtserfahrungen 1946): Es sei $f(x_0) = 0$. Wir nehmen an, es gebe eine Stelle $x_1 > x_0$ mit $f(x_1) > 0$. O.B.d.A. dürfen wir $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ nehmen⁶. Wegen der Stetigkeit und der Monotonie von f ist der Inhalt der Fläche unterhalb f in $[0; 1]$ jedenfalls kleiner als die Rechtecksfläche

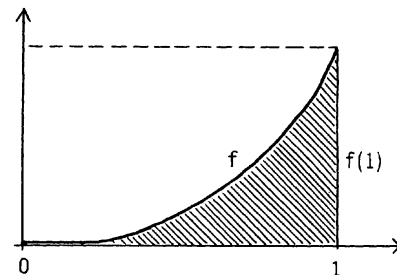


Abb. 5

⁵ Man sieht übrigens sofort, wo und weshalb diese Argumentation für z.B. $f' = \sqrt{f}$ (allgemeiner: $f' = f^{1-\varepsilon}$) versagt. Sie gilt aber "erst recht" z.B. für $f' = f^2$ (allgemeiner: $f' = f^{1+\varepsilon}$ mit $\varepsilon > 0$), wobei dann allerdings keine für alle x definierten Lösungen mehr existieren, weil f für wachsende x "zu steil nach oben geht". Auch in dieser Hinsicht ist also $f' = f$ der "Grenzfall" (vgl. Fußnote 3).

⁶ Denn unter den gegebenen Voraussetzungen gibt es eine wohlbestimmte ganze Zahl n mit $f(x_0+n) = 0$ und $f(x_0+n+1) > 0$, und man kann x_0+n als neuen Nullpunkt der x -Achse nehmen. (Eine Verschiebung des Nullpunkts berührt nicht die Voraussetzung $f' = f$, wonach an jeder Stelle die Tangentensteigung gleich dem Funktionswert ist.)

$1 \cdot f(1) = f(1)$. Andererseits gibt $f(1)$, weil f Stammfunktion (mit Anfangswert 0) von f' und damit auch von f ist, gerade den Inhalt der schraffierten Fläche unterhalb f an. Dies kann nicht gleichzeitig der Fall sein, und damit ist Behauptung B bewiesen.

Die inhaltlich-anschaulichen Vorstellungen, die seinerzeit zu diesem Beweis geführt haben und die über die Jahrzehnte hin nicht in Vergessenheit geraten sind, lassen sich ganz vage wie folgt beschreiben: Die Funktion f ist Stammfunktion von sich selbst, d.h. ihr Wert ist an jeder Stelle gleich dem Inhalt des Flächenstücks links davon. Warum kann nun eine solche Funktion niemals "hochkommen"? Angenommen, es gelingt ihr doch. Dann müßte, sobald sie sich erhebt und dabei zuerst nur ein ganz kleines Flächenstück neben sich "hochzieht", dieses Flächenstück schon ebenso großen Inhalt haben wie ein Rechteck von derselben Endhöhe und der Breite 1. Das ist unmöglich, und damit ist die Frage beantwortet.

Wegen $f' = f$ kann man in Abb. 5 überall f durch f' ersetzen. Man liest dann ab, daß der Flächeninhalt $\int_0^1 f'$ kleiner als $1 \cdot f'(1) = f'(1)$ sein müßte, während andererseits $f'(1) = f(1)$ gleich diesem Flächeninhalt $\int_0^1 f'$ ist. Diese Argumentation läßt sich leicht kinematisch interpretieren (und ist damals auch so interpretiert worden), was im folgenden ausgeführt wird.

6. Eine kinematische Deutung

Es seien $s \geq 0$ der zurückgelegte Weg als Funktion der Zeit t und $v = \dot{s}$ die Geschwindigkeit. Unser Problem besagt dann folgendes: Bei einem Anfahrvorgang sei die jeweilige Endgeschwindigkeit proportional zum zurückgelegten Weg; d.h. es gelte $v = \dot{s} = k \cdot s$ mit einer Konstanten $k > 0$ von der Dimension Zeit^{-1} , also auch $v \geq 0$ und v stetig. (Die Differentialgleichung $\dot{s} = k \cdot s$ ist etwas allgemeiner als die zu $f' = f$ analoge Gleichung $\dot{s} = s$, aber aus Dimensionsgründen befriedigender.) Kann dann das Fahrzeug "wirklich loskommen"?

Wenn dies der Fall ist, dann darf man o.B.d.A. annehmen, daß $s(0) = v(0) = 0$ und $v(\tau) > 0$ ist, wobei $\tau = k^{-1}$ gesetzt sei. Nun ist wieder geometrisch klar (und nach der kinematischen Bedeutung sowieso), daß der während der Zeitspanne τ zurückgelegte Weg $s(\tau) = \int_0^\tau v$ jedenfalls kleiner ist als das Produkt Zeitspanne mal Endgeschwindigkeit, d.h. es gilt $s(\tau) < \tau \cdot v(\tau)$. Andererseits gilt aber

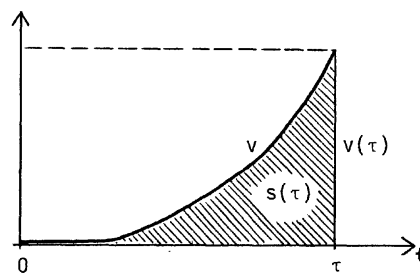


Abb. 6

$s(t) = k^{-1}v(t)$ für alle t , mit $k^{-1} = \tau$, also speziell $s(\tau) = \tau \cdot v(\tau)$. Das kann nicht gleichzeitig der Fall sein.

Die obige Frage ist also zu verneinen; ein Anfahrvorgang mit einer zum zurückgelegten Weg jeweils proportionalen Endgeschwindigkeit ist unmöglich⁷.

Auf diese Tatsache wurde in anderem Zusammenhang von E. Stahel (1985) hingewiesen. Dieser kritisiert zu Recht eine Anzeige der Firma BMW, in der verschiedene Anfahrvorgänge verglichen werden, bei denen anfangs die Geschwindigkeit proportional zum Weg ist, was im Weg-Geschwindigkeits-Diagramm ja eine Gerade durch den Ursprung ergibt. Stahel setzt zum Beweis der Unmöglichkeit solcher Anfahrvorgänge die bekannte (von uns vorhin bewiesene) eindeutige Lösbarkeit von $\dot{s} = ks$, $s(0) = 0$ voraus⁸.

Er fragt dann weiter nach der Gestalt möglicher Anfahrvorgänge, bei denen also das Fahrzeug zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ wirklich in Gang kommt: $v(t) = 0$ für $t \leq t_0$, $v(t) > 0$ für $t > t_0$. (Bei stetigem, monotonem $v \geq 0$, $v \neq 0$, mit $v(0) = 0$ gibt es stets eindeutig einen solchen Zeit-

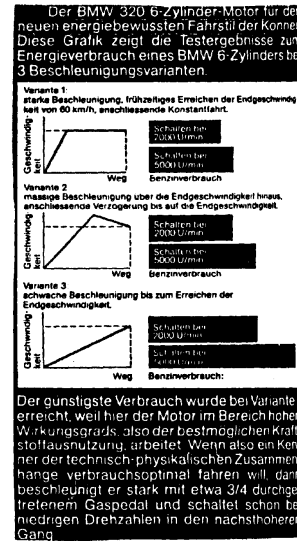


Abb. 7 (nach Stahel 1985)

⁷ Diese Formulierung des Problems und der eben gegebene Beweis entsprechen also Behauptung B nebst Beweis aus Abschnitt 5. Man kann natürlich auch Behauptung A mit Beweis kinematisch interpretieren, sinnvollerweise wieder für die allgemeinere Differentialgleichung $v = k \cdot s$. Als Resultat erhält man: Wenn bis zu einem gewissen Zeitpunkt t_0 schon ein Weg zurückgelegt worden ist, so muß auch bereits bis zum Zeitpunkt $t_0 - \tau$ (mit $\tau = k^{-1}$) ein Weg zurückgelegt worden sein. D.h. wenn ein Fahrzeug so fährt, daß der zurückgelegte Weg proportional zur jeweiligen Geschwindigkeit ist, so kann es nie stillgestanden haben.

⁸ Bekanntlich hat auch Galilei bei seiner Erforschung der Fallgesetze anfangs den Ansatz $v(t) = k \cdot s(t)$ gemacht und diesen dann später als "falsch und unmöglich" verworfen. Bei der Widerlegung geht Galilei naturgemäß von seiner Feststellung aus, daß alle (zu einem bestimmten Zeitpunkt losgelassenen) Körper fallen, und zwar gleich schnell, d.h. daß es genau eine Lösung s des Problems mit $s(0) = 0$, $s(t) > 0$ für $t > 0$ gibt. Seine Argumentation ist von E. Mach als nicht stichhaltig verworfen und von G. Polya rehabilitiert worden (siehe Polya 1975, S.303). Sie besagt in unserer Ausdrucksweise, daß, wenn das Fallgesetz $v(t) = k \cdot s(t)$ lauten würde, mit s auch $2s$ Lösung wäre, im Widerspruch zu der genannten Feststellung.

punkt t_0)⁹. O.B.d.A. kann man $t_0 = 0$ setzen. Stahel bemerkt nun, daß sich jeder solche Anfahrvorgang im Weg-Geschwindigkeits-Diagramm als Kurve widerspiegelt, die im Nullpunkt eine vertikale Tangente hat. Dies ist nach unseren vorangehenden Überlegungen ebenfalls sofort einsichtig. Denn es gilt für alle $t > 0$

$$t \cdot v(t) > s(t), \text{ also } \frac{v(t)}{s(t)} > \frac{1}{t}$$

(man beachte, daß jetzt $s(t) > 0$ ist für alle $t > 0$), und

es folgt unmittelbar $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{v(t)}{s(t)} = +\infty$.

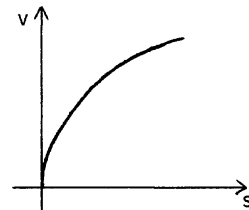


Abb. 8

Stahel gibt hierzu einen formalen Beweis mittels Regel von de l'Hospital und Ableitungen beliebig hoher Ordnung, der jedoch nicht stichhaltig ist: Er benutzt nämlich, daß ("da unser Fahrzeug ja wegfahren soll") eine der Ableitungen von \dot{v} positiv ist, während es bekanntlich Funktionen gibt, die vom Nullpunkt aus ansteigen, obwohl ihre Ableitungen bei 0 sämtlich verschwinden.

In diesem Fall hat die inhaltlich-anschauliche Argumentationsweise also sogar vor einem Fehler bewahrt.

Es ist klar, daß unser Beweis für " $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\dot{s}(t)}{s(t)} = \infty$ bei Anfahrfunktionen" nicht an die kinematische Interpretation gebunden ist, sondern daß diese Tatsache allgemeiner als Eigenschaft von Graphen in der y - y' -Phasenebene formuliert werden kann.

7. Einige didaktische Folgerungen

Folgende Frage 1 stellt sich sofort:

- Wie können Lernende die Stichhaltigkeit bzw. Nicht-Stichhaltigkeit eines vorgegebenen oder selbst gefundenen inhaltlich-anschaulichen Beweises (oder auch eines handlungsbezogenen Beweises¹⁰) selbst beurteilen?

⁹Dies ist anschaulich klar und kann formal etwa mittels Dedekind-Schnitt bewiesen werden.

¹⁰Vgl. dazu das Beispiel in Kirsch (1979, S. 270).

Die Schlüsse in solchen Beweisen müssen ja korrekten mathematischen Argumenten entsprechen, und eine solche Korrespondenz kann "eigentlich" nur jemand beurteilen, der über "höhere" Kenntnisse verfügt; diese haben Lernende aber gerade nicht. H.-N. Jahnke (1978) hat diese Problematik so formuliert (vgl. vor allem S. 250 ff): "Begründen" muß immer auch verstanden werden als "Begründen von der Zukunft her", d.h. vom Standpunkt des "entwickelteren Systems" aus. U.E. zeigt sich hier also eine prinzipielle Schwierigkeit, die bei jeglichem Wissenserwerb auftritt und die den didaktischen Stellenwert von nicht-formalen Beweisen notwendig relativiert (was von vielen Befürwortern offenbar nicht gesehen wird).

Naheliegender ist auch Frage 2:

- Wie können Lernende inhaltlich-anschauliche Beweise (oder auch handlungsbezogene Beweise) selbst finden?

Zuerst einmal gibt es sicherlich nicht zu jedem mathematischen Sachverhalt einen nicht-formalen Beweis. Und sicher genügt es nicht, Lernenden einfach solche Beweise vorzuführen und auf "Transfer" zu hoffen.

Notwendige (aber keinesfalls hinreichende) Voraussetzungen dafür, daß Schüler nicht-formale Beweise verstehen, beurteilen und mitunter sogar selbst finden können, sind:

- daß auf vielfältige Darstellungsweisen für mathematische Inhalte Wert gelegt wird, insbesondere, daß inhaltliche Grundideen betont und anschauliche Grundvorstellungen vermittelt werden,
- daß im Unterricht häufig inhaltlich-anschauliche (bzw. handlungsbezogene) Beweise geführt werden,
- daß aber exemplarisch auch formale Beweise geführt bzw. anschauliche Argumente formalisiert werden, und schließlich
- daß mit Schülern über das Beweisen gesprochen wird, d.h. daß das unterrichtliche Vorgehen reflektiert wird.

Dabei kann es besonders reizvoll und gewinnbringend sein, wenn, wie bei unserem Beispiel, verschiedene Stufen durchlaufen werden, die auch fehlerhafte Begründungen enthalten und die rückblickend bewertet werden können. Dies entspricht ja auch der Wissensentwicklung aus historisch-genetischer und erkenntnistheoretischer Sicht (vgl. etwa Lakatos 1979). In diesem Sinn müssen anfänglich fehlerhafte Begründungen didaktisch keineswegs ein Nachteil sein¹¹, im Gegenteil (vgl. hierzu Fischer/Malle 1985, S. 16 ff).

¹¹ Dies nach einer Diskussionsbemerkung von R. Fischer, der weiter darauf hinwies, daß ein System, Fehler von vornherein auszuschließen, notwendig formale Züge tragen würde, ganz im Gegensatz zu den Intentionen eines Arbeitens auf vorformalen Niveaus.

All dies gilt erst recht für die Lehrerausbildung. Damit der zukünftige Lehrer befähigt wird, die genannten Gesichtspunkte in seinem Unterricht zu verwirklichen, muß er selbst in der Universität so ausgebildet werden, d.h. er muß Beweise auf verschiedenen Ebenen kennenlernen, er muß lernen, selbst solche Beweise zu führen sowie darüber zu reflektieren (und noch vieles mehr). Auf keinen Fall würde es genügen, wenn - was mitunter für die Ausbildung von Primarstufenlehrern oder von Haupt- und Realschullehrern vorgeschlagen wird - eine Beschränkung auf nicht-formale Beweise stattfinden würde. Natürlich genügt es ebensowenig, wenn - was leider die Regel ist - zukünftige Gymnasiallehrer fast ausschließlich formale Beweise kennenlernen. Es zeigt sich einmal mehr, wie anspruchsvoll die Lehrerausbildung ist bzw. sein sollte.

Literatur:

- Blum, W. / Kirsch, A.: Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. In: Der Mathematikunterricht Bd. 25(1979), H. 3, S. 6-24.
- Branford, B.: Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität. Leipzig/Berlin 1913.
- Fischer, R. / Malle, G. / Bürger, H.: Mensch und Mathematik. Mannheim 1985.
- Heidenreich, K.: Der Rotwein-Beweis. In: Praxis der Mathematik Bd. 29(1987), H. 3, S. 136-138.
- Jahnke, H.-N.: Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem. IDM Materialien und Studien, Bd. 10, Bielefeld 1978.
- Kirsch, A.: Beispiele für "prämathematische" Beweise. In: Dörfler, W. / Fischer, R. (Hrsg.): Beweisen im Mathematikunterricht. Wien/Stuttgart 1979, S. 261-274.
- Lakatos, I.: Beweise und Widerlegungen. Braunschweig/Wiesbaden 1979.
- Pólya, G.: Mathematik und plausibles Schließen, Bd. 2. Basel/Stuttgart 1975.
- Raith, F.: Die e -Funktion im Schulunterricht. In: Der Mathematikunterricht Bd. 3 (1957), H. 4, S. 82-91.
- Stahel, E.: Falsche Elementarisierung. In: Praxis der Mathematik Bd. 27(1985), H. 2, S. 72-79.
- Thom, R.: Modern Mathematics: Does it Exist? In: Howson, G. (Ed.): Developments in Mathematical Education. Cambridge 1973, S. 194-212.
- Wille, F.: Die mathematische Anschauung: Ihre Ziele, Möglichkeiten und Techniken. In: Kautschitsch, H. / Metzler, W. (Hrsg.): Visualisierung in der Mathematik. Wien/Stuttgart 1982, S. 35-78.
- Wittmann, E. / Müller, G.: Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: Bender, P. (Hrsg.): Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Berlin 1988, S. 237-257.

Werner Blum / Arnold Kirsch
Gesamthochschule Kassel Universität
Fachbereich Mathematik
Heinrich-Plett-Str. 40
D-3500 Kassel