In: Didaktik der Mathematik, 5. Jahrgang, 1977, 1. Heft,
Bayerischer Schulbuch-Verlag, München, S. 274-288

Werner Blum / Arnold Kirsch

Elementare Behandlung der Exponentialfunktionen in der Differentialrechnung

1. Exponentialfunktionen im Mathematikunterricht

1.1. Zu den für Anwendungen wichtigsten reellen Funktionen gehören ohne Zweifel die (exponentiellen) *Wachstumsfunktionen*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a \cdot b^x \qquad (a, b \in \mathbb{R}^+)$$

(vgl. [2; 10]). In einem „beziehungshaltigen" Mathematikunterricht, in dem *reale Anwendungsprobleme* integraler Bestandteile sind (vgl. zur Begründung [7; 16; 4]), müssen diese Funktionen daher den Schülern möglichst früh zugänglich gemacht werden.

1.2. Bekanntlich stehen einer frühen Beschäftigung mit Wachstumsfunktionen beträchtliche mathematische Schwierigkeiten entgegen (vgl. [2]). In [10] sind jedoch Wege aufgezeigt, diese Funktionen bereits in der Mittelstufe in elementarer Weise zu behandeln. Hierbei werden bewußt didaktische Vereinfachungen vorgenommen, die im Sinne des Brunerschen Spiralprinzips (vgl. [5]) „intellektuell ehrlich" sind und insbesondere einer späteren Präzisierung nicht im Wege stehen. Auf diese Weise wird es möglich, relevante Anwendungssituationen wie Wachstumsprozesse mit *allen* Schülern der 10. oder 11. Klasse (und nicht nur mit einer „mathematischen Elite" in Leistungskursen) zu diskutieren (vgl. [1, Kap. 8]).

1.3. Grundlegend am Vorschlag [10] ist es, daß in Klasse 10 bzw. in Klasse 11 vor der Analysis *nicht die Existenz* der Wachstumsfunktionen *bewiesen* werden soll. Vielmehr legt es das Umgehen mit realen Wachstumsprozessen nahe, die Existenz von Wachstumsfunktionen als gesichert anzusehen, genauer, das folgende „Axiom" anzunehmen:

Durch je zwei Punkte der oberen Koordinatenhalbebene, die nicht auf einer Parallelen zu einer der Achsen liegen, geht genau eine Funktion f mit den Eigenschaften:

(1) f ist eine streng monotone reelle Funktion mit Wertemenge $\mathbb{R}^+$;

(2) Wenn sich das Argument jeweils um denselben Summanden v erhöht, multipliziert sich der Funktionswert jedesmal mit demselben Faktor q:

$$f(u+v) = q \cdot f(u), \text{ wobei } q = \frac{f(v)}{f(0)} \quad (\text{„Grundeigenschaft"}).$$

Die so charakterisierten (exponentiellen) „Wachstumsfunktionen" sind genau die Funktionen $x \mapsto a \cdot b^x$ ($a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$), wobei die *Exponentialfunktion* $x \mapsto b^x$ für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ diejenige Wachstumsfunktion ist, die durch (0,1) und (1,b) geht (Fig. 1).

Die Grundeigenschaft der Exponentialfunktionen entspricht der ersten Potenzregel:

$$b^{u+v} = b^u \cdot b^v \qquad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}.$$

Aus den obigen Eigenschaften der Wachstumsfunktionen läßt sich sofort die zweite Potenzregel herleiten ([10, S. 274]):

$$b^{uv} = (b^u)^v \qquad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}.$$

1.4. Es genügt für alles folgende, wenn wir uns auf Exponentialfunktionen beschränken, da alle Wachstumsfunktionen ja in einfacher Weise aus ihnen entstehen. Als streng monotone Funktion hat jede Exponentialfunktion[1] $\exp_b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto b^x$ eine Umkehrfunktion, die Logarithmusfunktion $\log_b: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_b x$. Die Eigenschaften der Exponentialfunktionen übertragen sich sofort auf die Eigenschaften ihrer Umkehrfunktionen.

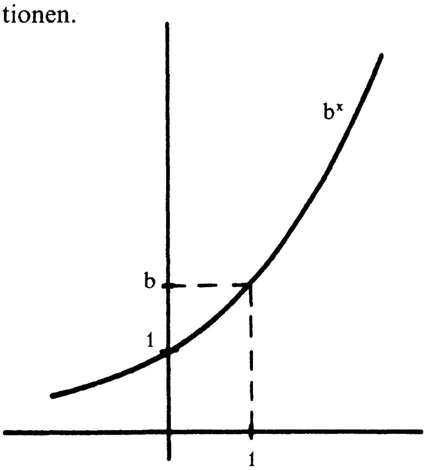

Fig. 1

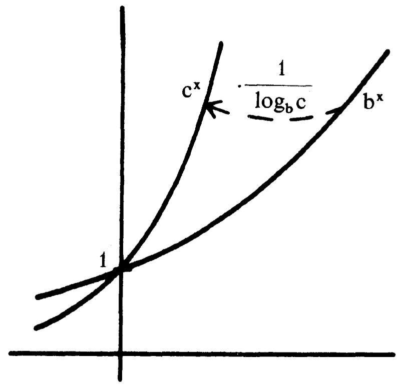

Fig. 2

1.5. Schließlich bleibt noch festzustellen, wie die Exponentialfunktionen zu verschiedenen Basen miteinander zusammenhängen. Aus der zweiten Potenzregel folgt

$$c^x = b^{\log_b c \cdot x} \quad \text{für alle } b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad \text{und} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dies bedeutet also:[2] Die Streckung $x \mapsto \frac{1}{\log_b c} \cdot x$ parallel zur ersten Achse (im folgenden kurz: „*x-Affinität*") überführt den Graphen von $x \mapsto b^x$ in den Graphen von $x \mapsto c^x$ (siehe Fig. 2).

Als ausgezeichnete Basis, auf die sich solche Transformationen beziehen, empfiehlt sich für die Mittelstufe die Basis 2. Erst in der Differentialrechnung erweist es sich als zweckmäßig, die Eulersche Zahl e als ausgezeichnete Basis zu nehmen (vgl. Abschnitt **4.**).

2. Ziele dieses Aufsatzes

2.1. In einem anwendungsorientierten Analysisunterricht werden recht bald die Ableitungen der Exponentialfunktionen benötigt. Eine exakte Ableitungsbestimmung für Ex-

1 Wir benutzen im folgenden mitunter $\exp_b$ als Name für die Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$. Im Unterricht wird sich dies weitgehend vermeiden lassen.

2 Man mache sich klar: Durch $x \mapsto \frac{x}{k}$ $(k \neq 0)$ geht $\{(x,y) \mid y = f(x)\}$ über in $\left\{\left(\frac{x}{k}, y\right) \mid y = f(x)\right\} = \{(x,y) \mid y = f(kx)\}$.

ponentialfunktionen stößt jedoch bekanntlich auf größere mathematische Schwierigkeiten[1] (vgl. [2]). Unser Ziel ist es nun, diese Ableitungsbestimmung in elementarer Weise bereits früh in einem Grundkurs zur Analysis (vgl. [4]) zugänglich zu machen[2].

Hierzu lassen wir, wie es auf intuitiver Grundlage auch früher schon bisweilen in der Schulpraxis erfolgt ist, an *einer* genau gekennzeichneten Stelle eine Lücke, indem wir – für Lehrer *und* Schüler bewußt – aus der Anschauung entnehmen, daß jede Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$ im Punkt (0,1) eine (nicht horizontale) Tangente besitzt, die – außer in 0 – ganz unterhalb des Graphen verläuft.

2.2. Bei der eben erwähnten Stelle handelt es sich keineswegs um einen Baustein, dessen Fehlen das ganze mathematische Gebäude der Ableitungsbestimmung für Exponentialfunktionen zum Einsturz bringt. Vielmehr ließen sich die ausgegliederten Nachweise der aus der Anschauung entnommenen Sachverhalte auch im Rahmen eines Grundkurses exakt führen. In Abschnitt **6.** zeigen wir, wie dies Schritt für Schritt geschehen kann. Dabei unterscheiden wir noch verschiedene Stufen der Strenge bis hin zum mathematisch exakten Beweis.

Wir plädieren jedoch nicht dafür, diesen Beweis im Unterricht auch tatsächlich vollständig zu erbringen. Dies wäre aus zeitlichen Gründen unvertretbar. Außerdem unterscheidet sich die letzte Stufe der Strenge im Anspruchsniveau wohl nur wenig von einem der herkömmlich geführten Beweise. Uns geht es in **6.** in erster Linie darum zu zeigen, daß der Lehrer die erwähnte Lücke „guten Gewissens" lassen kann und daß er die Möglichkeit hat, interessierten und kritischen Schülern klar zu machen, wie diese aus der Anschauung entnommenen Tatsachen mathematisch begründbar sind.

2.3. In der Literatur wird oft ein Weg gewählt, bei dem zuerst die Ableitungen der Logarithmusfunktionen bestimmt werden – obwohl diese für Anwendungsprobleme weit weniger wichtig sind – und danach erst auf geometrischem (Spiegelung an der Winkelhalbierenden) oder rein formalem Wege (Ableitungsregel für die Umkehrfunktion) die Ableitungen der Exponentialfunktionen. Abgesehen davon, daß hier – im Gegensatz zu unserem Vorschlag – die Stetigkeit der Logarithmusfunktionen in der Form der Vertauschbarkeit von „$\log_b$" mit „$\lim\limits_{n\to\infty}$" substantiell eingeht und auch – entsprechend unserem Vorschlag – die Differenzierbarkeit der Logarithmusfunktionen ohne Beweis vorausgesetzt wird, muß bei diesem Weg die Konvergenz der Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ mit allen dazu notwendigen unangenehmen Abschätzungen behandelt werden. Unser Zugang hat also den Vorzug, auch für einen Grundkurs geeignet zu sein, in dem Folgen nicht behandelt werden.

Wir zählen nun zuerst in Abschnitt **3.** die Voraussetzungen auf, welche die Schüler in unserem Vorschlag besitzen müssen. Sodann schildern wir unseren Weg in Abschnitt **4.** In Abschnitt **5.** beschäftigen wir uns näher mit der numerischen Bestimmung der ausgezeichneten Basis e.

1 In den meisten Schulbüchern werden diese Schwierigkeiten dadurch umgangen, daß Logarithmus- und Exponentialfunktionen erst im Anschluß an die Integralrechnung behandelt werden.

2 Man vergleiche zu unserem Vorschlag auch [15; 8, S. 35–37; 13, S. 171–174]. Unser Vorschlag ist übrigens mehrfach unterrichtlich erprobt.

3. Schüler-Voraussetzungen

3.1. Den Schülern müssen die *Exponentialfunktionen* in der Weise bekannt sein, wie wir dies in **1.** geschildert haben. Die Schüler müssen also

- die Graphen der Exponentialfunktionen kennen, insbesondere deren strenge Monotonie;
- wissen, daß die Exponentialfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ und deren Umkehrfunktionen $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bijektiv sind;
- die erste und zweite Potenzregel kennen.

Beim Nachweis der Existenz und eindeutigen Bestimmtheit der Eulerschen Zahl sollen die Schüler ferner

- wissen, daß die Graphen je zweier Exponentialfunktionen durch eine Affinität parallel zur ersten Achse auseinander hervorgehen.

Dabei braucht auf der ersten Stufe der Streckungsfaktor noch nicht als Logarithmus explizit gemacht zu werden. Vielmehr genügt es zu wissen, daß sich aufgrund der Surjektivität der Exponentialfunktionen jede positive Zahl c als eine gewisse reelle Potenz $c = b^u$ einer gegebenen Zahl $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ schreiben läßt.

3.2. Die Schüler müssen

- den Begriff der *Ableitung* $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ einer Funktion f an einer Stelle x kennen;
- wissen, daß die Ableitung als Tangentensteigung gedeutet werden kann.

Der *Grenzwertbegriff* darf dabei durchaus in einer noch vorläufigen, mehr intuitiven Form im Sinne einer „beliebig guten Approximation" behandelt worden sein (vgl. [13, S. 47 ff; 4, S. 170/171]); die einfachen Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten werden dabei bewußt ohne Begründung verwendet.

4. Ableitungsbestimmung

4.1. Die Differenzenquotienten zur Exponentialfunktion $\exp_b$ ($b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) an der Stelle x lauten[1]:

$$\frac{b^{x+h} - b^x}{h} = b^x \cdot \frac{b^h - 1}{h}.$$

Bei fester „Schrittlänge" h ist also der Differenzenquotient an der Stelle x proportional [2] zum Funktionswert an der Stelle x; der Proportionalitätsfaktor ist $\frac{b^h - 1}{h}$, das ist der Differenzenquotient an der Stelle 0. Hier zeichnet sich das Resultat – Proportionalität der Ableitung zum Funktionswert, mit der Ableitung an der Stelle 0 als Proportionalitätsfaktor – bereits ab. Zur Bestimmung des gesuchten Grenzwerts der Differenzenquotienten

1 Bei der folgenden Umformung wird die Potenzregel $b^{x+h} = b^x \cdot b^h$ benutzt. Da wir die benötigten Eigenschaften der Exponentialfunktionen eben zusammengefaßt haben, werden wir im folgenden nicht jedesmal einzeln darauf hinweisen, wenn wir sie verwenden.

2 Vgl. S. 12 der „Denkschrift zum Mathematikunterricht an Gymnasien" der DMV vom Frühjahr 1976.

genügt es offenbar, „nur" noch $\lim\limits_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$ zu untersuchen. Dieser Grenzwert gibt die Tangentensteigung an der Stelle 0 an.

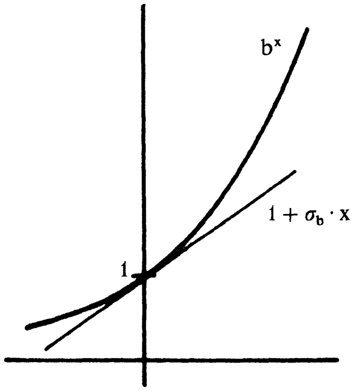

Fig. 3

Nun nehmen wir bewußt aus der Anschauung (Fig. 3):

Der Graph von $\exp_b$ *hat an der Stelle* 0 *eine wohlbestimmte (nicht horizontale) Tangente, die – außer in* 0 *– ganz unterhalb des Graphen verläuft.*[1]

Bezeichnet σ_b die Steigung dieser Tangente, so existiert also

$$\sigma_b = \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} \neq 0.$$

Hieraus ergibt sich die Differenzierbarkeit von $\exp_b$ an jeder Stelle x, mit der Ableitung $\exp_b' = \sigma_b \cdot \exp_b$; d.h. die *Ableitung einer Exponentialfunktion* ist *bis auf einen konstanten Faktor*, der von der Basis abhängt, *gleich der Funktion selbst*. Dieser Faktor ist gleich der *Tangentensteigung* im Punkt (0, 1).

4.2. Das Problem ist also reduziert auf die *Bestimmung* der Konstanten σ_b für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Auf einfache Weise lassen sich nun zeichnerisch oder rechnerisch *Näherungswerte* für einige σ_b ermitteln.

a) Zeichnerisch: Man zeichnet verschiedene Exponentialfunktionen in der Umgebung von 0 und (näherungsweise) deren Tangenten in (0, 1). Dann liest man z. B. ab:

$$\sigma_{1,5} \approx 0{,}4; \quad \sigma_2 \approx 0{,}7; \quad \sigma_{2,5} \approx 0{,}9; \quad \sigma_3 \approx 1{,}1; \quad \sigma_{10} \approx 2{,}3 \quad \text{usw.}$$

b) Rechnerisch: Man berechnet (Taschenrechner!) $\frac{b^h - 1}{h}$ für kleine h, wobei vorteilhaft $h = \frac{1}{2^m}$ gewählt und die Wurzeltaste eingesetzt wird. Zum Beispiel ergibt sich dann für $m = 10$:

1 Bei fortgeschrittenen Analysis-Kenntnissen kann nach dem Vorangehenden aus der Existenz der Ableitung an der Stelle 0 leicht $\exp_b''(x) > 0$ für alle x, daraus die (strenge) Konvexität der Funktion $\exp_b$ und weiter das Bestehen einer Ungleichung der Form $\exp_b(x) > 1 + mx$ (für alle $x \neq 0$) *gefolgert* werden; umgekehrt kann man aus dieser Ungleichung die Differenzierbarkeit von $\exp_b$ an der Stelle 0 folgern. (Siehe Fußnote 2 auf S. 285.) Wir verzichten auf die sich hier anbietenden Reduktionen der aus der Anschauung entnommenen Sachverhalte, da wir eine möglichst frühzeitige Behandlung der Exponentialfunktionen wünschen.

$$\sigma_2 \approx 0{,}6932; \quad \sigma_3 \approx 1{,}0991; \quad \sigma_{10} \approx 2{,}3050.$$

4.3. Anschaulich ist nun klar, daß es genau eine Exponentialfunktion geben muß, deren Tangente in $(0,1)$ die Steigung 1 hat, und daß deren Basis zwischen 2,5 und 3 liegt. Diese Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ ist deshalb besonders interessant, weil ihre Ableitungsfunktion mit ihr übereinstimmt.

Die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Basis e mit $\sigma_e = 1$ kann im Unterricht zuerst bewußt aus der Anschauung entnommen und später – wenn überhaupt – begründet werden (siehe 4.4.). Zuvor kann der numerische Wert dieser Zahl e ermittelt werden (siehe **5.**).

Weiter kann sofort die für Anwendungen benötigte Ableitung von $x \mapsto e^{kx}$ $(k \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$ geometrisch ermittelt werden, indem die x-Affinität mit dem Faktor $\frac{1}{k}$ auf den Graphen von $x \mapsto e^x$ und die Tangente im jeweils betrachteten Punkt angewandt wird (siehe Fig. 4). Es resultiert[1] $(x \mapsto e^{kx})' = x \mapsto k \cdot e^{kx}$.

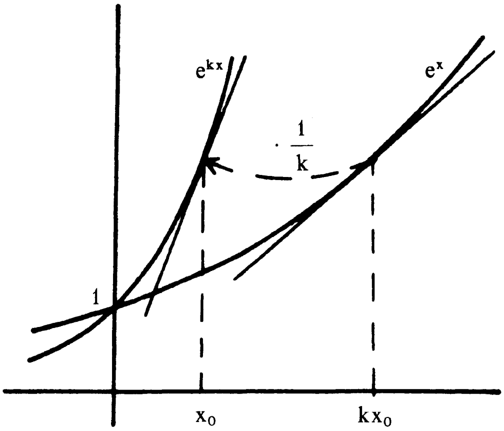

Fig. 4

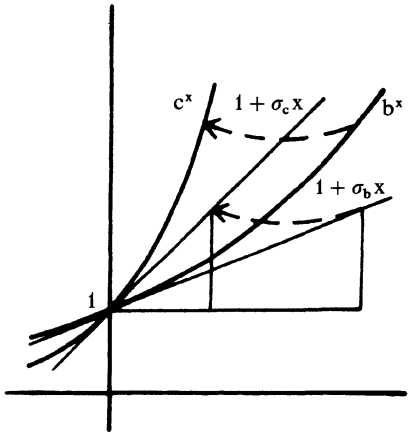

Fig. 5

Diese wichtige Zahl e wird *Eulersche Zahl* genannt. Sie ist hier also in der Weise definiert, wie ihre *praktische Bedeutung* begründet ist, nämlich als Basis derjenigen Exponentialfunktion, die an der Stelle 0 die Steigung 1 hat (also mit ihrer Ableitung übereinstimmt), und nicht wie bei anderem Aufbau etwa als 1-Stelle der über das Integral $\int_1^x \frac{dt}{t}$ definierten Funktion ln oder als Limes der Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. [2]

4.4. Zur Begründung der Existenz und Eindeutigkeit einer Zahl e mit $\sigma_e = 1$ vergegenwärtigen wir uns nochmals, daß die Graphen zweier Exponentialfunktionen $\exp_b$, $\exp_c$ $(b, c \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\})$ jeweils durch eine bestimmte x-Affinität auseinander hervorgehen (siehe 1.5.). Dieselbe x-Affinität überführt auch die Tangenten in $(0,1)$ ineinander (siehe Fig. 5).

1 Natürlich läßt sich dies auch formal mit Hilfe der Ableitungsregel „$f(x) = g(kx) \Rightarrow f'(x) = k \cdot g'(kx)$" berechnen. Diese Regel kann unabhängig von der – in einem Grundkurs entbehrlichen – Kettenregel ganz elementar algebraisch oder geometrisch (vgl. [9, S. 14; 11, S. 25/26]) bewiesen werden.

2 Man beachte hierzu auch die Kritik an dem Zugang via „stetige Verzinsung" in [10].

Für ihre Steigungen gilt damit[1]

$$\sigma_c = k \cdot \sigma_b \quad (\text{wobei } k = \log_b c).$$

Aufgrund der Bijektivität der Exponentialfunktionen und deren Umkehrung nimmt nun für festgehaltenes $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ die Zahl k und damit auch $k \cdot \sigma_b$ jeden reellen Wert genau einmal an, wenn c alle positiven reellen Zahlen durchläuft. Insbesondere gibt es genau eine Zahl $e \in \mathbb{R}^+$ mit $k \cdot \sigma_b = 1$, also $\sigma_e = 1$.

4.5. Nun können schließlich auch noch die gesuchten konstanten Faktoren σ_b explizit ermittelt werden, womit die Ableitungsbestimmung für die Exponentialfunktionen abgeschlossen wird. Nach 4.4. gilt $\sigma_c = \log_b c \cdot \sigma_b$ für alle $b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, also für $b = e$

$$\sigma_c = \log_e c \cdot 1 = \ln c,$$

wobei $\ln := \log_e$ gesetzt ist. Damit sind die gesuchten Faktoren bestimmt[2], und es gilt

$$\exp_b' = \ln b \cdot \exp_b \quad \text{für alle } b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$

5. Numerische Bestimmung der Eulerschen Zahl

Wie bereits erwähnt, kann der numerische Wert von e bereits direkt im Anschluß an die Definition von e ermittelt werden[3]. Wir unterscheiden dabei mehrere Stufen.

5.1. Wegen $\sigma_e = 1$ gilt $\frac{e^h - 1}{h} \approx 1$ für kleine h. Wir versuchen daher solche Basen b zu finden, für die $\frac{b^h - 1}{h}$ für kleine h möglichst dicht bei 1 liegt. Wir wählen z. B. $h = \frac{1}{2^{10}}$ und benutzen einen Taschenrechner mit Wurzeltaste. Es resultiert $e \approx 2{,}718$.

b	$2^{10} \cdot (\sqrt[2^{10}]{b} - 1)$
2,5	0,9165 ...
3	1,0990 ...
2,7	0,9935 ...
2,75	1,0120 ...
2,72	1,0010 ...
2,715	0,9992 ...
2,718	1,0002 ...

5.2. Ausgangspunkt ist der *lineare Approximationsaspekt:* In der Umgebung von 0 läßt

1 Mit Hilfe der in Fußnote 1 auf S. 279 genannten Ableitungsregel läßt sich dies auch formal berechnen: $c^x = f(x) = b^{\log_b c \cdot x} \Rightarrow \sigma_c \cdot c^x = f'(x) = \log_b c \cdot \sigma_b \cdot b^{\log_b c \cdot x} = \log_b c \cdot \sigma_b \cdot c^x$.

2 Es gilt also $\ln b = \lim\limits_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$. Damit hat sich als Nebenresultat eine *Berechnungsmöglichkeit für die Logarithmenwerte* zur Basis e ergeben, wohingegen bisher ja Logarithmenwerte höchstens über nichttriviale Intervallschachtelungen berechenbar waren (vgl. [1, S. 197]).

3 Man vergleiche mit der in [6] geschilderten Art der Gewinnung von e durch Vergleich der Graphen von $\exp_b$ und $\exp_b'$ für $2 < b < 3$, wobei $\exp_b'$ durch graphische Differentiation erhalten wird. Siehe auch [14, S. 200].

sich der Graph der Exponentialfunktion näherungsweise durch die zugehörige Tangente in (0, 1) ersetzen, d. h. es gilt

$$e^x \approx 1 + x \qquad \text{für kleine } |x|.$$

Mit $x = \frac{1}{n}$ wird also $e^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n}$ für große n. Indem in dieser Näherungsgleichung einfach auf beiden Seiten die n-te Potenz gebildet wird, ergibt sich

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{für große } n.$$

Hieraus berechnet man mit Hilfe eines Taschenrechners, wiederum unter vorteilhafter Verwendung von Zweierpotenzen: $e \approx \left(1 + \frac{1}{2^m}\right)^{2^m}$, sofort $e \approx 2{,}72$.

5.3. Wir haben soeben naiv auf beiden Seiten der Näherungsgleichung die n-te Potenz gebildet. Dies erscheint plausibel, ist aber bisher nicht gerechtfertigt, zumal im Unterricht das Rechnen mit dem Zeichen $\approx$ sicherlich noch nicht thematisiert worden ist. Daher ergibt sich die Notwendigkeit der Präzisierung und Begründung der Aussage $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für große n. Dies ist im Unterricht in elementarer Weise möglich:

Wir benutzen aus 4.1, daß der Graph von $\exp_e$ – außer an der Stelle 0 – ganz oberhalb der Tangente in (0, 1) verläuft. Es gilt also

$$e^x > 1 + x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Nun setzen wir kleine Werte für x links und rechts von 0 ein und erhalten dadurch Abschätzungen für e nach beiden Seiten.

Wir setzen *einerseits* $x = \frac{1}{n}$; es folgt $e^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n}$, also $e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir setzen *andererseits* $x = -\frac{1}{m}$; es folgt

$$e^{-\frac{1}{m}} > 1 - \frac{1}{m}, \text{ also } e^{\frac{1}{m}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} = \frac{m}{m-1}, \text{ und damit } e < \left(\frac{m}{m-1}\right)^m \text{ für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Hieraus ergibt sich z. B. für $n = m = 2^{10}$:

$$2{,}716 < e < 2{,}720.$$

5.4. Wir ersetzen m durch n + 1 und schätzen weiter ab:

$$e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{e}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist insbesondere $e < 4$ (setze $n = 1$).

Insgesamt hat sich also ergeben:[1]

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \frac{4}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir haben damit gezeigt, in welchem präzisen Sinne die Aussage $e \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ zu verstehen ist. Unser Beweis war deshalb so einfach im Vergleich zu [8, S. 46–48] oder zu den üblichen Abschätzungen im Zusammenhang mit der Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, weil wir die Zahl e *nicht mehr definieren*, sondern *nur noch berechnen* mußten.

5.5. Aus der eben hergeleiteten Ungleichung folgt sofort

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{4}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

also

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Hierbei brauchen keineswegs Folgen bereits vorher thematisiert worden zu sein (vgl. [4]). Diese Grenzwertaussage ist aufgrund obiger expliziter Abschätzung vollkommen klar, gleichgültig ob ein exakter Grenzwertbegriff zugrundeliegt oder aber – wie wir für den ersten Durchgang der Analysis vorschlagen – ein vereinfachter.

6. Konvexität und Differenzierbarkeit (an der Stelle 0) der Exponentialfunktionen[2]

In 4.1. haben wir der Anschauung entnommen, daß der Graph einer jeden Exponentialfunktion an der Stelle 0 eine wohlbestimmte, nicht horizontale *Tangente* hat, die (außer in 0) *unterhalb des Graphen* verläuft. Hier präzisieren wir diese Aussagen und beweisen sie, indem wir sie aus der Monotonie und der Grundeigenschaft der exponentiellen Wachstumsfunktionen (siehe 1.3.) folgern. Dabei beschränken wir uns auf *wachsende* Exponentialfunktionen. Aus ihnen erhält man die abnehmenden Exponentialfunktionen durch Spiegelung an der zweiten Achse, wobei sich die behaupteten Eigenschaften nicht ändern.

6.1. Eine Folgerung aus der Grundeigenschaft

Nach der Grundeigenschaft wachsen beim Weitergehen um gleichlange Schritte $(+s)$ die Funktionswerte immer um den gleichen Faktor $(\cdot q)$. Hierbei ist naturgemäß $s > 0$ angenommen und folglich $q > 1$. Nun gilt trivialerweise:

1 Das „Fehlerglied“ $\frac{4}{n}$ läßt es im übrigen plausibel erscheinen, daß die Annäherung von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ an die Zahl e so langsam erfolgt.

2 Dieser Abschnitt geht auf Überlegungen des zweiten Verfassers im Anschluß an [10] zurück.

(1) Beim Weitergehen um gleichlange Schritte $(+s)$ wachsen die Funktions*zuwächse* (in Fig. 6 gestrichelt) immer um denselben Faktor $(\cdot q)$ wie die Funktions*werte*.

(2) Auch die zu den einzelnen Schritten gehörigen *Sehnensteigungen* wachsen immer um diesen Faktor $(\cdot q)$.

In der Tat folgt aus $a_1 \cdot q = a_2$, $a_2 \cdot q = a_3$ zunächst $(a_2 - a_1) \cdot q = a_2 \cdot q - a_1 \cdot q = a_3 - a_2$, und weiter: $\frac{a_2 - a_1}{s} \cdot q = \frac{a_3 - a_2}{s}$.

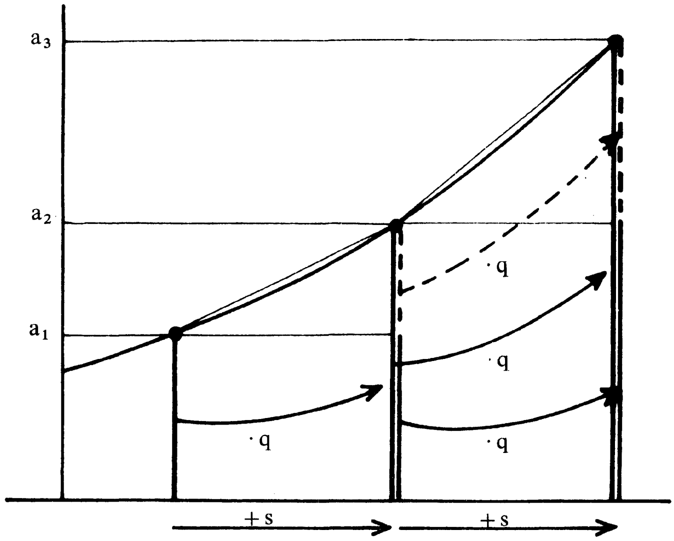

Fig. 6

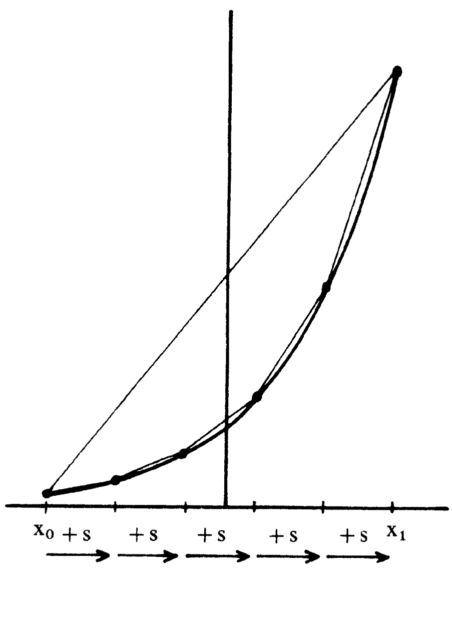

Fig. 7

6.2. Strenge Konvexität der Exponentialfunktionen

Daß der Graph einer Funktion eine *Linkskurve* beschreibt, soll folgendes besagen: Der Graph verläuft zwischen zwei beliebigen Punkten *ganz unterhalb der betreffenden Sehne.* Funktionen mit dieser Eigenschaft nennen wir *streng konvex* (genauer: streng konvex nach unten).

Behauptung: Jede Exponentialfunktion f ist streng konvex.

Plausible Begründung (Fig. 7): Es sei $x_0 < x_1$. Wir gehen von x_0 zu x_1 in endlich vielen gleichlangen Schritten und betrachten den zugehörigen *Sehnenzug*. Nach 6.1. (2) werden die Sehnensteigungen von Schritt zu Schritt größer, d.h. die Sehnen werden jeweils im gleichen Sinn (nach oben) „geknickt". Danach leuchtet ein, daß der gesamte Sehnenzug unterhalb der zu x_0 und x_1 gehörigen Sehne verläuft. Somit liegen insbesondere alle Punkte des Graphen von f, die zu den Schritt-Endpunkten gehören, unterhalb dieser Sehne. Nun kann man die Schritte beliebig klein machen. Dann erscheint die Behauptung wegen der Monotonie von f plausibel.

Beweis:[1] Es sei $x_0 < x_1$. Ferner sei l die lineare Funktion mit $l(x) = f(x)$ für $x \in \{x_0; x_1\}$, und es sei k die geknickt-lineare Funktion mit $k(x) = f(x)$ für $x \in \{x_0; x_{0,1}; x_1\}$; hierbei ist $x_{0,1} = \frac{x_0 + x_1}{2}$ (Fig. 8). Wir zeigen in vier Schritten, daß $f(x) < l(x)$ für alle x mit $x_0 < x < x_1$.

I. Aus 6.1. (1) folgt $f(x_{0,1}) < l(x_{0,1})$. Denn ist $q\,(> 1)$ der Wachstumsfaktor, der zur Schrittlänge $\frac{x_1 - x_0}{2}$ gehört, so gilt (Fig. 8): $u < u \cdot q = v$, also $u < \frac{u}{2} + \frac{v}{2} = \frac{u+v}{2}$. Wir bemerken jetzt, daß $k(x) < l(x)$ für $x_0 < x < x_1$.

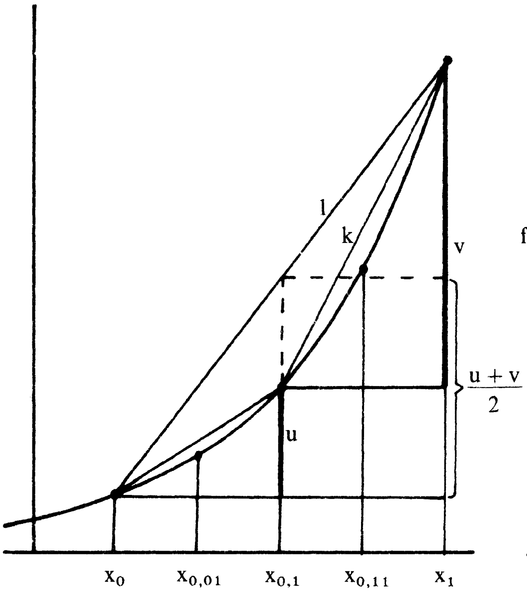

Fig. 8

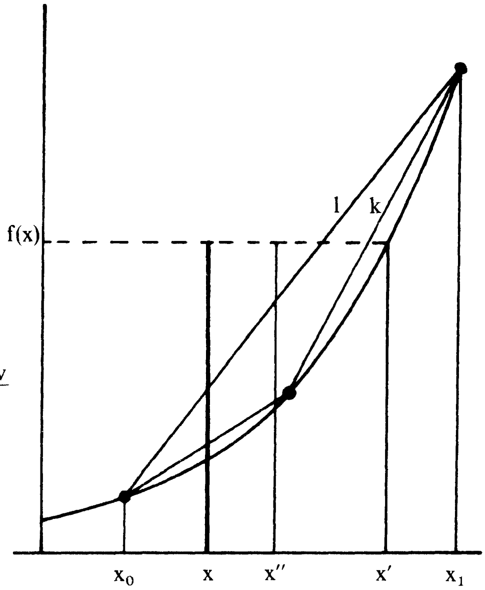

Fig. 9

1 Nach einer Anregung von G. Pickert in [17].

II. Sei $x = x_{0,01}$ oder $x_{0,11}$ (Fig. 8). Dann folgt durch Übertragung von I. auf das linke bzw. rechte Teilintervall, daß $f(x) < k(x)$, also erst recht $f(x) < l(x)$.

III. Sei x eine Stelle, die man durch endlich-maliges Halbieren des Intervalls $[x_0; x_1]$ erhält („Dualstelle"). Dann folgt durch wiederholtes Anwenden von II., daß $f(x) < l(x)$ und sogar $f(x) \leqq k(x)$ gilt[1].

IV. Sei x eine durch III. nicht erfaßte Stelle, d.h. keine Dualstelle. *Annahme:* $f(x) \geqq l(x)$. Wir bestimmen (Fig. 9) die Stelle $x' > x$ mit $x' \leqq x_1$ und $f(x) = k(x')$ (wenn das nicht geht, setzen wir $x' = x_1$; dann ist $f(x) > k(x')$). Nun gibt es jedenfalls eine Dualstelle x'' mit $x < x'' < x'$. Hierfür gilt einerseits $f(x'') > f(x) \geqq k(x') > k(x'')$ (insbesondere wegen der strengen Monotonie von f und von k), andererseits $f(x'') \leqq k(x'')$ nach III.

Mit diesem Widerspruch ist der Beweis abgeschlossen.[2]

6.3. Stetigkeit der Exponentialfunktionen

Wer den Begriff „stetig" kennt, sieht jetzt sofort, daß jede Exponentialfunktion f *stetig* an jeder Stelle x_0 ist:

Wir verlängern die zu x_0 und $x_0 + 1$ gehörige Sehne (Fig. 10) nach beiden Seiten und betrachten dazu die konstante Funktion c mit dem Wert $f(x_0)$. Dann verläuft f für $x < x_0 + 1$ in dem schraffierten Gebiet. Zur Begründung dessen beachte man: f ist monoton wachsend, und im Fall $x_0 \leqq x < x_0 + 1$ gilt $f(x) \leqq l(x)$ (siehe 6.2.), im Fall $x < x_0$ folgt aus der Annahme $f(x) < l(x)$ ein Widerspruch zur Konvexität (man betrachte die Stellen x, x_0, $x_0 + 1$).

Nach dem Vorstehenden kommt der Wert $f(x)$ dem Wert $f(x_0)$ *beliebig nahe*, wenn die Stelle x nur *genügend dicht* bei x_0 liegt. Offenbar gilt sogar (siehe Fig. 10) die folgende Aussage, welche die Lipschitz-Stetigkeit von f an der Stelle x_0 ausdrückt: Für alle $x < x_0 + 1$ ist $|f(x) - f(x_0)| \leqq L \cdot |x - x_0|$, wobei $L = f(x_0 + 1) - f(x_0)$.

Der folgende Beweis der „Knickfreiheit" der Exponentialfunktionen erfolgt jedoch *ohne Bezugnahme auf den Stetigkeitsbegriff.*

6.4. Knickfreiheit[3] der Exponentialfunktionen

Bevor wir auf die Tangentenfrage eingehen, machen wir uns klar, daß der Graph einer Exponentialfunktion „keinen Knick hat".

1 Damit ist die vorangehende plausible Aussage, daß der „Sehnenzug unterhalb der zu x_0 und x_1 gehörigen Sehne verläuft", für den (hinreichend allgemeinen) Fall bewiesen, daß die Schrittzahl eine Zweierpotenz ist.

2 Nachdem die Konvexität bewiesen ist, erscheint die Existenz einer *„Stützgeraden"* plausibel: $b^x \geqq 1 + mx$ für alle x, mit $m > 0$. Zum Beweis, siehe [17, S. 69/70] und Fig. 12 in 6.5., folgert man aus der Konvexität, daß $(0 <) \frac{b^k - 1}{k} \leqq \frac{b^h - 1}{h}$ für alle $k < 0$, $h > 0$. Somit existiert eine Zahl $m > 0$ mit $\frac{b^k - 1}{k} \leqq m \leqq \frac{b^h - 1}{h}$, und man erhält $b^k \geqq 1 - mk$, $b^h \geqq 1 + mh$, also $b^x \geqq 1 + mx$ für alle x. Damit ergibt sich schon hier die *Differenzierbarkeit bei* 0 wie folgt: Weil natürlich auch $b^{-x} \geqq 1 - mx$ gilt, hat man $1 + mx \leqq b^x = \frac{1}{b^{-x}} \leqq \frac{1}{1 - mx}$, für alle $x < \frac{1}{m}$. Die Funktion $x \mapsto b^x$ ist also „eingeschlossen" ([9, S. 12]) zwischen die Funktionen $x \mapsto 1 + mx$ und $x \mapsto \frac{1}{1 - mx}$, die beide an der Stelle 0 den Wert 1 und die Ableitung m haben.

3 Der im folgenden (vorübergehend) eingeführte Begriff „nicht geknickt" entspricht genau dem Begriff „glatt" in der Theorie der konvexen Mengen; siehe etwa [18, S. 103].

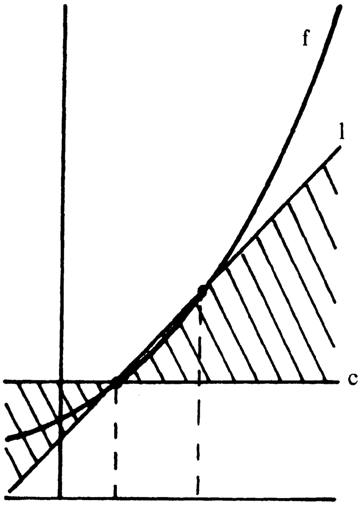

Fig. 10

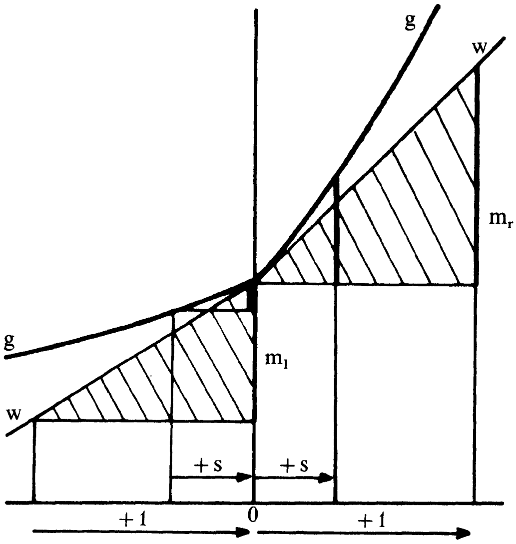

Fig. 11

Vorbetrachtung: Nach 6.1. (2) wachsen die zu den Schritten (+s) gehörigen Sehnensteigungen immer um denselben Faktor (·q) wie die Funktionswerte. Bei „sehr kleiner" Schrittlänge s ist offenbar der Faktor q nur „sehr wenig" größer als 1. (Eine Präzisierung dieser Feststellung kann mit Hilfe der Überlegungen in 6.3. erfolgen.) Dies bedeutet, daß bei sehr kleiner Schrittlänge die Sehnen jeweils nur sehr wenig geknickt werden. Daher hat der Graph der Exponentialfunktionen selbst *keinen* Knick.

Zur *Präzisierung* dessen *definieren* wir für eine beliebige *streng konvexe Funktion* f mit $f(0) = 1$: Die Funktion f heiße an der Stelle 0 *geknickt* genau dann, wenn ihr Graph sich in einen echten Winkel mit dem Scheitelpunkt (0, 1) einschließen läßt. (Ein echter Winkel ist ein konvexes, nicht „gestrecktes" Winkelfeld.)

Behauptung: Eine Exponentialfunktion ist an der Stelle 0 nicht geknickt.

Beweis (durch Kontraposition): Es sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine streng monoton wachsende, streng konvexe Funktion durch (0, 1), die von einem echten Winkel mit Scheitelpunkt (0, 1) eingeschlossen wird (Fig. 11). Der Rand w des Winkels (als reelle Funktion aufgefaßt) ist dann streng monoton wachsend. Wegen der strengen Konvexität verläuft g (außer in (0, 1)) oberhalb von w. Wir zeigen, daß g nicht die Grundeigenschaft einer Wachstumsfunktion hat.

Grundgedanke: Das Steigungsverhältnis $\frac{m_r}{m_l}$ der Schenkel von w ist eine wohlbestimmte Zahl größer als 1. Überschreiten wir die Stelle 0 mit zwei gleichlangen Schritten (Fig. 11), so ist das Verhältnis der Funktions*zuwächse* größer als $\frac{m_r}{m_l}$, unabhängig von der Schrittlänge s. Andererseits liegt das Verhältnis der Funktions*werte* nur beliebig wenig über 1, wenn wir die Schrittlänge genügend klein wählen. Dies zeigt, daß die Aussage 6.1. (1) nicht gilt und folglich g keine Exponentialfunktion sein kann. (Man „sieht", wie die Knickfreiheit aus der – nicht thematisierten – Stetigkeit folgt.)

Wir verzichten darauf, die genaue *Ausführung* dieses Beweises darzustellen.

6.5. Differenzierbarkeit der Exponentialfunktionen an der Stelle 0

Wer mit konvexen Funktionen vertraut ist, erkennt jetzt, daß jede Exponentialfunktion an der Stelle 0 *genau eine Stützgerade* hat und folglich differenzierbar ist, mit der Stützgerade als Tangente ([3, S. 53; 9, S. 10–13; 12, S. 193]). Wir beweisen unabhängig davon, daß jede Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$ an der Stelle 0 differenzierbar ist, d. h. daß $\lim\limits_{x \to 0} \frac{b^x - 1}{x} = m$ existiert, und daß ihr Graph (außer in 0) oberhalb der Tangente $x \mapsto 1 + mx$ verläuft.

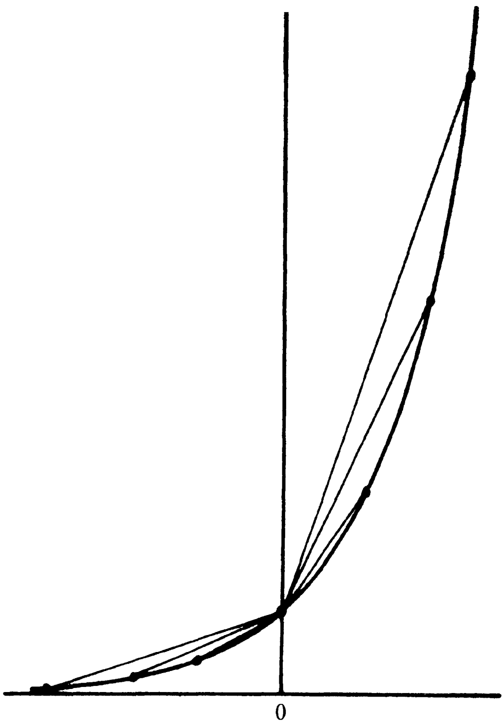

Fig. 12

Wegen der strengen Konvexität der Exponentialfunktionen ist offenbar (siehe Fig. 12) jede linke Sekantensteigung kleiner als jede rechte Sekantensteigung; ferner werden die linken Sekantensteigungen um so größer und die rechten um so kleiner, je dichter der Sekantenendpunkt an (0, 1) heranrückt. Dies besagt:

Für $k' < k < 0 < h < h'$ gilt stets

$$\frac{b^{k'} - 1}{k'} < \frac{b^k - 1}{k} < \frac{b^h - 1}{h} < \frac{b^{h'} - 1}{h'}. \tag{3}$$

Also existieren

$$\lim_{\substack{k \to 0 \\ k < 0}} \frac{b^k - 1}{k} =: m_l, \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{b^h - 1}{h} =: m_r,$$

und für $k < 0 < h$ gilt stets:

$$\text{(4)} \qquad \frac{b^k - 1}{k} < m_l \leqq m_r < \frac{b^h - 1}{h}.$$

Diese Folgerungen aus (3) lassen sich ebenso „exakt" begründen, wie jeweils der Grenzwertbegriff gefaßt wurde (vgl. 3.2.); wir gehen darauf nicht ein.

Aus (4) folgt sofort

$$b^x > 1 + m_l x \quad \text{für} \quad x < 0, \qquad b^x > 1 + m_r x \quad \text{für} \quad x > 0.$$

Wäre nun $m_l < m_r$, so wäre die Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$ in einen echten Winkel mit Scheitelpunkt $(0, 1)$ eingeschlossen; dies ist aber nach 6.4. unmöglich. Also gilt $m_l = m_r =: m$ und folglich $\lim\limits_{x \to 0} \frac{b^x - 1}{x} = m$ sowie $b^x > 1 + mx$ für alle $x \neq 0$. Natürlich ist $m \neq 0$, weil sonst die Funktion $\exp_b$ $(b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$ nicht streng monoton wachsend sein könnte. Damit ist der angekündigte Beweis erbracht.

Anschrift der Verfasser: Professor Dr. Werner Blum, Professor Dr. Arnold Kirsch, Gesamthochschule Kassel, Heinrich-Plett-Str. 40, 3500 Kassel.

Eingangsdatum: 14.4.1976.

Literatur

[1] Athen, H. und H. Griesel (Hsgb.): Mathematik heute 10. Hannover: Schroedel 1976.
[2] Baumgartner, E.: Zur Einführung der Logarithmus- und Exponentialfunktionen in der Sekundarstufe II. In: Didaktik der Mathematik 3 (1975), Heft 1, S. 1–28.
[3] Blaschke, W.: Kreis und Kugel. Berlin: De Gruyter ^{2}1956.
[4] Blum, W.: Ein Grundkurs in Analysis. In: Didaktik der Mathematik 3 (1975), Heft 3, S. 163–184.
[5] Bruner, J. S.: Der Prozeß der Erziehung. Düsseldorf: Schwann 1970.
[6] Dücker, H.: Zur Einführung der Exponentfunktion. In: Praxis der Mathematik 5 (1963), Heft 5, S. 126.
[7] Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 2. Stuttgart: Klett 1973.
[8] Freund, H.: Die Gewinnung von Steigungswerten durch analytisch-geometrische Betrachtungen. In: Der Mathematikunterricht 6 (1960), Heft 2, S. 22–51.
[9] Kirsch, A.: Ein geometrischer Zugang zu den Grundbegriffen der Differentialrechnung. In: Der Mathematikunterricht 6 (1960), Heft 2, S. 5–21.
[10] Kirsch, A.: Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht. In: Didaktik der Mathematik 4 (1976), Heft 4, S. 257–284.
[11] Koch, A.: Eine propädeutische Behandlung der Analysis. In: Der Mathematikunterricht 14 (1968), Heft 5, S. 12–37.
[12] Kroll, W.: Differentialrechnung. Bonn: Dümmler 1976.
[13] Lang, S.: A First Course in Calculus. Reading: Addison-Wesley ^{3}1973.
[14] Lessner, G.: Analysis. In: Didaktik der Mathematik III (Hrsg. H. Meschkowski), Stuttgart: Klett 1973, S. 170–208.
[15] Meyer, F.: Didaktisches zur Behandlung der Exponential- und der Logarithmusfunktion auf der Mittelstufe. In: Elemente der Mathematik 2 (1947), Heft 3, S. 64–66.
[16] Nägerl, H. et al.: Über die Schwierigkeiten der Studienanfänger in Medizin im Umgang mit der Mathematik. In: Didaktik der Mathematik 1 (1973), Heft 2, S. 143–157.
[17] Pickert, G.: Analysis in der Kollegstufe. In: Der Mathematikunterricht 22 (1976), Heft 5, 5. 64–81.
[18] Valentine, F. A.: Konvexe Mengen. Mannheim: BI-Taschenbuch 1968.