In: Abitur und Technischer Assistent, Bedingungen und Erfahrungen in hessischen Modellversuchen zur Doppelqualifikation, Schriftenreihe der Wissenschaftlichen Begleitung "Modellversuche Sekundarstufe II in Hessen", Heft 13, Hrsg.: Dedering, Verlag Diesterweg, 1983, Frankfurt, S. 376-402

ZUR MATHEMATIK IN DER DOPPELTQUALIFIZIERENDEN AUSBILDUNG ZUM MATHEMATISCH-TECHNISCHEN ASSISTENTEN

Werner Blum

0. Vorbemerkungen

Im folgenden werde ich mich mit der Mathematik innerhalb der integrierten Ausbildung zum mathematisch-technischen Assistenten (meist kurz: MaTA) beschäftigen, wie sie in den beiden Modellversuchsschulen Georg-Kerschensteiner-Schule Bad Homburg und gymnasiale Oberstufenschule Kassel-Oberzwehren stattfindet. Ich beschränke mich dabei auf die Mathematik und behandle nicht das Gebiet Programmieren/EDV. Generell lege ich bei meinen Überlegungen den mittels Erlassen festgesetzten Rahmen für diese Ausbildung zugrunde, insbesondere die "Profilbeschreibung der mathematisch-technischen Assistenten im Rahmen doppeltqualifizierender Bildungsgänge: 'Allgemeine Hochschulreife und mathematisch-technischer Assistent'".[1] Dieser per Erlaß festgesetzte Rahmen wird von mir nicht hinterfragt. Vielmehr diskutiere ich fachdidaktische Fragen, die sich innerhalb dieses Rahmens stellen. Im ersten Teil meines Gutachtens mache ich einige allgemeine Bemerkungen über Ziele und Konzeption der Mathematik innerhalb der MaTA-Ausbildung. Der dabei wichtige Aspekt des Verhältnisses von Mathematik und Realität im Unterricht wird im zweiten Teil genauer diskutiert. Im dritten Teil skizziere ich einige Folgerungen aus diesen allgemeinen Überlegungen für die Struktur, die Inhalte und die methodische Konzeption der Mathematik-Kurse

---

1) Hessischer Kultusminister (Hg.): Modellversuche in der Sekundarstufe II in Hessen, Erlasse, Heft 1, Frankfurt 1979, S. 58-82

in der MaTA-Ausbildung. Im vierten Teil exemplifiziere ich dann einige dieser Folgerungen anhand des Grundkurses "Analysis/Numerische Verfahren" für Klasse 12/I. Dieses Gutachten ist recht global und allgemein angelegt, um einen fachdidaktischen Rahmen für Konzeption, Ziele, Inhalte und Methodik der Mathematik innerhalb der MaTA-Ausbildung zu schaffen. Details, insbesondere die genaue inhaltliche Auslegung der angestrebten Qualifikationen und den inhaltlichen Aufbau der einzelnen Kurse betreffend, müssen weiteren Ausarbeitungen vorbehalten bleiben. Auch kann hier nicht auf wahrscheinlich vorhandene Unterschiede in den Schülerpopulationen der beiden Versuchsschulen eingegangen werden.

1. Zu Zielen und Konzeption der Mathematik in der MaTA-Ausbildung

Nach der - wie einleitend gesagt, hier ohne weitere Diskussion zugrunde gelegten - Profilbeschreibung sind u. a. die folgenden wesentlichen allgemeinen Ziele für den Unterricht in Mathematik innerhalb der MaTA-Ausbildung zu beachten:

1) Mathematik soll zur Berufsvorbereitung und -ausbildung beitragen. Dazu ist zum einen ein Kennen und Verstehen praxisrelevanter mathematischer Begriffe, Methoden und Resultate inklusive deren Anwendung mit Hilfe von EDV notwendig. Ziel ist aber nicht eine enge und spezielle berufliche Qualifizierung. Daher sollen zum anderen allgemeinere Qualifikationen wie Problemlösefähigkeit, Flexibilität, Offenheit gegenüber gesellschaftlichen Fragen, Kooperations- oder Kommunikationsfähigkeit vermittelt werden. Hieran hat sich auch die Mathematik zu orientieren. Bei dieser berufsvorbereitenden Funktion der Mathematik ist auch zu beachten, daß die schulische MaTA-Ausbildung mit der in der Industrie praktizierten Ausbildung vergleichbar sein soll. Dies bedeutet nicht eine inhaltliche Gleichartigkeit, wohl aber eine Gleichwertigkeit im Hinblick auf das berufsbezogene Anspruchsniveau.

2) Mathematik soll zur Studierfähigkeit beitragen, wobei eines der Leistungsfächer Mathematik ist. Dazu müssen u. a. die allgemein üblichen Leistungskursthemen in Mathematik bis Klasse 13/II abgedeckt werden. Allerdings gilt für alle Mathematik-Kurse das in verstärktem Maße, was generell zu den Grund- und auch zu den Leistungskursen der reformierten Oberstufe zu sagen ist: Die Kurse sollen keine verdünnten oder gar unveränderten Kopien der Universitäts-Mathematik sein, sondern dem Lernenden unter Beachtung geeigneter nicht-verfälschender Vereinfachungen eigene didaktische Wege anbieten. Ziel ist Studierfähigkeit im allgemeinen Sinn, nicht eine Vorwegnahme des mathematischen Grundstudiums.

3) Durch gleichzeitiges Beachten berufs- und studienvorbereitender Ziele soll eine Verbindung zwischen allgemeinem und beruflichem Lernen insofern erfolgen, als diese beiden üblicherweise getrennten Komponenten im Mathematikunterricht als Einheit angesehen werden und zu einer echten "Doppelqualifikation" führen.

So soll auch die Mathematik dazu beitragen, die "neue Qualität" von Bildung zu erreichen, von der Politiker und Modellversuchs-Planer sprechen.[2)] Bei Berücksichtigung dieser allgemeinen Ziele hat der Mathematikunterricht zum einen die Aufgabe, dazu beizutragen, daß der Schüler geeignete derzeitige oder absehbar zukünftige Probleme aus der Umwelt beschreiben, besser verstehen und besser bewältigen kann. Diese Umweltprobleme können einerseits dem beruflichen Sektor entnommen werden, Probleme - insbesondere numerische - im Zusammenhang mit Rechnern eingeschlossen. Im Sinne des oben

---

2) Vgl. etwa Hessischer Kultusminister (Hg.): Modellversuche in der Sekundarstufe II in Hessen, Informationstagung am 16. Januar 1980 in Kassel, Frankfurt 1980 a, oder derselbe: Verbindung von allgemeinem und beruflichem Lernen, Modellversuche zur Entwicklung doppeltqualifizierender Bildungsgänge in der Sekundarstufe II in Hessen, Frankfurt 1979 a.

in 2) und 3) genannten dürfen diese Probleme andererseits aber ebenso aus der alltäglichen, nicht-berufsbezogenen Umwelt stammen. Weiter ist es nach dem bisherigen Erkenntnisstand sehr schwer vorherzusagen, welche speziellen realen Problemsituationen und welche speziellen mathematischen Inhalte dem zukünftigen MaTA begegnen werden. Daher ist es wichtiger, daß der Schüler allgemeine Strategien zum Behandeln von realen Problemsituationen mit Hilfe von Mathematik erwirbt, d. h. daß er an Hand von Beispielen exemplarisch lernt, wie man zwischen Realität und Mathematik übersetzen[3] kann, insbesondere, wie man eine Situation mathematisieren kann. Genaueres dazu in Teil 2. Zum anderen hat der Mathematikunterricht die Aufgabe, zum Erreichen "formaler" Ziele beizutragen, also durch Umgehen mit Mathematik z. B. die Fähigkeit zum mathematischen Argumentieren oder zum algorithmischen Denken zu fördern. In jedem Falle ist es wichtig, durch Einbeziehung von Inhalten und Methoden der Informatik in den Mathematikunterricht dem Schüler grundlegende Fertigkeiten und Fähigkeiten im Umgang mit Computern zu vermitteln und durch konsequentes Nutzen dieses Mediums konstruktive, dynamische, experimentell Aspekte der Mathematik stärker zu betonen.

Im Sinne all dieser Ziele kann und soll der Mathematikunterricht in keinem Fall anstreben, mit der mathematischen Ausbildung von Industrie-MaTA'n zu konkurrieren, sofern sie im tertiären Sektor stattfindet. Dies würde sowohl zu einer hoffnungslosen Stoffüberfüllung und partiellen Niveauüberhöhung (und damit zu einer bildungspolitisch nicht wünschbaren Einschränkung des Adressatenkreises) führen als auch dem Ziel einer Förderung von exemplarischen Übersetzungsqualifikationen nicht dienlich sein. "Gleichwertigkeit" der Ausbildung bedeutet hier, daß der Schüler hohe Fähigkeiten im verständigen Umgang mit Mathematik in realen Problem-

---

3) Vgl. R. Fischer in "Didaktik der Mathematik", H. 3/78, S. 212-226 und W. Blum in "Die berufsbildende Schule", H. 11/78, S. 642-651.

situationen wie auch bei innermathematischen Anwendungsaufgaben erwirbt.[4] Der Mathematikunterricht soll dazu nach innen und außen "beziehungshaltig"[5] und "ergebnisorientiert"[6] sein. Wichtiger als eine Behandlung möglichst vieler mathematischer Inhalte auf möglichst hohem Niveau ist es in einem solchen Mathematikunterricht, daß der Schüler adäquate und einprägsame Grundvorstellungen von den grundlegenden mathematischen Begriffen und Methoden erwirbt und sich inner- wie außermathematisch wesentliche Denk- und Ausdrucksweisen aneignet. Dem widerspricht nicht, daß an ausgewählten Stellen"leistungskursadäquate" Vertiefungen, Formalisierungen und "Exaktifizierungen"[7] durchgeführt werden sollen, so daß die Ausbildung auch mathematisch genügend anspruchsvoll ist. Selbstverständlich werden die genannten Ziele noch weniger dadurch erreicht, daß mathematische Stoffe bloß rezeptmäßig zur Anwendung bereitgestellt werden. Ich will hier die Vermutung aussprechen, daß ein im eben beschriebenen Sinne ausgebildeter Absolvent auch Industrie-Bedürfnissen eher entspricht als ein Abiturient mit Vordiplom-Kenntnissen in Mathematik.

Es ist demnach kein Ziel, dem Schüler sämtliche Aspekte des Phänomens "Mathematik" ausgewogen zu vermitteln. Er soll jedoch exemplarisch verschiedene Aspekte kennenlernen, insbesondere den Anwendungs-Aspekt, den Kalkül-Aspekt und den numerischen Aspekt, aber auch den Theorie-Aspekt und den ästhetischen Aspekt. Dadurch soll er ein bildungsgangadäqua-

---

4) Vgl. W. Blum/A. Kirsch in "Der Mathematikunterricht", H. 3/79, S. 6-24.

5) Nach H. Freudenthal: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Klett, Stuttgart 1973.

6) Siehe S. Seyfferth in W. Dörfler/R. Fischer: Anwendungsorientierte Mathematik in der Sekundarstufe II, Heyn, Klagenfurt 1976, S. 201-210.

7) Im Sinne von R. Fischer, vgl. Fußnote 3).

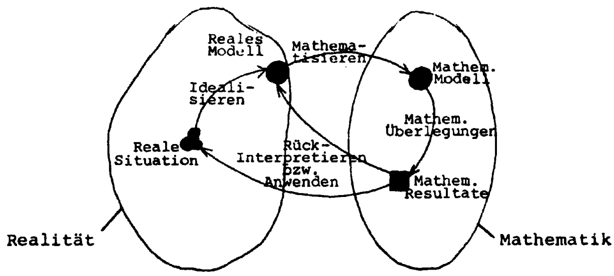
tes Bild von Mathematik aufbauen. Durch Thematisieren verschiedener Aspekte, durch Reden über Mathematik soll der Schüler auch ansatzweise die Rolle einschätzen können, welche Mathematik in unserer Gesellschaft und speziell im späteren Berufsfeld eines Anwenders spielt. Ein Mathematikunterricht mit derartigen Intentionen unterscheidet sich vom traditionellen gymnasialen Mathematikunterricht durch seine viel stärkere Anwendungsorientierung und durch seine Geringerschätzung von kulturhistorischen Begründungen für einzelne Stoffinhalte. Vom Mathematikunterricht in der beruflichen Oberstufe (vor allem FOS) unterscheidet er sich durch eine stärkere Betonung allgemeiner Problemlösefähigkeiten und Berücksichtigung allgemeiner Problemsituationen. Weiter ist eine Besonderheit gegenüber dem derzeitigen Mathematikunterricht in jedem anderen SII-Bildungsgang, daß die Fähigkeit zur Herstellung von Übersetzungen zwischen Mathematik und Realität (vgl. Teil 2) einen den eigentlich mathematischen Zielen ebenbürtigen Stellenwert hat, daß algorithmische Aspekte betont werden und daß Problemlösungen mit Hilfe von Mathematik u. a. ein computergerechtes Aufbereiten und ein konkretes Benutzen elektronischer Rechenhilfsmittel miteinschließen.

2. Exkurs: Zum Verhältnis zwischen Mathematik und Realität im Unterricht

Es gibt zahlreiche Modelle für den Zusammenhang zwischen Mathematik und Realität, besser: zwischen Mathematik und dem "Rest der Welt"[8] (denn Mathematik ist ja auch ein Stück Realität, insbesondere für Schüler); zu diesem "Rest" gehören übrigens - wie schon gesagt - gerade im MaTA-Bildungsgang auch Probleme aus Numerik und Informatik. Ich bevorzuge das Schema[9] in Grafik 1.

8) H.O.Pollak in New Trends in Mathematics Teaching, Vol.IV, UNESCO, Paris 1979, S. 232-248.

9) Vgl. z. B. auch H.-G. Steiner in W.Dörfler/R.Fischer: Anwendungsorientierte Mathematik in der Sekundarstufe II, Heyn, Klagenfurt 1976, S. 211-245.



Grafik 1

Ausgehend von einem realen Problem wird durch Vergröberung, durch Idealisierung ein "reales Modell" des Problems geschaffen. Dieses Modell trägt bereits den Keim zur Mathematisierung in sich, es ist im Grunde schon im Grenzbereich zur Mathematik angesiedelt. Mathematische Modellierung schafft den Übergang zur Mathematik, wo dann rein mathematische Überlegungen einsetzen. Die erhaltenen Resultate werden an Hand des Ausgangsproblems oder des realen Modells überprüft. Gegebenenfalls fängt dann ein neuer Kreislauf mit modifizierten Modellen an, falls nämlich die Rück-Interpretation zu unbefriedigenden Ergebnissen oder gar zu Widersprüchen geführt hat. Es ist geradezu typisch für reale Anwendungen, daß ein solcher Kreislauf mehrere Male durchlaufen wird, bis ein Problem als befriedigend gelöst angesehen werden kann. Daneben ist natürlich für die Praxis ebenfalls wichtig die direkte Anwendung schon fertig entwickelter mathematischer Resultate auf reale Problemsituationen.

Am Beispiel Einkommensteuern (kurz: ESt) sollen die einzelnen Schritte kurz verdeutlicht werden.[10] Ausgangssituation ist die Tatsache, daß der Staat Geld benötigt, das er u. a. von denen fordert, die welches verdienen. Ein reales Modell dieser Situation formuliert nun Forderungen an eine vernünftige ESt-Erhebung, z. B. bezogen auf einen einzelnen Steuerzahler:

- Stets soll die zu zahlende ESt geringer sein als das Einkommen;
- bis zu einem "Grundfreibetrag" soll keine ESt gezahlt werden;
- wenn das Einkommen wächst, so soll die zu zahlende ESt auch wachsen;
- wenn das Einkommen wächst, so soll das nach Abzug der ESt verbleibende (Netto-)Einkommen auch wachsen;
- Wenn das Einkommen wächst, so soll der zu zahlende Steuersatz auch wachsen;

u. a. m.; auch wird das Gesamtsteueraufkommen festgelegt, werden gewisse politische Setzungen wie Höchst-Steuersätze angegeben usw.. Dann werden all diese Forderungen mathematisiert. Dies führt zur Einkommensteuerfunktion

$$s : x \rightarrow s(x);\ x \in \mathbb{R}_0^+,$$

wo x das zu versteuernde Jahres-Einkommen (in DM) eines ledigen Steuerzahlers und s(x) die beim Einkommen x zu zahlende ESt (in DM) angeben. Weitere hieraus abgeleitete Begriffsbildungen im mathematischen Modell, die Entsprechungen in

[10] nach W. Blum, siehe Fußnote 3); vgl. auch Kapitel 7 in Mathematik heute, Grundkurs Analysis I (Hg.: H. Athen/ H. Griesel), Schroedel, Hannover 1978

der Ausgangssituation haben, sind der - auf das gesamte Einkommen x bezogene - Durchschnittssteuersatz $d(x) = \frac{s(x)}{x}$ und die hieraus resultierende Durchschnittssteuersatzfunktion

$$d : x \to d(x);\ x \in \mathbb{R}^+,$$

der mittlere Steuersatz $\frac{s(x+h)-s(x)}{h}$ bei einem das Einkommen x auf x+h erhöhenden Mehrverdienst h, der hieraus entstehende "lokale" Steuersatz oder Spitzensteuersatz

$$s'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{s(x+h)-s(x)}{h}$$

(d. h. die rechtsseitige Ableitung von s an der Stelle x, wobei diese Ableitung als existent angenommen wird), welcher sozusagen den "für jede hinzuverdiente Mark zu zahlenden Steuersatz" darstellt und die hieraus resultierende Spitzensteuersatzfunktion

$$s' : x \to s'(x);\ x \in \mathbb{R}_0^+$$

sowie die Progression s" (x) (zweimalige Differenzierbarkeit vorausgesetzt).

Bei diesem Übersetzungsprozeß zwischen Realität und Mathematik erheben sich interessante Fragen, z. B.:

- Inwieweit ist es legitim und sinnvoll, $\mathbb{R}_0^+$ als Definitionsbereich zugrundezulegen, wo doch in der Realität höchstens Dezimalzahlen mit 2 Stellen hinter dem Komma auftreten?

- Was bedeuten "Steuersatz", "Proportionalität" und "Progression" in der Umgangs- bzw. in der ökonomischen Fachsprache?

- Inwieweit ist der Übergang von der "globalen Änderungsrate" $\frac{s(x+h)-s(x)}{h}$ zur "lokalen Änderungsrate" $s'(x)$ legitim und sinnvoll? Genügt nicht statt $s'(x)$ einfach $s(x+1)-s(x)$ bzw. $100\cdot(s(x+\frac{1}{100})-s(x))$?

- Wie spiegeln sich "progressiv wachsende" Steuern in s bzw. s' bzw. s" wider?

- Wie wirkt sich bei gegebenem s z. B. der Unterschied zwischen $s(x+1)-s(x)$ und $s'(x)$ numerisch aus?

U.a.. Ich verweise auf analoge Begriffsbildungen und die hieraus resultierenden Übersetzungsprobleme bei Weg-Zeit-Zuordnungen.

Entsprechend den gestellten Forderungen müssen die Funktionen s, d, s' nun gewisse Eigenschaften erfüllen, z. B. (s.o.)
- $s < id$ auf $\mathbb{R}_0^+$ (mit $id: x \to x$)
- $s(x) = 0$ für $x \leq c$ mit einem gewissen $c \in \mathbb{R}^+$
- s streng monoton wachsend
- $id - s$ streng monoton wachsend
- d bzw. s' streng monoton wachsend.

Nun setzen mathematische Überlegungen ein, die aus allen Forderungen mögliche ESt-Funktionen "zusammenbasteln". Dabei können auch Abhängigkeiten oder Unverträglichkeiten zwischen einzelnen Forderungen auftreten. Die eingesetzten mathematischen Hilfsmittel stammen insbesondere aus der Differential- und Integralrechnung, z. B. bei der Bestimmung von ganzrationalen Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften. Die resultierenden "Kandidaten" für ESt-Funktionen werden dann in der Realität im Hinblick auf ihre Eigenschaften und Auswirkungen interpretiert. Sind politisch bzw. fiskalisch unerwünschte Effekte eingetreten, werden einzelne Forderungen im realen Modell modifiziert; z. B. kann die oben genannte 5. Forderung abgeändert werden in:
- Wenn das Einkommen wächst, so soll (nur) in einem gewissen Einkommensbereich (Progressionszone) der zu zahlende Steuersatz ebenfalls wachsen.

Der Kreislauf mit mathematischen Überlegungen und Rück-Interpretation beginnt dann von neuem. In der Bundesrepublik haben derartige Überlegungen (?) zur folgenden, seit Anfang 1981 gültigen ESt-Funktion geführt (der Text ist wörtlich dem ESt-Gesetz entnommen):

§ 32 a

Einkommensteuertarif

(1) Die tarifliche Einkommensteuer bemißt sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §§ 32b, 34 und 34b jeweils in Deutsche Mark

1. für zu versteuernde Einkommen bis 4212 Deutsche Mark: 0;

2. für zu versteuernde Einkommen von 4213 Deutsche Mark bis 18000 Deutsche Mark: 0,22x-926;

3. für zu versteuernde Einkommen von 18001 Deutsche Mark bis 59999 Deutsche Mark: (((3,05y-73,76)y+695)y+2200)y+3034;

4. für zu versteuernde Einkommen von 60000 Deutsche Mark bis 129999 Deutsche Mark: (((0,09z-5,45)z+88,13)z+5040)z+20018;

5. für zu versteuernde Einkommen von 130000 Deutsche Mark an: 0,56x-14837.

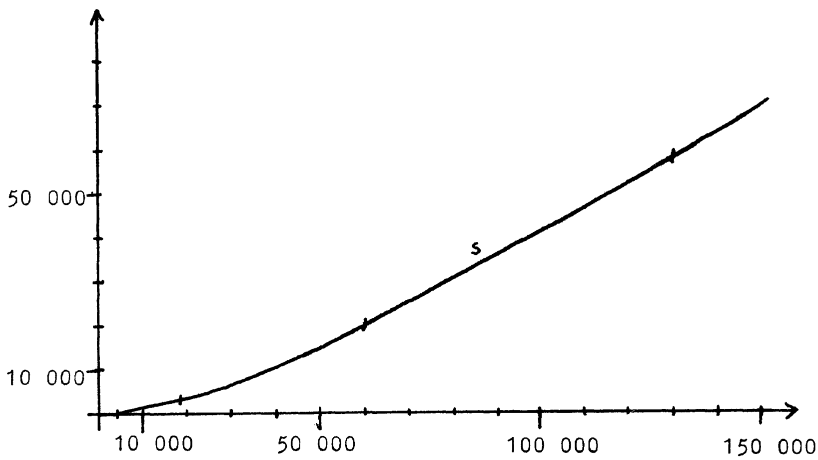
"x" ist das abgerundete zu versteuernde Einkommen. "y" ist ein Zehntausendstel des 18000 Deutsche Mark übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens. "z" ist ein Zehntausendstel des 60000 Deutsche Mark übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens.

(2) Das zu versteuernde Einkommen ist auf den nächsten durch 54 ohne Rest teilbaren vollen Deutsche-Mark-Betrag abzurunden, wenn es nicht bereits durch 54 ohne Rest teilbar ist.

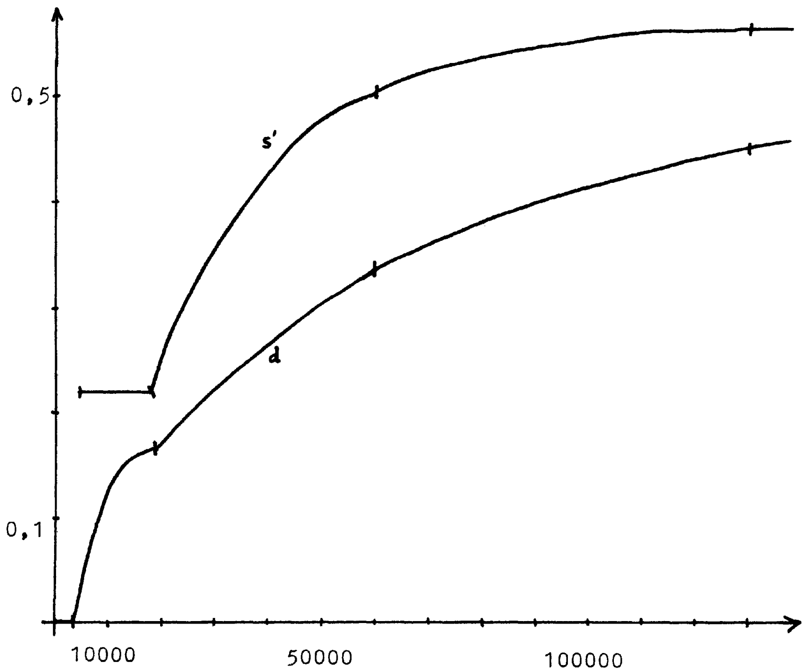
(3) Die zur Berechnung der tariflichen Einkommensteuer erforderlichen Rechenschritte sind in der Reihenfolge aus-

zuführen, die sich nach dem Horner-Schema ergibt. Dabei sind die sich aus den Multiplikationen ergebenden Zwischenergebnisse für jeden weiteren Rechenschritt mit drei Dezimalstellen anzusetzen; die nachfolgenden Dezimalstellen sind fortzulassen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Deutsche-Mark-Betrag abzurunden.

Wenn man von Rundungen (Absätze (2) und (3)) absieht, ist die bundesdeutsche ESt-Funktion also eine stückweise ganzrationale Funktion. Die 5 "Zonen" sind hierbei eine "Freibetragszone" (1.), zwei "Proportionalzonen" (2. und 5.) und zwei "Progressionszonen" (3. und 4.). Der Graph sieht so aus:



Die Graphen der Durchschnittssteuersatzfunktion d bzw. der Spitzensteuersatzfunktion s' sehen so aus:



Auch bei der konkret gegebenen bundesdeutschen ESt-Funktion stellen sich weitere Fragen der Übersetzung zwischen Mathematik und Realität, z. B.:

- Weshalb sind in 3. und 4. Polynome 4. Grades gewählt worden?
- Welche der Forderungen sind erfüllt? Ist die Funktion stetig bzw. differenzierbar?
- Wie wirken sich die Rundungsvorschriften (2) und (3) numerisch aus?

U.v.a.m.. So viel zum Beispiel Einkommensteuern; bezüglich weiterer Beispiele muß auf Literatur[11] verwiesen werden.

Im Mathematikunterricht spielen außermathematische Problemsituationen mehrere Rollen. Zum einen können sie den zu durchschauenden Stoff darstellen, für den Mathematik eine Hilfe sein soll. Zum zweiten können sie umgekehrt die Aufgabe haben, mathematische Inhalte zu motivieren bzw. zu veranschaulichen, wobei gerade hierdurch ein tieferes Verstehen und längeres Behalten dieser mathematischen Inhalte sowie eine positive Einstellung zur Mathematik erwartet wird. Zum dritten sollen sie zu einem ausgewogenen Bild von Mathematik als kulturelles und gesellschaftliches Phänomen führen. Zum vierten, und dies ist für mich die wichtigste Rechtfertigung für eine Anwendungsorientierung des Mathematikunterrichts, kann an Hand von Anwendungen das Wechselverhältnis zwischen Mathematik und Realität aufgezeigt werden, kann über Mathematik und ihre gesellschaftliche Rolle gesprochen und können Übersetzungsqualifikationen gefördert werden (siehe Teil 1). Freudenthal[12] schreibt: *"Ich möchte, daß der Schüler nicht angewandte Mathematik lernt, sondern lernt, wie man Mathematik anwendet"*; man sollte *"statt von angewandter, anwendender oder anwendbarer Mathematik lieber von beziehungsvoller Mathematik sprechen."*

Um den genannten Forderungen zu entsprechen, muß der Prozeß des Übergangs zwischen den beiden Bereichen Realität und Mathematik im Unterricht sowohl durchgeführt als auch reflektierend thematisiert werden; insbesondere sollte jeweils auch das Verhältnis von Realität und mathematischem Modell bewußt gemacht werden. Dazu muß im Unterricht den Schritten "Idealisierung", "Mathematisierung" und "Rück-Interpretation" bzw. "Anwendung" genügend Raum gelassen werden. Curricular bedeutet eine Anwendungsorientierung des Mathematikunter-

---

11) z. B. Steiner 1976, s. Fußn. 9); z.B.Wachstumsprozesse, s. Teil 4

12) s. Fußnote 5

richts nicht eine beliebige Aufeinanderfolge diverser Anwendungsbeispiele; vielmehr sollte sich die Mathematik um einige wenige, im Sinne der genannten Begründungen exemplarisch ausgewählte"Leitprobleme" herum konsistent aufbauen. (Natürlich können ebenso innermathematische Aufgaben die Rolle von "Leitproblemen" übernehmen.) Besonders geeignet sind solche Anwendungsbeispiele, die für Schüler herausfordernden Charakter besitzen, in angemessenem Umfang mathematische Substanz enthalten, mit den Rahmen-Lehrplänen für Mathematik (sowie ggf. für andere Fächer) harmonieren und einen vertretbaren außermathematischen Aufwand erfordern. Es ist klar, daß eine Anwendungssituation nur im Ausnahmefall alle Begründungen einzulösen gestattet und alle Kriterien erfüllt. So ist z. B. die Motivationswirkung einer vermuteten zukünftigen Anwendung keineswegs gesichert.

3. Zu Struktur, Inhalten und methodischer Konzeption der Mathematik-Kurse in der MaTA-Ausbildung

Der in Teil 1 umrissenen Konzeption des Mathematikunterrichts in der MaTA-Ausbildung kann gut entsprochen werden, wenn - wie bisher geplant - 2 "Stränge" mathematischer Kurse eingerichtet werden:

a) Ein Strang "Mathematik", bestehend aus 6 Halbjahreskursen, ab Klasse 11/II als Leistungs(vor)kurse eingerichtet;

b) ein Strang "Mathematische Verfahren", bestehend aus 4 Halbjahreskursen ab Klasse 12, als Grundkurse eingerichtet.

Grob gesprochen können die mathematischen Stoffinhalte schwerpunktmäßig in Strang a) entwickelt, in Strang b) in Anwendungskontexten entfaltet und in den EDV-Kursen numerisch-praktisch aufgearbeitet werden.

Strang a) muß inhaltlich die üblichen Leistungskurs-Anforderungen abdecken, d. h. er muß umfassen:

- in 11/I einen "Vorkurs" zur Analysis;
- in 11/II und 12/I zwei Analysiskurse;
- in 12/II bis 13/II je einen Kurs zur Linearen Algebra/Analytischen Geometrie, zur Stochastik und zu einem weiteren Themengebiet.

Der Vorkurs muß wie üblich auch zur Kompensation von SI-Defiziten beitragen. Je nach Umfang dieser Defizite muß er 3- bis 5-stündig eingerichtet werden. Hier werden sich Unterschiede zwischen den beiden Versuchsschulen zeigen, die jedoch nach 11/I aufgehoben sein sollen.

Als das weitere Themengebiet in 12/II bis 13/II bietet sich wegen seiner besonderen Anwendungsrelevanz ein dritter Analysis-Kurs an. Die Reihenfolge der drei Kurse von 12/II bis 13/II ist weitgehend beliebig. Wichtig ist nur, daß aufgrund der angestrebten 3-jährigen Berufsausbildung keiner der Kurse entbehrlich ist und somit der in 13/II liegende Kurs keinesfalls zur bloßen Abitur-Vorbereitung benutzt werden darf. Wenn der Kurs Analysis 3 in 13/II liegen würde, könnte diese für den Schüler natürlich wünschenswerte Analysis-Abitur-Vorbereitung immanent erfolgen. Solche Inhalte aus der Analysis, die üblicherweise erst in einem dritten Analysis-Kurs behandelt werden, die hier jedoch wegen ihrer Bedeutung für technische Anwendungen schon früher zur Verfügung stehen sollten (wie insbesondere einfache Differentialgleichungen), könnten dann in Analysis 2 vorgezogen werden, im Austausch mit anderen Inhalten. Ebenfalls möglich ist eine Behandlung von Linearer Algebra/Geometrie oder von Stochastik als letzter Kurs in 13/II. Da es hier jedoch - wie in Teil 1 aufgeführt - nicht nur auf spezielle Inhalte, sondern wesentlich auch auf den Erwerb von adäquaten Grundvorstellungen und Denkweisen ankommt, gerade auch im Hinblick auf Anwendungen, wäre eine möglichst frühzeitige

Begegnung des Schülers mit stochastischem bzw. mit algebraisch/geometrischem (und eventuell auch mit Ansätzen von abstrakt-strukturellem) Denken sehr wünschenswert. Daher und auch wegen des verkürzten Umfangs des Kurses 13/II schlage ich diese Kurse nicht als letzte Kurse vor.

Wie bereits in Teil 1 gesagt, sollten die Kurse von Strang a) nicht im Sinne mißverstandener "Leistungskurs-Ansprüche" in bezug auf Inhalte, Aufbau und begriffliches Niveau Kopien von Universitäts-Kursen sein. Vielmehr bietet sich ein eher genetisches Vorgehen[13] an, indem an Vorwissen und Vorerfahrungen der Adressaten angeknüpft und die formal-begriffliche Ebene bewußt als höhere Stufe erarbeitet wird.[14] Dies bedeutet z. B., daß

- in den Analysis-Kursen die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ erst nach einem ersten Durchgang thematisiert wird oder der Stetigkeitsbegriff erst im Verlaufe der Integralrechnung formalisiert wird,

- im Lineare-Algebra-Kurs der Vektorraumbegriff, wenn überhaupt, dann erst nach inhaltlichem Arbeiten in verschiedenen Modellen erarbeitet wird,

- im Stochastik-Kurs ein Axiomensystem, wenn überhaupt, dann als eigenständiger Exkurs zum Axiomatisieren erarbeitet wird.

Grundsätzlich sind also auch in Leistungskursen Vereinfachungen[15] legitim. Im Gegensatz zum Vorgehen in Grundkursen

---

13) Siehe dazu E. Wittmann: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg, Braunschweig, 4 1976

14) Vgl. auch H. Jahner : Methodik des mathematischen Unterrichts. Quelle und Meyer, Heidelberg 1978.

15) Mögliche Vereinfachungen in der Analysis sind z. B. in Blum/Kirsch (s. Fußn. 4) beschrieben.

werden diese Vereinfachungen jedoch in der Regel an späterer Stelle aufgehoben, indem bewußt Lücken im globalen Aufbau geschlossen oder Begriffe in formaler Fassung erarbeitet werden. Weiter kann der erhöhte Anspruch in Leistungskursen auch darin bestehen, anspruchsvollere Anwendungen zu behandeln.

Um die in den Leistungskursen erarbeiteten mathematischen Inhalte ohne größere Schwierigkeiten zur Behandlung von realen Anwendungen verwenden zu können, ist darauf zu achten, daß die fachmethodische Aufbereitung eine solche Anwendung begünstigt. So sollte z. B. der Ableitungsbegriff im Kurs Analysis 1 über Grenzwerte von Differenzenquotienten eingeführt werden, d. h. das Grundverständnis der Differentialrechnung sollte über "Änderungsraten" aufgebaut werden.[16)] Dazu ist es übrigens nicht notwendig, Grenzwerte von Folgen und/oder von Funktionen vor Beginn der Differentialrechnung zu thematisieren oder gar begrifflich zu formalisieren.[16)] Der Aspekt der linearen Approximation in der Differentialrechnung ist zwar wichtig, gerade auch im Hinblick auf numerische Anwendungen, er sollte jedoch nicht zum Einstieg benutzt werden.[16)]

Stofflich sollten die 6 Kurse aus Strang a) zumindest enthalten:

- Die wichtigsten (auch transzendenten) Funktionen
- Ableitungsbegriff und -regeln
- Integralbegriff und -regeln, Hauptsatz der Infinitesimalrechnung
- Ableitung und Integral der wichtigsten Funktionen
- Inner- und außermathematische Anwendungen von Ableitung und Integral
- Reelle Zahlen, Vollständigkeit, zentrale Sätze
- Einfache Differentialgleichungen mit Anwendungen

---

16) Vgl. dazu Blum/Kirsch (s. Fußn. 4) sowie W. Blum in "Der Mathematikunterricht", H. 3/79, S. 42-50

- Beschreibende und beurteilende Statistik
- Wahrscheinlichkeitsrechnung, Verteilungen, Simulation
- Wichtige Tests
- Vektorrechnung
- Lineare Gleichungssysteme
- Einfache Analytische Geometrie

Eine mögliche Aufteilung der Analysis-Inhalte auf die drei Analysis-Kurse könnte so aussehen:

<u>LK Analysis 1:</u>
- Ableitungsbegriff und -regeln
- Ableitung algebraischer Funktionen
- Inner- und außermathematische Anwendungen der Differentialrechnung

<u>LK Analysis 2:</u>
- Ableitung nicht-algebraischer Funktionen
- Integralbegriff und -regeln, Hauptsatz
- Inner- und außermathematische Anwendungen der Integralrechnung
- Einfache Differentialgleichungen
- Interationsverfahren (insb. Newton)

<u>LK Analysis 3:</u>
- Vertiefende Wiederholung der reellen Analysis
- Reelle Zahlen, Vollständigkeit, zentrale Sätze
- Vertiefung Differentialgleichungen
- Einführung in Differentialrechnung mehrerer Variabler

Dabei sollten beim Thema Differentialgleichungen im Kurs Analysis 2 Grundvorstellungen gelegt und wichtige Verfahren (z. B. Variablentrennung) bei wichtigen Typen (insbesondere lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung) beispielgebunden erläutert und verständig benutzt werden. Hieraus können ohne Schwierigkeiten auch angemessene Abituraufgaben resultieren. Eine systematische Behandlung von Differentialgleichungen (inklusive spezieller Typen und spezieller Verfahren sowie von Theorie-Elementen) bleibt dem Kurs Analysis 3 vorbehalten. Mit "vertiefender Wiederholung der reellen Analysis" ist gemeint, daß bekannte Inhalte (wie z. B. Stetigkeit oder Exponentialfunktionen) im Zusammenhang behandelt und begrifflich fundiert werden, wobei Vereinfachungen aus vorhergehenden Kursen aufgehoben werden.

Strang b) ist insofern noch wichtiger zu diskutieren, als erstens hierfür noch keine erprobten Vorbilder existieren und sich zweitens hierin die "neue Qualität" der MaTA-Ausbildung in bezug auf die Komponente Mathematik (im Rahmen der angestrebten Doppelqualifikation) zu erweisen hat. Die in Teil 1 umrissene Konzeption der Mathematik in der MaTA-Ausbildung sollte vor allem in diesem Strang voll zur Geltung kommen. Dies bedeutet, daß in den "Mathematische Verfahren"-Kursen viele Verbindungen zu den Kursen der anderen Stränge (Mathematik, EDV, Wirtschaftswissenschaften usw.) hergestellt werden sollten, um die in Teil 1 genannten Übersetzungsqualifikationen zu fördern. Eine enge Verbindung zu Strang a) ist dann gewährleistet, wenn - wie vorgesehen - die 4 Verfahren-Grundkurse inhaltlich parallel zu den 4 Mathematik-Leistungskursen laufen. Diese Parallelität bedeutet nicht einen prinzipiellen und durchgängigen Vor- oder Gleichlauf von einem der beiden jeweiligen Kurse, da dies auch auf organisatorische Schwierigkeiten stoßen würde. Eine ständige Absprache zwischen den jeweiligen Parallel-Kursen ist jedoch in jedem Falle notwendig. Wünschenswert wäre es, wenn ein und derselbe Lehrer die jeweiligen Parallel-Kurse leiten würde. Weiter wäre auch eine enge Rückkoppelung mit den EDV-Kursen ganz wichtig.

Eine Gefahr bei dieser "horizontalen" Verbindung der Stränge a) und b) muß allerdings gesehen werden: Durch diese thematische Anbindung wird auch die Mathematik in Strang b) in die Schubkästen "Analysis", "Stochastik" und "Lineare Algebra/Geometrie" eingeteilt, obwohl gerade bei mathematischen

Verfahren eine themenübergreifende Sichtweise wünschbar ist; Beispiele für Verbindungen

- zwischen Stochastik und Analysis: Regression;
- zwischen Analysis und Linearer Algebra: Approximation;
- zwischen Linearer Algebra und Stochastik: Matrizen.

Jedenfalls sollte versucht werden, solche themenübergreifenden Gesichtspunkte an einigen Stellen einzubringen. Dies würde erheblich erleichtert werden, wenn die 4 Verfahren-Kurse durchgängig geplant und in einer Hand liegen würden. Daher schlage ich vor, die Kurs-Leiste b) so weit wie vertretbar (natürlich unter Beachten der Probleme von Wiederholern u. a.) wie einen 2-jährigen durchgehenden Unterricht aufzufassen.

Um die angestrebten Ziele zu erreichen, vor allem die exemplarische Befähigung des Schülers, zwischen Mathematik und Realität zu übersetzen und Mathematik in Anwendungssituationen verständig und selbständig zu handhaben, darf nicht - wie in den bisherigen Kursentwürfen - eine übergroße Fülle mathematischer Inhalte für die Verfahren-Kurse vorgesehen werden. Nach meinem persönlichen Kenntnisstand ist es zudem sehr schwierig vorherzusagen, welche speziellen Verfahren in der späteren Berufspraxis tatsächlich eine Rolle spielen. (Um dies besser beurteilen zu können, sind intensive Praxis-Erkundungen notwendig.) Weit wesentlicher ist eine exemplarische vertiefte Beschäftigung mit einigen ausgewählten Anwendungsproblemen, die nicht nur - unter Zuhilfenahme von Mathematik, von EDV und gegebenenfalls anderer Disziplinen - gelöst, sondern über die auch rückblickend reflektiert und diskutiert werden sollte, um den erwünschten Transfer auf andere Probleme zu erleichtern. Wegen all dem empfiehlt sich für die Verfahrenkurse weit mehr noch als für die Mathematik-Kurse ein genetisches Vorgehen. Wünschbar wäre der Einbau einiger (weniger) "projektartiger" Abschnitte, in denen reale Probleme kursübergreifend und unter starker Eigenaktivität der Schüler bearbeitet werden.

Solche projektartigen Abschnitte können nicht nur in Strang b), sondern ebenso auch in anderen Strängen angesiedelt werden. "Projektartig" soll bedeuten, daß

- von einer konkreten Anwendungssituation ausgegangen wird;
- die notwendigen Informationen möglichst weitgehend von den Schülern beschafft werden;
- die Aufbereitung des Problems die Anteile zum Vorschein bringt, die einzelne Fächer zur Lösung beitragen können;
- durch mathematische Modellierung (vgl. Teil 2) innermathematische Themenstellungen resultieren;
- die notwendigen mathematischen Stoffinhalte entweder aus den bisherigen Kursen (von Strang a) oder Strang b)) als bekannt übernommen oder neu erarbeitet werden;
- weitgehend der Computer von den Schülern als Hilfe benutzt wird;
- die bereitgestellten mathematischen Hilfsmittel zusammen mit den aus anderen Fächern stammenden Hilfsmitteln wieder mit dem Ausgangsproblem in Verbindung gebracht werden;
- gegebenenfalls derartige Schritte mehrmals durchlaufen werden (vgl. Teil 2);
- während der Problembearbeitung und vor allem danach den Schülern die einzelnen Schritte bewußt gemacht werden, insbesondere die Rolle, welche die Mathematik hierbei spielt.

Derartige Unterrichtsabschnitte sollen also in erster Linie zum Erreichen der Ziele (wie Förderung von Übersetzungsqualifikationen) dienen und können durchaus vom Lehrer weitgehend vorstrukturiert werden; ein Beispiel ist in Teil 4 skizziert. "Projektartige" Abschnitte genügen daher nicht den Kriterien, die man an "projektorientierten Mathematikunterricht" stellt.[17] Eine solche weitergehende

---

[17] Vgl. z. B. W. Münzinger: Projektorientierter Mathematikunterricht, Urban & Schwarzenberg, München 1977

"Projektorientierung" des Unterrichts wird wegen mangelnder Erfahrung und auch wegen diverser erwartbarer Schwierigkeiten auf seiten der hierauf bisher kaum vorbereiteten Schüler und Lehrer hier (noch) nicht vorgeschlagen.

Es entspricht dem "neuen Geist", der die Verfahrenkurse durchziehen sollte, daß die bisher vorgeschlagenen Inhalte zugunsten exemplarisch ausgewählter Problem-Sequenzen reduziert werden. Meines Erachtens würde es genügen, in Strang b) z. B. gezielt und bewußt nur die folgenden Verfahren zu thematisieren (andere Auswahlen sind ebensogut möglich und vielleicht noch besser; hier kommt es jetzt nur auf das Prinzip an):

- Rekursiv definierte Folgen
- Potenzreihenentwicklungen
- Numerische Integration (Simpsonregel)
- Spezielle Typen von Differentialgleichungen
- Interpolation
- Anwendungen der Differentialrechnung mehrerer Variabler
- Regression
- Weitere Verteilungen
- Einige Tests
- Varianten des Gauß-Algorithmus
- Simplex-Verfahren

Dabei ist vorausgesetzt, daß einige zentrale Verfahren (wie Newton-Verfahren oder Gauß-Algorithmus) in Strang a) behandelt werden. Wie schon für Strang a) gesagt, gilt in verstärktem Maße für Strang b), daß Vereinfachungen der mathematischen Basistheorie legitim und notwendig sind und daß die methodische Aufbereitung der mathematischen Inhalte so erfolgen muß, daß eine Anwendung auf reale Situationen begünstigt wird. Dies ist sicher dann gewährleistet, wenn sich der jeweilige Stoff aus einer realen Situation herauskristallisiert.

4. Skizze eines Beispiels: Der Verfahren-Kurs in Klasse 12/I

Als Beispiel eines Kurses, wie er in Teil 3 umschrieben ist, soll hier der Verfahren-Kurs Analysis/Numerische Verfahren in 12/I kurz besprochen werden. Details müssen - wie schon einleitend gesagt - späteren Stellungnahmen vorbehalten bleiben. Der Grundkurs Analysis/Numerische Verfahren liegt parallel zum Leistungskurs Analysis 2 (siehe dazu Teil 3). Er kann beinhalten:

- Folgen und Reihen
- Potenzreihen
- Numerische Integration

Die anzustrebenden mathematischen Lernziele sind im einzelnen wenig verschieden von denjenigen, die bereits in den bisherigen Entwürfen für diesen Grundkurs angegeben sind. Ich verzichte daher auf Angabe alternativer mathematischer Detail-Lernziele. Die "neue Qualität" des Kurses spiegelt sich wieder in der in den Teilen 1, 2 und 3 vorgeschlagenen Schwerpunktsetzung, nämlich einer anwendungsbezogenen Erarbeitung mathematischer Verfahren, wobei der mathematischen Fachsystematik bewußt ein geringerer Stellenwert eingeräumt wird. Dieser Kurs ist also keiner in "Numerischer Mathematik", sondern behandelt numerische Verfahren im Zusammenhang mit Inhalten aus der Analysis und in enger Verbindung mit Anwendungen, um allgemeinere Lernziele zu fördern (Stichworte: Übersetzungsqualifikationen, verständiges Umgehen, Problemlösefähigkeiten, algorithmisches Denken, Rechnereinsatz). Hierzu bietet sich z. B. beim Gebiet Folgen und Reihen als Problemkontext das Thema Wachstums- und Abnahme-/Zerfalls-Prozesse an, innerhalb dessen dann "projektartig" gearbeitet werden kann. Dies führt auch auf die Frage nach näherungsweiser Funktionswertberechnung für transzendente Funktionen und damit zu Potenzreihenentwicklungen für diese Funktionen (dies im Sinne der genannten horizontalen Verbindung zum Mathematik-Leistungskurs parallel zur Ableitung dieser Funktionen dort). Viele Vorschläge für eine anwendungs- und computerorientierte Behandlung von Folgen und Reihen findet man in den Büchern

- A. Engel: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt. Klett, Stuttgart 1977;

- R. Stowasser/B. Mohry: Rekursive Verfahren. Schroedel, Hannover 1978

sowie in den Artikeln

- A. Kirsch: Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht. In: Didaktik der Mathematik, H.4/76, S. 57-284

- R. Baumann: Näherungsfolgen, Grenzwert und Ableitung. In: Informationen zum Mathematikunterricht, H.3/77, S. 33-43 (erhältlich beim Autor, In den Stuken 16, 2120 Lüneburg).

Ohne Details einer unterrichtlichen Durchführung in einer konkreten Klasse vorwegnehmen zu wollen, soll hier ein möglicher Unterrichtsablauf eines Teils des Kurses grob skizziert werden:

- Einstiegsproblem: Wachstum einer Population, z. B. Bevölkerungswachstum[18)]

[18)] Vgl. dazu z. B. das Schulbuch Mathematik heute, Grundkurs Analysis 2 (Hg.: H. Griesel/H. Athen), Schroedel, Hannover 1980, S. 48. Die Beschreibung des Wachstumsvorgangs erfolgt bei diesem Einstiegsproblem diskret, nicht kontinuierlich.

- Mathematisierung:[19] Geometrische Folge; Berechnungen mit ETR

- Weitere Beispiele,[20] z. B. radioaktiver Zerfall, Energieverbrauch, Reiskörner auf Schachbrett, Fibonacci oder auch Wurzelberechnungen; stets: Betonung des rekursiven Aspekts, Einsatz von Rechnern

- Innermathematische Theorieentwicklung: Folgen, Darstellungen, Eigenschaften, Konvergenz, Reihen

- Jeweils: Interpretation der Begriffe und Resultate an Hand der Beispiele.

- Jeweils: Thematisieren des Verhältnisses Mathematik/Realität[21]

- Herstellen eines Zusammenhangs mit LK: Folgen als Funktionen auf $\mathbb{N}$, insbesondere lineare und Exponential-Funktionen

- Frage nach Funktionswertberechnung von Exponentialfunktionen führt auf Potenzreihenentwicklung exp

- Weitere Potenzreihenentwicklungen und näherungsweise Funktionswertberechnungen mit ETR bzw. Computer.

---

19) Andere Aspekte des Einstiegsproblems können in anderen Kursen behandelt werden, z. B. in Gemeinschaftskunde oder in Naturwissenschaften.

20) Vgl. z. B. Baumann, S. 33-35, S. 37-40; Kirsch, S. 260 oder S. 265; Engel, S. 34; Stowasser/Mohry, S. 50 ff.

21) z. B.:
- Mathematisches Modell i. a. nur begrenzt gültig; Prognosewert des Modells?
- Mathematik zur bloßen Beschreibung und Absicherung des Bestehenden oder auch zum Aufzeigen möglicher Alternativen?
- Sinnhaftigkeit von kontinuierlichen Zahlbereichen bzw. von Grenzprozessen? Reale Bedeutung von Grenzwerten?
- Sinnvolle Genauigkeit in Realität bzw. in Mathematik?
- u.a.m.; vgl. das ausführliche Beispiel Einkommensteuer in Teil 2.

Beim Gebiet Integration könnte eine im parallel laufenden Leistungskurs oder auch direkt im Verfahren-Grundkurs aufgeworfene Frage nach Berechnung eines in Anwendungen bedeutsamen Integrals zur Behandlung numerischer Integration führen; Beispiele für solche Anwendungskontexte: Momente oder Arbeit in der Technik, Konsumentenrente oder Steueraufkommen in der Ökonomie. Eine für die Schule brauchbare Behandlung numerischer Integration findet man ebenfalls in dem genannten Buch von A. Engel.