In: Mathematik erfahren und lehren. Festschrift für Hans-Joachim Vollrath, Hrsg.: Pickert (u.a.), Ernst Klett Schulbuchverlag GmbH, 1994, Stuttgart, S. 125-133

Arnold Kirsch und Werner Blum, Kassel

Bemerkungen zu einer bekannten "probabilistischen Paradoxie"

1. Fragestellung

Mit dem Folgenden soll ein Beitrag zum Thema "*Verstehen von Paradoxien*" geleistet werden; zugleich wird ein Beispiel zu einer der von H.-J. Vollrath (1993) beschriebenen "*Paradoxien des Verstehens*" geliefert. Es geht dabei um eine Aufgabe aus der *Stochastik*. Gerade hier gibt es bekanntlich eine ganze Reihe von Problemen, deren Lösung den meisten Menschen als kontraintuitiv oder "paradox" erscheint (vgl. etwa die Beispiele in G. Székely 1990). Ein wesentliches Ziel des Stochastikunterrichts ist es, solche Paradoxien inhaltlich aufzuklären und dadurch das stochastische Denken der Lernenden weiterzuentwickeln.
In seinem Aufsatz "Zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien" (1992) hat H. Winter nach Erörterungen zur didaktischen Relevanz von Paradoxien und zum Begriff der Intuition vier "Strategien der intuitiven Aufklärung" formuliert, die "bewußt an Polyas Werk anknüpfen" und deren erste (einfachste und unseres Erachtens wichtigste) wie folgt lautet (S.32):
"*Strategie 1 (Realisierung)*: Verschaffe dir durch tatsächliche Ausführung des Zufallsexperiments oder seine Simulation sowie durch anschauliche Darstellungen der Daten ein möglichst anregendes und erhellendes Bild von der fraglichen Situation."
Wir haben diese Strategie (wie auch die anderen) als außerordentlich nützlich empfunden und sie auf das bei Winter als drittes angeführte Beispiel angewandt (S.47):
"*Das Tische-Stühle-Problem*". In einem Raum stehen 3 Tische und an jedem 2 Stühle. Auf gut Glück werden 6 Jungen auf die 6 Plätze verteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß dabei Peter und Paul, zwei Freunde, zufällig an denselben Tisch geraten?"
Dieses Problem ist in der Form "*Zwei* Jungen auf sechs Plätze" wiederholt behandelt worden (so von G. Schmidt 1990) und wird auch bei Winter faktisch in dieser Form diskutiert, mit dem bekannten Ergebnis, daß sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{5}$ ergibt, je nachdem, ob man die beiden Jungen an die Tische oder auf die Stühle verteilt. Mit Recht wird dazu festgestellt (S.48): "Die unterschiedlichen Resultate sind die Konsequenz aus der unterschiedlichen Interpretation der Aufforderung, die 2 Jungen zufällig Platz nehmen zu lassen."
Im folgenden wollen wir nun aber mit der Formulierung "*Sechs* Jungen auf sechs Plätze" ernst machen und hierauf die genannte Strategie anwenden, indem wir für das "Auf gut Glück Verteilen" der Jungen auf die Stühle (Abschnitt 2) bzw. an die Tische (Abschnitt 3) jeweils konkrete *Realisierungen* - als genau formulierte *Handlungsvorschriften* - angeben. Alle diese - ganz verschiedenartigen - Realisierungen führen zu demselben Ergebnis,

nämlich $\frac{1}{5}$, das damit wohl unstrittig als "die" wohlbestimmte Lösung des Problems gelten kann. Hiernach liegt bei der Fassung des Tische-Stühle-Problems mit "sechs Jungen" gar keine Paradoxie vor. Wir leiten dieses Ergebnis sowohl durch formale Berechnungen als auch durch inhaltliche Überlegungen her. Letzteres insbesondere soll zum eigentlichen *Verstehen* dieses Ergebnisses beitragen.
Für das *modifizierte* Problem "*Drei Paare* von Freunden auf sechs Plätze" erhält H. Winter ebenfalls eine eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeit, nämlich $\frac{1}{15}$. Wir zeigen in Abschnitt 4, daß auch unsere Realisierungen, sinngemäß übertragen auf das neue Problem, sämtlich dasselbe Ergebnis $\frac{1}{15}$ liefern.

2. Realisierungen des Verteilens der Jungen auf die Stühle

Hier erwartet man, daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{5}$ ist. Dies kann etwa wie folgt begründet werden.

2.1. Auslosen aller Stühle: Man läßt jeden der sechs Jungen eines von sechs Losen mit den Nummern 1 bis 6 der Stühle ziehen.[1] Es sei etwa 1,2; 3,4; 5,6 die Verteilung der Stühle an die Tische. Insgesamt gibt es $6! = 720$ mögliche Ziehungs-Ergebnisse. Genau dann kommen Peter und Paul an denselben Tisch, wenn sie eine der drei Zweiermengen $\{1,2\}$, $\{3,4\}$ $\{5,6\}$ ziehen. Offenbar gibt es $3 \cdot 2! \cdot 4! = 144$ solche Ziehungen (denn wenn die beiden Freunde eine der drei Zweiermengen erhalten, so können die restlichen vier Stuhlnummern beliebig verteilt sein, und innerhalb der Zweiermenge kommt es nicht auf die Reihenfolge an). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $p = \frac{144}{720} = \frac{1}{5}$.
Einfacher - aber vielleicht etwas weniger naheliegend - berechnet sich p, wenn wir von vornherein nur die beiden Stühle betrachten, die Peter und Paul gezogen haben. Es gibt $\binom{6}{2} = 15$ (gleichwahrscheinliche) zweielementige Teilmengen von $\{1,\ldots,6\}$. Günstig sind genau die drei eben genannten Zweiermengen. Also ist $p = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

2.2 Vorwegbesetzen eines Stuhls: Einer der beiden Freunde sitze von vornherein an einem (zufällig ausgewählten) Tisch. Man läßt jetzt den anderen eine aus den fünf restlichen Stuhlnummern ziehen. Genau eine von diesen bezeichnet den noch freien Stuhl an dem Tisch, wo der erste schon sitzt. Dies liefert offenbar wieder $p = \frac{1}{5}$.[2]

---

1 Dabei hängt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein bestimmter Junge eine bestimmte Nummer zieht (d.h. auf einen bestimmten Stuhl gerät), nicht davon ab, in welcher Reihenfolge die Jungen die Lose ziehen; diese Wahrscheinlichkeit beträgt stets $\frac{1}{6}$. Dies sollte inhaltlich klar sein (als eine grundlegende "stochastische Intuition"), wird jedoch erfahrungsgemäß von vielen Menschen (nicht nur von Anfängern in Stochastik) erst nach formaler Berechnung - etwa mit Hilfe eines geeigneten Baumes - akzeptiert.
2 Dabei sollte klar sein, daß natürlich auch der andere Freund - etwa Paul - für sich genommen die Chance $\frac{1}{3}$ hat, an einen bestimmten Tisch, etwa a, zu kommen. Bei Bedarf rechnet man einfach nach (in unmittelbar verständlicher Schreibweise):

Das gleiche ergibt sich, wenn der zweite Freund gesagt bekommt, welcher Stuhl schon besetzt ist, aber nicht erfährt, welcher von den fünf anderen Jungen dort sitzt, und wenn er jetzt bewußt den noch freien Stuhl an dem betreffenden Tisch wählt. Denn dann ist offenbar mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{5}$ der schon sitzende Junge sein Freund.

3. Realisierungen des Verteilens der Jungen an die Tische

Hier könnte man auf den ersten Blick $p = \frac{1}{3}$ vermuten. Wir beschreiben wieder zwei mögliche Realisierungen des Verteilungsvorgangs.

3.1 Auswürfeln der Tische: Man läßt jeden Jungen einen der Buchstaben a, b, c (Bezeichnung der Tische) würfeln, etwa mit einem Sechserwürfel "mod 3" (1 oder 4 bedeutet a, 2 oder 5 bedeutet b, 3 oder 6 bedeutet c). Dabei lasse man ohne Beeinträchtigung der Chancengleichheit unsere zwei Freunde *zuerst* würfeln.[3] Die Ergebnisse sind dann sechsstellige Wörter über {a, b, c}, deren erste beide Stellen die Würfe der beiden angeben. Für diese Wortanfänge gibt es 9 gleichwahrscheinliche Möglichkeiten: aa, ab, ac, ..., cc. Genau 3 davon, nämlich aa, bb, cc, sind für Peter und Paul günstig. Hiernach beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die beiden denselben Wortanfang würfeln, $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Das macht man sich auch sofort direkt klar.

Aber: Dieses Verfahren führt *nicht* zu einer Verteilung der *sechs* Jungen an die Tische! Denn jedes Ergebnis mit mehr als zwei übereinstimmenden Buchstaben muß verworfen und die betreffende Wurffolge dann wiederholt werden. - Anders wäre es nur, wenn an jedem Tisch sechs oder mehr Stühle stünden; dann wäre die gesuchte Wahrscheinlichkeit natürlich $\frac{1}{3}$. Das gleiche gilt offenbar, wenn überhaupt nur *zwei* (statt der sechs) Jungen verteilt werden sollen, wie schon in Abschnitt 1 bemerkt.

So bleiben von den 3^6 (= 729) möglichen Ergebnissen nur $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ als "zulässig" übrig (Permutationen von $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ nach "Vergessen" der Indices); diese sind wieder (ebenso wie die ursprünglichen 729 Wörter) gleichwahrscheinlich.[4] Hiervon sind genau 18 für unsere Freunde günstig, nämlich alle Wörter aa...., bb...., cc...., wo für die Pünktchen

---

$$P(\text{Paul an a, wenn schon Peter an a}) = \tfrac{1}{5} \text{ (siehe oben)}$$
$$P(\text{Paul an a, wenn schon Peter an b}) = \tfrac{2}{5}$$
$$P(\text{Paul an a, wenn schon Peter an c}) = \tfrac{2}{5},$$

also (da Peters Chancen für die drei Tische jeweils $\frac{1}{3}$ betragen haben)

$$P(\text{Paul an a}) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{5} = \tfrac{1}{3}.$$

3 Daß die Reihenfolge hier keine Rolle spielt, sollte wieder klar sein. Ansonsten überlege man etwa wie folgt: Wenn die beiden Jungen an i-ter und k-ter Stelle würfeln, dann geben statt der zweistelligen Wort*anfänge* jetzt zweistellige Wort*ausschnitte* (Einschränkungen des Worts auf die i-te und k-te Stelle) die Würfe der beiden Freunde an, und dafür gilt natürlich die Argumentation im Text ebenso.

4 Deshalb macht es natürlich wieder nichts aus, wenn die beiden Freunde beim Würfeln zuerst drankommen.

alle (zulässigen) vierstelligen Restwörter über b,c bzw. a,c bzw. a,b einzusetzen sind, und das sind jeweils $\frac{4!}{2!2!} = 6$. So erhält man für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ebenso wie in Abschnitt 2 den Wert $p = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$.

3.2. Ein neuer Algorithmus: Womöglich kann man bezweifeln,[5] daß die 90 Wörter, die sich soeben in *3.1* durch Verwerfen "unzulässiger" ergeben haben, tatsächlich alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Wir legen daher - und überhaupt aus Ökonomiegründen - das Verfahren zweckmäßiger (dafür dann allerdings rechnerisch komplizierter) so fest, daß es von vornherein nur zulässige Wörter liefert. Und zwar verteilen wir die Jungen der Reihe nach wie folgt an die Tische: Solange noch kein Tisch voll besetzt ist, wird wie in *3.1* mit einem Sechserwürfel mod 3 gewürfelt; ist ein Tisch bereits voll besetzt, wird eine Münze, beschriftet mit a,b bzw. b,c bzw. a,c geworfen; ist nur noch ein Tisch frei, bleibt nichts mehr zu entscheiden. Kommt ein Junge dabei an einen Tisch mit noch zwei freien Plätzen, so wählt er einen davon durch Münzwurf (dazu muß er die beiden Stühle ad hoc benennen).
Dieses neue Verfahren liefert offensichtlich nur zulässige Wörter, jedoch haben nun (überraschenderweise?) *nicht* alle dieselbe Wahrscheinlichkeit. So tritt z.B. das Wort abcabc offenbar mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{162}$ auf, das Wort aabbcc dagegen mit $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{36}$. Hiernach ist es nicht sehr erstaunlich, daß - anders als in *3.1* - die Wahrscheinlichkeit für die beiden Freunde, an denselben Tisch zu geraten, *davon abhängt* (und zwar ganz erheblich!), *an welchen der Stellen* 1, 2, ..., 6 sie bei diesem "Auswürfeln" der Tische *drankommen*. Sind z.B. Peter und Paul die beiden ersten, dann beträgt diese Wahrscheinlichkeit, wie man sofort bestätigt, $\frac{1}{3}$. (Das entspricht wieder der mehrfach erwähnten alternativen Aufgabenstellung.) Kommt einer als erster, der andere zuletzt dran, dann beträgt sie, wie sich zeigen wird, $\frac{7}{54} \approx 0,130$, und kommen die beiden als letzte dran, dann beträgt sie $\frac{7}{18} \approx 0,389$, also dreimal so viel! Diese Aussagen werden im Anhang begründet und vervollständigt, wobei offenbar $\binom{6}{2} = 15$ Wahrscheinlichkeiten anzugeben sind.
Es ist somit zur Gewährleistung der Chancengleichheit *erforderlich*, zuerst die *Reihenfolge* beim "Auswürfeln" der Tische durch einen fairen Zufallsmechanismus *festzulegen*, etwa indem jeder Junge eine der Nummern 1 bis 6 zieht.[6] Hier sind wieder - wie in *2.1* - nur die $\binom{6}{2} = 15$ zweielementigen Teilmengen von $\{1,2...,6\}$ von Interesse. Jede von diesen wird dabei natürlich mit derselben Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{15}$ getroffen. Es bezeichne p_{ik} die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, daß die beiden Freunde, wenn sie beim Auswürfeln an i-ter und an k-ter Stelle drankommen, an denselben Tisch geraten. Die totale

5 sollte es aber nicht; im Bedarfsfall sollte ein geeignetes Symmetrieargument überzeugen.
6 Hierbei hängen, wie schon in Fußnote 1 bemerkt, die Chancen der Jungen, eine bestimmte Nummer zu ziehen, nicht von der Reihenfolge beim Ziehen ab.

Wahrscheinlichkeit dafür, daß die beiden Freunde den gewünschten Erfolg haben, beträgt dann

$$p = \frac{1}{15} p_{12} + \frac{1}{15} p_{13} + \frac{1}{15} p_{14} + \ldots + \frac{1}{15} p_{46} + \frac{1}{15} p_{56}$$

(15 Summanden). Es ist also einfach der Mittelwert der p_{ik} zu bestimmen. Dieser beträgt nun, wie aus dem Anhang hervorgeht, wiederum gerade $\frac{1}{5}$.

3.3 Zusammenhang mit dem Stühle-Verteilen: Es ist naheliegend, ja es besteht geradezu das Bedürfnis, das in *3.2* (einschließlich Anhang) nach verhältnismäßig aufwendigen Rechnungen (und mit überraschenden Zwischenergebnissen) erhaltene Resultat $p = \frac{1}{5}$ *rein inhaltlich* verstehen zu wollen. Zu diesem Zweck braucht man sich aber nur klarzumachen, daß der in *3.2* beschriebene Verteil-Algorithmus (erster Schritt: Auslosung der Reihenfolge beim Auswürfeln; zweiter Schritt: Auswürfeln der Tische) bezüglich der *Stühle* völlig *symmetrisch* ist; kein Stuhl ist gegenüber den anderen ausgezeichnet. Die *Details* des Algorithmus sind dabei *unwichtig*: Im Ergebnis sitzt jedenfalls auf jedem Stuhl ein Junge, und die Chancen, daß ein bestimmter Junge auf einen bestimmten Stuhl gerät, sind vor Beginn des Verfahrens offenbar alle gleich (Symmetrieprinzip!). Anders ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeiten q_{ij} dafür, daß der beim ersten Schritt des Verteil-Algorithmus an die i-te Stelle geloste Junge beim zweiten Schritt (dem Auswürfeln) auf den j-ten Stuhl gerät (i, j = 1,...,6) sind alle identisch, also alle gleich $\frac{1}{6}$.[7]

Die Wahrscheinlichkeiten q_{ij} kann man natürlich auch rechnerisch ermitteln, etwa mit Hilfe eines geeigneten Baums oder durch kombinatorische Überlegungen. Gerade für Anfänger mag ein "stures" Berechnen womöglich sogar angemessener sein; denn das obige Symmetrieargument erfordert bereits gewisse stochastische Vorstellungen. Es sollte aber klar werden, daß dieses Argument völlig ausreichend - und zudem mathematisch befriedigender - ist.

Nach dem Vorangehenden ist das in *3.2* definierte zweischrittige Zufallsexperiment *stochastisch gleichwertig* zu dem in *2.1* definierten Laplace-Experiment, bei dem die Jungen per Losentscheid auf die Stühle verteilt werden.[8] Deshalb ist auch die gesuchte Wahrscheinlichkeit dieselbe wie in *2.1*, nämlich $p = \frac{1}{5}$.

Hier zeigt sich übrigens erneut der Unterschied zwischen dem Problem mit *sechs* Jungen und dem mit nur *zwei* Jungen. Denn bei letzterem sind im Ergebnis nur zwei Stühle besetzt, und die Wahrscheinlichkeit des Nebeneinandersitzens kann sehr wohl vom Verfahren abhängen (und tut es auch: $p = \frac{1}{3}$ beim Verfahren in *3.2* versus $p = \frac{1}{5}$ beim Verfahren in *2.1*). Die Zufallsexperimente in *3.2* und *2.1* sind dann *nicht* gleichwertig.

7 Es ist also - anders als für die *beiden* Freunde - für einen *einzelnen* Jungen gleichgültig, welche Nummer er beim ersten Schritt zieht; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er auf den j-ten Stuhl gerät, ist immer $\frac{1}{6}$.

8 D.h. hier liegt eine stochastische *Isomorphie* vor. Dieser Aspekt ist auch (unausgesprochen) in Winters Strategien 3 und 4 enthalten (1992, S. 33).

4. Modifikation des Problems und der zugehörigen Realisierungen

Unter den sechs Jungen mögen nun *drei Paare* von Freunden sein. Wieder werden die Jungen "auf gut Glück" auf die sechs Plätze verteilt. Die *neue Frage* lautet nun: Mit welcher Wahrscheinlichkeit geraten alle drei Paare jeweils an denselben Tisch?

4.1. Rückführung auf das alte Problem: Es seien p_1 und p_2, q_1 und q_2 sowie r_1 und r_2 die drei Freundespaare, und es bezeichne $\underline{p}$ bzw. $\underline{q}$ bzw. $\underline{r}$ das Ereignis, daß p_1 und p_2 bzw. q_1 und q_2 bzw. r_1 und r_2 an denselben Tisch geraten. Es interessiert also die Wahrscheinlichkeit $p^* = P(\underline{p} \wedge \underline{q} \wedge \underline{r})$. Nun gilt (was formal und inhaltlich klar ist)

$$P(\underline{p} \wedge \underline{q} \wedge \underline{r}) = P(\underline{p}) \cdot P(\underline{q}|\underline{p}) \cdot P(\underline{r}|\underline{p} \wedge \underline{q}).$$

Das neue Problem läßt sich somit einfach auf das bisherige zurückführen. Denn erstens gilt nach Abschnitt 2 bzw. 3 $P(\underline{p}) = \frac{1}{5}$; zweitens ist $P(\underline{q}|\underline{p})$ offensichtlich die Wahrscheinlichkeit für das (ursprüngliche) Tische-Stühle-Problem mit *vier* Jungen und *zwei* Tischen, woraus sich analog $P(\underline{q}|\underline{p}) = \frac{1}{3}$ ergibt; und drittens ist trivialerweise $P(\underline{r}|\underline{p} \wedge \underline{q}) = 1$. Also gilt $p^* = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{15}$.

Weniger elegant, im Hinblick auf unser Ziel des inhaltlichen Verstehens aber lehrreicher ist es, das neue Problem unabhängig vom alten zu lösen. Dazu befolgen wir wieder die Wintersche Strategie 1 und übertragen unsere konkreten Realisierungen des "Auf gut Glück Verteilens" aus den Abschnitten 2 und 3 auf die neue Situation.

4.2. Verteilen der Jungen auf die Stühle: Wie in *2.1* zieht jeder Junge eines von sechs Losen mit den Nummern 1 bis 6 der Stühle, wobei wieder 1,2; 3,4; 5,6 die Verteilung der Stühle an die Tische beschreibe. Von den insgesamt 6! = 720 Möglichkeiten sind nun günstig im Sinne der neuen Fragestellung genau die Ziehungen, bei denen alle drei Freundespaare jeweils eine der drei Zweiermengen $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$ erhalten. Offenbar gibt es $3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! = 48$ solche Ziehungen (denn die drei Zweiermengen können auf 3! Arten an die drei Freunde verteilt werden, und innerhalb jeder Zweiermenge kann noch die Reihenfolge vertauscht werden). Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p^* = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}$.

4.3. Verteilen der Jungen an die Tische: Zuerst würfeln die Jungen die Tische *wie in 3.1* aus, wobei das erste Freundespaar zuerst drankommt, dann das zweite und schließlich das dritte.[9] Von den sich ergebenden 90 (gleichwahrscheinlichen) zulässigen Würfel-Ergebnissen (vgl. *3.1*) sind genau diejenigen günstig, bei denen an erster und zweiter Stelle, an dritter und vierter Stelle sowie an fünfter und sechster Stelle jeweils dieselben Buchstaben stehen: aabbcc, aaccbb, bb..... . Das sind genau $3! = 6$ Ergebnisse. Daher gilt $p^* = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$.

Nun mögen die Jungen die Tische *wie in 3.2* "auswürfeln". Jetzt müssen wir also wieder auf die Reihenfolge beim Auswürfeln achten, da die Würfel-Ergebnisse nicht alle gleichwahrscheinlich sind (vgl. *3.2*). Im ersten Schritt des Verfahrens wird also wieder die

---

9 Wiederum ist klar (vgl. Fußnote 3), daß diese Reihenfolge keinen Einfluß auf das Ergebnis hat.

Reihenfolge, in der die Jungen zum Auswürfeln gehen, ausgelost. Von den insgesamt 6! verschiedenen möglichen Reihenfolgen sind wieder nur $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ für unsere Fragestellung als wesentlich verschieden anzusehen. Jede dieser Reihenfolgen beschreiben wir in selbsterklärender Weise durch ein sechsstelliges Wort über {p, q, r}, in dem jeder Buchstabe genau zweimal vorkommt. Diese Wörter sind alle gleichwahrscheinlich. Wir bezeichnen sie in alphabetischer Ordnung mit $f_1, \ldots, f_{90}$.
Die 90 Wörter, welche die möglichen Würfel-Ergebnisse beim zweiten Schritt des Verfahrens repräsentieren, bezeichnen wir ebenfalls in alphabetischer Ordnung mit $w_1, \ldots, w_{90}$. Es ist klar, daß die f_i und die w_i einander eineindeutig entsprechen.
Im ersten Schritt sei nun f_i eingetreten, d.h. das Wort f_i beschreibe die Reihenfolge, in der die Jungen zum Auswürfeln antreten. Welches sind nun die zugehörigen günstigen Ergebnisse beim zweiten Schritt, d.h. was muß gewürfelt werden, damit alle drei Freundespaare zusammensitzen? Trivialerweise ist das Wort w_i günstig. Aber dies gilt auch für jedes der weiteren fünf Wörter, die aus w_i durch Permutation von a,b,c hervorgehen. Diese $3! = 6$ Wörter sind natürlich alle untereinander gleichwahrscheinlich. Weiter ist klar, daß keine weiteren Wörter günstig sind. Somit beträgt die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei vorgegebener Reihenfolge f_i alle drei Freundespaare zusammensitzen, insgesamt $6 \cdot P(w_i)$. Die gesuchte (totale) Wahrscheinlichkeit ergibt sich nun durch Summation

$$p^* = \sum_{i=1}^{90} \tfrac{1}{90} \cdot 6 \cdot P(w_i) = \tfrac{1}{15} \cdot \sum_{i=1}^{90} P(w_i) = \tfrac{1}{15}, \text{ denn } \sum_{i=1}^{90} P(w_i) = 1.$$

Man beachte, daß wir hier - im Gegensatz zu *3.2* - die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhalten, ohne die $P(w_i)$ im einzelnen zu kennen. In dieser Vereinfachung kommt gleichsam eine höhere Symmetrie der neuen Aufgabe "drei Paare von Freunden" gegenüber der ursprünglichen "sechs Jungen, darunter zwei Freunde" zum Ausdruck.
Schließlich sei betont, daß der in *3.3* hergestellte Zusammenhang zwischen Tische-Verteilen und Stühle-Verteilen unabhängig davon ist, welches der Probleme (ein Paar oder drei Paare von Freunden) wir betrachten. Die Gleichheit der Ergebnisse in *4.2* und *4.3* ist somit auch wieder inhaltlich erklärbar.

5. Abschließende Bemerkungen

Die Ausführungen dieses Beitrags sollten dazu dienen (auch uns selbst), das Tische-Stühle-Problem besser zu *verstehen* und herauszufinden, worin die Paradoxie dieses Beispiels besteht. Wir haben gezeigt, daß sich - im Gegensatz zur Fassung mit "zwei Jungen" - bei der Fassung mit "sechs Jungen" eine eindeutig bestimmte Lösung ergibt. Analysen wie die hier durchgeführten mögen auch für den Unterricht hilfreich sein. Denn um ein tieferes Verständnis von solchen Problemen und deren Lösung zu gewinnen, muß man über bloß formale - vielleicht gar nach äußerlichen Analogien gewählte - Ansätze hinausgehen und versuchen, möglichst dicht an den inhaltlichen Kern der Sache heranzukommen. Dazu - das hat unser Beispiel wohl gezeigt - ist es sowohl nötig, sich mit speziellen Details des Problems auseinanderzusetzen (hier: die konkreten Verteil-Verfahren

und deren rechnerische Behandlung), als auch allgemeine und übergreifende Aspekte des Problems zu beachten (hier: das "Übersetzen" - in beiden Richtungen - zwischen Problemsituation und stochastischem Modell sowie die Idee der stochastischen Gleichwertigkeit). Das eine ist ohne das andere nicht verstehbar. Unseres Erachtens zeigt sich hier eine der von Vollrath (1993) dargestellten "Paradoxien des Verstehens", nämlich (S. 41): "Man kann das Allgemeine nur verstehen, wenn man das Besondere verstanden hat. Man kann jedoch das Besondere nur verstehen, wenn man das Allgemeine verstanden hat."
Ein solches tiefes Eindringen in die Sache erfordert viel Zeit, ist aber gerade in der Stochastik unverzichtbar, wo erfahrungsgemäß - auf allen Altersstufen - viele inadäquate Primärintuitionen vorhanden sind (vgl. dazu E. Fischbein 1975 oder M. Borovcnik 1992). Stochastisches Denken muß sich, wie H.-J. Vollrath (1984, S.413) betont, "im Menschen ... über einen längeren Zeitraum entwickeln". Daher ist es "notwendig, einen Themenstrang Wahrscheinlichkeit zu planen, der eine natürliche Begriffsentwicklung ermöglicht." Nur dadurch, daß Lernende immer wieder geeignete stochastische Problemsituationen inhaltlich durchdringen und reflektierend einordnen - so wie hier exemplarisch geschehen -, können sich tragfähige stochastische Grundvorstellungen herausbilden.

Anhang

Um die 15 (bedingten) Wahrscheinlichkeiten p_{ik} zu bestimmen, verschaffen wir uns zunächst eine Übersicht über die 90 sechsstelligen Wörter über {a, b, c}, in denen jeder Buchstabe genau zweimal vorkommt. Hierzu betrachten wir zuerst die möglichen dreistelligen Wort*anfänge*, von denen es nur vier wesentlich verschiedene gibt. Diese repräsentieren wir durch

(1) abc, aab, aba, abb.

"Wesentlich verschieden" bedeutet hierbei "verschieden hinsichtlich der Stellen mit übereinstimmenden Buchstaben": Keine solchen Stellen, Stellen 1 und 2, Stellen 1 und 3, Stellen 2 und 3.
Die Liste auf der nächsten Seite führt sämtliche Möglichkeiten auf, die vier Anfänge (1) zu sechsstelligen Wörtern der geforderten Art fortzusetzen, nebst den Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese Wörter bei dem in *3.2* beschriebenen Verfahren auftreten.
Ebenso führt jede der weiteren fünf Permutationen acb, bac, bca, cab, cba (wie eben als Ausgang für vier wesentlich verschiedene Wortanfänge genommen) zu einer genau gleichartig aufgebauten Liste mit 15 Wörtern. Diese sechs Listen erfassen - wie man sich sofort klarmacht - genau die 90 einschlägigen Wörter. Die Gesamtwahrscheinlichkeit in jeder Liste ist natürlich $\frac{1}{6}$.
Um nun zum Beispiel die gesuchte Wahrscheinlichkeit p_{12} (die Gesamtwahrscheinlichkeit aller Wörter mit gleichen Buchstaben an den ersten beiden Stellen) zu bestimmen, brauchen wir nur in der ersten Liste die mit aa beginnenden Wörter aufzusuchen und ihre Wahrscheinlichkeiten zu addieren: $\frac{1}{36}+\frac{2}{72}=\frac{1}{18}$, und schließlich diese Summe (in Berücksichtigung der fünf weiteren Listen) mit 6 zu multiplizieren: $p_{12}=\frac{1}{3}$. Für p_{16} ($=p_{26}=p_{15}=p_{25}$) z.B. finden wir zwei Wörter in Abschnitt I und eines in IV (bzw. in III)

mit Gesamtwahrscheinlichkeit $\frac{2}{162}+\frac{1}{108}=\frac{7}{324}$; Multiplikation mit 6 liefert $p_{16}=\frac{7}{54}$. Entsprechend erhält man $p_{13}=p_{23}=\frac{2}{9}$. $p_{14}=p_{24}=\frac{5}{27}$, $p_{34}=\frac{13}{54}$, $p_{35}=p_{36}=\frac{17}{108}$, $p_{45}=p_{46}=\frac{7}{36}$, $p_{56}=\frac{7}{18}$. Die angegebenen Gleichheiten sind natürlich nicht zufällig, sondern lassen sich anhand der Wortliste unmittelbar einsehen. - Die Summe aller 15 Wahrscheinlichkeiten ist 3, ihr Mittelwert also $\frac{1}{5}$.

	Wortanfang	W'keit dafür	Fortsetzung	W'keit dafür	W'keit des ganzen Worts
I	a b c	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$	a b c	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$	$\frac{1}{162}$
			a c b	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$	$\frac{1}{162}$
			b a c	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$	$\frac{1}{162}$
			b c a	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$	$\frac{1}{162}$
			c a b	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$	$\frac{1}{162}$
			c b a	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$	$\frac{1}{162}$
II	a a b	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$	b c c	$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$	$\frac{1}{36}$
			c b c	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$	$\frac{1}{72}$
			c c b	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$	$\frac{1}{72}$
III	a b a	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$	b c c	$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$	$\frac{1}{54}$
			c b c	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$	$\frac{1}{108}$
			c c b	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$	$\frac{1}{108}$
IV	a b b	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$	a c c	$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$	$\frac{1}{54}$
			c a c	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$	$\frac{1}{108}$
			c c a	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$	$\frac{1}{108}$

Literatur

Borovcnik, M.: Stochastik im Wechselspiel von Intuition und Mathematik. BI, Mannheim 1992.

Fischbein, E.: The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children. Reidel, Dordrecht 1975.

Schmidt, G.: Schwächen im gegenwärtigen Stochastikunterricht und Ansätze zu ihrer Behebung. MU 36 (1990) 6, S. 20-28.

Székely, G.: Paradoxa - Klassische und neue Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik. Deutsch, Frankfurt 1990.

Vollrath, H.-J.: Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht. Klett, Stuttgart 1984.

Vollrath, H.-J.: Paradoxien des Verstehens von Mathematik. JMD 14 (1993) 1, S. 35-58.

Winter, H.: Zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien. JMD 13 (1992) 1, S. 23-53.