In: Umsetzen von Aussagen und Inhalten. Mathematik in der beruflichen Bildung. Blickfeld Ausbildung, Hrsg.: Bardy (u.a.), technic-didact Schriftenreihe: Diskussionsfeld Technische Ausbildung, Band 3, 1988, Leuchtturm-Verlag, Alsbach/Bergstraße, S. 229-252

Werner Blum

ANALYSIS IN DER FACHOBERSCHULE
Oberlegungen zur Konzeption, zu Anwendungsbezügen und zum Rechnereinsatz

****

0. Vorbemerkungen

Analysis (d.h. Funktionen, Differentialrechnung und Integralrechnung) ist das zentrale Thema des Mathematikunterrichts in der FOS. Laut KMK-Beschluß von 1976 ebenso wie laut Lehrplänen der Bundesländer (1) sollten 75% bis 85% des Mathematikcurriculums für Analysis verwendet werden. In vielen FOSn werden nur ganz wenige Unterrichtsstunden anderen Themen wie Vektorrechnung oder Wahrscheinlichkeitsrechnung gewidmet.

Im folgenden skizziere ich zuerst - angelehnt an BLUM/KIRSCH (1979) und an BLUM/TÖRNER (1983) - einen Vorschlag für eine **Konzeption** des Analysisunterrichts in der FOS (2). Ich analysiere dabei nicht den gegenwärtigen realen Unterricht (vgl. dazu auch BARDY/BLUM 1978), sondern bemerke nur global, daß meine Konzeption sich in einigen Punkten davon unterscheidet.

Dann diskutiere ich - unter wesentlicher Verwendung von BLUM (1985a) - den wichtigen Aspekt der Anwendungsorientierung des Analysisunterrichts in der FOS. Schließlich stelle ich detaillierte Überlegungen zur **Verwendung von Taschenrechnern und Computern** im Analysisunterricht der FOS an.

1. Zur Konzeption das Analysisunterrichts in der FOS

1.1. Zu den Zielen

Ein zentrales Ziel des Analysisunterrichts in der FOS ist, Schüler mit Hilfe von Analysis zu einem **besseren Verstehen und Bewältigen von Situationen** aus Alltag und Umwelt, aus dem Unterricht anderer Fächer (insbesondere aus dem jeweiligen Schwerpunktfach Technik, Wirtschaft usw.), aus berufspraktischen Bereichen oder aus zukünftigen Studienfeldern zu befähigen. **Beispiele** für solche Situationen sind etwa elektrische Schaltkreise, physikalische Bewegungsvorgänge, biologische Wachstumsprozesse, chemische Reaktionen und die bundesdeutsche Einkommensteuer (genaueres in Kapitel 2).

Weiter sollen im Analysisunterricht auch gewisse **"formale" Qualifikationen** vermittelt werden. Dazu gehören in erster Linie allgemeine Anwendungsfähigkeiten wie "Übersetzen" zwischen Realität und Mathematik in beiden Richtungen (Mathematisieren, Interpretieren, Anwenden) anhand von realen Beispielen wie etwa der Schwingung eines Federpendels. Auch die Fähigkeiten zum Argumentieren (vor allem auch geometrisch oder plausibel wie beim Satz

"Wenn f'=0, so f konstant"), zum "algorithmischen Denken" (d.h. zum Denken in Abläufen) sowie spezieller zum "funktionalen Denken" (d.h. zum Denken in Abhängigkeiten) sollen ausgeformt und weiterentwickelt werden. Wichtig in bezug auf das globale Ziel der FOS, Schüler auf weiterführende Bildungsgänge im Tertiärbereich vorzubereiten, ist vor allem auch, daß Schüler vernünftige **Einstellungen und Haltungen** erwerben wie etwa Offenheit gegenüber neuen Situationen oder die Bereitschaft, sich intellektuell anzustrengen und gestellte Aufgaben argumentierend und nicht bloß rezepthaft-schematisch anzugehen.

Im Unterschied zur gymnasialen Oberstufe sollen in der FOS m.E. nur ganz wenige ausgewählte mathematische Inhalte wegen ihrer **kulturhistorischen** Bedeutung unterrichtet werden. In der Analysis ist dies nur der Grenzwertbegriff, der für interessierte Schüler in einer eigenen Lernsequenz nach einem ersten Durchgang durch die Infinitesimalrechnung bis zu seiner formalen Fassung entwickelt werden kann.

Global geht es mir um die Vermittlung eines auf die Schulform "FOS" bezogenen **adäquaten Abschlußniveaus**, welches insbesondere auch die Studierfähigkeit an Fachoberschulen miteinschließt. Dies beinhaltet u.a., daß Schüler tragfähige **Grundideen** (wie Ableitung als "lokale Änderungsrate") und **Grundvorstellungen** (wie Ableitung als Steigung der lokalen "Schmieggeraden") von den wesentlichen Begriffen, Methoden und Resultaten der Analysis erwerben und lernen, mit Analysis möglichst sicher, begründet und verständig umzugehen.

1.2. Methodische Gesichtspunkte

Analysisunterricht in der FOS hat sich (wie jeglicher Unterricht) an allgemeinen **Zielen** (siehe 1.1), an anerkannten **didaktischen Prinzipien** sowie an **Erkenntnissen und Erfahrungen** über das Lernen und Lehren jeweiliger Themen zu orientieren; das für mich wichtigste didaktische Prinzip ist dabei das **genetische Prinzip** (genaueres z.B. in Kap. C.1 von BLUM/TÖRNER 1983). Dies bedeutet für den Analysisunterricht insbesondere:

a) Es soll an das **Vorverständnis** der Schüler angeknüpft werden; Beispiele:

   * Verwenden von inner- und außermathematischen Vorkenntnissen über exponentielle Prozesse bei der Behandlung der Exponentialfunktionen und deren Ableitung (genaueres zu diesem noch mehrfach herangezogenen Beispiel siehe in BLUM 1985b).

   * Anerkennen von geometrischem Vorwissen über Flächeninhalte als tragfähige und nicht hinterfragte Grundlage für Definitionen und Beweise in der Integralrechnung.

b) Es sollen geeignete **Stufungen und Vereinfachungen** vorgenommen werden, die aber nichts verfälschen. Dies geschieht vor allem durch **Wahl geeigneter Darstellungsebenen** oder durch **Ausgliedern von plausiblen,** genau abgrenzbaren **Definitions- und Beweisteilen;**

Beispiele:

* Verzicht auf Behandlung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

* Verwendung von Grenzwerten als "Werkzeug"; Verzicht auf eine Formalisierung des Grenzwertbegriffs vor der Infinitesimalrechnung; gestufte Entwicklung dieses Begriffs (numerisch, graphisch, verbal, algebraisch, operativ; genaueres siehe in BLUM 1979) im Verlaufe der Differentialrechnung; "naives" Verwenden von Grenzwertsätzen.

* Verwendung des Stetigkeitsbegriffs als bloßer Hilfsbegriff zur Abgrenzung "vernünftiger" Funktionen in der Integralrechnung.

* Betonung der Idee der Beobachtung eines Funktionsgraphen bei fortwährender Vergrößerung durch ein Mikroskop ("Funktionenmikroskop"; siehe KIRSCH 1979) zur Ausformung einer adäquaten Grundvorstellung von Ableitung und Tangente.

* Beschränkung auf diejenigen zentralen (d.h. zur Vollständigkeitseigenschaft von $\mathbb{R}$ äquivalenten) Sätze der Differentialrechnung, die als Hilfsmittel benötigt werden (nämlich: Monotoniesatz, Satz über Extrema, Satz über Konstante); nur geometrische und anwendungsbezogen plausible Begründung dieser Sätze; Verzicht auf die übrigen zentralen Sätze (Mittelwertsatz usw.).

* Verzicht auf Existenz- und Eindeutigkeitsfragen bzgl. Bogenlängen und Flächeninhalten bei der Definition und Ableitung der Sinusfunktion.

* Ausgliedern der Existenz und Eindeutigkeit von

  $$\lim_{h \to 0}((b^h-1)/h)$$

  bei der Ableitung der Exponentialfunktionen.

* Beschränkung auf bloße Berechnungsfragen (bei Integralen, Flächen, Volumina, Mittelwerten sowie vielfältigen realen Situationen) im Rahmen der Integralrechnung.

c) Es sollen reichhaltige **Querverbindungen** innerhalb und außerhalb der Mathematik hergestellt werden; Beispiele in Kapitel 2.

d) Es sollen vielfältige **Schüleraktivitäten** gefördert werden; Beispiele (siehe auch Kapitel 3):

* Arbeitsteilige Bestimmung von Differenzenquotienten für "kleine" h-Werte bei numerischen Ableitungsbestimmungen.

* Selbständiges Finden und Begründen einfacher Ableitungsregeln.

Die genannten Gesichtspunkte klingen selbstverständlich und sollten es eigentlich sein, werden aber nach meinen Kenntnissen im FOS-Unterricht sehr oft nicht beachtet.

1.3. Zu den Inhalten

Folgende Inhalte sollten m.E. das FOS-Analysis-Curriculum ausmachen (nicht notwendig in dieser Reihenfolge!):

1) Funktionen

- Typen von Funktionen: lineare, quadratische, Potenz, ganzrationale, Wurzel, reziprok, Exponential sowie je nach FOS-Schwerpunkt ggfs. noch trigonometrische bzw. einfache gebrochen-rationale; dabei integrierte Wiederholung von SI-Stoffen wie Gleichungslösen und Termumformen
- Darstellung von Funktionen, insbesondere durch Graphen
- Eigenschaften von Funktionen, insbesondere Monotonie, Schnittstellen, Umkehrbarkeit
- Folgen inklusive Konvergenzphänomene (falls Zeit ist, sonst Verzicht)

2) Differentialrechnung

- Ableitungsbegriff (lokal und global)
- Ableitung der behandelten Funktionen, inklusive Differentialgleichung $f'=kf$
- Ableitungsregeln
- Außer- und innermathematische Anwendungen, inklusive benötigte zentrale Sätze
- Stammfunktionen
- (ggfs.) Formalisierung des Grenzwertbegriffs

3) Integralrechnung

- Integralbegriff
- Integrale der behandelten Funktionen
- einfache Integrationsregeln und -verfahren inklusive numerische Integration
- Hauptsatz
- außer- und innermathematische Anwendungen

Der zeitliche Umfang beträgt für das Thema "Funktionen" ungefähr 50-60 Stunden, für die Differentialrechnung etwas mehr und für die Integralrechnung etwa 20-25 Stunden. Genaueres werde ich noch in Kapitel 3 sagen. Jedenfalls sollte der Analysisunterricht insgesamt etwa 3/4 des gesamten Mathematikunterrichts in der FOS ausmachen.

2. Zur Anwendungsorientierung des Analysisunterrichts in der FOS

2.1. Ein Beispiel: Einkommensteuern

Das Beispiel Einkommensteuern soll hier exemplarisch dazu dienen, verschiedene wichtige Aspekte des Verhältnisses zwischen Realität und Mathematik aufzuzeigen sowie Material für anschließende didaktische Überlegungen bereitzustellen. Die folgenden Ausführungen stellen also **keinen** Unterrichtsvorschlag dar.

Ausgangspunkt bei diesem Beispiel ist die Absicht des Staates bzw. der jeweiligen Regierung, auf **Einkommen Steuern** zu erheben. Dabei gehen mehrere politische Interessen ein, die je nach politischer Couleur unterschiedlich sein können. Gemeinsam ist allen Politikern, daß sie Steuern "gerecht" erheben wollen. Daneben sind natürlich auch Interessen verschiedener Gruppen von Steuerzahlern zu beachten.

Durch Vereinfachen und Strukturieren des Ausgangsproblems wird ein "reales Modell" gebildet, welches insbesondere verschiedene Eckdaten und verschiedene Forderungen enthält wie z.B.

- der Prozentsatz der insgesamt vom Einkommen zu zahlenden Steuer soll mit wachsendem Einkommen ebenfalls wachsen - oder
- der Höchststeuersatz soll p% betragen (p=45 oder 53 oder 56 oder 80 oder ...).

Dieses reale Modell wird nun in die Mathematik "übersetzt". Es resultiert ein "mathematisches Modell", welches hier aus einer reellen Funktion s, der (nach naheliegender Idealisierung auf $\mathbb{R}_0^+$ erklärten) **Einkommensteuerfunktion**, aus gewissen Bedingungen an diese Funktion (z.B., s.o., daß $x \mapsto s(x)/x$ monoton wächst) sowie aus bestimmten Begriffen besteht (insbesondere dem Begriff des Grenzsteuersatzes

$$\lim_{h \to 0}((s(x+h)-s(x))/h) = s'(x),$$

d.h. der lokalen Änderungsrate von s an einer gegebenen Stelle x, das ist der "für jede hinzuverdiente Mark zu zahlende Steuersatz"). Die Forderung nach einer "gerechten" Steuererhebung ist damit "mathematisiert" worden.

Nun setzen innermathematische Überlegungen, Rechnungen usw. ein: Zusammenhänge zwischen verschiedenen Bedingungen werden analysiert; bestimmte Funktionstypen (insbesondere ganzrationale Funktionen) werden herangezogen, um mit Hilfsmitteln der Differentialrechnung Funktionen zu konstruieren, die alle oder wenigstens einige der Forderungen erfüllen; mit Hilfe von Computern werden qualitativ verschiedene Funktionsverläufe durchgespielt; Funktionen werden mit Hilfsmitteln der Differentialrechnung daraufhin getestet, ob sie die mathematischen Bedingungen erfüllen; usw. Es resultieren dann konkrete Einkommensteuerfunktionen.

Nun müssen die mathematischen Ergebnisse in die Ausgangssituation "zurückübersetzt" werden, es muß getestet werden, ob die erhaltenen Funktionen steuerpolitisch brauchbar sind, es müssen langfristige steuerliche Auswirkungen dieser Funktionen untersucht werden u.a.m. Gegebenenfalls müssen Bedingungen abgeändert und eine erneute Modellbildung mit anschließenden mathematischen Untersuchungen und Rück-Interpretationen durchgeführt werden. Dies geschieht so lange, bis eine für jeweilige Steuerpolitiker zufriedenstellende Steuerfunktion gefunden ist.

Idealtypisch kann dieser Vorgang gemäß **Bild 1** wie folgt beschrieben werden:

1: Reale Situation
2: Reales Modell
3: Mathematisches Modell
4: Mathematische Resultate

a: Vereinfachen, Strukturieren, Präzisieren
b: Mathematisieren
c: Mathematische Überlegungen, Rechnungen usw.
d: Rück-Interpretieren, Validieren, Anwenden

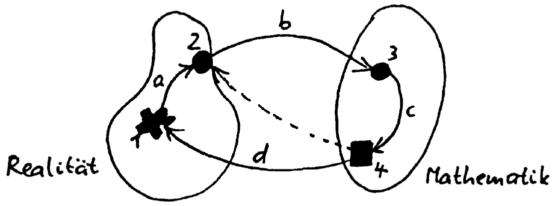


Bild 1

Welches Modell in der Bundesrepublik Deutschland verwendet wird, zeigt das derzeit (1988) gültige Einkommensteuergesetz:

§ 32 a Abs. 1 wird wie folgt gefaßt:

"(1) Die tarifliche Einkommensteuer bemißt sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §§ 32 b, 34 und 34 b jeweils in Deutsche Mark

1. für zu versteuernde Einkommen bis 4536 Deutsche Mark (Grundfreibetrag):
   0;

2. für zu versteuernde Einkommen von 4537 Deutsche Mark bis 18035 Deutsche Mark:
   0,22 x - 998;

3. für zu versteuernde Einkommen von 18036 Deutsche Mark bis 80027 Deutsche Mark:
   (((0,79 y - 30,82) y + 452) y + 2200) y + 2962;

4. für zu versteuernde Einkommen von 80028 Deutsche Mark bis 130031 Deutsche Mark:
   (60 z + 5000) z + 27798;

5. für zu versteuernde Einkommen von 130032 Deutsche Mark an:
   0,56 x - 18502.

"x" ist das abgerundete zu versteuernde Einkommen. "y" ist ein Zehntausendstel des 18000 Deutsche Mark übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens. "z" ist ein Zehntausendstel des 80000 Deutsche Mark übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens".

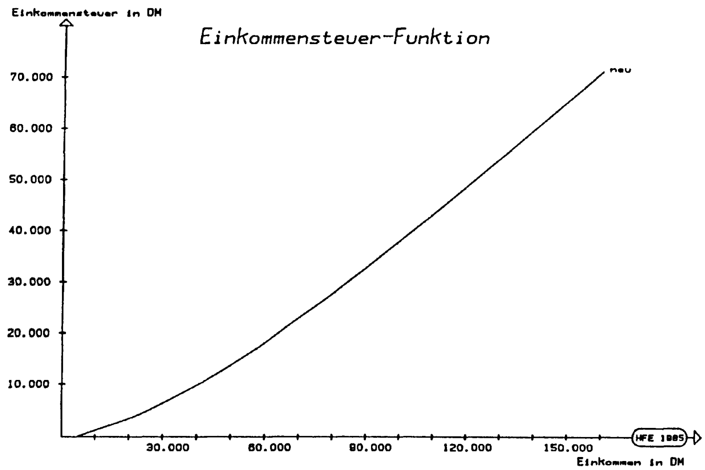


Bild 2: Einkommensteuerfunktion in der BRD

Die bundesdeutsche Einkommensteuerfunktion ist also eine stückweise ganzrationale Funktion (**Bild 2**).

Wichtiger noch ist der Graph der Grenzsteuersatzfunktion, d.h. der (stückweisen) Ableitungsfunktion (**Bild 3**).

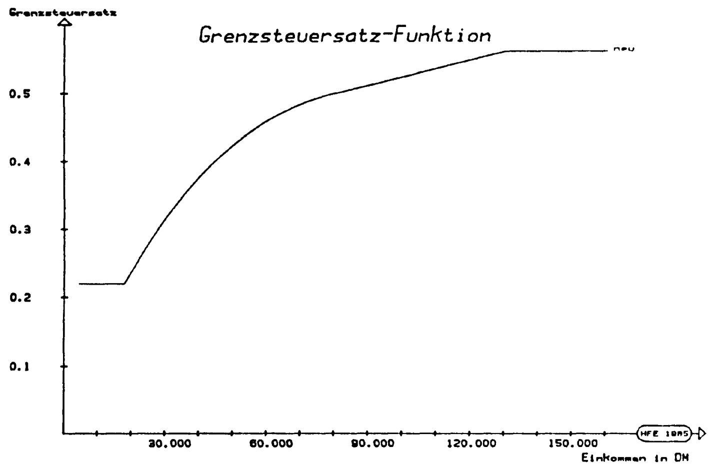
Neueste Beschlüsse der Bonner Koalition besagen, daß die Grenzsteuer nach der Proportionalzone "progressiv-linear" verlaufen soll, d.h. daß die Steuerfunktion quadratisch werden soll, wobei die Progression früher einsetzen und der Höchststeuersatz nur noch 53% betragen soll. (3)

Dieses Beispiel kann - wie auch viele andere Beispiele - in vielfältiger Weise im Analysisunterricht der FOS verwendet werden (vgl. auch BLUM 1978); dazu anschließend mehr.

2.2. Argumente zur Anwendungsorientierung des Analysisunterrichts

Unter "**Anwendung**" will ich verschiedene Formen des Zusammenhangs zwischen Realität und Mathematik verstehen:

Bild 3: Graph der Grenzsteuersatzfunktion in der BRD



* Einen komplexen **Modellbildungsprozeß** wie in 2.1 beschrieben.

* Eine direkte **Verwendung** fertiger Mathematik in realen Situationen, z.B. die Untersuchung der gegebenen deutschen Einkommensteuerfunktion mit analytischen Hilfsmitteln.

* Eine bloße "**Einkleidung**" mathematischer Gegenstände in eine Sprache aus der Realität wie z.B. in den meisten schulklassischen Extremwertaufgaben oder wenn etwa die (z.B. aus Exponentialfunktionen zusammengesetzte) Einkommensteuerfunktion eines fiktiven Landes ("Transsylvanien") untersucht wird.

Für schulische Zwecke sind **alle** Formen geeignet, je nach didaktischer Verwendung mehr oder weniger gut (siehe nachher).

Von verschiedenen Seiten werden immer wieder Argumente **gegen** Anwendungen im Mathematikunterricht vorgebracht:

* **Unterrichtsbezogene Argumente**: Es ist zu wenig Zeit für Anwendungen vorhanden angesichts der großen Stoffülle innerhalb einer sehr beschränkten Stundenzahl; in erster Linie sollen in der FOS handhabbare Kalküle (Gleichungslösen, Ableiten, Integrieren) gelehrt werden. Außerdem gehören Anwendungen in den Unterricht jeweiliger Fächer, z.B. das Einkommensteuerbeispiel in die Wirtschaftskunde an FOSn mit kaufmännischem Schwerpunkt.

* **Schülerbezogene Argumente**: Durch Anwendungen wird der Unterricht anspruchsvoller; so müssen Schüler z.B. außer dem Ableitungsbegriff noch seine Deutung als lokale Änderungsrate der Einkommensteuerfunktion, d.h. als Grenzsteuersatz, lernen, verstehen und anwenden. Weiter werden Unterricht und vor allem Klassenarbeiten durch reale Beispiele weniger gut kalkulierbar.

* **Lehrerbezogene Argumente**: Durch Anwendungen wird der Unterricht auch für Lehrer anspruchsvoller. Insbesondere kostet die Unterrichtsvorbereitung mehr Zeit, da in den Schulbüchern oft zu wenig geeignete Beispiele stehen und viele Beispiele wie etwa die Einkommensteuer ständig aktualisiert und auf die jeweilige Lerngruppe zugeschnitten werden müssen. Und Anwendungen erfordern offenere Unterrichtsformen, zu denen u.a. auch Diskusionen mit unsicherem Ausgang wie z.B. über "Steuergerechtigkeit" gehören.

* **Sachbezogene Argumente**: Es gibt zu wenig FOS-geeignete Anwendungen.

Dagegen stehen Argumente **für** Anwendungen. Ich will alle mir wichtigen Argumente aufzählen, um eine solide Basis für curriculare und methodische Folgerungen zu haben. Einzelne Argumente sind wohlbekannt und für die FOS wenig umstritten, aber die mir bekannte Schulpraxis läßt eine Wiederholung sinnvoll erscheinen. Grundlage für alle folgenden Argumente ist die in Kapitel 1 skizzierte didaktische Konzeption. Als Beispiel ziehe ich jeweils die Einkommensteuern heran.

* **Pragmatische Argumente**: Nur mittels geeigneter Anwendungsbeispiele kann das Ziel, Schüler zu einem besseren Verstehen und Bewältigen realer Situationen zu befähigen, gefördert werden. So wird eine Behandlung des Beispiels Einkommensteuern im Analysisunterricht die öffentlichen Diskussionen um die Steuergesetzgebung (die etwa 1987/88 auch die Medien stark beschäftigt haben) besser durchschaubar machen und auf eine rationale Grundlage stellen. Dies ist sowohl von "allgemeinbildendem" als auch von "berufsbildendem" Interesse. Insofern gehören Anwendungen in den Mathematikunterricht und können nicht auf andere Fächer abgeschoben werden.

* **Formale Argumente**: Auch mittels geeigneter Anwendungsbeispiele können "formale" Qualifikationen gefördert werden. "Übersetzungsqualifikationen" (siehe 1.1) können nur mittels realer Beispiel entwickelt werden, bei denen der Modellbildungskreislauf voll durchlaufen wird. Und die genannten Einstellungen und Haltungen, die sowohl für die Berufspraxis als auch für Fachhochschulstudien zentral sind, lassen sich am besten anhand von realitätsbezogenen Beispielen entwickeln.

* **Wissenschaftstheoretische Argumente**: Ein bildungsgangsadäquates Abschlußniveau für FOS-Absolventen schließt auch ein angemessenes Mathematikbild bei Schülern ein, zu dem notwendig die gesellschaftliche Rolle von Mathematik mit ihren vielfältigen Realitätsbezügen in Geschichte und Gegenwart gehört. So haben z.B. bei der Entwicklung der Einkommensteuerfunktion Mathematiker tatsächlich mitgewirkt.

* **Lernpsychologische Argumente**: Auch mit Hilfe von Anwendungen lassen sich mathematische Inhalte wie z.B. der Ableitungsbegriff motivieren, veranschaulichen, üben und festigen, Anwendungen können zu einem tieferen und umfassenderen Verstehen von mathematischen Begriffen sowie zu deren längerem Behalten beitragen, das Curriculum läßt sich auch durch Anwendungsbezüge strukturieren, und schließlich können Anwendungsbezüge Schülereinstellungen zur Mathematik positiv beeinflußen.

Es gibt zahlreiche empirische Belege dafür (siehe insbesondere die Untersuchungen von KAISER-MESSMER 1986 zum anwendungsorientierten Analysisunterricht), daß bei geeigneter unterrichtlicher Behandlung von Anwendungen die erhofften Effekte tatsächlich in befriedigendem Umfang eintreten, d.h. daß das Verständnis von Sachsituationen gefördert wird, mathematische Stoffe wie der Ableitungsbegriff besser bzw. erst richtig verstanden werden oder Motivation und Einstellung von Schülern sich deutlich verbessern.

Deshalb müssen Anwendungsbezüge verschiedener Art mit verschiedenen Intentionen (entsprechend der genannten zielbezogenen Argumente) im Mathematik-, speziell im Analysisunterricht der FOS behandelt werden, auch wenn der Unterricht dadurch tatsächlich für Lehrer und Schüler anspruchsvoller wird. Angesichts der Stoffülle in der FOS können und sollen nur ganz wenige Anwendungsbeispiele mit "globaler" Zielsetzung (insbesondere zur Förderung von Übersetzungsqualifikationen) behandelt werden; daneben können "sowieso" durchzunehmende Stoffe durch Anwendungsbezüge mit Leben gefüllt werden (vor allem zu lernpsychologischen Zwecken). Die für Anwendungen zu reservierende Zeit ist im Sinne der damit angestrebten Ziele gerechtfertigt und wird sich später auszahlen.

Daß es zu wenige FOS-geeignete Beispiele gibt, stimmt nur bedingt. Gerade zur Analysis gibt es eine Fülle von realen Beispielen; siehe Abschnitt 2.4.

2.3. Einige curriculare und methodische Gesichtspunkte zum anwendungsorientierten Analysisunterricht

Als wichtigste curriculare Folgerung aus 2.2 ergibt sich: "Anwendungsorientierung" des Analysisunterrichts in der FOS bedeutet (wie eben gesagt), daß in einen **mathematisch konsistenten Aufbau** der Analysis einige "**lokale**" und wenige "**globale**" Anwendungsbeispiele integriert werden. So kann etwa das Beispiel Einkommensteuern einerseits beim Thema Funktionsuntersuchungen vor und in der Differentialrechnung behandelt werden, oder der Grenzsteuersatz bzw. die Steuerprogression dienen zur Konkretisierung des Begriffs der ersten bzw. zweiten Ableitung. Andererseits kann dieses Beispiel in Klasse 12 FOS über einige Unterrichtsstunden hinweg zusammenhängend durchgearbeitet werden, etwa in der folgenden Form (4):

- Präsentation Problemstellung ESt durch Lehrer
- Unterrichtsgespräch, Formulierung von Fragen durch Schüler
- Strukturierung, Vereinfachungen, Aufstellen steuerpolitischer Forderungen
- gemeinsame Mathematisierung der Forderungen und Begriffe

- arbeitsteiliges Aufstellen möglicher ESt-Funktionen
- Einbringen BRD-ESt-Gesetz durch Lehrer oder Beschaffen durch Schüler
- arbeitsteilige ESt-Berechnungen, Zeichnen ESt-Funktion (ggfs. mit Computer)
- arbeitsteilige analytische Untersuchungen ESt-Funktion, Zeichnen Ableitung
- Zusammenfassung, Diskussion
- Rück-Interpretationen, Vergleich mit Forderungen
- methodologische Reflexionen

Der letzte Punkt verweist auf eine wichtige methodische Forderung: Anwendungsbeispiele sollen nicht nur behandelt werden, sie sollen auch rückblikkend in ihren prinzipiellen Aspekten analysiert werden; insbesondere muß der Modellbildungskreislauf für Schüler **bewußt gemacht** werden, z.B. mit Hilfe eines Diagramms wie in 2.1. Höchstens dann können ein Transfer auf andere Beispiele und damit ein Beitrag zu "Übersetzungsfähigkeiten" erhofft werden.

Ansonsten gelten die in 1.2 aufgestellten Gesichtspunkte unverändert.

2.4. Einige weitere Beispiele

Aus der Fülle FOS-geeigneter Anwendungsbeispiele zur Analysis werden einige genannt (5); man vergleiche dazu die in KAISER/BLUM/SCHOBER (1982/1988) aufgeführte Literatur.

Wohlbekannt sind die schulklassischen physikalischen Beispiele wie diverse Bewegungs- oder Schwingungsvorgänge. Gut für die Schule geeignet sind auch **Zu- oder Ab- bzw. Auslaufvorgänge** von Flüssigkeiten in Wasserreservoiren, Schwimmbecken, Gläsern o.ä. Dabei ist die Stromstärke die Ableitung des Volumens nach der Zeit bzw. umgekehrt das Volumen das Zeitintegral über die Stromstärke. Als Funktionen können einfache rationale oder auch Exponentialfunktionen auftreten.

Weniger bekannt ist vielleicht das Beispiel **Kettenkarussell**, wo der Auslenkungswinkel α gesucht ist, wenn Kettenlänge l, Karussellradius r und Winkelgeschwindigkeit ω gegeben sind. Es resultiert eine Gleichung 4. Grades für $x=\sin\alpha$:

$$l^2x^4 + 2rlx^3 + (r^2 - l^2 + g^2/\omega^4)\, x^2 - 2rlx - r^2 = 0.$$

Diese kann mit einem numerischen Verfahren, etwa dem Newtonverfahren, näherungsweise gelöst (und die Lösung auch mit der Realität verglichen) werden.

Zahlreiche Beispiele (vorwiegend für den "allgemeinbildenden" Analysisunterricht gedacht, aber auch für die FOS uneingeschränkt verwendbar) sind bei der MUED (Mathematik-Unterrichts-Einheiten-Datei) (6) gesammelt bzw.

erarbeitet worden. Exemplarisch sei hingewiesen auf die Unterrichtseinheit "**Trassierung von Autobahnkreuzen**" (BÖER/VOLK 1982), wo verschiedene Trassenführungen bei Autobahnkreuzen analytisch modelliert (mit Polynomfunktionen bis zum Grad 5 oder auch mit trigonometrischen Funktionen) und zugehörige Längen und Flächen analytisch bzw. numerisch bestimmt werden (**Bild 4**).

Bild 4: Analysis-Beispiel: Trassierung von Autobahnkreuzen

Viele Anwendungsbeispiele resultieren aus (i.a. nur in bestimmten endlichen Bereichen) genau oder näherungsweise **exponentiell** verlaufenden **Zu- oder Abnahmeprozessen**. Beispiele sind:

- Wachstum der Weltbevölkerung (Verdopplungszeit derzeit ca. 37 Jahre)
- Wachstum von Tierpopulationen, von Bakterien- oder Hefekulturen
- Abnahme von Rohstoffvorräten
- Ausbreitung von Epedemien (aktuell: Aids, mit Verdopplungszeit ca. 10 Monate)
- radioaktiver Zerfall
- Abkühlungs- oder Erwärmungsvorgänge
- Absorptionsvorgänge (Strahlung, z.B. Licht, oder Schall)
- Ein- oder Ausschaltvorgänge (z.B. Kondensator)
- Luftdruckabnahme
- Abbau von Medikamenten im Blut
- Bierschaumzerfall

Die bekannten, empirisch leicht feststellbaren Faustformeln $p*d \approx 70$ beziehungsweise $p*h \approx 70$ (p% Wachstums- bzw. Zerfallsprozentsatz, d bzw. h Verdopplungs- bzw. Halbierungszeit, -weite etc.) können im Analysisunterricht begründet werden, wobei nur die Approximationseigenschaft $\ln(1+x) \approx x$ für kleine Beträge von x benötigt wird (**Bild 5**).

Extremwertaufgaben findet man in sämtlichen Schulbüchern, etwa zur maximalen Tragfähigkeit eines Balkens oder zur materialsparendsten Herstellung einer Konservendose, eines Kamins oder einer Bienenwabe. Solche Beispiele sind für alle in 2.2 identifizierten didaktischen Zwecke gut geeignet;

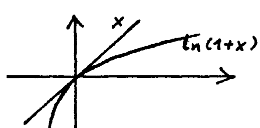


Bild 5

d.h. sie erfüllen nicht bloß lernpsychologische Aufgaben (insbesondere Einübung des Kalküls), sondern können auch zum exemplarischen Aufzeigen des Modellbildungskreislaufs verwendet werden (etwa wenn bei der "Balkenaufgabe" in mehreren Durchläufen mehr und mehr Randbedingungen berücksichtigt werden, bis man befriedigend nahe an der real verwendeten Balkenform angelangt ist).

Auch zahlreiche **technikbezogene** Anwendungen haben die Form von Extremwertaufgaben. Genannt seien:

- Maximierung der Verbraucherleistung $P=U_0^2*R/(R_i+R)^2$ einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand R_i in Abhängigkeit vom Lastwiderstand R,

- maximale Ausfüllung einer zylindrischen Spule durch einen Eisenkern mit kreuzförmigem Querschnitt $A=4r^2(2\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi)$ in Abhängigkeit vom Eckwinkel φ,

- Maximierung des Wirkungsgrades $\eta=\tan\alpha/\tan(\alpha+\varrho)$ einer Flachgewindeschraube mit konstantem Neigungswinkel ϱ in Abhängigkeit vom Steigungswinkel α.

Weitere technikbezogene Beispiele zur Analysis sind etwa der Effektivwert eines Wechselstroms

$$I = \sqrt{1/T \int_0^T i^2 \cdot dt} \quad \text{oder dessen Wirkleistung} \quad P = 1/T \int_0^T ui \cdot dt,$$

wobei

$$i = i_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \text{und} \quad u = u_0 \cdot \sin(\omega t+\varphi) \quad \text{mit} \quad \omega = 2\pi/T.$$

Schließlich sei auf die wohlbekannten **wirtschaftsbezogenen** Anwendungsbeispiele hingewiesen, die sich zahlreich in Schulbüchern für die berufliche Oberstufe der Fachrichtung Wirtschaft und in den letzten Jahren auch in Schulbüchern für die allgemeinbildende Oberstufe finden. Genannt seien Kosten-, Erlös-, und Gewinnfunktionen und die zugehörigen infinitesimalen Begriffe Grenzkosten etc., Konsumenten- und Produzentenrente u.v.a.m.

3. Zum Rechnereinsatz im Analysisunterricht der FOS (7)

3.1 Beispiele zur Verwendung von Rechnern als Werkzeuge im Analysisunterricht

Derzeit rollt eine "Computerwelle" in die Schulen. Bezogen auf den Analysisunterricht gibt es dabei zwei **extreme Positionen**:

* radikale Umgestaltung, Reduktion oder gar Abschaffung des Analysisunterrichts als Konsequenz aus dem immer weiteren Vordringen von Computern und - damit zusammenhängend - aus der wachsenden Bedeutung der "diskreten Mathematik";

* Abschottung vor Computern, unverändertes Unterrichten von Analysis wie in den 60er oder 70er Jahren.

Meine Position wird sich dazwischen ansiedeln. Ich werde im folgenden darlegen, welche Rolle Rechner im Rahmen der in Kapitel 1 skizzierten Konzeption spielen. Dabei beschränke ich mich auf **Rechner als Werkzeug** zur Verwirklichung der Konzeption, d.h. ich beschäftige mich nicht mit Rechnern als Unterrichtsgegenstand oder mit Ansätzen, den Computer als "Tutor" zu verwenden, da dies für den Mathematikunterricht wenig bedeutsam ist. Unter "Rechner" verstehe ich dabei, sofern nicht ausdrücklich differenziert wird, sowohl **Computer** als auch **Taschenrechner**, auch solche einfachster Art. Natürlich ist das Thema "Computer und (Analysis-) Unterricht" derzeit viel brisanter; doch auch das Thema "Taschenrechner und (Analysis-)Unterricht" ist noch keinesfalls ausdiskutiert.

Zum ersten können Rechner im Rahmen der dargestellten FOS-Analysiskonzeption als **Hilfsmittel für numerisches Rechnen** bei "sowieso" behandelten bzw. bei wünschbaren Themen (siehe dazu 3.2) dienen. Hierdurch kann der Unterricht entlastet und effektiviert und können komplexere, insbesondere auch außermathematische Probleme (siehe Lehrziele!) mit realistischeren Daten schulzugänglich gemacht werden. **Beispiele** hierzu kann man in der Literatur (8) zahlreich finden, z.B.

* **Funktionswertberechnungen**, insbesondere bei Polynomen mittels Hornerschema;

* näherungsweise **Nullstellenberechnungen**, insbesondere mit Bisektions-, Regula Falsi- oder auch Newtonverfahren;

* näherungsweise **Grenzwertberechnungen** bei Folgen, z.B. bei $(1+1/n)^n$;

* numerische **Ableitungsbestimmungen**, z.B. bei exp'0 oder bei sin'0;

* numerische **Integration**, insbesondere mit Rechteck- oder Trapezverfahren, z.B. bei $\int(1/t)\cdot dt$;

* numerische **Lösung von Differentialgleichungen**, hier von $f'=kf$, insbesondere mit Eulerverfahren.

All dies kann gegebenenfalls auch innerhalb von **Anwendungskontexten** erfolgen, so z.B. die numerische Lösung einer Gleichung vierten Grades bei der Behandlung des Beispiels Kettenkarussell (siehe 2.4). Schließlich sind zu nennen

* **Anwendungsbeispiele** mit "schmutzigen" Daten wie etwa die bundesdeutsche Einkommensteuer (siehe 2.1).

Die wesentliche Rolle von Rechnern besteht hier "nur" darin, daß sie im Unterricht anfallende Rechenarbeit abnehmen. Sie leisten prinzipiell nicht mehr als frühere Rechen-Hilfsmittel, arbeiten natürlich aber viel **schneller,** was auch eine **qualitative Verbesserung** darstellt. So können Schüler etwa Grenzprozesse (anders als früher) numerisch "erleben" (natürlich nur in endlichen Bereichen). In fast allen Fällen reichen bei konkreten Problemen die **einfachsten** numerischen Verfahren völlig aus, also z.B. das Bisektions- oder das Rechteckverfahren. Selbstverständlich ist bei allen aufgeführten Beispielen auch wichtig, daß **Oberschläge** nicht vergessen werden und daß auf **Fehlerabschätzungen,** auf sinnvolle **Genauigkeitsangaben** oder auf vernünftige Abbruchskriterien geachtet wird (zu Gesichtspunkten der numerischen Mathematik sei auf BLANKENAGEL 1985 verwiesen).

Zum zweiten können Computer mit entsprechender Software (z.B. µMath) als **Hilfsmittel für symbolisches Rechnen** dienen. Zwar ist solche Software heute noch kaum in Schulen verfügbar; das wird sich jedoch in wenigen Jahren ändern. Wiederum kann dies zur Entlastung und Effektivierung des Analysisunterrichts beitragen; Beispiele:

- **Ableitungsbestimmungen,** auch bei Funktionen mit Parametern;

- **Integralbestimmungen,** insbesondere solche, bei denen analytische Integrationsregeln wie Substitution oder Partialbruchzerlegung nötig wären.

Computer dienen hierbei als eine Art umfassende Formelsammlung.

Zum dritten können Computer mit Graphik als **Zeichen-Hilfsmittel** dienen, wodurch ebenfalls eine Effektivierung bewirkt werden kann; Beispiele:

- **Zeichnen** von Funktionsgraphen, Tangenten, Flächen etc. und **Verändern von Parametern,** z.B. Veranschaulichung und Variation der Steigung $\exp_b{}'0$ für verschiedene Basen b bei der Ableitung der Exponentialfunktionen;

- **Anpassung** von Funktionsgraphen an gegebene Daten;

- **Veranschaulichung numerischer Algorithmen,** z.B. für Nullstellen- oder für Integralberechnungen;

- **Zeichnen des Richtungsfeldes** einer gegebenen Differentialgleichung, hier von f'=kf.

Hierbei können Computer auch prinzipiell mehr leisten als herkömmliche Visualisierungs-Hilfsmittel (wie Folien), indem auch dynamisch-operative Momente betont werden können.

Über diese Rolle als Rechen- bzw. Zeichenknecht hinaus können Rechner - und das ist noch wichtiger als das Bisherige - als **methodische Hilfsmittel** neuer Art (neben den bewährten) eingesetzt werden, welche zur Förderung gerade anspruchsvollerer Ziele (Fähigkeiten wie "verständiges Umgehen" oder "Übersetzen" sowie adäquate Einstellungen) beitragen und die Aneignung mathematischer Inhalte für Schüler erleichtern sollen; insbesondere sollen sie die Bildung von Begriffen und den Aufbau von Grundvorstellungen fördern und auch ein besseres Behalten der Inhalte unterstützen. Fast alle bisher aufgeführten **Beispiele** lassen sich in dieser Weise ausbauen, etwa:

* Vertrautwerden mit Funktionen und deren Eigenschaften durch zielgerichtetes und systematisches Verändern von Parametern im Term der Behandelten Funktionen (rationale, $\sqrt{\ }$, exp oder sin) und Studium der Auswirkungen auf den Graphen;

* numerische Vorbereitung bzw. Veranschaulichung des Konvergenzbegriffs, des Ableitungs- bzw. des Integralbegriffs oder auch der entsprechenden Summenregeln;

* Finden der Kettenregel durch gezieltes Experimentieren mit zusammengesetzten Funktionen unter Verwendung eines Computers mit Software zum formalen Differenzieren;

* definitorische Einführung und numerische Berechnung der Eulerschen Zahl als Basis derjenigen Exponentialfunktion, für die exp'0=1 gilt;

* Visualisierung des Glättungs- bzw. Nichtglättungsprozesses bei verschiedenen Funktionen bei Vergrößerung mittels eines Funktionenmikroskops;

* Förderung einer adäquaten Einstellung zu Problemen durch Bewußtmachen des Stellenwerts von numerischen im Vergleich zu analytischen Rechnungen in der Integralrechnung.

Weiter eröffnen sich durch Computer vielfältige Möglichkeiten für **Simulationen**, z.B. bei exponentiellen Prozessen, wodurch Schüler sowohl die betreffenden Problemsituationen besser verstehen als auch allgemeine Einsichten in Modellbildungsprozesse gewinnen können.

Zur Verdeutlichung und zur Vermeidung von Mißverständnissen sind einige **Erläuterungen** zum bisher Gesagten nötig:

1) Es geht in den genannten Beispielen nicht nur um nachträgliche numerische oder graphische **Veranschaulichungen**, sondern auch um das **Gewinnen von Erkenntnissen** aus gegebenen numerischen oder graphischen Darstellungen. So kann etwa die Idee des Funktionenmikroskops und das Studium verschiedener Beispiele die Bildung des Differenzierbarkeitsbegriffs beim Lernenden initiieren.

2) In allen Beispielen sind Rechner nicht **Selbstzweck**, sondern sie sollen der Förderung wünschenswerter Ziele dienen, sie sollen nützliche **Werkzeuge** beim Zugänglichmachen von legitimierten Inhalten für Schüler sein. Solche Werkzeuge müssen immer mit methodischen und curricularen **Prinzipien** wie der Förderung von Schüler-Eigentätigkeiten (vgl. 1.2)

in Einklang gebracht werden. Dies kann der Lehrer (was ich nicht im einzelnen ausführen möchte) bei den genannten Beispielen weitgehend realisieren. Insbesondere kann man das **operative Prinzip** ("Was passiert, wenn ...", d.h. kontrolliertes Verändern von Situationen und Analysieren der Konsequenzen) mit Hilfe von Rechnern wirksam umsetzen.

3) Bisher habe ich nur **Möglichkeiten** für die Verwendung von Rechnern im Analysisunterricht der FOS aufgezeigt, was noch keine Konsequenzen zu haben braucht. M.E. legen die aufgeführte Beispiele jedoch die Erwartung nahe, daß durch Rechner Schülern nicht einfach zusätzliche Hilfsmittel zugemutet werden, die sie womöglich eher belasten als unterstützen, sondern daß Rechner den Analysisunterricht **bereichern** und von ihnen tatsächlich einige **positive Auswirkungen** auf das Lehren und Lernen von Mathematik ausgehen, die auf eine andere Art nicht mit vergleichbarem Aufwand zu erreichen sind (nur so lassen sich Werkzeuge legitimieren); nochmals stichwortartig Belege hierfür: numerisch aufwendige Anwendungen, numerische Differentation und Integration, Funktionenmikroskop, Simulationen. Natürlich stehen hierzu noch breite Erfahrungen und systematische Untersuchungen aus, insbesondere was die Auswirkungen von Computern betrifft (9). Ich möchte auch keineswegs vorschlagen, sämtliche genannten Möglichkeiten in jeder Klasse nun auch tatsächlich zu realisieren. Einige methodische Konsequenzen für die Praxis des Analysisunterrichts sollten aber schon jetzt gezogen werden. In bezug auf Taschenrechner ist das teilweise schon geschehen, nach meinen Kenntnissen allerdings noch nicht in wünschbarem Ausmaß; in bezug auf Mikrocomputer gibt es erst bescheidene Anfänge.

4) Neben vielfältigen Möglichkeiten muß auch von **Problemen, Gefahren und Grenzen** des Einsatzes von Rechnern die Rede sein; ich werde in Abschnitt 3.3 genauer darauf eingehen. Schon hier soll aber betont werden, daß diese (wie alle) Werkzeuge individuelle Erkenntnisprozesse und intellektuelle Anstrengungen von Lernenden selbstverständlich nicht behindern oder gar überflüssig machen dürfen. So müssen Schüler in der Differentialrechnung z.B. den Konvergenzprozeß der Differenzenquotienten (etwa bei quadratischen Funktionen im Rahmen der Einführung oder später bei Exponentialfunktionen) ebenso wie z.B. den Vergrößerungsprozeß beim Funktionenmikroskop **selbst** durchdenken und geistig verarbeiten, und sie sollen jeweils damit beginnen, **bevor** Hilfsmittel eingesetzt werden. Rechner sollen hier nur punktuell eingesetzt werden, sie sollen entlasten, eine größere Vertrautheit mit dem Gegenstand schaffen und eine Konzentration auf das Wesentliche ermöglichen. Rechner können "eigentlich" auch gar nicht mehr leisten, denn sie können etwa den "richtigen" Konvergenzbegriff wegen ihrer Finitheit gar nicht adäquat wiedergeben.

5) Bisher habe ich kaum unterschieden zwischen einfachen Taschenrechnern, programmierbaren Taschenrechnern und Mikrocomputern. Das soll nun geschehen. Ich möchte zum einen betonen, daß bei fast allen Beispielen zum **numerischen Rechnen** bereits **einfache Taschenrechner** weitgehend **genügen,** daß Computer hierbei also entbehrlich sind. Und Taschenrechner sind dabei auch nicht einfach durch Computer zu ersetzen, da sie ein direktes Probieren mit unmittelbarer Rückmeldung gestatten (ganz abge-

sehen von schulorganisatorischen Schwierigkeiten beim Zugriff auf Computer). Wenn programmierbare Taschenrechner bzw. Computer zur Verfügung stehen, dann sehe ich in einigen Fällen eine natürliche und sinnvolle methodische **Stufung**: Zuerst einfache Taschenrechner, dann Computer bzw. programmierbare Taschenrechner; **Beispiel**:

- Studieren von Stabilisierungs-Phänomenen bei Folgen wie $(1+1/n)^n$ zuerst mit dem Taschenrechner, dann mit Programm und schließlich dynamisch auf dem Bildschirm.

Zum anderen eröffnen **Computer**, insbesondere bei **Visualisierungen**, weitergehende und z.T. ganz neue Möglichkeiten, **Phänomene** zu beobachten und zu analysieren. Natürlich sind Computer-Phänomene (z.T. mehrfach) **indirekte** Widerspiegelungen von Realitäten, man beobachtet z.B. aus **Simulationen** hervorgehende Graphen oder **ideelle** Vorgänge wie Grenzprozesse. Aber auch solche Phänomene können aufschlußreich und herausfordernd für Lernende sein und fruchtbare Denkprozesse initiieren (insbesondere bei "interaktivem" Gebrauch des Computers, d.h. im Wechselspiel zwischen Werkzeug und Benutzer).

6) Wenn Computer wie geschildert als Werkzeuge im Mathematikunterricht eingesetzt werden, so spielen **Programmier-Fertigkeiten** von Schülern m.E. nur eine vergleichsweise **untergeordnete** Rolle. Deshalb beteilige ich mich auch nicht an der Diskussion über geeignete Programmiersprachen. Natürlich weiß ich aus Erfahrung, daß durch gelungene Programmierungen bei Schülern (und nicht nur bei diesen) motivierende Erfolgserlebnisse erzeugt werden, die der Lehrer methodisch ausnutzen kann. Und selbstverständlich sind Programmier-Kenntnisse hilfreich, da auch die Umsetzung in Programme lehrreich sein und - etwa beim Arbeiten mit Unterprogrammen - zu einem noch besseren Verständnis der zugehörigen (z.B. rekursiven) Verfahren beitragen kann. Außerdem ist Programmieren in vielen FOSn explizites Thema des schwerpunktbezogenen Fachunterrichts.

Für die angestrebten Ziele das FOS-Analysisunterrichts (siehe 1.1) ist es beim numerischen Rechnen (also z.B. bei Nullstellenverfahren oder bei numerischer Integration) aber "nur" wesentlich, daß Schüler die **Algorithmen** durchschauen und aufstellen können. Dies sollte bis zu einer Form geschehen, in der die Algorithmen als noch umgangssprachliche, aber "programmiersprachennahe" Ablaufdiagramme formuliert sind ("Gib a,b,f ein; ..." ... "halbiere das Intervall; berechne ..." ...). Zur Ausführung genügen dann einfache Taschenrechner. Falls programmiert wird, so sind die zugehörigen Programme ja ohnehin nur wenige Zeilen lang (siehe etwa bei ENGEL 1977), und mehr braucht explizit gar nicht vorzukommen. Dabei genügt es dann durchaus, wenn Programme vom Lehrer oder besser von Schülern in nachmittäglicher Arbeit erstellt und dann in die Klasse eingebracht, analysiert und diskutiert werden. Außerdem werden spezielle Programmier-Kenntnisse ohnehin rasch veralten.

Der Computer kann, wenn ein Algorithmus prinzipiell klar ist, auch einfach als **"Black Box"** verwendet werden. Bei **symbolischer** und bei

Graphik-Software sollte auf jeden Fall eine Black-Box-Verwendung erfolgen. Ein adäquates Verständnis solcher Hilfsmittel kann und muß sich dann durch ihre Verwendung erschließen. Gute Software hierzu muß in nächster Zeit sorgfältig (d.h. ohne den Druck der Verlage) entwikkelt werden, und vorhandene (10) muß auf breiter Front zugänglich sein.

3.2. Curriculare Veränderungen des Analysisunterrichts durch Rechner

Bisher habe ich nur überlegt, wie der Analysisunterricht in der FOS, insbesondere der "herkömmliche", durch Rechner methodisch verbessert werden kann. Aber darin erschöpft sich die Bedeutung von Rechnern natürlich noch nicht. Denn wie stets hat das Vorhandensein leistungsfähiger Mittel auch Rückwirkungen auf Ziele und Inhalte.

Zuerst zu den **Zielen**: Wenn Rechner verwendet werden, so werden einerseits niedrige **Fertigkeiten** wie kalkülmäßiges numerisches, algebraisches oder analytisches Rechnen in ihrer Bedeutung **abgewertet**. Andererseits werden wünschbare **Haltungen** beim Problemlösen wie systematisches **Probieren** oder **Experimentieren** noch **wichtiger** als bisher. Dasselbe gilt für **Fähigkeiten** wie "Denken in Abläufen"; Beispiele dazu habe ich in Abschnitt 3.1 genannt. Ebenso werden die Fähigkeit, ein Problem vernünftig zu formulieren, sowie die Fähigkeit, erhaltene Ergebnisse im Ausgangsproblem zu interpretieren, wichtiger; **Beispiele** zu letzterem:

- Interpretation der Ergebnisse der Simulation eines elektrischen Schwingkreises,

- Interpretation von mittels Graphik-Software erzeugten Funktionsgraphen.

D.h. es findet eine partielle Verschiebung bei der Wertigkeit von angestrebten Qualifikationen (vgl. 1.1) statt.

Auch muß und kann nun stärker darauf geachtet werden, daß die Schülern zu vermittelnden "adäquaten Vorstellungen von grundlegenden Begriffen und Methoden der Analysis" auch den **numerischen** Aspekt angemessen miteinschließen, was in der bisherigen Schulanalysis sicher nicht ausreichend der Fall ist.

Weiter hat die Verfügbarkeit von Rechnern auch Konsequenzen für die **Inhalte**. Denn dadurch, daß praxis- und (entsprechend den Zielen aus Abschnitt 1.1) auch schulrelevante **diskrete Begriffe und numerische Verfahren** nun für die Schule besser zugänglich werden, erhöht sich die curriculare Bedeutung dieser Begriffe und Verfahren, der zugrundeliegenden **Ideen** sowie der damit erschließbaren Themen (siehe aber auch 3.3!). Dies gilt vor allem für

- numerische Algorithmen für Funktionsuntersuchungen und Integration,

- das Thema Folgen, insbesondere für den rekursiven Aspekt.

In diesem Zusammenhang werden auch Fragen der **Genauigkeit** von Algorithmen, z.B. der Approximationsgüte des Trapezverfahrens, oder der **Fehlerfortpflanzung** wichtiger (vgl. etwa BARDY 1982).

Ein weiterer wichtiger Punkt sind die in Kapitel 2 diskutierten **Anwendungen**. Aufgrund der Bedeutung von Rechnern in der Anwendungspraxis müssen im Unterricht u.a. auch solche Anwendungsbeispiele vorkommen, zu deren Behandlung in angemessenem Umfang **numerische Verfahren** erforderlich sind. Überhaupt hoffe ich, daß durch die vorhin beschriebenen Möglichkeiten der Entlastung durch Rechnereinsatz in Zukunft **mehr Zeit für Anwendungen** bleiben wird.

Auf der anderen Seite werden durch das Vorhandensein von Rechnern schulklassische formale **Routine-Kalküle** für die im Analysisunterricht anzustrebenden Ziele weniger wichtig. Dies gilt insbesondere für formales Differenzieren und Integrieren sowie für "innermathematische Anwendungen", d.h. für die analytische Untersuchung gegebener Funktionen auf Extrema oder Wendepunkte, für die Bestimmung von Funktionen aus gegebenen Daten, für Extremwertaufgaben, für Flächenberechnungen und für formale Integrationsverfahren wie Substitution und partielle Integration. Diese Kalküle nehmen oft den weitaus größten Teil des FOS-Analysisunterrichts ein. Selbstverständlich erfüllen solche Kalküle wichtige Aufgaben in der Schulpraxis, nämlich vor allem notwendiges Übungsmaterial bereitzustellen sowie Schülern kalkulierbare Erfolgserlebnisse zu vermitteln, insbesondere für Klassen- und Abschlußarbeiten. Eine deutliche Reduzierung dieser Routineaufgaben (und bei eventuellen weiteren Aufgaben dann auch die Verwendung von Computern mit fertiger Software) erscheint mir heutzutage aber geboten.

Die genannten curricularen Veränderungen müssen nun daraufhin überprüft werden, ob sie **realisierbar** sind, und zwar ohne Ausweitung der Stundenzahl. Folgende moderaten Änderungen halte ich (im Vergleich mit meinen Vorschlägen für die Fachoberschule aus den 70er Jahren; vgl. BLUM 1975) für sinnvoll und möglich (11):

* "Lokaler" Einbezug numerischer Verfahren und Ideen durch Ausweitung des Themas Funktionen sowie durch Anreicherung der Integralrechnung um insgesamt etwa 5 Stunden,

* Reduktion der Kalkülaufgaben aus Differential- und Integralrechnung um insgesamt etwa 10 Stunden,

* Anreicherung aller Stoffe durch zusätzliche reale Anwendungen in Umfang von etwa 5 Stunden.

3.3. Probleme, Gefahren und Grenzen einer Rechnernutzung im Analysisunterricht

Wie schon angekündigt muß die bisherige, recht "positiv" klingende Sichtweise der Rolle von Rechnern mit einigen weiteren Aspekten konfrontiert werden, die ebenfalls methodische und curriculare Konsequenzen haben müssen.

Zuerst einmal läßt sich ein Rechnereinsatz im Analysisunterricht der FOS nicht losgelöst betrachten von der **allgemeinen Problematik** möglicher Implikationen von Rechnern, insbesondere von Computern in der Schule. Ich nenne hier stellvertretend eine mögliche, durch Computer bedingte **indirekte Vermitteltheit** von Lernen oder die Unterstützung einer stark **instrumentell** ausgerichteten Denkweise. So besteht für den Analysisunterricht die **Gefahr,** daß das eigene Zeichnen von Graphen durch Schüler und die damit verbundene motorische, eigentätige Erschließung von Funktionen weitgehend ersetzt wird durch das bloße Erzeugen und Betrachten von Graphen auf dem Bildschirm; damit würden z.B. auch lehrreiche Fehler beim Selber-Zeichnen wegfallen. Eine entsprechende Gefahr liegt darin, daß reale, "handfeste" Anwendungsbeispiele wie etwa ein Schwingungsvorgang durch Computer-Simulationen ersetzt werden. Im Gegensatz dazu müssen weiterhin **konkrete Aktivitäten** wie Zeichnen von Graphen oder - sofern möglich - Umgehen mit realen Objekten selbstverständlich **vor** bzw. in der Regel **statt Computer-Aktivitäten** durchgeführt werden (12).

Ich halte es für sehr wichtig, daß Fragen wie diejenigen möglicher Reduzierungen von Realität und Aktivität durch Computer nicht nur vom Lehrer überlegt, sondern auch mit Schülern thematisiert werden. Dazu gehört auch, daß der methodische **Charakter** von Rechnern als (mächtiges, grundsätzlich aber eher nebensächliches) Hilfsmittel bewußt gemacht wird und daß **Grenzen** von Rechnern aufgezeigt werden; **Beispiel**: Numerische Rechner können prinzipiell nicht entscheiden, ob $\exp_b{}'0=\ln(b)$ gilt. Ebenso muß - wie schon in Abschnitt 3.1 gesagt - Schülern z.B. deutlich werden, daß Rechner prinzipiell nicht über Konvergenz bzw. Divergenz entscheiden können, etwa bei $\sum 1/n$ ($n=1\ldots\infty$), sondern daß hierzu theoretische Überlegungen nötig sind. Auf der anderen Seite bieten - wie ebenfalls schon gesagt - solche Grenzen von Rechnern und ein explizites Inbeziehungsetzen dessen, was Rechner und was Menschen (derzeit) "können", auch didaktische **Chancen,** indem Lernende zum Nachdenken über wesentliche mathematischen Fragen herausgefordert werden können.

Des weiteren muß mit Schülern auch offen darüber gesprochen werden, daß Taschenrechner und noch viel weitergehend Computer durch die damit verbundene Abwertung niedriger Fertigkeiten und die Möglichkeit einer stärkeren Konzentration auf anwendungsbezogenes Problemlösen den (Analysis-)Unterricht (noch) **anspruchsvoller** werden lassen. Allgemeiner muß auch der **Sinn** einer Nutzung von Rechnern im (Analysis-)Unterricht (und darüber hinaus) thematisiert werden (z.B. auch, welche verschiedenen Interessen beim Computer im Spiele sind). Insgesamt geht es also auch um einen Beitrag des Analysisunterrichts zur Entwicklung eines "**Metawissens**" von Schülern über Rechner und einer vernünftigen Einstellung hierzu.

In Ergänzung zu den Ausführungen in 3.2 muß der Stellenwert von diskreten Begriffen und von numerischen Algorithmen aus rein fachlichen Gründen relativiert werden; hierauf haben insbesondere RICHENHAGEN (1983) und WINKELMANN (1984) hingewiesen. Denn die zentralen "**kontinuierlichen**" Begriffe, Methoden und Resultate (z.B. der Ableitungsbegriff oder der Hauptsatz) sind weiterhin **unersetzlich** wichtig, vor allem

* zum Beschreiben und Bewältigen von Anwendungsbeispielen; so ist etwa

der Ableitungsbegriff weiterhin eine unentbehrliche, adäquate und wirkungsvolle Modellierung von Änderungsraten in realen Situationen;

* zur theoretischen Absicherung von Näherungsverfahren; so sind etwa Überlegungen über Gültigkeitsbereiche beim Newtonverfahren unabdingbar.

Zudem sind infinitesimale Begriffe und Resultate technisch einfacher und übersichtlicher als diskrete. Die Unersetzlichkeit der kontinuierlichen Analysis liegt demnach nicht an unreflektierten Gewohnheiten, sondern in der Natur dieser analytischen Gegenstände selbst, an ihrem idealisierten Charakter, an ihrer historischen Genese, an ihrer denkökonomischen Struktur. Insofern besteht die **Gefahr,** daß Lernende in einem "diskretisierten" Analysisunterricht (wie er mitunter für FOSn der Fachrichtung Wirtschaft vorgeschlagen wird) sich nicht mehr adäquate Grundvorstellungen aneignen können.

Auch aus weiteren Gründen ist **Vorsicht** vor allzu raschen curricularen oder methodischen Änderungen geboten. So besteht - wie bei allen schulischen Reformen - die Gefahr, daß einfach nur zusätzliche Inhalte, hier also vor allem numerische Verfahren oder auch Differentialgleichungen, ins Curriculum aufgenommen werden und die bestehende **Stoffülle** noch vergrößern (vgl. im Gegensatz dazu die Vorschläge aus 3.2). Dies hängt auch mit der Gefahr zusammen, daß Rechner - wie alle methodischen Hilfsmittel - überschätzt werden. Ebenso besteht - wie stets - die Gefahr, daß Schüler durch das Hilfsmittel Rechner dazu verleitet werden, intellektuellen Anstrengungen durch "**Spielen**" oder durch blindes **Manipulieren** aus dem Weg zu gehen; ein Beispiel (13) ist das "wilde Drauflosrechnen" von Näherungswerten für die Ableitung von $\exp_2$ an verschiedenen Stellen und das Nicht-Erkennen der einfachen Rückführbarkeit auf die Stelle 0. Dagegen sind methodische Hilfsmittel im allgemeinen dazu da, die Aneignung von Inhalten zu erleichtern, nicht aber dazu, dem Lernenden diese Aneignung abzunehmen (dies wäre prinzipiell zum Scheitern verurteilt), und sie sollen sich in ihrer methodischen Funktion mit der Zeit gewissermaßen selbst überflüssig machen.

Natürlich stellt auch der derzeitige **Kenntnisstand** der Lehrerschaft bzgl. Computern ein nicht zu vernachlässigendes Problem dar. Hier ist **Lehrerfortbildung** gefragt, allerdings nicht bloß in Form der verbreiteten "Programmierkurse", sondern vor allem bzgl. didaktischer und pädagogischer Fragen. Wesentlich sind dabei auch adäquate Einstellungen der Lehrer zu den "neuen Medien".

Zusammengefaßt: Bei der Verwendung von Rechnern im Analysisunterricht der FOS gibt es **Probleme,** die zu lösen sind, **Grenzen,** die zu beachten sind und die gleichzeitig neue Chancen eröffnen, und **Gefahren,** denen zu begegnen ist. Die genannten Gefahren sind in der Schulpraxis glücklicherweise noch nicht auf breiter Front wirklich eingetreten, da vor allem die Nutzung von Computern noch nicht sehr weit verbreitet ist. Meine Argumente sollen insgesamt nicht von einer Rechnernutzung abraten, sondern den Blick auf Aspekte lenken, die - wie jeweils beschrieben - unbedingt **methodische und curriculare Konsequenzen** für die Praxis des Analysisunterrichts haben müssen.

Anmerkungen

(1) Nach einer mir vorliegenden Synopse von K. APPELRATH (Mainz) aus dem Jahre 1986.
(2) Hierzu liegen vielfältige (auch eigene) Unterrichtserfahrungen vor.
(3) Es ist übrigens nicht schwer zu erkennen, welche Einkommensgruppen von dieser neuen Steuerreform profitieren werden.
(4) Entsprechende eigene Unterrichtserfahrungen aus der beruflichen Sek. II mit wirtschaftlichem Schwerpunkt liegen vor.
(5) Voraussichtlich 1989 wird beim Hessischen Institut für Lehrerfortbildung eine Sammlung von vollständig durchgerechneten Anwendungsbeispielen zum Mathematikunterricht an Fachoberschule und Beruflichem Gymnasium (BLUM/SCHEUERMANN/WAGNER/WELLER) erscheinen. Hier beschränke ich mich auf Stichworte.
(6) Adresse: MUED, Bahnhofstraße 72, D-4405 Appelhülsen.
(7) Vgl. den Aufsatz des Verfassers zum Thema Rechnereinsatz im Analysisunterricht, der 1989 im Journal für Mathematik-Didaktik erscheinen wird.
(8) Siehe z.B. ENGEL (1977), NEILL/SHUARD (1982), OTTO (1985) oder Schulbücher zur numerischen Mathematik.
(9) Entsprechende Untersuchungen laufen seit 1986 in Kassel; so werden zur Zeit mögliche Einflüsse von symbolischer Software wie µMath auf das Lernen und Lehren von Analysis ausgelotet.
(10) Ich kenne von engagierten FOS-Lehrern "selbstgestrickte" Graphik-Pakete, die weit besser sind als die kommerziell verfügbaren, bisher aber leider nur im kleinen Kreis zirkulieren.
(11) Die folgenden Stundenzahlen sind selbstverständlich nur dazu da, ungefähre Vorstellungen von der Größenordnung der vorgeschlagenen Änderungen zu vermitteln. Bezogen auf einen stärker kalkülmäßig orientierten Analysisunterricht müßten die Änderungen noch wesentlich deutlicher ausfallen, und zwar nicht bloß bezogen auf die im folgenden genannten Themen.
(12) An dieser Stelle ist eine Bemerkung nötig, die sinngemäß auch für weitere Stellen in diesem Abschnitt gilt: Wenn ich mögliche Gefahren von Rechnern aufzeige, so messe ich dies an meiner Analysiskonzeption (siehe Kap. 1), nicht an der tatsächlichen Schulpraxis. So kommen dort (nach meinen Kenntnissen) Schüler-Eigenaktivitäten beim Begründen oder beim Begriffsbilden oft zu kurz, und unabhängig von Fragen, die speziell das Medium Rechner betreffen, halte ich es für notwendig, diesbezügliche Verbesserungen vorzuschlagen. Dies ist aber nicht Thema der vorliegenden Arbeit.
(13) Ich habe dieses Beispiel kürzlich selbst so beobachtet; natürlich kann der Lehrer auch solches gedankenlose Rechnen zum Ausgangspunkt für weitergehende Fragen nehmen (hier z.B.: "Vergleicht die Ableitungswerte ... Was fällt auf? ...") und fruchtbar machen.

Literatur

BARDY, P.: Die numerischen Grenzen von Taschenrechnern. In: BARDY, P. (Hrsg.): Taschenrechner im Unterricht beruflicher Schulen, Freiburg, 1982. S.189ff.

BARDY, P.; BLUM, W. u.a.: Analysen von Lehrbüchern und Richtlinien zur Analysis in Fachoberschulen. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 10 (1978)1, S.1ff.
BLANKENAGEL, J.: Numerische Mathematik im Rahmen der Schulmathematik. Mannheim, 1985.
BLUM, W.: Ein Grundkurs in Analysis für die berufliche Oberstufe. In: Die berufsbildende Schule 27(1979)5, S.290ff.
BLUM, W.: Einkommensteuern als Thema des Analysisunterrichts in der beruflichen Oberstufe. In: Die berufsbildende Schule 30(1978)11, S.642ff.
BLUM, W.: Zum vereinfachten Grenzwertbegriff in der Differentialrechnung. In: Der Mathematikunterricht 25(1979)3, S.42ff.
BLUM, W.: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. In: Mathematische Semesterberichte 31(1985a)2, S.195ff.
BLUM, W.: Einige allgemeine Fragen des Analysisunterrichts am Beispiel der Ableitung der Exponentialfunktionen. In: Didaktik-Reihe d. Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (1985b), H.12, S.1ff.
BLUM, W.; KIRSCH, A.: Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. In: Der Mathematikunterricht 25(1979)3, S.6ff.
BLUM, W.; TOERNER, G.: Didaktik der Analysis. Göttingen, 1983.
BÖER, H.; VOLK, D.: Trassierung von Autobahnkreuzen - autogerecht oder ... Göttingen, 1982.
ENGEL, A.: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt. Stuttgart, 1977.
KAISER-MESSMER, G.: Anwendungen im Mathematikunterricht, Band 1 und 2. Bad Salzdetfurth, 1986.
KAISER, G.; BLUM, W.; SCHOBER, M.: Dokumentation ausgewählter Literatur zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht. Karlsruhe, 1982. (Nachtrag 1988).
KIRSCH, A.: Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: Der Mathematikunterricht 25(1979)3, S.25ff.
NEILL, H.; SHUARD, H.: Teaching Calculus. Glasgow, 1982.
OTTO, A.: Analysis mit dem Computer. Stuttgart, 1985.
RICHENHAGEN, G.: Numerisch vs. analytisch - Überlegungen zum epistemologischen Ort der Schulanalysis. In: mathematica didactica 6(1983)1, S.45ff.
WINKELMANN, B.: The impact of the computer on the teaching of analysis. In: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology 15(1984)6, S.675ff. (In deutsch: Occasional Paper 29, Institut für Didaktik der Mathematik, Bielefeld 1982).
