In: Mathematische Semesterberichte. Zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität. Begründet 1932 von H. Behnke und O. Toeplitz, Hrsg.: Kahle (u.a.), Band XXIX, Heft 1, 1982, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, S. 126-134

Stammfunktion als Flächeninhaltsfunktion – Ein anderer Beweis des Hauptsatzes

Von WERNER BLUM in Kassel

Arnold Kirsch zum 60. Geburtstag gewidmet

1. Fragestellung

Eine wesentliche Aussage des *Hauptsatzes* der Differential- und Integralrechnung ist die, daß jede auf einem Intervall stetige Funktion dort eine *Stammfunktion besitzt.* Während diese Existenz-Aussage mathematisch zentral ist, hat sie für die Schule nicht annähernd eine solche Bedeutung. Für Schüler, insbesondere in Grundkursen, ist nämlich in einem ersten Durchgang der Integralrechnung das Wesentliche des Hauptsatzes, daß jede Flächeninhaltsfunktion[1] einer stetigen Funktion eine Stammfunktion *ist* und daß sich somit Flächeninhalte[1] als Differenzen von Stammfunktionswerten *berechnen* lassen. Die Existenzfrage stellt sich schon deshalb nicht, weil für die schulrelevanten Funktionen aus der Differentialrechnung bereits Stammfunktionen bekannt sind[2].

Noch weniger spielen in der Schule Existenzfragen bei *Flächeninhalten* eine Rolle. Daß Flächen unter Graphen stetiger Funktionen einen Inhalt besitzen, der gewisse Eigenschaften erfüllt, ist - zumindest in einem ersten Durchgang - für

---

[1]Die Grundbegriffe der Integralrechnung werden hier und im folgenden *geometrisch* formuliert. Dies ist stets möglich, entspricht aber besonders gut der Konzeption von Kirsch [9].

[2]Dies gilt auch für $x \mapsto \frac{1}{x}$, wenn - wie etwa in [2] vorgeschlagen - Exponential- und Logarithmusfunktionen schon früh in der Differentialrechnung behandelt werden.

Schüler selbstverständlich (vgl. Kirsch [9, S. 96] sowie [3, S. 20]).

Es liegt nun nahe zu fragen, welche schulrelevanten *Vereinfachungen* bzw. *Alternativen beim Beweis* des Hauptsatzes sich dadurch ergeben, daß die *Existenz von Stammfunktionen* und die *Existenz von Flächeninhalten vorausgesetzt* werden. Die letztgenannte Existenz-Annahme ist für die Schule durchaus üblich und wird daher im folgenden ohne weitere Diskussion zugrunde gelegt; hieraus ergeben sich für uns keine neuen Gesichtspunkte. Dagegen gibt es kaum Vorschläge, die beim Beweis des Hauptsatzes die Existenz von Stammfunktionen stetiger Funktionen voraussetzen. Ein derartiger Beweis findet sich z. B. bei Wille [12, S. 194/195]. Dort wird zu gegebener Zerlegung von [a;b] in jedem Teilintervall der Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf eine (beliebige) Stammfunktion F der gegebenen, auf [a;b] stetigen Funktion f angewandt und sodann aufsummiert. Es resultiert $F(b)-F(a) = \Sigma f(\xi_k)\Delta x_k$, und Grenzübergang liefert das Gewünschte[3].

Im folgenden Abschnitt 2 wird ein anderer Beweis des - auch anders formulierten - Hauptsatzes unter den genannten Existenz-Voraussetzungen gegeben. Die *Grundidee* für diese Formulierung und für diesen Beweis rührt von Überlegungen zum Einsatz von *Integraphen* im Analysisunterricht her[4] (bzgl. Details siehe [1]). Ein Integraph ist vom Prinzip her ein *"Stammfunktions-Zeichner"*, d. h. ein Gerät, welches zu einer gegebenen stetigen Funktion die - im Anfangspunkt verschwindende - Stammfunktion zeichnet. Allgemeiner: Das Gerät zeichnet zu gegebener stückweise stetiger Funktion f

---

[3]Vgl. dazu auch [11, S. 77/78] sowie [3, S. 17].

[4]Diese Idee ist entstanden in der Arbeitsgruppe "Visualisierung" an der Gesamthochschule Kassel unter der Leitung von W. Metzler. Die Arbeitsgruppe beabsichtigt, hierüber in 1982 einen *Film* für den Analysisunterricht herzustellen.

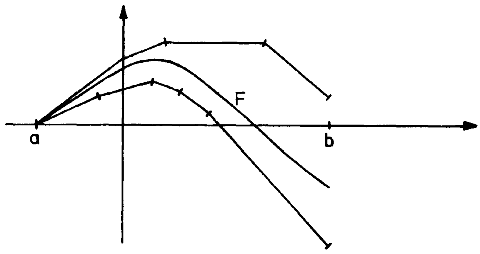
die - im Anfangspunkt verschwindende - stetige ("stückweise") Stammfunktion von f, d. h. die Funktion, die durch "lückenloses Aneinandersetzen" der entsprechenden Stammfunktionen der stetigen Teile von f entsteht.

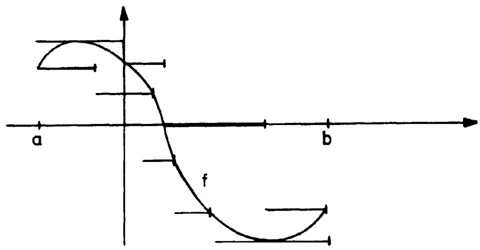
Die Voraussetzung der *stückweisen Stetigkeit* der gegebenen Funktion f ist dabei motiviert durch die Forderung, daß man beim Nachfahren des Graphen von f den Stift höchstens endlich oft mal vom Blatt absetzen will. Für den Kern des Beweises in Abschnitt 2 wird eigentlich nur benötigt, daß f *Regelfunktion* ist. Wir behalten jedoch in Abschnitt 2 die Voraussetzung der stückweisen Stetigkeit bei, da alle in der Schule vorkommenden Funktionen diese Eigenschaft besitzen.

Existenz von Stammfunktionen bedeutet offenbar dasselbe wie Existenz eines solchen Zeichen-Geräts, womit diese Frage für Lernende (wie auch für Anwender) geklärt ist. Der *Hauptsatz* besagt nun, daß ein solches Gerät den Namen "Integraph" mit Recht trägt, d. h., daß das Gerät "automatisch" als *"Flächeninhaltsfunktions-Zeichner"* wirkt. Genauer: *Die gezeichnete Stammfunktion ist stets die Flächeninhaltsfunktion der gegebenen Funktion.* Bei dieser Formulierung des Hauptsatzes tritt also nicht - wie bei den gängigen Formulierungen - der Begriff der Stammfunktion als hintangestellter Hilfsbegriff auf, mit welchem die Tatsache "Ableitung der Flächeninhaltsfunktion gleich Ausgangsfunktion" prägnant ausgedrückt wird, sondern werden umgekehrt den Flächeninhaltsfunktionen die Stammfunktionen "gleichberechtigt" vorangestellt.

Diese "Gleichberechtigung" zeigt sich auch beim *Beweis* des Hauptsatzes in Abschnitt 2. Dieser Beweis verwendet natürlich nicht den Hauptsatz in üblicher Fassung, sondern nur die "Anfangsgründe" der Analysis. Man überlegt dabei zuerst, daß die Aussage offenbar für *Treppenfunktionen* gilt. Eine gegebene Funktion wird nun durch Treppenfunktionen *approxi-*

miert[5], und die Behauptung *setzt* sich dann *fort* auf die approximierte Funktion. Dies ist der *Kern* des Beweises, den wir nun im folgenden Abschnitt darstellen. Dabei wird bewußt ein kaum formalisiertes Darstellungsniveau gewählt, um diesen (auch schulrelevanten) Kern deutlicher zu machen.





2. Beweis des Hauptsatzes

Vorausgesetzt wird zum einen die *Existenz* der auftretenden *Flächeninhalte*, wobei die üblichen *Eigenschaften* des Inhaltsbegriffs (insbesondere Monotonie) gelten[6]. Unter der *Flächeninhaltsfunktion* einer gegebenen stückweise stetigen Funktion f auf [a;b] verstehen wir wie üblich die Funktion, die jeder Stelle $x \in [a;b]$ den (orientierten) Inhalt der Fläche zwischen der Abszissenachse und dem Graphen von f in [a;x] zuordnet. Die Begriffe Flächeninhalt und Flächeninhaltsfunktion können - jedenfalls für schulische Zwecke - adäquat via Riemann-Integral präzisiert werden[7].

---

[5]Analog - und vielleicht schülergemäßer - könnte man *stückweise affinlineare Funktionen* statt Treppenfunktionen verwenden, d. h. den gegebenen Graphen durch Polygonzüge zwischen Graphenpunkten approximieren. Die Grundidee ("Fortsetzung") bleibt dieselbe; genaueres in [1].

[6]Vgl. dazu [10].

[7]Vgl. etwa [6a]; genauer genügt eine Anwendung des Riemannschen Integralbegriffs auf die Klasse der auftretenden Funktionen; vgl. etwa [12].

Zum anderen setzen wir die *Existenz* von *Stammfunktionen* zu den auftretenden Funktionen voraus[8]. Dabei heißt bekanntlich bei gegebener stückweise stetiger Funktion f auf [a;b] jede auf [a;b] stetige Funktion F, die in den Stetigkeitsintervallen von f differenzierbar ist mit Ableitung $F' = f$, eine *Stammfunktion*[9] von f. Stammfunktionen stückweise stetiger Funktionen sind bis auf Konstante eindeutig (Folgerung aus dem "Satz über Konstante"). Wir benutzen nachher die folgende

Monotonieeigenschaft: Seien f, g stückweise stetig auf [a;b] und seien F, G Stammfunktionen zu f, g. Es gelte $f < g$ auf [a;b] und $F(a) < G(a)$. Dann gilt $F < G$ auf [a;b].

Diese folgt aus dem Monotoniesatz, sukzessive angewandt in jedem gemeinsamen Stetigkeitsintervall zu f,g.

Die Behauptung lautet nun:

<u>Hauptsatz</u>. *Sei* f *auf* [a;b] *stückweise stetig. Dann ist die bei* a *verschwindende Stammfunktion von* f *die Flächeninhaltsfunktion zu* f *auf* [a;b].

Zum *Beweis* sei F die - nach Voraussetzung eindeutig existierende - Stammfunktion von f auf [a;b] mit $F(a) = 0$. Die - ebenso existierende - Flächeninhaltsfunktion zu f auf [a;b] sei I. Zu zeigen ist $F = I$.

1. Schritt. Ist $f \equiv m$ *konstant* auf [a;b], so gilt $F(x) = m\cdot(x-a)$. Elementargeometrisch ergibt sich $I(x) = m\cdot(x-a)$. Die Behauptung gilt demnach für konstante Funktionen.

---

[8]Bekanntlich besitzt jede Regelfunktion eine Stammfunktion, siehe z. B. [4, S. 60] oder [8, S. 245]; dort wird gerade die nachher durchgeführte Approximation zum Existenznachweis benutzt.

[9]Siehe z. B. [5, S. 166]; in [4, S. 56] "primitive Funktion".

2. Schritt. Ist f eine *Treppenfunktion*, so entsteht die stückweise lineare Funktion F genauso durch "stetiges Aneinanderstückeln" der linearen Teile wie die Funktion I. Wegen des 1. Schrittes muß deshalb F = I gelten.

3. Schritt. Ist f *stückweise stetig*, so approximieren wir f auf [a;b] durch untere und obere Treppenfunktionen $\underline{T}_n$, $\overline{T}_n$. Dies ist beliebig genau möglich (und zwar im Sinne gleichmäßiger Konvergenz $T_n \xrightarrow{n\to\infty} f$)[10].

Einerseits ist nun wegen der oben festgehaltenen Monotonieeigenschaft jede zu einer unteren Treppenfunktion gehörige, bei a verschwindende "untere Stammfunktion" $\underline{F}_n$ auf [a;b] kleiner oder gleich F, und ebenso ist jede "obere Stammfunktion" $\overline{F}_n$ größer oder gleich F. Die unteren und oberen Stammfunktionen approximieren die Funktion F beliebig gut (d. h. $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$)[11].

Andererseits ist wegen der Monotonie der Flächeninhalte jede zu einer unteren Treppenfunktion gehörige "untere Flächeninhaltsfunktion" $\underline{I}_n$ auf [a;b] kleiner oder gleich I, und ebenso ist jede "obere Flächeninhaltsfunktion" $\overline{I}_n$ größer oder gleich I. Die unteren und oberen Flächeninhaltsfunktionen approximieren die Funktion I beliebig gut (d. h. $I_n \xrightarrow{n\to\infty} I$)[12].

Nun gilt nach dem 2. Schritt $F_n = I_n$ für alle n. Dann muß aber (wegen der Eindeutigkeit der Grenzwerte) F = I sein!

Wir haben also gezeigt (die Monotonieargumente werden offenbar nicht explizit benötigt):

$$f = \lim_{n\to\infty} T_n \Longrightarrow F = \lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} I_n = I.$$

---

[10] Denn f ist Regelfunktion; vgl. etwa [12, S. 193].

[11] Vgl. etwa [4, S. 57/58].

[12] Vgl. etwa [6b, S. 681].

3. Einige didaktische Anmerkungen

Formulierung und Beweis des Hauptsatzes in der eben dargestellten Form werden wie gesagt im Zusammenhang mit dem Einsatz von *Integraphen* sofort nahegelegt (dies - und nicht die praktische Verwendung - ist sogar der wesentliche Grund für den schulischen Einsatz dieses Geräts: Der Integraph als "Hauptsatzmaschine"[13] ; vgl. [1]). Sie sind ohne diesen Kontext wohl schwer motivierbar. Bei detaillierter formaler Ausführung ist dieser Beweis erheblich schwieriger als die üblichen Beweise des Hauptsatzes, wie sie in allen Schulbüchern und in den meisten Hochschultexten zu finden sind. Der hier vorgestellte Beweis besitzt jedoch mehrere *didaktische Vorteile*. Zum einen kann die Idee von Schülern (durch Orientierung am Integraphen) *selbst* gefunden werden. Zum zweiten benötigt man hier im Unterschied zu den herkömmlichen Beweisen keine formale Ableitungsdefinition, sondern verwendet - und fördert - wesentlich geometrische *Grundvorstellungen* (vgl. dazu [3, S. 10/11 u. S. 14]). Zum dritten erlaubt dieser Beweis zahlreiche nicht-verfälschende *Vereinfachungen* (im Sinne von [3, S. 18]), die bestehen können

a) im bewußten *Weglassen* von Inhalten (neben den Existenzvoraussetzungen für Stammfunktionen bzw. Flächeninhalte z. B. die Voraussetzung der (stückweisen) Stetigkeit, die Eindeutigkeit von Stammfunktionen, die Existenz approximierender Treppenfunktionen oder die Monotonievoraussetzungen inklusive Vollständigkeit) wie auch

b) in der Wahl eines geeigneten *Formalisierungsniveaus* (z. B. die begriffliche Fassung der Stetigkeit oder der Approximation der gegebenen Funktion und der zugehörigen Stamm- bzw. Flächeninhaltsfunktion);

genaueres dazu in [1]. Diese Vereinfachungen lassen sich in

---

[13] Nach einer Idee von W. Metzler.

mehreren Stufen exaktifizieren. Die Voraussetzung der Existenz von Stammfunktionen kann entfallen, wenn man den formulierten Gültigkeitsbereich des Hauptsatzes auf diejenigen Funktionen beschränkt, von denen man schon Stammfunktionen kennt[14] .

Eine weitestgehend vereinfachte Fassung dieses Beweises für Grundkurse in der Oberstufe[15] kann so aussehen, daß alle eben beispielhaft genannten Inhalte tatsächlich weggelassen werden, daß alle Argumente nur ikonisch und verbal (sowie ggf. "enaktiv" am Integraphen) gegeben werden und von Konvergenz explizit gar nicht gesprochen wird.

Literatur

[1] BLUM, W.: Der Integraph im Analysisunterricht - Ein altes Gerät in neuer Verwendung. Zbl. Didakt. Math. 14, H. 1 (1982).

[2] BLUM, W., KIRSCH, A.: Elementare Behandlung der Exponentialfunktionen in der Differentialrechnung. Didakt. Math. 5, H. 4, 274-288 (1977).

[3] BLUM, W., KIRSCH, A.: Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. Math.-Unterr. 25, H. 3, 6-24 (1979).

[4] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématique IX, fonctions d'une variable réelle, Ch. 1-3. Hermann, Paris 1958.

[5] DIEUDONNÉ, J.: Grundzüge der modernen Analysis 1. Vieweg, Braunschweig 1975[2].

[6a,b] ENDL, K., LUH, W.: Analysis I/II. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt 1972/1973.

[7] GRIESEL, H.: Grundkurs Analysis - die Beschreibung des Ablaufs einer Curriculumentwicklung. Math.-Unterr. 22, H. 5, 25-46 (1976).

[8] GUNDLACH, K.-B.: Infinitesimalrechnung. Vieweg, Braunschweig 1973.

[9] KIRSCH, A.: Eine "intellektuell ehrliche" Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen. Didakt. Math. 4, H. 2, 87-105 (1976).

[14] Analog wie z. B. bei Griesel [7, S. 41], wo die Definition des Stammfunktionsintegrals auf solche Funktionen beschränkt wird, die Stammfunktionen besitzen.

[15] Eigene unterrichtliche Erfahrungen liegen vor; vgl. [1].

[10] KIRSCH, A.: Natürliche und formale Auffassung des Flächeninhalts. Praxis d. Math. 21, H. 3, 65-69 (1979).

[11] PICKERT, G.: Analysis in der Kollegstufe. Math.-Unterr. 22, H. 5, 64-81 (1976).

[12] WILLE, F.: Analysis. Teubner, Stuttgart 1976.