In: PM Praxis der Mathematik, Sekundarstufen 1 und 2, 36. Jahrgang, 1994,
Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln, S. 7-10

Elementare Behandlung des sogenannten Geburtstagsproblems

Werner Blum und Arnold Kirsch

1 Das Geburtstagsproblem[1)]

Eine bekannte, auch im Stochastikunterricht der Schule beliebte Aufgabe („Geburtstagsproblem") lautet:

Wie viele Menschen mindestens müssen zufällig zusammenkommen, damit ich darauf wetten kann (d. h. die Wahrscheinlichkeit größer als 0,5 ist), daß mindestens zwei davon am selben (Jahres-)Tag Geburtstag haben?

Die Lösung (wie üblich unter der Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der Geburtstage), daß bereits 23 Menschen genügen, ruft bekanntlich i. a. große Verwunderung hervor. Dementsprechend gibt es immer wieder Vorschläge, wie dieses scheinbar paradoxe Ergebnis („Geburtstagsparadoxon") inhaltlich erklärt oder „intuitiv aufgeklärt" werden kann, so z. B. von *Engel* [2, S. 50/51] oder jüngst sehr ausführlich von *Winter* [8, S. 34-40]. Beim Lösen des Problems sind immer verhältnismäßig *aufwendige Rechnungen* auszuführen, die zwar heutzutage dank TR oder PC ohne große Mühe zu bewältigen sind (vgl. z. B. *Biehler* [1, S. 176/177]), die aber doch *keine unmittelbare Einsicht* in den Sachverhalt geben. Gerade hier setzen wir ein, indem wir zwei inhaltlich einsehbare, auch für sich genommen nützliche und schulrelevante Grundideen heranziehen, die schon in der Sek. I leicht zugänglich sind. Hierdurch kann man das Ergebnis sogar im Kopf bestätigen. Weiter ist eine Verallgemeinerung von Aufgabe und Lösung leicht möglich.

2 Der bekannte Lösungsansatz

Bei n Personen berechnet sich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß *alle* an *verschiedenen* Tagen Geburtstag haben, bekanntlich (mittels Baum oder auch rein kombinatorisch) zu

$$(1)\quad p_n = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-n+1}{365}$$

$$= 1 \cdot \left(1-\frac{1}{365}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{365}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{n-1}{365}\right).$$

Mit einem Taschenrechner kann man nun (mit etwas Mühe) *ausrechnen*: Es gilt $p_{22} \approx 0{,}524$ und $p_{23} \approx 0{,}493$, also $p_n < 0{,}5$

1) Wir danken Herrn *T. Jahnke* (Siegen/Kassel) für anregende Diskussionen.

für $n \geq 23$, und p_{23} liegt am dichtesten bei 0,5. Die übliche, routinemäßige Behandlung des Geburtstagsproblems in der Schule wird hiermit wohl abgeschlossen sein. Sie sollte und dürfte aber bei manchen ein Gefühl der Unzufriedenheit hinterlassen und damit den Wunsch, dieses Ergebnis auf Grundlage des Ansatzes (1) nicht nur auszurechnen, sondern auch zu *verstehen*.

Schon ohne Rechnung ist klar, daß die p_n mit wachsendem n kleiner werden. Offensichtlich fehlt nun den meisten Menschen (Kindern wie Erwachsenen) die Fähigkeit, darüber hinaus den Wert dieses Produkts für verschiedene n richtig einzuschätzen, mit anderen Worten: Es fehlt ein Gefühl (eine „numerische Intuition") dafür, in welcher Weise die p_n abnehmen und wie schnell sie den Wert 0,5 erreichen. Wir meinen, daß dieses Fehlen einer angemessenen Vorstellung vom Verhalten der p_n ein ganz wesentlicher Grund ist, weshalb das – nach blinder Rechnung erhaltene – Ergebnis $p_{23} < 0,5$ so überraschend, ja kontraintuitiv und paradox wirkt. Man könnte sogar noch schärfer formulieren: Der eigentliche *Kern* der Schwierigkeiten beim Verstehen des Geburtstagsproblems nebst Lösung ist *numerischer* Natur.

Wir versuchen in dieser Arbeit eine elementare Aufklärung des Verhaltens der p_n. Dazu vergegenwärtigen wir uns im ersten Anlauf nur den rekursiven Aufbau dieser Folge:

$$p_{n+1} = p_n \cdot \left(1 - \frac{n}{365}\right).$$

D. h. haben bereits n Personen paarweise verschiedene Geburtstage und kommt eine weitere Person hinzu, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß auch in der vergrößerten Gruppe alle Geburtstage verschieden sind, um $n \cdot \frac{100}{365}$ % geringer als vorher. Die Wahrscheinlichkeiten p_n nehmen also mit *linear ansteigenden Raten* ab. Insofern ist – wiederum ohne Rechnung – klar, daß die p_n in einer Weise abnehmen, die qualitativ durch Fig. 1 beschrieben wird (Eine ähnliche Überlegung wird von *H. Winter* in [9, S. 166 f] für das Geburtstagsmonatsproblem angestellt):

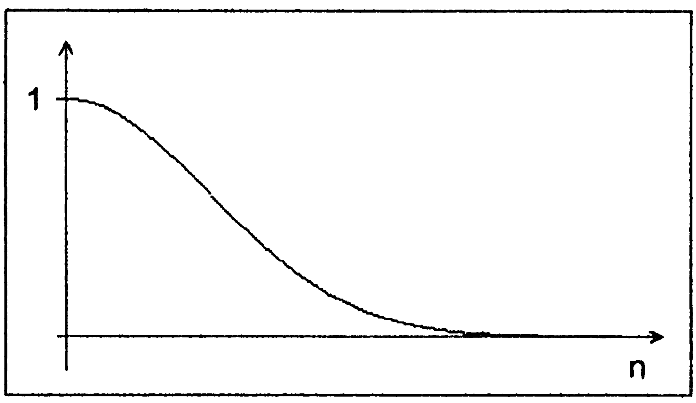

Fig. 1

Nach den ersten Schritten wird es bei weiter wachsender Personenzahl n sehr rasch immer unwahrscheinlicher, einen noch nicht vorhandenen Geburtstag zu finden, und erst, wenn ihre Werte schon recht klein sind, stabilisieren sich die p_n gegen 0. Allerdings ist die Größenordnung derjenigen Anzahl n, ab der man auf mindestens zwei identische Geburtstage wetten kann, noch unklar.

Ziel der folgenden Abschnitte ist es, das Verhalten der p_n auch quantitativ auf elementare Weise zu verstehen. Dazu bestätigen wir zuerst (in Abschnitt **3**) das spezielle Ergebnis $p_{23} \approx 0,5$ durch einfache Kopfrechnung. Sodann zeigen wir (in Abschnitt **4**), wie die ursprüngliche Aufgabe, die zunächst noch unbekannte Zahl n zu bestimmen, für die $p_n \approx 0,5$ gilt, durch dieselben elementaren Überlegungen sowie einfache Rechnungen gelöst werden kann. Nach einer Verallgemeinerung (in Abschnitt **5**) leiten wir schließlich (in Abschnitt **6**) eine Näherungsformel für die p_n her. Diese zeigt, daß die p_n wie e^{-n^2} abnehmen, was unsere obigen Aussagen unterstützt.

3 Bestätigung des Ergebnisses $n = 23$

Für $n = 23$ besteht das Produkt in (1) aus 23 Faktoren derselben Größenordnung:

$$p_{23} = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{343}{365}.$$

Es läßt sich näherungsweise durch ein Produkt aus ebensovielen, lauter gleichen Faktoren ersetzen, und zwar durch die 23. Potenz des Mittelwerts der Faktoren:

$$p_{23} \approx \left(\frac{354}{365}\right)^{23}.$$

Dies ist die *erste Grundidee*, die wir hier verwenden. Sie kann anhand von Beispielen schon in der Sek. I erarbeitet werden. (Zur Begründung und Präzisierung der hier verwendeten Näherungsformel siehe *Kirsch* [5] [2]).

Hieraus erhält man mit einem Taschenrechner jetzt unmittelbar $p_{23} \approx 0,495$. Um das Ergebnis $p_{23} \approx 0,5$ vollends im Kopf bestätigen zu können, beachte man nun, daß recht genau gilt

$$\frac{354}{365} = 1 - \frac{11}{365} \approx 1 - \frac{3}{100} \quad \text{(denn } 1100 = 365 \cdot 3 + 5\text{), also}$$

$$p_{23} \approx \left(1 - \frac{3}{100}\right)^{23}.$$

Hier wird nun die *zweite Grundidee* verwendet: Bei einem exponentiellen Abnahmeprozeß, bei dem der Abnahmefaktor pro Zeitschritt $\left(1 - \frac{r}{100}\right)$ beträgt ($r > 0$), gilt für die Halbwertszeit h (d. h. für die Anzahl der Zeitschritte, nach denen der Anfangswert auf die Hälfte zurückgegangen ist) bekanntlich die Regel $r \cdot h \approx 70$, sofern r „nicht zu groß" ist; anders ausgedrückt:

$$(2) \quad \left(1 - \frac{r}{100}\right)^{70/r} \approx 0,5 \quad \text{für kleines } r.$$

Diese Regel ist gleichwertig mit der entsprechenden Verdopplungsregel $r \cdot d \approx 70$ (bzw. $\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{70/r} \approx 2$) für exponentielle Wachstumsprozesse, die z. B. aus dem Buch „Die Grenzen des Wachstums" von *D. Meadows* u. a. [6] (oder auch aus *D. Meadows* u. a. [7]) bekannt ist. Beide Regeln können leicht (und sollten) bereits in der Sek. I anhand von Beispielrechnungen erarbeitet werden (vgl. *Kirsch* [4]). Eine Begründung und Präzisierung ist bekanntlich unter Verwendung von einer der Näherungsgleichungen $\left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^n \approx e^{\pm 1}$ (für große n) oder $e^x \approx 1 + x$ bzw. $\ln(1 + x) \approx x$ (für kleine $|x|$) und von $\ln 2 \approx 0,7$ einfach möglich [3]).

Mit $r = 3$ folgt aus (2) wegen $\frac{70}{3} \approx 23$ sofort $\left(1 - \frac{3}{100}\right)^{23} \approx 0,5$ und damit $p_{23} \approx 0,5$, womit das Ergebnis bestätigt ist.

2) Hiernach muß der vorstehende Näherungswert um etwa 0,4 % zu groß sein.

Zusammenfassend kann man also *im Kopf* ausrechnen:

$$p_{23} = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{343}{365} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1. Idee}}}{\approx} \left(\frac{354}{365}\right)^{23} \approx \left(1 - \frac{3}{100}\right)^{23} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2. Idee}}}{\approx} 0,5.$$

4 Herleitung des Ergebnisses $n = 23$

Wir wenden die *erste Idee* von vorhin auf (1) an und erhalten allgemein

$$(3)\quad p_n \approx \left(1 - \frac{n-1}{2 \cdot 365}\right)^n.$$

Im Sinne der Überlegungen aus Abschnitt **2** bedeutet dies: Wir ersetzen für festes n die linear ansteigenden Abnahmeraten 0 %, $\frac{100}{365}$ %, $2 \cdot \frac{100}{365}$ %, ..., $(n-1) \cdot \frac{100}{365}$ % durch die *mittlere* Abnahmerate $r\,\% = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{100}{365}$ %. Dies ist legitim, so lange die Abnahme-Faktoren $1 - \frac{k}{365}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ von derselben Größenordnung sind, was bei nicht zu großem n ja gewährleistet ist. Inhaltlich heißt dies: Wir ersetzen das tatsächliche Zufallsexperiment (Geburtstags-Befragung bei n Personen) durch ein n-stufiges Experiment mit *konstanter* Erfolgswahrscheinlichkeit $q = 1 - \frac{n-1}{730}$.

Nun *variieren* wir n und stellen die *Frage*: Für welches n wird $\left(1 - \frac{n-1}{2 \cdot 365}\right)^n \approx 0,5$?

Hier ist also nicht nur nach verschiedenen Potenzen einer festen Basis gefragt, vielmehr variieren Basis $q = 1 - \frac{n-1}{730}$ (mittlere Wahrscheinlichkeit bei n Personen) und Exponent n gleichzeitig. Die *zweite Idee* von vorhin hilft wieder weiter. Wir wenden sie auf $\frac{r}{100} = \frac{n-1}{2 \cdot 365}$ an und erhalten als Bedingung für (nicht zu großes) n:

$$\frac{100(n-1)}{2 \cdot 365} \cdot n \approx 70, \quad \text{d. h.} \quad (n-1) \cdot n \approx \frac{70}{50} \cdot 365.$$

Beachten wir schließlich, daß für „nicht zu kleines" n gesetzt werden kann [4]): $(n-1) \cdot n \approx n^2$, so liefert dies die *Antwort* $n^2 \approx 1{,}4 \cdot 365$, d. h.

$$(4)\quad n \approx 1,2 \cdot \sqrt{365} \approx 23.$$

Man kann diese letzte algebraische Argumentation natürlich vermeiden, indem man einfach (im Kopf) nachprüft, wann das Produkt $(n-1) \cdot n$ ungefähr gleich $1{,}4 \cdot 365$, d. h. 511 ist:
$21 \cdot 22 = 462$, $22 \cdot 23 = 506$, $23 \cdot 24 = 552$. Dies ist also für $n = 23$ der Fall.

3) Z. B. folgert man aus $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \approx \frac{1}{e}$ (für großes n) zuerst $\left(1 - \frac{r}{100}\right)^{100/r} \approx \frac{1}{e}$ (für kleine r) und weiter durch Potenzieren mit $\ln 2 \approx 0{,}7$ dann $\left(1 - \frac{r}{100}\right)^{70/r} \approx \frac{1}{e^{0,7}} \approx \frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}$.
Vorstehende Aussagen gelten auch mit „<" statt „≈". Sie zeigen damit, daß der erhaltene Exponent $70/r$ etwas zu groß ist.

4) Eigentlich sollte man (nach unserer ersten Idee) $(n-1) \cdot n \approx \left(n - \frac{1}{2}\right)^2$ setzen. Es zeigt sich aber, daß der einfachere Ansatz mit n^2 letztlich sogar bessere Ergebnisse liefert, weil hiermit die in Fußnote 3 erwähnte Ungenauigkeit zum Teil kompensiert wird.

Ergänzung: Die *Linearisierung* $(1 - a)^n \approx 1 - n \cdot a$ (für kleines $a > 0$) liefert aus (3) sofort

$$p_n \approx 1 - \frac{n(n-1)}{2 \cdot 365},$$

woraus wie eben die – allerdings sehr grobe – Aussage $p_n \approx 0{,}5$ für $n \approx \sqrt{365} \approx 19$ folgt. Vor allem aber zeigt sich, daß $1 - p_n$ (die Wahrscheinlichkeit, daß von n Personen mindestens zwei am *selben* Tag Geburtstag haben) am Anfang ungefähr quadratisch wächst [5]).

Übrigens kommt man offenbar zur selben groben Näherung für p_n, wenn man für festes n einfach die eingangs erwähnten n Abnahmeraten $k \cdot \frac{100}{365}$ % (bzw., was natürlich äquivalent ist, n-mal die mittlere Rate) *subtrahiert.* Inhaltlich bedeutet dies, daß man einfach die Gegenwahrscheinlichkeiten $\frac{k}{365}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ *addiert.* Beides ist nur für sehr kleines n sinnvoll.

5 Verallgemeinerung

Es gibt zahlreiche andere Einkleidungen des Geburtstagsproblems (vgl. etwa [8, S. 40]). Ganz allgemein kann man formulieren:

Es werden n Gegenstände zufällig auf m gegebene Plätze verteilt $(n < m)$. Wie groß muß n mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens zwei Gegenstände auf demselben Platz liegen, größer als 0,5 ist?

Bezeichnet wieder p_n die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle n Gegenstände auf *verschiedenen* Plätzen liegen, so liefern dieselben Überlegungen wie eben offenbar sogleich als Bedingung für $p_n \approx 0{,}5$:

$$(5)\quad n \approx 1,2 \cdot \sqrt{m}.$$

Damit hat sich mit elementaren Mitteln eine Näherungsformel ergeben, die sogar noch genauer ist als die von *Winter* [8, S. 40] in Anlehnung an *Feller* [3] unter Verwendung von „etwas Algebra und Analysis" hergeleitete Faustformel $n \approx \sqrt{m}$. Eine numerische Nachprüfung zeigt, daß Formel (5) geradezu „unverdient" genau ist [6]); siehe Tabelle 2 im Anhang.

6 Eine Näherungsformel für die p_n

Die vorangehenden Überlegungen (abgesehen von der Ergänzung am Ende von Abschnitt **4**) beantworten immer nur die spezielle Frage nach der Anzahl n der Personen mit $p_n \approx 0{,}5$, nicht jedoch die ebenfalls durchaus naheliegende Frage nach Anzahlen n, die zu anderen vorgegebenen Werten p für die Wahrscheinlichkeit p_n gehören. Auch hierfür läßt sich – allerdings unter Verwendung von Kenntnissen, die nicht mehr ganz so elementar sind und über die Sek. I hinausgehen – leicht eine (zu (4) bzw. (5) analoge) Näherungsformel angeben.

Wegen $1 - x \approx e^{-x}$ für kleine $x > 0$ hat man nach (3) zunächst

$$p_n \approx e^{-\frac{n-1}{2 \cdot 365} n} \quad \text{für kleine } n.$$

Dies ergibt (wiederum bei nicht zu kleinem n)

5) Diese Hinweise verdanken wir Herrn *T. Jahnke*.

6) Dies hat man wieder einer glücklichen Kompensation verschieden gerichteter Rundungsfehler zu verdanken.

(6) $p_n \approx e^{-\frac{n^2}{2\cdot 365}}$.

Auflösung nach n liefert für $p_n = p$ schließlich

(7) $n \approx \sqrt{-2\cdot 365\cdot \ln p} = \sqrt{2\cdot 365\cdot \ln(1/p)}$.

Aus (6) ist die Art des Abnehmens der p_n ablesbar, und (7) macht zeitraubende Taschenrechner-Rechnungen zur Bestimmung der Anzahl n bei vorgegebener Wahrscheinlichkeit p entbehrlich. Aus (7) folgt übrigens erneut, daß p_n » 0,5 ist für $n \approx \sqrt{2\cdot 365\cdot \ln 2} \approx 23$.

Verallgemeinerung zu m statt 365 wie in Abschnitt **5** liefert zum einen $p_n \approx e^{-\frac{n^2}{2m}}$ und zum anderen $n \approx \sqrt{2m\cdot \ln(1/p)}$ (dies ist die bei *Winter* [8, S. 40] angegebene Formel); insbesondere wird nochmals Ergebnis (5) bestätigt.

Unsere zum Teil recht großzügig vorgenommenen Näherungen dürften den Wunsch nach einer numerischen Nachprüfung nahelegen. Eine solche führt für m = 365 zur folgenden Tabelle 1 (Dezimalzahlen auf 3 Stellen gerundet):

n	p_n	p_n nach (6)
1	1	0,999
⋮	⋮	⋮
10	0,883	0,872
⋮	⋮	⋮
20	0,589	0,578
.	.	.
22	0,524	0,515
23	0,493	0,484
⋮	⋮	⋮
30	0,294	0,291
⋮	⋮	⋮
33	0,225	0,225
⋮	⋮	⋮
40	0,109	0,112
⋮	⋮	⋮
50	0,030	0,033

Tabelle 1

Die Übereinstimmung ist wiederum erstaunlich gut. Dies erklärt sich z. T. daraus, daß die beiden ersten Umformungsschritte (von p_n zu $\left(1-\frac{n-1}{2m}\right)^n$ und weiter zu $e^{-\frac{n-1}{2m}m}$) Vergrößerunger bewirken, der letzte Schritt (zu $e^{-\frac{n^2}{2m}}$) aber eine Verkleinerung bewirkt; siehe Tabelle 3 im Anhang.

Abschließend sei noch betont, daß wir sämtliche angegebenen Näherungsaussagen im Verlauf unserer Beschäftigung mit dem Geburtstagsproblem *unmittelbar* gewonnen haben, und daß wir gerade diese Möglichkeit für wesentlich halten im Hinblick auf das Ziel, den Sachverhalt schon in der Sek. I klarzumachen. Der *nachträglich* gewonnene Zugang durch Vereinfachung einer genaueren numerischen Untersuchung (wie in den Fußnoten und im Anhang skizziert) erscheint uns demgegenüber als von untergeordneter Bedeutung.

Literatur

[1] *Biehler, R.:* Computers in Probability Education. In: Chance Encounters: Probability in Education (Hrsg.: R. Kapadia/M. Borovcnik). Kluwer, Dordrecht 1991, S. 169-211.

[2] *Engel, A.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 1. Klett, Stuttgart 1973.

[3] *Feller, W.:* An Introduction to Probability Theory and its Applications. Wiley, New York 1968.

[4] *Kirsch, A.*: Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht. In: Didaktik der Mathematik **4** (1976), H. 4, S. 257-284.

[5] *Kirsch, A.:* Eine plausible und nützliche Näherungsformel für Produkte. **PM 36** (1994) 15f.

[6] *Meadows, D.* u. a.: Die Grenzen des Wachstums, Rowohlt, Hamburg 1973.

[7] *Meadows, D.* u. a.: Die neuen Grenzen des Wachstums. DVA, Stuttgart 1992.

[8] *Winter, H.:* Zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien. In: Journal für Mathematik-Didaktik **13**, H. 1, S. 23-52.

[9] *Winter, H.:* Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Vieweg, Braunschweig 1989.

Anhang

Überprüfung von Formel (5):

m	p_{n-1} ; p_n nahe 0,5 (auf 3 Stellen; unterstrichen: dichter bei 0,5)	$n-1$; n	$1{,}2\cdot\sqrt{m}$ (auf 1 Stelle)
50	0,554 ; $\underline{0{,}465}$	8 ; $\underline{9}$	8,5
100	$\underline{0{,}503}$; 0,443	$\underline{12}$; 13	12,0
150	0,535 ; $\underline{0{,}485}$	14 ; $\underline{15}$	14,7
200	0,540 ; $\underline{0{,}497}$	16 ; $\underline{17}$	17,0
250	0,534 ; $\underline{0{,}496}$	18 ; $\underline{19}$	19,0
300	0,523 ; $\underline{0{,}488}$	20 ; $\underline{21}$	20,8
350	$\underline{0{,}510}$; 0,478	$\underline{22}$; 23	22,4
365	0,524 ; $\underline{0{,}493}$	22 ; $\underline{23}$	22,9
400	0,525 ; $\underline{0{,}497}$	23 ; $\underline{24}$	24,0
450	$\underline{0{,}507}$; 0,479	$\underline{25}$; 26	25,5
500	0,516 ; $\underline{0{,}489}$	26 ; $\underline{27}$	26,8
550	0,523 ; $\underline{0{,}497}$	27 ; $\underline{28}$	28,1
600	$\underline{0{,}503}$; 0,478	$\underline{29}$; 30	29,4
650	$\underline{0{,}507}$; 0,483	$\underline{30}$; 31	30,6
700	$\underline{0{,}510}$; 0,487	$\underline{31}$; 32	31,7
750	0,511 ; $\underline{0{,}489}$	32 ; $\underline{33}$	32,9
800	0,512 ; $\underline{0{,}491}$	33 ; $\underline{34}$	33,9
850	0,512 ; $\underline{0{,}492}$	34 ; $\underline{35}$	35,0
900	0,512 ; $\underline{0{,}492}$	35 ; $\underline{36}$	36,0
950	0,511 ; $\underline{0{,}492}$	36 ; $\underline{37}$	37,0
1000	0,510 ; $\underline{0{,}491}$	37 ; $\underline{38}$	37,9

Tabelle 2

Vergleich der einzelnen Schritte zur Formel (6) (alle Zahlen auf 5 Stellen gerundet):

n	p_n	$\left(1-\frac{n-1}{730}\right)^n$	$e^{-\frac{n-1}{730}n}$	$e^{-\frac{n^2}{730}}$
10	0,88305	0,88333	0,88401	0,87198
20	0,58856	0,59011	0,59419	0,57814
23	0,49270	0,49470	0,50000	0,48449
30	0,29368	0,29638	0,30368	0,29145
33	0,22503	0,22781	0,23538	0,22497
40	0,10877	0,11123	0,11801	0,11172
50	0,02963	0,03099	0,03487	0,03256
60	0,00588	0,00637	0,00783	0,00722

Tabelle 3

Anschrift der Verfasser:

Werner Blum und Arnold Kirsch, Universität Gesamthochschule Kassel. FB Mathematik/Informatik, 34109 Kassel