

# Zum vereinfachten Grenzwertbegriff in der Differentialrechnung

von Werner Blum

## Inhalt

1. Methodische Hilfen zur gestuften Entwicklung des Grenzwertbegriffs
  2. Beispiel für eine Lernsequenz zum Einstieg in die Differentialrechnung
  3. Möglichkeiten zur weiteren Präzisierung des Grenzwertbegriffs
- Literatur

## 1. Methodische Hilfen zur gestuften Entwicklung des Grenzwertbegriffs

Wie in Abschnitt 3 des einleitenden Aufsatzes erläutert, steht am Anfang der Differentialrechnung das Problem des Bestimmens einer lokalen Änderungsrate (z. B. Momentangeschwindigkeit, Stromstärke oder auch Graphensteigung) zu gegebener (meist) quadratischer Funktion  $f$  und gegebener Stelle  $a$ . Dies geschieht durch immer bessere Approximation dieser gesuchten Zahl durch mittlere Änderungsraten  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  für  $x \neq a$  (oder  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  für  $h \neq 0$ ) in einer kleinen Umgebung von  $a$ . Die erste Stufe bei der Entwicklung des Grenzwertbegriffs ist also die

### *Berechnung und tabellarische Erfassung von Differenzenquotienten*

**Beispiel:**  $f(x) = \frac{2}{3}x^2$ ,  $a = 1$

$x$	1,5	0,5	1,1	...	1,0001	...	$(x \neq 1)$
$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$	1,666 ...	1	1,4	...	1,3334	...	

(oder entsprechend für  $h \neq 0$ )

**Vermutung:** Die gesuchte Zahl ist 1,333 ...

Hier kann auch der Taschenrechner eingesetzt werden.

Wie ebenfalls schon in Abschnitt 3 des einleitenden Aufsatzes gesagt, ist es günstig, Änderungsraten am Graphen von  $f$  zu deuten:

*Graphische Veranschaulichung von Differenzenquotienten*

Im Beispiel:

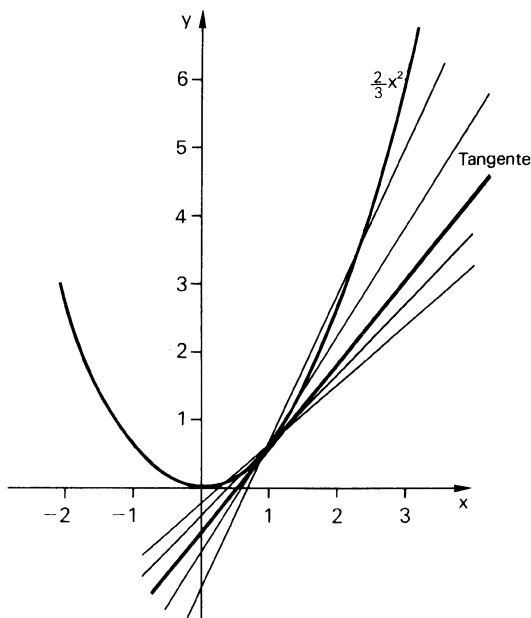


Abb. 1

Von „Differenzenquotient“ bzw. „Ableitung“ sollte man übrigens frühestens dann reden, wenn mehrere Interpretationen (z. B. Durchschnitts- bzw. Momentangeschwindigkeit und Sekanten- bzw. Tangentensteigung) bekannt sind.

Von Beginn der Differentialrechnung an ist es wichtig, daß sämtliche Berechnungen, Veranschaulichungen und Überlegungen unterstützt werden durch

*Verbale Fassungen für die Konvergenz der Differenzenquotienten*

Im Beispiel: „Für  $x$  gegen 1 strebt  $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  gegen 1,333 . . . .“ oder „Wenn  $x$  immer dichter an 1 heranrückt, dann kommt  $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  immer näher an 1,333 . . . . heran“ oder „Für genügend kleines  $x - 1$  nähert  $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  die Zahl 1,333 . . . beliebig gut an“ oder „Bei beliebig vorgegebener Fehlerschranke unterscheidet sich  $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  von 1,333 . . . um weniger als diese Schranke, falls nur  $x - 1$  genügend klein ist“ o. ä. (oder entsprechend mit  $h$ ).

Wichtig ist hierbei nur, daß die verwendeten verbalen Fassungen für später nichts verbauen (vgl. *Jahner* [5]). Dies ist bei Formulierungen wie „ . . . immer näher . . . “ erfahrungsgemäß gewährleistet, da diese vom Schüler i.a. nicht nur als Monotonieaussagen aufgefaßt werden, sondern bereits das „ . . . beliebig nahe . . . “ beinhalten.

Problematisch sind jedoch Formulierungen wie „... kommt  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  immer näher an die Zahl  $m$  heran, ohne sie jemals zu erreichen“. Bei „Wenn ... für den Wert der Differenz ...  $[x - a]$  eine Zahl gewählt wird, die kleiner gemacht werden kann als eine zwar beliebige aber bestimmte, wenn auch noch so kleine Zahl, dann nimmt die Sekante ... eine Position ein, die praktisch nicht mehr von der Tangente ... zu unterscheiden ist“ ([2, S. 46]) ist die Grenze zur Verfälschung überschritten.

Von Anfang an wird für dieses „Streben gegen“ das Zeichen  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  (oder  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ ) eingeführt und benutzt. Der Lernende soll hiermit zweierlei verbinden: Einerseits „ $\lim_{x \rightarrow a}$  ...“ als eine *Rechenanweisung*, die gesuchte Ableitung (Tangentensteigung, lokale Änderungsrate) immer genauer durch Differenzenquotienten (Sekantensteigungen, mittlere Änderungsraten) zu approximieren, andererseits  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  als ein *Name* für das Resultat dieses Approximationsprozesses, d. h. die gesuchte Zahl. Auftretende Existenzprobleme sind mit einer adäquaten Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff lösbar (siehe Abschnitt 3 im einleitenden Aufsatz).

Ein mögliches methodisches Hilfsmittel ist die graphische Veranschaulichung der berechneten und tabellarisch erfaßten Differenzenquotienten (vgl. *Griesel* [4]), d. h. die

#### Lokale graphische Darstellung von Differenzenquotienten

Im Beispiel:

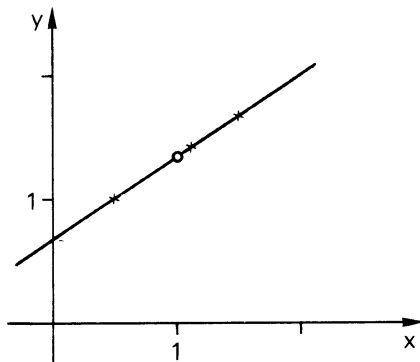


Abb. 2

(oder entsprechend mit  $h$ ). Daß die Punkte alle auf einer Geraden liegen, ist eine nicht selbstverständliche Entdeckung, falls es sich um das Einstiegsbeispiel handelt und Differenzenquotienten noch nicht algebraisch berechnet worden sind. Diese Tatsache ist jedoch nicht unproblematisch, da die Gefahr besteht, daß der Schüler diesen Graphen mit dem Graphen der (ebenfalls affin-linearen) Ableitungsfunktion oder gar mit der Tangente verwechselt.

Diese Veranschaulichung ist sehr suggestiv, da der Punkt  $(a | m)$  – wobei  $m$  die gesuchte Zahl ist – genau die Lücke im Graphen von  $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  „stopft“.

Dabei braucht nicht von der „Differenzenquotientenfunktion“ gesprochen zu werden. Trotzdem besteht die eben genannte Gefahr der Verwechslung von Differenzenquotienten- und Ableitungsfunktion bei sämtlichen Beispielen. Daher setzen wir – anders als *Griesel* [4] – die graphische Darstellung von Differenzenquotienten höchstens beim Einstieg sowie später bei Gegenbeispielen wie  $|x|$  in 0 als methodisches Hilfsmittel ein.

Eventuell direkt im Anschluß an die Berechnung konkreter Differenzenquotienten im ersten Beispiel, spätestens beim zweiten Beispiel erfolgt eine

### *Algebraische Berechnung von Differenzenquotienten*

Im Beispiel: 
$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}}{x - 1} = \frac{\frac{2}{3}(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \quad (x \neq 1)$$

(oder entsprechend mit  $h \neq 0$ ).  
Hierdurch wird deutlich, daß  $\frac{4}{3}$  tatsächlich die gesuchte Zahl ist.

Eine zusätzliche Argumentationsmöglichkeit (bei konvexen differenzierbaren Funktionen) ist die folgende (siehe [1, S. 170]): Mit wachsendem  $x$  wachsen auch die Sekantensteigungen; diese nehmen alle Werte kleiner als  $\frac{4}{3}$  für  $x < 1$ , d. h. für Punkte links von  $P = (1 | \frac{2}{3})$ , und alle Werte größer als  $\frac{4}{3}$  für  $x > 1$ , d. h. für Punkte rechts von  $P$  an; also ist die gesuchte Tangentensteigung in  $P$  gleich  $\frac{4}{3}$ .

Diese Berechnung, unterstützt von verbalen Fassungen für die Konvergenz der Differenzenquotienten, ist schon bald die „Standardmethode“ bei der Ableitungsbestimmung. Sie macht die methodischen Hilfen „Berechnung und tabellarische Erfassung“, „Graphische Veranschaulichung“ und „Lokale graphische Darstellung“ vorerst entbehrlich. Wenn dann nicht-algebraische Funktionen abgeleitet werden, erhalten konkrete Berechnungen von Differenzenquotienten wieder Bedeutung, da nun nicht mehr einfach durch  $x - a$  gekürzt werden kann. Erst jetzt zeigt sich, daß dieses Kürzen nicht das Wesentliche der „Standardmethode“ ist, sondern daß es allgemeiner auf zweckmäßiges Umformen der Differenzenquotienten ankommt, um das Verhalten für  $x \rightarrow a$  studieren zu können.

Es ist nicht unser Ziel, schon beim ersten Einstieg in die Differentialrechnung einen formalisierten Grenzwertbegriff zu erarbeiten. Der Schüler soll jedoch – im Zusammenhang mit Ableitungsbestimmungen – über dieses entscheidende Hilfsmittel *operational* verfügen können. Dazu soll er *Aufgaben* wie die folgende lösen können:

Gegeben sind die Funktion  $f: x \mapsto \frac{2}{3}x^2$  und die Stelle  $a = 1$ . Für welche Werte von  $x$  weicht die Steigung der Sekante durch  $(1|f(1))$  und  $(x|f(x))$  um weniger als 0,01 von der Tangentensteigung in  $(1|f(1))$  ab?

Eine weitere Stufe bei der Entwicklung des Grenzwertbegriffs ist also die

*Berechnung von  $x$ -Umgebungen zu konkret gegebenen Fehlerschranken*

Im Beispiel: Sekantensteigung  $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \quad (x \neq 1)$

Tangentensteigung  $\frac{4}{3}$

Bedingung:  $-0,01 < \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} < 0,01$

d. h.  $-0,03 < 2x - 2 < 0,03$

d. h.  $0,085 < x < 1,015$

Resultat: Alle  $x \in (0,085; 1,015)$ ,  $x \neq 1$ .

Dies ist die vorläufig letzte Stufe. Bis zu ihr sollte der Grenzwertbegriff im ersten Anlauf präzisiert werden. Mathematisch ist der Schritt bis zu einer formalen Fassung jetzt nicht mehr groß: Man nehme statt 0,01 ein beliebiges  $\epsilon > 0$  und beschreibe allgemein den Gehalt solcher Aufgaben. Doch erstens fehlt in Grundkursen ein geeignetes Motiv für diese Formalisierung, und zweitens sind noch erhebliche lernpsychologische Schwierigkeiten zu meistern, bis eine formale Fassung mit Grundkursschülern erarbeitet ist. Daher ist es gerechtfertigt, die Präzisierung des Grenzwertbegriffs als eigenen Unterrichtsabschnitt mit neuen Zielen (vgl. dazu Fischer [3, S. 221/222]) an einer späteren Stelle der Analysis-Grundkurse zu behandeln.

Ein derart vereinfachter, „intuitiver“ ([1, S. 165]) Grenzwertbegriff ist also keineswegs „vage“ oder „verschwommen“, wie von Verfechtern einer formal-exakten Schul-Analysis manchmal argumentiert wird, und die Vereinfachungen erwecken auch keine „metaphysischen Nebel um das Unendliche“ wieder zum Leben. Wir wenden uns mit dieser Stufung der Strenge sowohl

– gegen eine Formalisierung des Grenzwertbegriffs schon vor oder zu Beginn der Differentialrechnung

als auch

– gegen ein rein intuitives Arbeiten mit Grenzwerten

als auch

– gegen einen Verzicht auf Grenzwerte in Anbetracht der didaktischen Schwierigkeiten einer mathematisch strengen Behandlung dieses Themas mit Grundkursschülern.

Statt dessen soll der Schüler mit Grenzwerten in der Differentialrechnung operational und verständlich umgehen können, und er soll an späterer Stelle des Lernprozesses exemplarisch auch die formale Stufe der Begriffsbildung kennenlernen. Vielfältige Unterrichtserfahrungen bestätigen, daß eine derart gestufte Entwicklung des Grenzwertbegriffs mit dem primären Ziel seiner verständigen Handhabung für den Grundkurschüler methodisch günstiger ist; dieses Vorgehen gestattet auch, weit mehr Aspekte des Phänomens Mathematik aufzuzeigen als ein Arbeiten auf nur einem Niveau.

## 2. Beispiel für eine Lernsequenz zum Einstieg in die Differentialrechnung

Hier soll durch Skizzierung einer Lernsequenz gezeigt werden, wie die soeben entwickelten methodischen Gesichtspunkte unterrichtlich realisiert werden können. Diese – auf Unterrichtserfahrungen in mehreren Grundkursen basierende – Lernsequenz ist nur eine von mehreren Möglichkeiten hierzu, insbesondere auch was das außermathematische Einstiegsbeispiel betrifft. Eine genauere Gliederung mit methodischen Details wäre nur für die Schüler eines konkreten Kurses sinnvoll, da Grundkurse wegen ihrer i. a. recht heterogenen Zusammensetzung (bzgl. Voraussetzungen, Erwartungshaltung etc.) in besonderem Maße spezifische Detailplanungen erfordern. Trotzdem erscheint eine kurze Schilderung dieser Lernsequenz gerechtfertigt, insbesondere um durch Angabe ungefährender Stundenzahlen den Zeitaufwand bei der gestuften Entwicklung der Grundbegriffe besser übersehen zu können.

**1./2. U-Stunde:** Geschwindigkeitsproblem (Frage nach Berechnung der Momentangeschwindigkeit) zu gegebener quadratischer Funktion und gegebener Stelle; Mathematisierung; Approximation der Momentangeschwindigkeit durch Berechnung konkreter Durchschnittsgeschwindigkeiten; tabellarische Erfassung dieser Rechnungen; Veranschaulichung durch Sekanten- und Tangentensteigungen; Lösung durch immer bessere Approximation; Benutzung von Sprechweisen wie „strebt gegen“ u. a.; Einführung des Zeichens „ $\lim$ “.

**3./4. U-Stunde:** Tangentenproblem (Frage nach Berechnung der Tangentensteigung) zu gegebener quadratischer Funktion und gegebener Stelle; Approximation durch Berechnung von Sekantensteigungen; (eventuell) deren lokale graphische Darstellung; algebraische Berechnung der Sekantensteigungen; Lösung des Problems algebraisch und geometrisch; Betonung der Grundvorstellung (ggf. mittels Bildserie; vgl. den Aufsatz zum „Funktionenmikroskop“ in diesem Heft).

**Teilweise 4. und 5./6. U-Stunde:** Tangentensteigungs- bzw. Änderungsratenberechnung bei weiteren quadratischen Funktionen, auch zu beliebiger Stelle  $a$ ; Aufgaben zur Berechnung von  $x$ -Umgebungen bei konkret gegebenen Fehlerschranken; Bestimmung von Tangentengleichungen und andere einfachste Anwendungen.

**In 6. U-Stunde:** Begriff des Differenzenquotienten; Definition des (lokalen) Ableitungsbegriffs:  $f$  hat an  $a$  die Ableitung  $f'(a) \Leftrightarrow$  Für  $x$  gegen  $a$  strebt  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  gegen  $f'(a)$  (bzw. entsprechend mit  $h$  gegen  $0$ ); Bezeichnung  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ; Interpretation der Ableitung als Tangentensteigung bzw. lokale Änderungsrate im jeweiligen Kontext.

Wenn wir auch rasch zur Ableitungsfunktion vorstoßen und eine „globale“ Grundvorstellung ( $f'$  gibt an jeder Stelle an, wie steil  $f$  dort ist) fördern wollen, trennen wir doch im ersten Anlauf zwischen lokalen und globalen Fragen (im Gegensatz etwa zu [2]). Daher folgt erst jetzt:

**7./8. U-Stunde:** Erarbeitung des Begriffs der Ableitungsfunktion, vorerst anhand quadratischer Funktionen; Verdeutlichung des Zusammenhangs zwischen  $f$  und  $f'$  durch simultanen Vergleich in zwei übereinanderliegenden Koordinatensystemen; weitere einfache Anwendungen wie z. B. Berechnung von Punkten vorgegebener Tangentensteigung; (eventuell) graphisches Differenzieren.

**Teilweise 8. und 9./10. U-Stunde:** Ableitungsberechnung bei weiteren Beispielen, insbesondere  $x \mapsto mx + b$ ,  $x \mapsto |x|$  und  $x \mapsto x^3$  für  $x = 0$ ,  $x \mapsto x^3$ ,  $x \mapsto kx^3$ ; dabei auch Problematisierung des Tangentenbegriffs; Einsatz aller methodischen Instrumente; Vertiefung der Grundvorstellung und damit Klärung der Probleme  $|x|$  und  $x^3$  in  $0$ ; einfache Übungen und Anwendungen.

**In 10. U-Stunde:** Definition des Differenzierbarkeitsbegriffs:  $f$  ist an  $a$  differenzierbar  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existiert; Definition des Tangentensteigungs- und Tangentenbegriffs.

**11./12. U-Stunde:** Ableitungsberechnung bei  $x \mapsto \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) und  $x \mapsto \sqrt{x}$  ( $x > 0$ ); einfache Übungen und Anwendungen.

Die Lernsequenz wird fortgesetzt mit der Ableitungsbestimmung bei weiteren Funktionen, u. a. auch  $x \mapsto x^n$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ , mit der Herleitung einfacher Ableitungsregeln, mit weiteren außermathematischen Anwendungen und mit den traditionellen innermathematischen Anwendungen, nämlich Funktionsuntersuchungen, Funktionsbestimmungen und Extremwertaufgaben.

Danach kann der Grenzwertbegriff formalisiert werden. Hierzu folgen im nächsten Abschnitt einige Überlegungen.

### 3. Möglichkeiten zur weiteren Präzisierung des Grenzwertbegriffs

Drei wesentliche *Wege zur Formalisierung* von „ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ “ sind die folgenden:

- 1) Über Folgen: „Für jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \neq a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  gilt  
$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = m.$$
“
- 2) Über Stetigkeit: „ $g$  hat bei  $a$  eine stetige Fortsetzung mit Funktionswert  $m$ .“
- 3a) Über  $\epsilon$  und  $\delta$ : „Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es  $\delta > 0$  so, daß gilt:  
Für  $0 < |x - a| < \delta$  ist  $|g(x) - m| < \epsilon$ .“
- 3b) Über Umgebungen: „Zu jeder Umgebung  $V$  von  $m$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $a$  derart, daß gilt: Für  $a \neq x \in U$  ist  $g(x) \in V$ .“

Dabei nimmt Weg 1 auf den Grenzwertbegriff bei Folgen und Weg 2 auf den Stetigkeitsbegriff Bezug. Bei beiden Wegen wird der Grenzwertbegriff für Funktionen also nur „relativ“ formalisiert, da Teile des Formalisierungsprozesses ausgegliedert und an andere Stelle verlagert sind (vgl. hierzu das „*Prinzip der Ausgliederung*“ bei Kirsch [6, S. 95/96]). Dies hat den Vorteil, daß Schwierigkeiten besser isoliert werden können und daß der Schüler die „relative Formalisierung“ schon dann verstehen kann, wenn er – auch ohne Formalisierung – adäquate Grundvorstellungen vom Folgen-Konvergenzbegriff bzw. vom Stetigkeitsbegriff erworben hat.

Beim Prozeß der Präzisierung im Unterricht braucht nicht ein völlig neuer Gedankengang begonnen zu werden. Welcher der drei Wege auch gewählt wird, jedesmal ist eine *Anknüpfung an den Einstieg* in die Differentialrechnung möglich:

- Bei 1) an Folgen von berechneten und tabellarisch festgehaltenen Differenzenquotienten.
- Bei 2) an Graphen stetig ergänzter Differenzenquotientenfunktionen.
- Bei 3) an zu gegebenen Fehlerschranken berechnete  $x$ -Umgebungen.

Die bei der unterrichtlichen Behandlung eines vereinfachten Grenzwertbegriffs eingesetzten methodischen Hilfsmittel erlauben also in natürlicher Weise jeweils eine Formalisierung des Grenzwertbegriffs. Ein vereinfachter Grenzwertbegriff verbaut also nichts, er ist im Gegenteil noch *offen für sämtliche Arten der Präzisierung* (vgl. dazu auch Jahner [5, S. 284]).

Welcher der verschiedenen Wege im Unterricht beschritten werden soll, läßt sich nicht a priori entscheiden. Jeder von ihnen führt zu *lernpsychologischen Schwierigkeiten*, die insbesondere mit den involvierten Quantoren und mit deren (vielen Schülern zu Anfang unnatürlich erscheinenden) Reihenfolge zusammenhängen. In der Didaktik gibt es bekanntlich seit langem große Diskussionen über das Für und Wider dieser Wege. Im folgenden sollen hierzu noch einige wenige Bemerkungen beigesteuert werden.



Wie oben beschrieben hat Weg 1 den Vorzug, daß er in natürlicher Weise eine Ausgliederung lernpsychologisch problematischer Teile ermöglicht. Das Gebiet Folgen ist zudem auch für sich genommen von Bedeutung und deshalb eventuell bereits im Vorkurs in 11/I behandelt worden (vgl. Abschnitt 2 im ersten Aufsatz dieses Heftes), so daß an Vorwissen angeknüpft werden kann. Auch sind Folgen sowohl nach vielfach berichteten Unterrichtserfahrungen als auch aufgrund von empirischen Untersuchungen (*Churchman* 1972, zitiert in *Vollrath* [8, S. 13]) für Schüler wohl leichter zugänglich als mehr topologische Inhalte, was sicher auch auf Vorerfahrungen aus der Sekundarstufe I zurückzuführen ist.

Zwar erfolgt auch bei Weg 2 eine Ausgliederung lernpsychologisch schwieriger Teile; doch erstens ist das Gebiet Stetigkeit für Grundkurse nur von untergeordneter Bedeutung und deshalb in Klasse 11 i.a. noch nicht behandelt (vgl. Abschnitt 2 im ersten Aufsatz dieses Heftes), und zweitens erfolgt die Formalisierung des Stetigkeitsbegriffs in aller Regel selbst wiederum über Folgen oder über  $\epsilon$ - $\delta$ -Umgebungen, so daß besser sogleich Weg 1 oder Weg 3 eingeschlagen wird.

Weg 3 führt mathematisch sehr schnell und voraussetzungslos zum Ziel, häuft aber lernpsychologische Schwierigkeiten auf engem Raum. Daher erfordert er ein methodisch gut gestuftes Vorgehen (vgl. dazu *Wunderling* [9] und *Seyffferth* [7]).

Natürlich könnten bei genügend Zeit und Interesse auch mehrere Präzisierungswege gewählt und Zusammenhänge zwischen verschiedenen Fassungen des Grenzwertbegriffs herausgearbeitet werden; doch dies würde den Rahmen des in Grundkursen Sinnvollen und Möglichen sicher sprengen.

## Literatur

- [1] *Blum, W.*: Ein Grundkurs in Analysis. Didaktik der Mathematik 3 (1975), H. 3, S. 163–184.
- [2] *Bussmann, H./Wenzeburger, E.*: Anschauliche Differentialrechnung. München: 1977.
- [3] *Fischer, R.*: Die Rolle des Exaktifizierens im Analysisunterricht. Didaktik der Mathematik 6 (1978), H. 3, S. 212–226.
- [4] *Griesel, H.*: Grundkurs Analysis – die Beschreibung des Ablaufs einer Curriculumentwicklung. Der Mathematikunterricht 22 (1976), H. 5, S. 25–46.
- [5] *Jähner, H.*: Modell für einen Minimalkurs „Analysis“. Neue Unterrichtspraxis 9 (1976), H. 5, S. 276–288.
- [6] *Kirsch, A.*: Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. Didaktik der Mathematik 5 (1977), H. 2, S. 87–101.
- [7] *Seyffferth, S.*: Ein Vorschlag zur Milderung der Diskrepanz zwischen naiv-anschaulichem Verständnis und exakter Definition des Grenzwerts einer Funktion. Didaktik der Mathematik 3 (1975), H. 4, S. 258–267.
- [8] *Vollrath, H.-J.*: Die Bedeutung methodischer Variablen für den Analysisunterricht. Der Mathematikunterricht 22 (1976), H. 5, S. 7–24.
- [9] *Wunderling, H.*: Präzisierung von Grenzwert und Ableitung. Der Mathematikunterricht 14 (1968), H. 5, S. 38–66.

Prof. Dr. Werner Blum, Carlsdorfer Str. 16, 3500 Kassel