

Elementare Behandlung exponentieller Prozesse

Prof. Dr. Werner Blum
unter Mitwirkung von Rolf Ahlborn

Beschreibung des Themas

Es gibt eine große Anzahl berufsschulrelevanter Problemstellungen, die — wenigstens angenähert — durch Exponentialfunktionen $x \rightarrow a \cdot b^x$ beschreibbar sind, z. B. Populationswachstum, Zellteilung, Ein- und Ausschaltvorgänge elektrischer Bauelemente, radioaktiver Zerfall, Absorptionsvorgänge, Vermehrung eines Kapitals (durch Zinseszins) u. a. Daher besitzen solche Probleme und die sie beschreibenden Funktionen einen hohen Stellenwert in einem anwendungsbezogenen Mathematikunterricht. Ziel muß es sein, daß alle Schüler eine angemessene Vorstellung von den Gesetzmäßigkeiten exponentieller Prozesse erwerben (und nicht nur diejenigen Schüler, die in der gymnasialen Oberstufe Exponentialfunktionen im Anschluß an die Integralrechnung behandeln). Diese Vorstellung soll den Schüler in die Lage versetzen, in verschiedensten Situationen verständlich mit Exponentialfunktionen umgehen zu können. Eine solch

verständige Handhabung mathematischer Inhalte in Problemsituationen

charakterisiert allgemein die wichtigste Komponente des Stellenwertes der Mathematik im beruflichen Schulwesen; dies kann durch das Thema »Exponentielle Prozesse« exemplarisch aufgezeigt werden. Dabei wird auch deutlich, in welchem Sinne Anwendungsorientierung des Mathematikunterrichts zu verstehen ist: Es werden nicht nur eng berufsorientierte, sondern allgemeiner

wichtige Anwendungsbeispiele aus Beruf und Alltag

behandelt. Das in Rede stehende Thema hat

Bezug zu allen Schulstufen und -arten,

und zwar nicht nur im berufsbildenden Bereich, so daß es auch

Verbindungen zum allgemeinbildenden Schulwesen

gestattet.

Damit dem Schüler schon früh die dem Thema zugrundeliegenden Exponentialfunktionen zur Verfügung stehen, müssen Vereinfachungen vorgenommen werden, die — im Sinne des *Spiralprinzips* — nichts verfälschen und ausbaubar sind. (Vergleiche hierzu das FWU-Videoband 41 0071, »Berücksichtigung des Spiralprinzips bei schulformbezogenen Einführungen in die Unterrichtseinheit »Funktionen«.) Solche Vereinfachungen sind möglich, z. B. bei den

— *Definitionsbereichen*: Von **N** über **Z** über **Q** zu **R** (Fettdruck = Mengensymbole);

— *Basen*: Von natürlichen über rationale, insbesondere der Form $1 + \frac{p}{100}$, zu beliebigen

Basen, insbesondere zur Basis *e* in der Differentialrechnung;

— zur Untersuchung verwendeten *mathematischen Hilfsmitteln*: Von einfacher Arithmetik über Algebra bis zur Differentialrechnung.

Innerhalb einer jeden der verschiedenen, insbesondere durch Definitionsbereich, Basis und verwendetes mathematisches Hilfsmittel charakterisierten Niveaus lassen sich wiederum verschiedene Stufen unterscheiden, und zwar je nach verwendeter *Darstellungsebene*. Gemeint sind hier die »Brunerschen Repräsentationsmodi«, d. h. die Unterscheidung zwischen der Darstellung eines Gegenstandes durch Handlungen (enaktive Repräsentation), durch Bilder (ikonische Repräsentation) und durch Sprache oder Zeichen (symbolische Repräsentation). Ein solche bewußtes

Durchlaufen verschiedener Darstellungsebenen

stellt eine besonders wichtige Möglichkeit zur Verwirklichung des Spiralprinzips dar. Weiter bietet das Thema ›Exponentielle Prozesse‹ eine Fülle von

Möglichkeiten für Schüleraktivitäten.

Insbesondere lassen sich bei diesem Thema auch

Möglichkeiten für einen sinnvollen Einsatz des Taschenrechners

exemplarisch sichtbar machen (vergleiche FWU-Videoband ›Der Einsatz des elektronischen Taschenrechners in beruflichen Schulen‹). Speziell werden zwei wesentliche fachdidaktische Problemkomplexe angesprochen, nämlich

Mathematisierung berufsrelevanter Probleme

sowie

methodische Aufbereitung zugehöriger mathematischer Inhalte.

Im Videoband werden *drei Beispiele* für die Behandlung exponentieller Prozesse im Mathematikunterricht beruflicher Schulen gezeigt. Diese Beispiele sollen deutlich machen, inwiefern die aufgeführten Begründungen eingelöst werden können. In allen drei Fällen sollen die genannten *Aspekte* sichtbar werden:

- A)** Mathematisierung von Problemsituationen
- B)** Methodische Aufbereitung zugehöriger mathematischer Inhalte mit Durchlaufen verschiedener Darstellungsebenen und Möglichkeiten für Schüleraktivitäten
- C)** Verständige Handhabung mathematischer Inhalte

Die Beispiele stammen aus drei verschiedenen *Schulstufen*, nämlich

- 1) Kaufmännische Teilzeit-Berufsschule
- 2) Berufsfachschule
- 3) Fachoberschule

Aus der Vielzahl der exponentiellen Prozesse sind ›rein‹ exponentielle Prozesse ausgewählt worden, die nach drei verschiedenen *Typen* unterschieden werden:

- 1) Die Grundregel für exponentielles Wachstum gilt aufgrund einer Vereinbarung: *Zinseszins*
- 2) Die Grundregel ist eine empirisch gestützte Annahme: *Bakterienwachstum*
- 3) Die Grundregel ist eine begründbare Aussage: *Abkühlung* eines Gegenstandes auf $0\text{ }^{\circ}\text{C}$

Anstelle dieser drei Beispiele exponentieller Vorgänge können selbstverständlich auch andere gewählt werden, insbesondere auch solche aus dem gewerblich-technischen Bereich. Einige solcher Beispiele werden am Anfang des Videobandes kaleidoskopartig zusammengestellt; dabei sind auch Beispiele *näherungsweise* exponentieller Prozesse ausgewählt worden. Die angesprochenen Beispiele sind:

Wachstum von Tierpopulationen (Beispiel: Mäuse)
Zinseszins
Kondensatorentladung
Gedämpfte Schwingung (akustisch, elektrisch)
Abkühlungsvorgänge (Badewasser, Kaffee, Metallschmelze)
DIN-Formate
Vermehrung von Mikroorganismen (Hefe, Bakterien)
Radioaktiver Zerfall
Verdünnungsreihe
Hüpfender Ball

Weitere mögliche Beispiele wären:

Tonskalen

Lohn- bzw. Rentenanstieg
 ›Schachbrettaufgabe‹ (mit Reiskörnern)
 Stromein- bzw. -ausschaltung
 Absorption von Schall oder Strahlung
 Barometrische Höhenformel
 Bevölkerungswachstum
 Zunahme des Energieverbrauchs
 Abnahme der Rohstoffvorräte
 Preisanstieg usw.

Das Videoband zeigt Ausschnitte aus den drei *Unterrichtseinheiten* zu den ausgewählten Beispielen, wobei aus Gründen der Zeitbeschränkung nicht jeder der Aspekte A, B, C in jeder der drei Sequenzen dargestellt wird.

Ausdrücklich muß darauf hingewiesen werden, daß die Unterrichtsszenen stark gekürzt und teilweise (so authentisch wie möglich) nachgestellt wurden. Es handelt sich also nicht um unverfälschte Unterrichtsdokumentationen.

Aus der mathematischen Aufbereitung der drei Beispiele werden folgende Arbeitsschritte gezeigt:

Beispiel Zinseszins (Teilzeitberufsschule)

- Erarbeitung von ›plus 5 %‹ bedeutet ›mal 1,05‹
- Berechnung von Werten mittels Taschenrechner (ohne Prozenttaste)
- verbale Fassung der Grundregel ›zu gleichlangen Schritten stets gleicher Wachstumsfaktor‹ und graphische Veranschaulichung
- Vergleichen exponentielles/lineares Wachstum (Zinseszins/Zins)
- Anwendung der erarbeiteten mathematischen Werkzeuge auf weitere Beispiele

Beispiel Bakterienwachstum (Berufsfachschule)

- Graph $x \rightarrow 2^x$
- Erarbeitung der Regel »Jedesmal, wenn x um 1 erhöht wird, verdoppelt sich der Funktionswert 2^x « an Wertetabelle, an Graph und verbal
- Frage nach Funktionswerten an rationalen bzw. irrationalen Zwischenstellen
- Definition \exp_2 , Eigenschaften, Grundregel

Beispiel Abkühlung (Fachoberschule)

- Mathematisierung der realen Situation ›Abkühlung‹
- durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeiten als Sekantensteigungen, momentane Wachstumsgeschwindigkeit als Tangentensteigung
- Ableitungsbestimmung für \exp_2
- e-Funktion

Im folgenden werden die drei Lernsequenzen ausführlich beschrieben.

Ausarbeitung der drei Lernsequenzen

Lernsequenz 1 (Berufsschule)

a)

- Der Lehrer stellt ein Problem (Beispiel: ein Kapital von DM 1 000,— wächst jährlich um 5 %).
- Die Schüler diskutieren über interessierende Fragen, z. B. Höhe des Kapitals nach mehreren Jahren, Verdoppelungszeit oder anderes.

- b)
- Festlegung der Schreibweise: $K_0 = 1\,000$, $K_1 =$ Kapital nach 1 Jahr (in DM) usw.
 - Die Schüler berechnen einige Werte K_i .
 - Die errechneten Werte werden an der Tafel gesammelt und anschließend graphisch dargestellt.

- c)
- Im Unterrichtsgespräch wird die Methode erarbeitet, mit der man die K_i -Werte am schnellsten berechnen kann. Der Rechengang wird an der Tafel festgehalten:

$$K_1 = 1\,000 + 5\% \text{ von } 1\,000 = 1 \cdot 1\,000 + \frac{5}{100} \cdot 1\,000 =$$

$$= \left(1 + \frac{5}{100}\right) \cdot 1\,000 = 1,05 \cdot 1\,000 = 1\,050$$

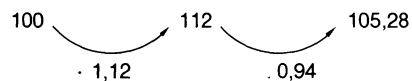
$$K_2 = \dots\dots\dots = 1,05 \cdot 1\,050 = 1\,102,5$$

- Als Ergebnis wird festgehalten: 5 % hinzu bedeutet \cdot mal 1,05.

- d)
- Die Schüler berechnen unter Verwendung von Taschenrechnern weitere K_i -Werte und ergänzen die Tabelle an der Tafel durch die neugewonnenen Werte.
 - Mit Hilfe von Pfeilen (Operatoren) wird die unter c) gewonnene Rechenregel verdeutlicht: In der linken Spalte der Tabelle erfolgt eine Addition, in der rechten eine Multiplikation.

...		...
0	1 000	
1	1 050	$\cdot 1,05$
2	1 102,5	$\cdot 1,05$
3	1 157,6 ...	$\cdot 1,05$
4	1 215,5 ...	$\cdot 1,05$
5	1 276,2 ...	$\cdot 1,05$
6	1 340,0 ...	$\cdot 1,05$
⋮	⋮	⋮

- e)
- Weitere Beispiele zu prozentualen Zu- bzw. Abschlägen werden behandelt, z. B. Mehrwertsteuer, Rabatt, Bevölkerungswachstum usw. Dabei Anwendung der Berechnungsmethode aus c), z. B. bei Aufschlag von 12 % Mehrwertsteuer: \cdot mal 1,12, und Benutzung des Taschenrechners. Bei mehrfachen Zu- bzw. Abschlägen Einsatz von Operatorketten, z. B. bei gleichzeitiger Berücksichtigung von 12 % Mehrwertsteuer und 6 % Rabatt auf DM 100,—:



Alle Berechnungen sollen von den Schülern selbst durchgeführt werden. Es ist wichtig, daß hierbei auf den \cdot additiven Trugschluß \cdot hingewiesen wird: z. B. ergeben 12 % Mehrwertsteuer und 6 % Rabatt einen Zuschlag von 5,28 % und nicht von 6 %!

- f)
- Anknüpfend an die vorhergehenden Überlegungen zu Effektivprozentsätzen werden an den Beispielen Zins und Zinseszins die Unterschiede zwischen additiven und multiplikativen Zuschlägen erarbeitet. Hierbei wird zweckmäßigerweise vom gleichen Grundkapital und gleichen Zinssätzen ausgegangen. Eine tabellarische Aufstellung würde folgende Werte ergeben:

Zins		Zinseszins	
+1	0	100	
+1	1	105	+5
+1	2	110	+5
+1	3	115	+5
⋮	⋮	⋮	⋮

+1	0	100	
+1	1	105	· 1,05
+1	2	110,25	· 1,05
+1	3	115,76 ...	· 1,05
⋮	⋮	⋮	⋮

Es empfiehlt sich, die Werte auch graphisch darzustellen, z. B. in Form des im Videoband gezeigten ›Treppendiagramms‹.

g)

- Weitere Anwendungen werden behandelt.
- Anknüpfend an bereits behandelte Beispiele wird die Frage nach der Verdoppelungszeit d gestellt. Mit Hilfe des Taschenrechners lassen sich für einige Beispiele die Verdoppelungszeiten problemlos berechnen:

Anzahl Jahre	Kapital (in DM)
0	1 000
1	1 050
2	1 102,5
⋮	⋮
14	1 979,93 ...
15	2 078,92 ...

Hierbei kann als Abschluß der Lernsequenz auf die › $p \cdot d$ -Regel‹ eingegangen werden: Multipliziert man den Prozentsatz des Wachstums mit der Verdoppelungszeit, so erhält man einen Zahlenwert von ungefähr 70: $p \cdot d \approx 70$.

Lernsequenz 2 (Berufsfachschule)

a)

- Ein Experiment liefert das Eingangsproblem: mit Hilfe eines Mikroskops beobachten die Schüler das Flächenwachstum einer Bakterien- oder Pilzkultur. Für die Videoaufzeichnung wurde eine Kultur ausgewählt, die sich im Zeitraum von ungefähr einer halben Stunde jeweils verdoppelt. Die Beobachtungen werden in Form einer Tabelle festgehalten.

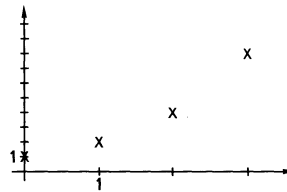
b)

- Mathematisierung des Problems: Es werden die Vielfachen von $\frac{1}{2}$ h mit x und die Vielfachen des zu Beginn der Beobachtung von der Kultur bedeckten Flächeninhalts mit y bezeichnet.
- Einige beobachtete bzw. errechnete Werte werden an der Tafel in einer Tabelle festgehalten. Dabei wird von den Schülern die Beziehung $y = 2^x$ erkannt und festgehalten. Der Lehrer betont den Funktionscharakter der Zuordnung $x \rightarrow 2^x$; $x \in \mathbf{N}_0$.
- Die Zuordnung wird an der Tafel graphisch dargestellt (Tab. u. Abb. S. 7 o.).

c)

- Charakteristisch für exponentielle Prozesse ist die Tatsache, daß bereits nach einer geringen Zahl von Wachstumsschritten Funktionswerte erreicht werden können, die an der Grenze des menschlichen Vorstellungsvermögens liegen. Einen Eindruck hiervon kann man den Schülern sowohl rechnerisch als auch durch Graphiken oder Modellvorstellungen vermitteln.

Zeitpunkt x der Beobachtung	Flächeninhalt y zum Zeitpunkt x
0	1
1	2
2	4
3	8
⋮	⋮

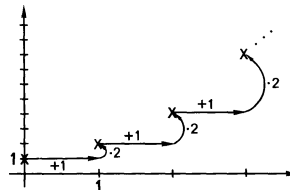


Im Videoband wird ein Modell gezeigt, das aus übereinandergeschichteten Platten gleicher Stärke bestehen soll. Die Fläche der obersten Platte beträgt 1 cm^2 ; die nachfolgende Platte ist jeweils um den Faktor 1,3 größer als die vorhergehende. Die anfangs einer Pyramide ähnelnde Gestalt des Plattenstapels hat sich nach 27 Platten völlig verändert und läßt in etwa erkennen, wie ein Stapel von z. B. 100 Platten aussehen könnte.

d)

- Die aus der Versuchsauswertung hervorgehende Grundeigenschaft der Funktion (»Wenn x um 1 erhöht wird, verdoppelt sich der Funktionswert 2^x «) wird von den Schülern verbal erarbeitet, an der Tafel festgehalten und dort auch an der Tabelle und am Graphen verdeutlicht (unter Verwendung der bereits aus dem 1. Lernabschnitt bekannten Pfeilsymbole).

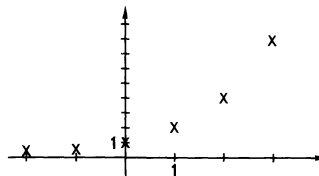
... x y ...
0	1
+1 → 1	2 ↗ · 2
+1 → 2	4 ↗ · 2
⋮	⋮



e)

- Die Problemstellung »Welche Fläche bedeckt die Kultur zum Zeitpunkt t?« wird auf Zeitpunkte vor Beginn der Beobachtung erweitert. Es wird eine Tabelle erarbeitet, wobei die Grundeigenschaft »rückwärts« angewandt wird.
- Im Unterrichtsgespräch wird erarbeitet, daß offenbar wiederum $y = 2^x$ gilt (die Bedeutung ganzer Exponenten bei Potenzen muß hierzu bekannt sein!). Die Funktion ist jetzt auf den Bereich der ganzen Zahlen erweitert worden:
 $x \rightarrow 2^x$; $x \in \mathbf{Z}$; die graphische Darstellung wird um die neugewonnenen Werte erweitert.

... x y ...
0	1
-1 → -1	0,5 ↖ : 2
-1 → -2	0,25 ↖ : 2
⋮	⋮



f)

- Welchen Flächeninhalt bedeckte die Kultur $\frac{1}{4} \text{ h}$ nach Beginn der Beobachtung (also bei $x = \frac{1}{2}$)? Es wird die verallgemeinerte Grundregel erarbeitet: Die Fläche der Bakterienkultur vervielfacht sich in gleichen Zeitspannen jeweils mit demselben Faktor. Bei dieser Erweiterung

rung auf die rationalen Zahlen tauchen bereits irrationale Zahlen als Funktionswerte auf (die Bedeutung von Bruchexponenten bei Potenzen muß den Schülern natürlich bekannt sein!).

x	y
0	1
+ $\frac{1}{2}$ → 0,5	$\sqrt{2}$ ← $\cdot \sqrt{2}$
+ $\frac{1}{2}$ → 1	2 ← $\cdot \sqrt{2}$
+ $\frac{1}{2}$ → 1,5	$2\sqrt{2}$ ← $\cdot \sqrt{2}$
⋮	⋮

— Anhand weiterer Beispiele, etwa $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$ usw., wird allgemein geschlossen: $y = 2^x$ gilt offenbar für alle $x \in \mathbf{Q}$. Zur Berechnung von 2^x für x mit Zweipotenznenner (z. B. $2^{m/2^k}$) empfiehlt sich die Verwendung eines Taschenrechners mit Wurzeltaste.

— Nachdem die errechneten Zwischenwerte in das Koordinatenkreuz eingetragen wurden, können die Schüler versuchen, den Graphen der Funktion $x \rightarrow 2^x$; $x \in \mathbf{Q}$ zu zeichnen.

g)

— Aus dem Graphen werden Eigenschaften dieser Funktion (strenge Monotonie, Anschmiegen an die Abszissenachse) entnommen und verbal festgehalten.

— Die Grundeigenschaft wird erneut betont: »Jedesmal, wenn sich x um denselben Summanden s erhöht, multipliziert sich der Funktionswert 2^x mit demselben Faktor 2^s «.

h)

— Zur Überprüfung der Mathematisierung des Ausgangsproblems werden einige Meßwerte mit den Funktionswerten von $x \rightarrow 2^x$; $x \in \mathbf{Q}$ verglichen. Aus der Übereinstimmung wird geschlossen, daß (im betrachteten Zeitintervall) die Funktion das Wachstum der Bakterienkultur richtig beschreibt.

Es empfiehlt sich, den Graphen von $x \rightarrow 2^x$ im Intervall $[-4; +4]$ auf Millimeterpapier zeichnen zu lassen.

i)

— Es muß mit den Schülern erarbeitet werden, daß auch der sorgfältig auf Millimeterpapier gezeichnete Funktionsgraph $x \rightarrow 2^x$ nur eine »vermutete Kurve« ist, denn eine lückenlos gezogene Kurve schließt auch die Funktionswerte irrationaler Exponenten (wie $2^{\sqrt{2}}$) mit ein; bisher wurde die Funktion aber nur für den Bereich der rationalen Zahlen untersucht.

— Die bereits gezeichnete Kurve kann als Graph der »Exponentialfunktion zur Basis 2« ($x \rightarrow 2^x$; $x \in \mathbf{R}$) angesehen werden, wenn es gelingt, die Lage eines (angenäherten) Funktionswertes für $x = \sqrt{2}$ auf der vermuteten Kurve zu demonstrieren. Zur rechnerischen Lösung wird eine Intervallschachtelung empfohlen: Es gilt $1 < \sqrt{2} < 2$, wegen der strengen Monotonie also auch $2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$. Ebenso folgt $2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$ usw. Als Näherungswert ergibt sich $y \approx 2,66$. Dieser Wert deckt sich gut mit dem entsprechenden Punkt des Graphen.

— Als Abschluß empfiehlt sich eine Wiederholung der Funktionseigenschaften; insbesondere sollte die Grundeigenschaft allgemein festgehalten werden:

$$\text{Für alle } x, s \in \mathbf{R} \text{ gilt } 2^{x+s} = 2^x \cdot 2^s$$

Stelle	Funktionswert
+ s → x x + s	2^x $2^{x+s} = 2^x \cdot 2^s$ ← $\cdot 2^s$

Lernsequenz 3 (Fachoberschule)

a)

- Die Abkühlung von Wasser der Anfangstemperatur 50 °C auf 0 °C stellt sich als physikalisches Einstiegsproblem. Schüler messen die Temperatur (etwa alle halbe Minute) und halten die Resultate in einer Tabelle fest.

t [in min]	0	0,5	1	1,5	...
θ [in °C]	50	38,7	30	23,2	...

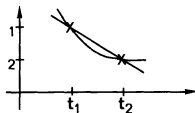
b)

- Mit Hilfe der Meßwerte wird die Zuordnung $t \rightarrow \theta; t \geq 0$ an der Tafel graphisch dargestellt.
- Als Problem wird die Frage nach der ›Änderungsgeschwindigkeit‹ der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit durch den Lehrer gestellt.
- Erarbeitung im Unterrichtsgespräch: Durchschnittliche Änderungsgeschwindigkeit zwischen (z. B.) $t_1 = 1$ und $t_2 = 3$ berechnet sich zu

$$\frac{\text{Temperaturdifferenz}}{\text{Zeitdifferenz}} = \frac{30 - 10,8}{3 - 1} = 9,6, \quad \text{allgemein also zu } \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1};$$

diese Zahl ist negativ, da die Temperatur ja abnimmt.

- Interpretation einer durchschnittlichen Änderungsgeschwindigkeit am Graphen als Sekantensteigung



- Erarbeitung im Unterrichtsgespräch: Die momentane Änderungsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt (z. B.) $t_0 = 1$ läßt sich sinnvoll als Tangentensteigung deuten.

c)

- Die (aus dem vorhergehenden Unterricht in Differentialrechnung bekannten) Möglichkeiten zur Bestimmung einer solchen gesuchten Tangentensteigung werden diskutiert. Es bieten sich an: Graphisch durch näherungsweise Zeichnen der Tangenten und Ablesen ihrer Steigung; rechnerische Bestimmung durch möglichst genaue Approximation mittels Sekantensteigungen oder am einfachsten durch allgemeine Bestimmung des Ableitungsterms und Einsetzen der Werte.
- Spätestens an dieser Stelle stellen Schüler die Frage nach dem zugrundeliegenden Funktionsterm. Auf Vermutungen bestätigt der Lehrer, daß es sich um eine fallende Exponentialfunktion handelt, also um den Term $a \cdot b^t$. Gemeinsam wird erarbeitet: a ist der Anfangswert (bei $t = 0$ gilt: $a \cdot b^0 = a \cdot 1 = a$), also $a \approx 50$; $a \cdot b$ ist der Wert für $t = 1$ (da $a \cdot b^1 = a \cdot b$), also $a \cdot b = 30$, d.h. $b \approx 0,6$.
- Das Problem ist also die Bestimmung der Ableitung der Exponentialfunktion $t \rightarrow 50 \cdot 0,6^t$ an einigen Stellen. Entsprechend den beiden erstgenannten Lösungsmöglichkeiten kann die Bestimmung einiger Sekantensteigungen als Hausaufgabe gestellt werden.

d)

- Zur Erarbeitung der Ableitung der gegebenen Exponentialfunktion ist es sinnvoll, zunächst eine ›einfachere‹ Funktion zu verwenden. Zum Beispiel kann versucht werden, die Funktion $f: x \rightarrow 2^x$ an der Stelle 0 graphisch abzuleiten. Man bekommt hierbei den Näherungswert $f'(0) \approx 0,7$.

Zur Berechnung des Wertes verwendet man den Differenzenquotienten $\frac{2^h - 2^0}{h}$ für h-Werte

in der Nähe von 0; dabei wird zweckmäßigerweise $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{2}$ usw. gewählt und ein

Taschenrechner mit Wurzeltaste benutzt. Hierbei erhält man etwa folgende Wertetabelle:

h	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{2^{10}}$	$-\frac{1}{2^{10}}$	$-\frac{1}{2^5}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{2^h - 1}{h}$	0,828...	0,756...	0,724...	0,700...	0,693...	0,692...	0,685...	0,636...	0,585...

Die Konvergenz der Sekantensteigungen wird dabei verbal betont, etwa: »Wenn h nur genügend klein ist, dann kommt $\frac{2^h - 1}{h}$ beliebig nahe an einen bestimmten Wert heran«. Das

Ergebnis ist also: $f'(0) \approx 0,693$.

An dieser Stelle benötigen die Schüler eine zusätzliche Information: Der genaue Wert von $f'(0)$ kann theoretisch beliebig genau berechnet werden, wenn man nur h genügend klein wählt. Auf sechs Stellen genau wäre $f'(0) = 0,693147$. Im Gegensatz zu allen bisher aus der Differentialrechnung bekannten Beispielen kann diese Ableitung jedoch nicht durch Umformung der Differenzenquotienten auf einfache Weise gewonnen werden!

Eine zweite Teilaufgabe beinhaltet die Ableitungsbestimmung für $f : x \rightarrow 2^x$ an einer beliebigen Stelle $a \in \mathbf{R}$. Diese Berechnung verläuft nach dem aus der Differentialrechnung bekannten Schema:

$$\frac{2^{a+h} - 2^a}{h} = \frac{2^a 2^h - 2^a}{h} = 2^a \cdot \frac{2^h - 1}{h} = 2^a \cdot \frac{2^h - 2^0}{h}$$

Das gefundene Ergebnis läßt sich verbalisieren: Bei festem h ist der Differenzenquotient zur Stelle a proportional zum Funktionswert 2^a an der Stelle a; der Proportionalitätsfaktor ist $\frac{2^h - 1}{h}$, also der Differenzenquotient zur Stelle 0.

Als Grenzwert erhält man:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{a+h} - 2^a}{h} = 2^a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h}$$

Die Ableitung an der Stelle a ist also proportional zum Funktionswert an der Stelle a; den Proportionalitätsfaktor liefert die Ableitung an der Stelle 0. Für weitere Berechnungen kann dieser Differentialquotient mit dem Buchstaben σ bezeichnet werden. Dann würde die Ableitungsvorschrift lauten: $f'(x) = \sigma \cdot 2^x$ mit $\sigma \approx 0,693$.

e)

- Um das anfangs gestellte Problem (Abkühlungsfunktion) lösen zu können, muß zunächst eine allgemeine Ableitungsvorschrift für Exponentialfunktionen gefunden werden. Für die Funktion

$$f : x \rightarrow b^x \quad (b \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\})$$

ergibt sich der Differenzenquotient:

$$\frac{b^{a+h} - b^a}{h} = \frac{b^a b^h - b^a}{h} = b^a \cdot \frac{b^h - 1}{h}$$

Entsprechend der vorherigen Funktion (Basis 2) gilt wieder: Bei festem h ist der Differenzenquotient zur Stelle a proportional zum Funktionswert b^a an der Stelle a; der Proportionalitätsfaktor ist wieder der Differenzenquotient zur Stelle 0. Als Zwischenergebnis läßt sich jetzt festhalten: Um den Grenzwert der Differenzenquotienten für $h \rightarrow 0$, also die Ableitung, zu bestimmen, genügt es offenbar wieder, diesen Grenzwert nur für die Stelle 0 zu untersu-

chen. Mit den bisher zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln kann dieser Grenzwert nicht berechnet werden. Es ist aber bekannt, daß er die Steigung der Tangente im Punkt (0; 1) an den Graphen von \exp_b angibt. Diese Steigung wird mit σ_b bezeichnet, um die Abhängigkeit von der Basis b auszudrücken. Nach Definition ist also

$$\sigma_b = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

und damit die Ableitung an der Stelle a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^{a+h} - b^a}{h} = b^a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} = \sigma_b \cdot b^a$$

Nun kann folgender Merksatz festgehalten werden:

Die Exponentialfunktion $f: x \rightarrow b^x$; $x \in \mathbf{R}$ ($b \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$) ist an jeder Stelle $x \in \mathbf{R}$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(x) = \sigma_b \cdot b^x$. Dabei ist $\sigma_b = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$ die Steigung der Tangente in (0; 1).

Um die Ableitung einer Exponentialfunktion an gegebener Stelle zahlenmäßig bestimmen zu können, wird lediglich ein numerischer Wert von σ_b benötigt.

g)

- Die anfangs gestellte Aufgabe (Abkühlungskurve) ist nun lösbar. Mit Hilfe der ‚Konstante-Faktoren-Regel‘ läßt sich aus der Funktion $f(t) = 50 \cdot 0,6^t$ sofort die Ableitung $f'(t) = 50 \cdot \sigma_{0,6} \cdot 0,6^t$ folgern. Für $\sigma_{0,6}$ errechnet man einen Wert von $\approx -0,51$. Damit ist das Ausgangsproblem gelöst.

Als Hausaufgabe können die Schüler nun einige weitere Ableitungen an anderen Punkten der Kurve durchführen und mit den graphisch ermittelten Werten vergleichen. Es sollten auch weitere σ_b -Werte berechnet werden, z. B. $\sigma_{2,5} \approx 0,9$ und $\sigma_3 \approx 1,1$.

Damit ist die Grundlage für eine bruchlose Einführung der e -Funktion gegeben. Für die Schüler unmittelbar einsichtig kann etwa folgende Erläuterung sein: Diejenige Basis b , für die $\sigma_b = 1$ gilt, ist für die Differentialrechnung besonders wichtig. Denn die Ableitung der zugehörigen Exponentialfunktion stimmt ja mit der Funktion selbst überein, ist also ganz einfach abzuleiten: $f' = f$. Man nennt diese besondere Basis e (daß es genau eine solche Basis gibt, kann später bewiesen oder aber aus der Anschauung entnommen werden). Diese Basis e heißt Eulersche Zahl; sie liegt zwischen 2,5 und 3.

Soll die Zahl e berechnet werden, dann empfiehlt sich die Bestimmung von σ_b für einige Basen zwischen 2,5 und 3 so, daß σ_b möglichst nah bei 1 liegt. Die Lösung der Aufgabe ist möglich durch die Berechnung von

$$\frac{b^h - 1}{h} \quad \text{für z. B.} \quad h = \frac{1}{2^{10}}$$

und einige b auf dem Taschenrechner. Als Ergebnis erhält man $e \approx 2,718$.

b	$2^{10} \cdot (\frac{1}{2^{10}b} - 1)$
2,7	0,993 ...
2,8	1,029 ...
2,75	1,012 ...
2,72	1,001 ...
2,715	0,999 ...
2,718	1,000 ...

Diese Lernsequenz stellt auf eine einfache und leicht nachvollziehbare Weise die mathematischen Hilfsmittel für die Anwendung der e -Funktion bereit.