Stanislaw Schukajlow-Wasjutinski

Schüler-Schwierigkeiten und Schüler-Strategien beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Philosophie (Dr. phil.) im Fachbereich Erziehungswissenschaft / Humanwissenschaften der Universität Kassel

vorgelegt von

Stanislaw Schukajlow-Wasjutinski

Erstgutachter: Prof. Dr. Rudolf Messner

Zweitgutachter: Prof. Dr. Werner Blum

Tag der mündlichen Prüfung: 02. Juli 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Fragestellung und Aufbau der Arbeit ... 5

2 Lernprozessorientierte Didaktik einer Aufgabenkultur und ihre theoretischen Grundlagen ... 7

2.1 Die neue Aufmerksamkeit auf Lernprozesse durch internationale Vergleichsstudien ... 7

2.1.1 Unterrichtliche Lernprozesse in den Videostudien ... 7

2.1.2 Bildungsstandards im Kontext der Umsteuerung des Bildungssystems ... 13

2.2 Die Aufgabenkultur als lernprozessbezogene Lernumgebung ... 18

2.2.1 Aufgaben und ihre Eigenschaften ... 19

2.2.2 Umgang mit neuen Aufgaben im Unterricht ... 21

2.2.3 Realitätsbezogene Modellierungsaufgaben als Kern der neuen Aufgabenkultur im Mathematikunterricht ... 22

2.3 Lernprozesse beim Problemlösen ... 23

2.3.1 Problemtypen in verschiedenen Forschungstraditionen ... 24

2.3.2 Problemlöseprozess ... 30

2.4 Schwierigkeiten und Strategien im Lern- und Problemlöseprozess ... 40

2.4.1 Schwierigkeiten im Problemlöseprozess ... 41

2.4.2 Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe ... 43

2.4.3 Strategien ... 46

2.5 Zur Bedeutung von Schüler-Schwierigkeiten und deren Strategien zu ihrer Überwindung in didaktischen und unterrichtlichen Konzeptionen ... 55

2.5.1 Übersicht über drei führende allgemeindidaktische Konzeptionen in Deutschland ... 56

2.5.2 Didaktik auf psychologischer Grundlage von Aebli ... 58

2.5.3 Fehlerdidaktik von Oser ... 61

2.5.4 Kognitivistisch und konstruktivistisch orientierte Unterrichtskonzeptionen ... 63

2.5.5 Der Cognitive Apprenticeship-Ansatz – Eine Rahmentheorie der Instruktion 64

2.5.6 Schüler-Schwierigkeiten und -Strategien in fachdidaktischen Konzeptionen in Deutschland ... 67

3 Modellierungsaufgaben und ihre Lösungsprozessanalysen als Kern einer prozessorientierten Didaktik ... 72

3.1 Modellierungsaufgaben ... 72

3.1.1 Zentrale Merkmale von problemorientierten Modellierungsaufgaben ... 72

3.1.2 Aufgabenbeispiele ... 74

3.1.3 Lösungsprozesse bei einfachen Textaufgaben ... 75

3.1.4 Modellierungskreislauf – ein Modell zur Analyse von Lösungsaktivitäten bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben ... 76

3.1.5 Ein Modell der sequenziellen Bearbeitung von Modellierungsaufgaben ... 83

3.2 Lösungsprozessanalysen der in der Studie eingesetzten Aufgaben ... 87

3.2.1 Zuckerhut ... 87

3.2.2 Abkürzung ... 92

3.2.3 Regenwald ... 97

4 Empirische Studie: Vier Fallanalysen – Schwierigkeiten und Strategien von Schülern beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben ... 104

4.1 Präzisierung der Fragestellung ... 104

4.2 Die Methode ... 104

4.2.1 Auswahl von Aufgaben und Versuchspersonen ... 105

4.2.2 Beschreibung der realisierten Stichprobe und der Erhebungsmethode ... 107

4.2.3 Datenanalyse ... 109
4.3 Analyse von Schwierigkeiten und eingesetzten Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut ... 113
4.3.1 Aufgabe Zuckerhut. Fallskizze Manfred, Kompetenzstufe 1 ... 113
4.3.2 Aufgabe Zuckerhut. Fallskizze Oliver, Kompetenzstufe 2 ... 119
4.3.3 Aufgabe Zuckerhut. Fallskizze Bernd, Kompetenzstufe 3 ... 124
4.3.4 Aufgabe Zuckerhut. Fallskizze Kathrin, Kompetenzstufe 4 ... 130
4.4 Analyse von Schwierigkeiten und eingesetzten Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung ... 139
4.4.1 Aufgabe Abkürzung. Fallskizze Manfred, Kompetenzstufe 1 ... 139
4.4.2 Aufgabe Abkürzung. Fallskizze Oliver, Kompetenzstufe 2 ... 145
4.4.3 Aufgabe Abkürzung. Fallskizze Bernd, Kompetenzstufe 3 ... 150
4.4.4 Aufgabe Abkürzung. Fallskizze Kathrin, Kompetenzstufe 4 ... 155
4.5 Analyse von Schwierigkeiten und eingesetzten Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald ... 163
4.5.1 Aufgabe Regenwald. Fallskizze Manfred, Kompetenzstufe 1 ... 163
4.5.2 Aufgabe Regenwald. Fallskizze Oliver, Kompetenzstufe 2 ... 170
4.5.3 Aufgabe Regenwald. Fallskizze Bernd, Kompetenzstufe 3 ... 176
4.5.4 Aufgabe Regenwald. Fallskizze Kathrin, Kompetenzstufe 4 ... 181
4.6 Zusammenfassung und Diskussion ... 190
4.6.1 Schüler-Schwierigkeiten im Lösungsprozess ... 191
4.6.2 Schüler-Strategien im Lösungsprozess ... 195
5 Perspektiven für die Weiterentwicklung einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur ... 204
5.1 Die Wende zu einer prozessorientierten Didaktik ... 204
5.2 Aufgaben als Teil einer prozessorientierten Didaktik ... 205
5.2.1 Lern- und Testaufgaben ... 207
5.2.2 Modellierungsaufgaben und Aufgabenkultur ... 208
5.2.3 Aufgaben als Element von Lernumgebungen ... 210
5.3 Konzeptionelle Vorschläge für die Implementation einer prozessorientierten Didaktik in den Mathematikunterricht ... 211
5.3.1 Diagnostisches Wissen ... 211
5.3.2 Kooperative Strategien ... 212
5.3.3 Lehrerinterventionen ... 213
5.4 Allgemeindidaktische Perspektiven ... 214
5.4.1 Prozess-Ergebnis-Orientierung und die Bedingungen ihrer Realisierung im Unterricht ... 214
5.4.2 Wissensarten und Aufgaben mit Modellierungseigenschaften ... 220
6 Zusammenfassung der Arbeit unter allgemeindidaktischer Perspektive ... 227
7 Literaturverzeichnis ... 235
8 Abbildungsverzeichnis ... 258
9 Tabellenverzeichnis ... 260

1 Fragestellung und Aufbau der Arbeit

Die Auswahl von Aufgaben und deren Behandlung im Unterricht sind Hauptfelder sowohl der Fachdidaktik als auch der allgemeinen Didaktik. Messner formuliert dies wie folgt: „Die Probleme der allgemeinen Didaktik lassen sich in zwei große Fragenkomplexe aufgliedern […] Welche Ziele sollen durch Unterricht erreicht werden? Wie sollen Unterrichtssituationen beschaffen sein, um zu ermöglichen, dass diese Ziele erreicht werden“ (Messner, 1975, S. 39). Während die Auswahl fachbezogener Unterrichtsziele eng mit der Auswahl passender Aufgaben zusammenhängt, bezieht sich die Gestaltung der didaktischen Situationen auf die Behandlung der ausgewählten Aufgaben im Unterricht. Im Rahmen dieser Arbeit werden diese beiden Hauptfelder im Zusammenhang mit Lern- und Problemlöseprozessen betrachtet. Ein derartiger lernprozessorientierter Blick auf didaktische Probleme ist nicht neu. Schon Messner hat betont, dass die Beschaffenheit von Unterrichtssituationen auf Lernprozesse zurückgeführt werden kann (ebd., S. 39). Allerdings werden in der vorliegenden Arbeit nur fachbezogene Lernprozesse betrachtet. Lernprozesse im sozialen Bereich, in der Persönlichkeitsentwicklung sowie auch viele andere Komponenten der Didaktik stehen nicht im Vordergrund. Diese Konzentration auf das Fachliche ist mit den im nächsten Abschnitt ausführlich erläuterten Defiziten der deutschen Schüler in fachbezogenem Wissen und in Kompetenzen zu begründen. Sie bedeutet aber keineswegs, dass andere Bereiche der Bildung weniger wichtig sind und gegenüber dem fachlichen Lernen abgewertet werden sollen. Zwischen dem Kompetenzerwerb und dem Problemlöseprozess bestehen wechselseitige Beziehungen: Kompetenzen, die als erlernbare kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten definiert sind, erlauben es, Problemlösungen zu entwickeln. Im Lösungsprozess werden Kompetenzen zugleich auch weiter aufgebaut (Oelkers & Reusser, 2008, S. 27; Weinert, 2001b, S. 27).

In der vorliegenden Arbeit werden einige wichtige Ergebnisse internationaler Vergleichsuntersuchungen vorgestellt und die Hinwendung zur lernprozessbezogenen Betrachtung des Unterrichts begründet. Anschließend werden eine „neue“ Aufgabenkultur und ihr Kern – die Modellierungsaufgaben – dargestellt und ihre besondere Rolle in prozessorientierten Lernumgebungen beleuchtet. Da die Kompetenzentwicklung im engen Zusammenhang mit dem Problemlösen steht, werden zudem Problemlösetheorien betrachtet. Die Problemlöseprozesse bestehen hierbei aus der sukzessiven Bewältigung von Schwierigkeiten und aus dem Erwerb von Fähigkeiten, Fertigkeiten und Strategien. Es erscheint daher sinnvoll, die Schwierigkeiten und Strategien der Lernenden beim Lösen von kognitiv herausfordernden, realitätsnahen Modellierungsaufgaben in den Mittelpunkt der vorliegenden empirischen Untersuchung zu stellen und durch die Analyse von Schülerlösungsprozesse wichtige Elemente einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur zu identifizieren.

Fragestellung und Aufbau dieser Arbeit können wie folgt formuliert werden: Die Arbeit setzt sich mit didaktischen Aspekten einer neuen Aufgabenkultur und mit ihrem Kern, den Modellierungsaufgaben (vgl. Abschnitte 2.1 und 2.2) auseinander. Ziel der vorliegenden Arbeit ist, Schüler-Schwierigkeiten und -Strategien bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben empirisch zu erfassen, mit kognitiven Lern- und Problemlösetheorien zu verbinden und erste Bausteine einer Didaktik der Aufgabenkultur anzulegen. Hierzu werden ausgewählte Problemlösetheorien referiert (vgl. Abschnitt 2.3) und es erfolgt eine Fokussierung auf Schwierigkeiten und Strategien im Bearbeitungsprozess (vgl. Abschnitt 2.4). Anschließend wird die Bedeutung von Schüler-Strategien und -Schwierigkeiten in bestehenden didaktischen Konzepten beleuchtet (vgl. Abschnitt 2.5). Mit Hilfe des aus den vorherigen Abschnitten gewonnenen begrifflichen Instrumentariums wird die Eignung eines fachdidaktischen Analyseschemas (des Modellierungskreislaufs) für die Charakterisierung des Lösungsprozesses von Modellierungsaufgaben kritisch betrachtet (vgl. Abschnitt 3.1). Mit einem modifizierten Analyseschema werden die in dieser Studie eingesetzten Aufgaben theoretisch untersucht (vgl. Abschnitt 3.2). Im empirischen Teil (Kapitel 4) werden die Methode der Studie und ihre Ergebnisse vorgestellt. Schließlich werden im Abschlusskapitel (Kapitel 5) Konsequenzen für eine lernprozessorientierte Didaktik der (neuen) Aufgabenkultur gezogen.

2 Lernprozessorientierte Didaktik einer Aufgabenkultur und ihre theoretischen Grundlagen

2.1 Die neue Aufmerksamkeit auf Lernprozesse durch internationale Vergleichsstudien

Lange befasste sich die Erziehungswissenschaft in Deutschland mit Untersuchungen einzelner Schulen und Schulklassen, dem Entwurf didaktischer Modelle und ihrer Implementation in den Unterricht. Die vergleichende Evaluation des Bildungssystems wurde hierzulande, anders als in den anderen Industriestaaten, bis in die 90er Jahren hinein vernachlässigt (Köller, 2005; Weinert, 2001a). Als die Daten der ersten internationalen repräsentativen Vergleichsstudie TIMSS veröffentlicht und hohe Erwartungen der Bürger und der Politik an die Leistungsfähigkeit deutscher Schülerinnen und Schüler[1] nicht erfüllt wurden, kam es zu kontroversen Diskussionen und detaillierten Analysen möglicher Ursachen der Diskrepanz zwischen erwünschten und tatsächlichen Schülerleistungen. Datenanalysen der nächsten großen Vergleichsstudie PISA 2000, in der die Untersuchungsbereiche neu konzeptualisiert, um den Bereich Lesen ergänzt und auf eine breitere empirische Basis gestellt wurden, haben die Probleme des deutschen Bildungssystem noch deutlicher herausgestellt. Die ernüchternden Ergebnisse internationaler Vergleichsuntersuchungen wie der TIMS- und der PISA-Studie haben erhebliche Defizite der deutschen Schüler im Lesen, in der Mathematik und in den Naturwissenschaften aufgedeckt. Besonders große Probleme haben deutsche Schüler, wenn Aufgaben offen formuliert werden und mehrere Lösungen zulassen (Artelt, Stanat, Schneider, & Schiefele, 2001; Blum & Neubrand, 1998). Aufgaben aus den Naturwissenschaften und der Mathematik, die eine routinierte Anwendung von Standardalgorithmen erfordern, bearbeiten deutsche Schüler noch relativ gut, wogegen sie oft bei der Lösung anspruchvollerer Aufgaben scheitern (Blum, 2000, S. 23; Prenzel, Rost, Senkbeil, Häusler, & Klopp, 2001, S. 231). Die Ursachen dieser Befunde sind in den Rahmenbedingungen und individuellen Lernvoraussetzungen aber auch im Unterricht zu suchen (zu außerunterrichtlichen Determinanten der Schulleistungen siehe z. B. Helmke & Weinert, 1997). In dieser Arbeit wird ein grundlegender Aspekt des Unterrichs untersucht, nämlich die Lernprozesse der Schüler.

2.1.1 Unterrichtliche Lernprozesse in den Videostudien

Studien wie die PISA- und TIMS-Studie erlauben, durch den Vergleich von Schülerleistungen unterschiedlicher Länder, durch die Gegenüberstellung von Testsergebnissen und normativen Zielen im jeweiligen Fach sowie durch Schüler-, Eltern-, und Lehrer-Befragungen, eine Aus-

[1] Weiter in dieser Arbeit wird nur die männliche Form benutzt. Gemint sind aber stets beide Geschlechter.

sage über die Effektivität des Bildungssystems und folglich auch über die Zusammenhänge zwischen Unterrichtsmerkmalen und Schülerleistungen zu treffen. Über die Schüler und Lehrerbefragungen ist es ferner möglich, die Sicht der Schüler und Lehrer auf das unterrichtliche Geschehen zu erfassen. In den späten 90er Jahren wurde als Ergänzung zu den Leistungsvergleichstudien eine Vielzahl internationaler und nationaler Videostudien ins Leben gerufen, die der Frage nachgehen, wie die Lernprozesse in Klassenräumen ablaufen.

Wenn man bedenkt, dass Differenzen in Schülerleistungen zwischen untersuchten Staaten statt auf die unterrichtsbezogenen Faktoren ausschließlich auf kulturelle Traditionen zurückgeführt werden könnten, ist es vorstellbar, dass der gleiche Unterricht in verschiedenen Ländern unterschiedlich gut zur Wirkung kommt. Die Analyse videographierter Unterrichtssequenzen kann so auch Gemeinsamkeiten und Unterschiede in Unterrichtsmerkmalen weitgehend objektiv festhalten. Da komplexe Kulturunterschiede beim internationalen Vergleich jeder Art eine Rolle spielen und bei der Generalisierung der Ergebnisse berücksichtigt werden sollen, liefern die Videostudien auf diese Weise wichtige Informationen über das Bildungssystem (vgl. zu Grenzen der internationalen Leistungsvergleichsuntersuchungen Pekrun, 2002). Diese Vorteile finden in der internationalen und nationalen Unterrichtsforschung zunehmend Beachtung.

An der ersten internationalen Videostudie, der TIMSS 1995 Videostudie, nahmen drei Länder teil: Japan, die USA und Deutschland. Als Hauptanliegen der Studie bezeichnen Baumert und Lehman die Bereitstellung objektiver Indikatoren zur Beschreibung von Unterrichtsprozessen im Fach Mathematik (Baumert & Lehmann, 1997, S. 216). In allen drei Ländern wurden Zufallsstichproben aus an der TIMSS-Hauptuntersuchung beteiligten Schulen bzw. Klassen gezogen und ein bis drei Mathematikstunden in den ausgewählten Klassen videographiert. Alle Schüler- und Lehrer-Äußerungen wurden transkribiert, ins Englische übersetzt und mit Hilfe eines einheitlichen Kodierschemas analysiert.

Da in mehreren internationalen Leistungsvergleichsuntersuchungen gute Leistungen asiatischer Schüler nachgewiesen wurden, ist es besonders interessant zu untersuchen, worin sich der Unterricht in Japan von dem in Deutschland unterscheidet. Die Analyse von Daten der TIMSS 1995 Videostudie zeigt, dass dem japanischen und deutschen Unterricht unterschiedliche kulturelle Skripts zugrunde liegen. Diese gehen vermutlich auf implizite Vorstellungen über den Wissenserwerb zurück. Der videographierte japanische Unterricht wird gemäß konstruktivistischen Prinzipien gestaltet:

- Schüler bekommen von der Lehrperson ein mathematisches Problem vorgestellt, das individuell, in Partnerarbeit oder in Gruppen bearbeitet wird.

- Die Ergebnisse werden an der Tafel durch Schüler präsentiert, wobei der Lehrer bewusst unterschiedliche Lösungen diskutieren lässt.
- Nach der Präsentation fasst der Lehrer die Lösungen zusammen und gibt das nächste je nach Kontext oder mathematischen Instrumenten variierende Problem auf.

Das Hauptziel des japanischen Unterrichts ist vermutlich, vor allem zu lernen, wie Probleme mit Hilfe mathematischer Verfahren bearbeitet werden. Diese Vermutung wird durch die ausgesprochene Verstehensorientierung der Lehrkräfte unterstützt. Mehr als zwei Drittel der japansichen Lehrkräfte gibt in der videographierten Unterrichtsstunde als primäres Unterrichtsziel die Förderung des mathematischen Verständnisses bei den Schülern an (Baumert & Lehmann, 1997, S. 227).

Der Mathematikunterricht in Deutschland läuft mehrheitlich nach einem anderen Konzept ab (ebd.):

- Eine typische Mathematikstunde beginnt mit der Durchsicht und Besprechung von Hausaufgaben.
- Es folgt eine kurze Wiederholungsphase.
- Variante 1: Der neue mathematische Stoff wird im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch, das auf eine einzige Lösung hinführt, relativ kurzschrittig erarbeitet und vom Lehrer an der Tafel dokumentiert.
- Variante 2: Wenn das Thema schon in der vorhergegangenen Stunde vorbereitet wurde, entwickelt ein Schüler – unterstützt von der Klasse und dem Lehrer – eine Aufgabenlösung an der Tafel.
- Anschließend werden ähnlichen Aufgaben in Stillarbeit eingeübt.

Der deutsche Mathematikunterricht ist scheinbar weniger auf das Verständnis und mehr auf die Wissensvermittlung fokussiert. Die Mehrheit der deutschen Lehrkräfte gab bei der anschließenden Befragung an, mit den gezeigten Unterrichtsstunden ein sicheres Beherrschen mathematischer Verfahren erreichen zu wollen. Auffällig ist, dass die Lehrer in Deutschland zwar oft ein relativ komplexes Problem in der gemeinsame Erarbeitungsphase wählen, dieses jedoch im fragend-entwickelnden Unterricht in mehrere elementare Teilprobleme untergliedert wird. Die Teilprobleme werden den Schülern im schnellen Frage-Antwort-Spiel präsentiert und stark gelenkt bearbeitet (Klieme, Schümer, & Knoll, 2001). Dieses Phänomen wird als „kleinschrittige Aufgabenbearbeitung“ bezeichnet und ist charakteristisch für einen eng geführten, stark lehrergesteuerten Unterricht. Die in Deutschland vorherrschende kleinschrittige Erarbeitung von Unterrichtsinhalten in Form von fragend-entwickelndem Unterricht bietet den Schülern wenig Möglichkeiten zum Nachdenken und fördert in der Regel ihre kognitive Selbständigkeit nur unzureichend. Unterricht soll stattdessen so gestaltet werden, dass die eigene Tätigkeit der Schüler herausgefordert wird (Messner, 2004a, S. 29). Befragungen der Schüler und Lehrer zeigen, dass Schüler im Unterricht oft unterfordert sind und die Lehrkräfte dies nur in geringem Ausmaß wahrnehmen (Helmke, 2008). Das kognitive Potential der Lernenden, das sich durch die Erhebung allgemeiner Problemlösefähigkeit einschätzen lässt, wird im deutschen Fachunterricht anders als in vielen anderen Ländern nicht ausgenutzt (Leutner, Klieme, Meyer, & Wirth, 2004).

Die deutlichen Differenzen zwischen japanischen und deutschen Unterrichtsskripts haben im Kontext mit den unterschiedlichen Leistungsdaten beider Länder eine große Beachtung erlangt. Die theoretisch postulierten Vorteile der konstruktivistischen Lernorientierung, die in Fach- und Allgemeindidaktik favorisiert werden, konnten durch die TIMS 1995 Videostudie empirisch bestätigt werden. In den pädagogisch-psychologischen Forschungen war dies nur selten der Fall (vgl. u.a. Kirschner, Sweller, & Clark, 2006). Um zu prüfen, ob der Unterricht in den anderen im Bildungsbereich führenden Ländern („Hochleistungsländern“) nach einem ähnlichen Unterrichtsskript wie dem japanischen erfolgt, wurden andere Länder in die Nachfolgeuntersuchung TIMSS 1999 Videostudie mit einbezogen. Die Analyse der Videodaten unter strengeren methodologischen Bedingungen als in TIMSS 1995 hat keine solchen deutlichen Muster mehr wie beim deutschen oder japanischen Unterrichtskript hervorgebracht. Der japanische Unterricht steht weiterhin der idealtypischen Vorstellung einer fachspezifischen Unterrichtsqualität am nächsten, zu beobachten etwa an der Diskussion unterschiedlicher Lösungswege oder dem explorierend-entdeckenden Vorgehen. Es gibt aber auch Länder wie z.B. die Schweiz, in denen Unterricht ähnlich wie in Deutschland abläuft, die Schüler aber deutlich bessere Leistungen am Ende der Sekundarstufe 1 erbringen. Zusammenfassend schreiben Pauli und Reusser: „Der Unterricht in den fünf “Hochleistungsländern“ entsprach damit keineswegs den Idealvorstellungen eines guten Mathematikunterrichts normativer fachdidaktischer Diskurse“ (Pauli & Reusser, 2006, S. 782).

Eine naheliegende Folgerung aus den Ergebnissen der TIMSS 1999 Videostudie ist, dass es im Unterricht nicht auf die unmittelbar beobachtbaren Sichtstrukturen ankommt. Viel wichtiger als die Lehr-Lern-Skripts sind die Tiefenstrukturen des Unterrichts (Pauli & Reusser, 2006), die sich in einer Reihe von Merkmalen wie etwa dem Strukturierungsgrad oder der kognitiven Aktivierung niederschlagen, sich jedoch nicht auf die bloße methodische Abfolge reduzieren lassen. Die Ergebnisse der TIMSS 1999 Videostudie sowie auch die Folgerungen zur Bedeutung der Tiefenstrukturen für die Lern- und Leistungsentwicklung wurden in der deutsch-schweizerischen Videostudie bestätigt (ebd.).

Trotz deutlicher Differenzen in den Schülerleistungen zwischen der deutschsprachigen Schweiz und Deutschland wurden in der deutsch-schweizerischen Videostudie keine kulturspezifischen Unterschiede in den Unterrichtsmustern festgestellt (Hugener, et al., 2009). Die Analyse der Videoaufnahmen zur Einführung in das Thema Satz des Pythagoras hat festgestellt, dass es in beiden Ländern durchaus Lehrkräfte gibt, die entdecken lassendes Lernen anhand von anspruchsvollen Problemstellungen praktizieren. Auch die Variation von Unterrichtsmustern ist in beiden Ländern vorhanden: von der Demonstration der Lösung durch die Lehrperson über die gemeinsame Erarbeitung im fragend-entwickelnden Unterricht unter einer starken Führung durch die Lehrperson bis hin zum endecken lassenden Lernen in Einzel- und Gruppenarbeit. Streng genommen kann man deswegen nicht über „das deutsche Unterrichtsskript" sprechen. Auch in anderen Ländern ist ein stark lehrergeleiteter Unterricht mit fragend-entwickelnden Erarbeitungsphasen keine Seltenheit.

Auch wenn das Unterrichtsskript nicht länderspezifisch ist, bleibt die Frage, ob sein Aufbau über die Unterrichtsqualität und somit auch über die Schülerleistungen entscheidet. Jedoch zeigen die Untersuchungen (vgl. z.B. Seidel & Prenzel, 2006), dass Schüler, die gemäß den Prinzipien konstruktivistischen Lernens unterrichtet wurden, nicht zwangsläufig höhere Lern- und Leistungszuwächse aufweisen. Ein Einfluss des Unterrichtsskripts auf objektiv messbare Leistungsfortschritte konnte auf diese Weise nicht nachgewiesen werden. Der von externen Beobachtern eingeschätzte Grad der kognitiven Aktivierung von Schülern hängt allerdings mit der Art des identifizierten Unterrichtsmusters zusammen: Schüler im entdecken lassendem Unterricht gemäß dem japanischen Vorbild berichten häufiger über eine höhere kognitive Aktivität (Hugener, et al., 2009).

Die Analyse der Sichtstrukturen allein kann nur wenig über die Leistungsfortschritte von Lernenden aussagen. Es bedarf einer Erweiterung auf die Betrachtung von lernprozessbezogenen Tiefenstrukturen des Unterrichts. Die Analyse von Tiefenstrukturen, wie zum Beispiel der kognitiven Aktivierung, offenbart auf diese Weise signifikante Einflüsse auf die Schülerleistungen. Die kognitive Aktivierung der Schüler wurde in der deutsch-schweizerischen Videostudie neben der effizienten Klassenführung als ein leistungsdeterminierender Faktor identifiziert (Lipowsky, et al., 2009). In dieser Videostudie besteht das Konstrukt „kognitive Aktivierung" vor allem aus zwei Facetten: fachspezifischen kognitiven Aktivitäten im Unterricht und dem Zusammenhang zwischen Lehrerinstruktionen und Vorwissen der Schüler. Die kognitive

Aktivierung wurde hierfür durch eine hoch inferente[2] Beurteilung mit Hilfe folgender Fragen bestimmt:

- Wurden die Schüler zur kognitiven Aktivität angeregt?
- Wie stark wurde das Vorwissen der Schüler in den Lösungsprozess mit einbezogen?
- Unterstützen Lehrer-Schüler-Interaktionen den Erwerb neuer und die Erweiterung bestehender Wissensstrukturen?
- Wurden Schülervorschläge im Unterricht aufgegriffen und weitergeführt?
- Orientiert sich der Lehr-Lernprozess auf einen direkten Wissenstransfer (negativer Einfluss auf die kognitive Aktivierung)?

Diese Operationalisierung des Konstrukts „kognitive Aktivierung" unterscheidet sich von der in der COACTIV-Studie. In COACTIV wurde die kognitive Aktivierung breiter erfasst und z.T. auch anders definiert. Zum einen ist sie ein Produkt aus der Lehrer- und Schüler-Sicht auf den Unterricht. Zum anderen wird sie durch die von Experten eingeschätzte Qualität eingesammelter Aufgaben erfasst. Hierzu wurde Hausaufgaben, Klassenarbeiten und Unterrichtsaufgaben verwendet (Jordan, et al., 2008; Kunter, et al., 2007; Kunter, et al., 2008). Durch die Verwendung unterschiedlicher Datenquellen und unterschiedlicher Operationalisierungen können die Ergebnisse beider Untersuchungen nur eingeschränkt miteinander verglichen werden. Notwendig wäre eine systematische Konstruktvalidierung, die den unterschiedlichen Operationalisierungen einen theoretischen Rahmen gibt. Hierzu könnten neben den genannten Indikatoren der kognitiven Aktivierung auch folgende als erfolgsversprechend genannte Aspekte in die wissenschaftliche Diskussion aufgenommen werden (Klieme, et al., 2001, S. 51; Lipowsky, et al., 2009):

- reichhaltige Lerngelegenheiten,
- Intensität der Teilnahme an sachbezogenen Diskussionen,
- fachspezifische Klarheit,
- kognitive Herausforderungen bei der Aufgabenbearbeitung,
- genetisch-sokratisches Vorgehen bei den Übungen, das in diesem Zusammenhang darin besteht, die Schüler erst in die Irre laufen zu lassen und nicht gleich beim ersten falschen Lösungsschritt einzugreifen.

Eine ungeklärte Frage ist, ob eine kognitive Aktivierung in unterschiedlichen Phasen (z.B. Einführung, Übung und Durcharbeitung) mit gleichen Mitteln erreicht werden kann. Studien zur Wirkung einer variierenden Aufgabenschwierigkeit auf die Schülerleistungen geben Hin-

[2] Bei hoch inferenten Beobachtungsinstrumenten ist, im Gegensatz zu niedrig inferenten Instrumenten, der Anteil an interpretativen Schlussfolgerungen (Inferenzen) erhöht(Clausen, Reusser, & Klieme, 2003).

weise auf differenzielle Effekte bei der Leistungsentwicklung. Während leichte Aufgaben (mit einer individuellen Lösungswahrscheinlichkeit von 90%) beim Erkunden neuer Regeln und neuen Wissens im entdecken lassenden Lernen leistungsförderlich sind (Nußbaum & Leutner, 1986), eignen sich mäßig schwierige Aufgaben (mit einer individuellen Lösungswahrscheinlichkeit von 30%) viel besser für die individuellen Übungsphasen (Schabram, 2007). Das zeigt exemplarisch, dass eine kognitive Aktivierung auf unterschiedliche Weise erreicht werden kann und wahrscheinlich von Unterrichtsmethoden und Unterrichtsphasen abhängig ist.

Trotz mehrerer ungeklärter Fragen zeigt das Konstrukt „kognitive Aktivierung“, wie Tiefenstrukturen des Denkens empirisch fassbar gemacht werden können. Seine Operationalisierung ist zweifellos ein wichtiger Schritt in die Richtung einer Identifikation von lernprozessbegleitenden Faktoren.

Eine Konsequenz aus den Befunden der Videostudien lautet, dass man die Lernprozesse durch die Vorgabe eines bestimmten Unterrichtsmusters nicht vorbestimmen kann. Rezeptartige Anweisungen, wie etwa: „Nehmen Sie eine komplexe Aufgabe, lassen Sie diese Aufgabe in Gruppen bearbeiten und anschließend unterschiedliche Lösungen im Plenum besprechen“, führen nicht automatisch zu einer Leistungssteigerung. Lern- und Leistungsentwicklung im Unterricht werden über die kognitive Aktivierung angeregt, die eng mit anderen Faktoren wie Adaptivität, Lehrerunterstützung, Lehrerfeedback und effektiver Klassenführung zusammenhängen.

Im folgenden Unterabschnitt wird auf die wesentlichen Veränderungen im Bildungssystem eingegangen, die unterrichtliche Lernprozesse intensivieren sollen.

2.1.2 Bildungsstandards im Kontext der Umsteuerung des Bildungssystems

In der deutschen Bildungspolitik haben die unbefriedigenden Ergebnisse der Leistungsvergleichsstudien eine Welle von Maßnahmen ausgelöst, die das Bildungssystem nachhaltig beeinflussen sollen. Die angestrebten Veränderungen umfassen wissenschaftliche, schulpraktische und bildungspolitische Domänen.

Im wissenschaftlichen Bereich wurden größere finanzielle Ressourcen für die Unterrichtsforschung zur Verfügung gestellt und u.a. ein längerfristig angelegtes DFG-Schwerpunktprogramm „Bildungsqualität von Schule“ (BIQUA) gestartet. Das Ziel des Schwerpunktprogramms war es, „Forschung zu verstärken, die dazu beiträgt, die Ergebnisse internationaler Vergleichsstudien mit Blick auf Deutschland besser zu erklären“ (Prenzel &

Allolio-Näcke, 2006, S. 9). Die in das Schwerpunktprogramm aufgenommenen Projekte haben zunächst ein besonderes Augenmerk auf die Bedingungen des fachlichen und fächerübergreifenden Lernens im Unterricht in und außerhalb der Schule gelegt. Darüber hinaus wurde aber auch die Entwicklung von unterschiedlichen Kompetenzen in ihrer Wechselwirkung untersucht. Thematisch sind alle BIQUA-Projekte im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich verortet.

Auf der schulpraktischen Ebene wurde nach der TIMS-Studie eine Expertengruppe unter der Leitung von Baumert einberufen und das Gutachten für die Vorbereitung des Programms SINUS[3] erstellt (BLK, 1997). Ein charakteristisches Merkmal des BLK-Modelversuchs SINUS ist der Einbezug der Lehrer-Kollegien in die einzelnen Module des Programms sowie die wissenschaftliche Begleitung der Lehrerkooperation. Solche langfristigen Kooperationsmaßnahmen sind für die Weiterentwicklung der Schul- und Unterrichtskulturen unabdingbar. Analysen der Schulveränderungen in anderen Ländern bestätigen die Bedeutung der Zusammenarbeit von Lehrkräften und weisen auf die wichtige Rolle des SINUS-Projektes als Pilot-Projekt im schulpraktischen Bereich hin (Oelkers & Reusser, 2008).

Durch das Baumert-Gutachten wurde aber auch eine andere wesentliche Änderung im Bildungssystem initiiert – die Entwicklung von schulübergreifenden Qualitätsstandards (BLK, 1997, S. 95) –, deren theoretische Fundierung und Konzeptualisierung in der Klieme-Expertise (Klieme, et al., 2003) und im Gutachten von Oelkers und Reusser fortgesetzt wurde (Oelkers & Reusser, 2008). In der Einführung von Qualitätsstandards oder Bildungsstandards, wie sie später genannt wurden, zeigt sich eine bildungspolitische Konsequenz aus der TIMS- und der PISA-Studie: die Umsteuerung des Bildungssystems von „Input“ auf „Output“ (vgl. Klieme, et al., 2003, S. 11-12). Als eine zentrale Begründung der Umsteuerung des Bildungssystems werden sehr gute Ergebnisse der skandinavischen und einiger anglo-amerikanischer Staaten genannt, die – so die Autoren – „eine systematische Qualitätssicherung betreiben“ (ebd., S. 8).

Der über Testresultate und -rückmeldungen gesteuerte Output soll Hinweise sowohl auf die Anpassung der Ziele und Ressourcen des Bildungssystems beim Input als auch auf die Verbesserung der Qualität der Lehr-Lernprozesse liefern (Oelkers & Reusser, 2008). Durch die Ergänzung der Lehr- und Rahmenpläne mit übergeordneten Bildungsstandards wird versucht, den Lehrern bewusst zu machen, dass es nicht genügt, nur einzelne Themen im Unterricht zu behandeln, sondern dass hierdurch auch die fachlichen und fächerübergreifenden Kompeten-

[3] SINUS ist die Abkürzung von „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts in der Sekundarstufe I“

zen geschaffen werden sollen. Durch die Kontrolle des Leistungsstandes mit Hilfe von standardisierten Tests soll überprüft werden, über welches Wissen, welche Kompetenzen und Fertigkeiten die Schüler an den zentralen Übergangsstellen des Bildungssystems verfügen.

Der Prozess der Umsteuerung des Bildungssystems ist mit unterschiedlichen Gefahren verbunden (vgl. Zusammenfassung der Kritik bei Oelkers & Reusser, 2008, S. 52-60). Nur durch Kontrolle und Objektivierung von Schülerleistungen mit Hilfe der Leistungsmessungen ist es nicht möglich, eine Verbesserung der Bildungsqualität zu erreichen (vgl. z.B. Blum, Messner, & Pekrun, 2004; Messner, 2004b, S. 700). Zu einer erfolgreichen Implementation der Bildungsstandards in den Unterricht gehört auch die Auseinandersetzung mit den Fragen „Was?“ und „Wie?“. Die Antwort auf die Frage „Was?“ wird in den Bildungsstandards gegeben: Schüler bedürfen eines langfristigen, den gesamten Verlauf ihrer Schulzeit begleitenden Aufbaus von Kompetenzen, Wissen und Fertigkeiten. Die Frage „Wie?“ wird dagegen weder in den Bildungsstandards beantwortet, noch kann sie pauschal beantwortet werden (KMK, 2004, S. 18). Hier können experimentell fundierte didaktische Forschungen im Fachunterricht mögliche und effiziente Wege bei der Implementation der Bildungsstandards in den Lehr-Lernprozess aufzeigen.

Die Frage nach einer erfolgsversprechenden Implementation der Bildungsstandards darf an dieser Stelle nicht unterschätzt werden. In der Politik wird unter der Implementation häufig nur die Installation von Testverfahren und Evaluationsmechanismen verstanden, die das Erreichen der Bildungsstandards auf der Individual-, Klassen-und Schulebene überprüfen und an die Schulen rückmelden sollen (Messner, 2006). Sollte die Evaluation gut durchdacht und organisiert werden, dann – so die Hoffnung – kann der Unterricht an die Bildungsstandards angepasst und aus der Schule können mündige Bürger entlassen werden, die ihr im Unterricht erarbeitetes Wissen und erworbene Kompetenzen in Beruf und Alltag verwenden können. Hinter solch einer Wunschvorstellung stehen aber Annahmen, die bei einer genauen Betrachtung nicht selbstverständlich erscheinen.

Eine der Annahmen bezieht sich auf den Vergleich von Bildung und Produktion (Messner, 2004b). In der „Bildungsfabrik“ Schule soll demnach mit der Einführung der Standards die Produktionspalette geändert werden, was zwar eine gewisse Umstellung des Betriebs erfordert, den Herstellungsprozess aber im Kern unverändert lassen soll. Vernachlässigt wird bei diesem Modell, dass Wissen und Kompetenzen in Schülerköpfe nicht implantiert werden können. Die Änderung von Lehrzielen ist nicht mit der Änderung von Lernzielen gleichzustellen (vgl. in diesen Zusammenhang die Diskussion zum Lehr-Lern-Kurzschluss bei Holzkamp, 1993). Wie die neuen an die Bildungsstandards orientierten Lehrziele an die Schüler herangetragen werden sollen, bleibt noch weitestgehend ungeklärt.

Die andere Annahme bezieht sich auf das Zusammenwirken von Bildungszielen und Schul- bzw. Unterrichtsmethoden. Man kann nicht davon ausgehen, dass die Lehrer allein nach dem Lesen der Bildungsstandards bereits wissen werden, wie man neuen Anforderungen gerecht wird. Nachweislich tendieren Lehrer dazu, die ihnen vertrauten und in der Praxis erprobten Unterrichtsmethoden weiter zu praktizieren (Seidel & Prenzel, 2006). Es ist eher davon auszugehen, dass die Lehrkräfte sich bemühen, die geänderten Ziele mit bewährten didaktischen und methodischen Instrumenten zu erreichen. Sollten aber neue Bildungsziele ein breiteres methodisches und didaktisches Repertoire voraussetzen, was man aufgrund der vorliegenden Forschungslage vermuten kann (vgl. Hascher & Hofmann, 2008; Messner, 2004a), würde die Implementation der Bildungsstandards an dem im letzten Unterabschnitt beschriebenen, weit verbreiteten (deutschen) Unterrichtsskript selbst bei einem perfekten Evaluationssystem scheitern. Die Schul- und Unterrichtspraxis sollte deswegen parallel zur Einführung der Bildungsstandards weiterentwickelt werden (Messner, 2006).

Wissenschaftlichen Begleitern sind diese genannten wie auch viele andere Schwierigkeiten bei der Implementation von Bildungsstandards bewusst. In der Expertise von Oelkers und Reusser wird unter dem Punkt „Anforderungen und Leitideen der Bildungsstandards“ u.a. auf die „Verankerung der Reform in den regionalen und lokalen Kontexten einer auf den Unterricht zielenden pädagogischen Qualitätsentwicklung“ hingewiesen (Oelkers & Reusser, 2008, S. 245). Allerdings wird hierbei der Fokus auf globale Voraussetzungen der Implementation, wie z.B. auf die Strategien der Einführung der Bildungsstandards, gelegt. Die Autoren unterstreichen an mehreren Stellen zu Recht die Bedeutung der Einführung einer Synthese zwischen den Top-down- und Bottom-up-Strategien. Eine Reformierung des Bildungssystems ausschließlich durch die Top-down-Strategie, bei der alle Veränderungen von oben nach unten verordnet werden, gilt nachweislich als wenig effektiv. Durch die Mischformen der Regulierung, welche die Partizipation der beteiligten Schulen und Lehrkräfte an Reformen voraussetzen, ist es eher möglich, die angestrebten Veränderungen zu realisieren (Sabatier, 1986). Schon allein diese Ausführungen zeigen, wie schwierig die Probleme sind, denen auf der Implementationsebene begegnet werden soll. Trotz dieser Schwierigkeiten dürfen die *fachspezifischen* Bildungsstandards nicht vernachlässigt werden. Nur durch eine fachliche Konkretisierung von Zielen und Kompetenzen ist es möglich, Lehrkräften handfeste Orientierungen an die Hand zu geben. Diese Orientierungen müssten didaktische und methodische Hinweise miteinbeziehen, die in Form von Handreichungen und Fortbildungsangeboten an die

Lehrkräfte weitergereicht werden sollen. Ohne fachspezifische und fachübergreifende Fortbildungsangebote zu den Bildungsstandards, die so in den Fachkollegien besprochen und im Unterricht erprobt werden können, dürfte die Implementation der Bildungsstandards trotz anderer gelungener Reformkomponenten scheitern.

Die Akzeptanz der Bildungsstandards durch die Lehrkräfte ist u.a. von der Qualität der Aufgabenbeispiele abhängig (Specht & Freudenthaler, 2008). Sind Aufgabenbeispiele überzeugend und spiegeln sie den Geist der neuen Bildungsziele wieder, steigt auch die Bereitschaft, diese Änderungen im Unterricht und in der Schule zu implementieren. Die Aufgabenbeispiele können aber nur im Rahmen einer fachspezifischen Ausarbeitung vorbereitet werden (bzgl. Mathematik siehe Blum, Drüke-Noe, Hartung, & Köller, 2006). Aus diesem Grund bedarf die Konkretisierung der Bildungsstandards immer einer Domäne, in der abstrakt formulierte Ziele eine konkrete Gestalt annehmen können. Für diese Arbeit wurde der Mathematikunterricht als Arbeitsdomäne ausgewählt. Es werden aber auch einige Verbindungen zum Physikunterricht aufgezeigt.

Bevor die neue Aufgabenkultur als der zentrale Punkt der prozessbezogenen Lernumgebungen behandelt wird, soll auf die Problematik der Relation zwischen Bildungsstandards und Bildung selbst hingewiesen werden. Die Bildungsstandards können dem Anspruch, eine umfassende Bildung festzuschreiben, allein nicht gerecht werden. Sie konzentrieren sich nur auf das Fachliche und dies auch nur in ausgewählten Kernbereichen. Viele andere Aspekte der Bildung werden damit außer Acht gelassen. Diese dürfen aber nicht bei der Entwicklung von Schule und Unterricht vernachlässigt werden. Mit dem Erreichen von hochangesetzten fachspezifischen Zielen wird keineswegs zugleich auch allgemeine Bildung erworben. Neben Wissen und Fähigkeiten gehören auch Haltungen und Wertvorstellungen zu dem, was aus einem Individuum einen Menschen macht. Die Schule darf nicht nur auf eine Institution reduziert werden, die ausschließlich Wissen und Fähigkeiten produziert. „Es bedarf einer Schule, in der Kinder und Jugendliche ihre soziale, kulturelle, ihre Wert- und Verantwortungsdimension entfalten können, einer Schule, die […] als ‚Gesellschaft im Kleinen' (Hentig, 2003, S. 214ff) gestaltet wird und funktioniert" (Messner, 2004b, S. 703).

Durch die in den Bildungsstandards und Vergleichsarbeiten angeleitete „Output"-Orientierung haben die Lernprozesse der Schüler in der Unterrichtsforschung an Bedeutung gewonnen. Die Didaktik kann sich in diesem Zusammenhang die folgende Frage stellen: Wie können die Lernprozesse der Schüler derart optimiert werden, dass die Bildungsqualität verbessert wird und die Bildungsstandards erreicht bzw. eingehalten werden können? Ein Weg hierzu führt über die Einführung einer so genannten neuen Aufgabenkultur in den Unterricht.

2.2 Die Aufgabenkultur als lernprozessbezogene Lernumgebung

Zu den wichtigen Bestandteilen des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts gehört die Auswahl von zum Nachdenken herausfordernden Aufgaben und deren adäquate Behandlung im Unterricht (BLK, 1997, S. 85). Diese zwei Komponenten bilden auch den Kern einer neuen Aufgabenkultur. Die fundamentale Bedeutung der Aufgabenkultur für einen kognitiv aktivierenden Unterricht sowie die an deutschen Schulen vorhandenen Defizite in diesem Bereich wurden in der TIMSS-Videostudie und in der PISA-Studie empirisch belegt (Baumert & Lehmann, 1997; Klieme, et al., 2001).

Im Fach Mathematik ist das kognitive Potential der Aufgaben ein wichtiger Indikator mathematischer Leistungen (Kunter, et al., 2006). Dies ist nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, dass sich Schüler in Mathematik ca. 80% der Unterrichtszeit mit Aufgaben beschäftigen (Pauli & Reusser, 2006). Auch in anderen Fächern dürfte viel Unterrichtszeit für die Lösung von Aufgaben verwendet werden. Vor diesem Hintergrund wäre es wichtig zu wissen, welches Aktivierungspotential die im Unterricht und Klassenarbeiten eingesetzten Aufgaben besitzen. Die Daten aus der TIMSS-Videostudie 1995 und dem an PISA 2003 angekoppelten Forschungsprojekt COACTIV zeigen, dass im deutschen Mathematikunterricht kognitiv-aktivierende Aufgaben nur selten behandelt werden (Jordan, et al., 2008; Kunter, et al., 2006). Zudem werden bei der Aufgabenwahl nicht alle Fachkompetenzen gleichermaßen beachtet. „Mathematisches Argumentieren findet kaum statt, die Aufgabentexte sind sprachlich wenig anspruchsvoll, es muss nur selten mit anspruchsvollen mathematischen Darstellungen umgegangen werden, außermathematische und innermathematische Bezüge werden im Sinn des Modellierens nur wenig hergestellt“ (Jordan, et al., 2008). Diese Probleme heben die Notwendigkeit hervor, die Forschungen zum Thema Aufgabenkultur zu intensivieren.

Als eine Konsequenz aus den genannten Defiziten des deutschen Bildungssystems, die sich schon in den Ergebnissen der TIMS-Studie vor mehr als 10 Jahren ankündigten, wurde die Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht an die erste Stelle in den Qualitätsverbesserungsmaßnahmen des Baumert-Gutachtens der BLK gesetzt (BLK, 1997, S. 84). Da die momentane Aufgabenpalette in der Schule durch ungewohnte Aufgabentypen erweitert werden soll, die „mehrere Vorgehensweisen und unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten zulassen oder geradezu anbieten“ (s.o. S. 85), kann in diesem Zusammenhang von „neuen“ Aufgaben gesprochen werden. Ihren Ursprung haben die Begriffe der Aufgabenkultur und der neuen Aufgaben im naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterricht. In den letzten Jahren werden diese Begriffe zunehmend auch in anderen Unterrichtsfächern verwendet (siehe z.B. Eikenbusch, 2007; Messner, 2004a). Ein Zeichen für die wachsende Bedeutung der Aufgabenkultur setzt eine Expertise von Oelkers und Reusser zu den Bildungsstandards (Oelkers & Reusser, 2008). Im Kontext der Bildungsstandards ist die Aufgabenkultur fest mit der Kompetenzentwicklung verbunden. Die Autoren der Expertise schreiben: „Bildungsstandards im engeren Sinne beziehen sich auf die Zielerreichung auf verschiedenen Stufen oder Kompetenzniveaus, die regelmäßig und fortlaufend getestet werden soll. Die curricularen Gehalte der Schulfächer erhalten dabei eine neue Form, nämlich als Aufgabenkulturen, die sich auf den curricularen Kern eines Faches oder eines Lernfeldes beziehen“ (Oelkers & Reusser, 2008, S. 36).

2.2.1 Aufgaben und ihre Eigenschaften

Das Thema „Aufgaben“ hat schon immer eine Rolle in den didaktischen Diskussionen gespielt, wurde jedoch zugleich kaum systematisch untersucht (Thonhauser, 2008, S. 7ff). Beim Bearbeiten einer Aufgabe wird die Beziehung zwischen dem „Ich“ und der Welt realisiert. In der neuen Aufgabenkultur steht „Ich“ im Bezug zu einem Teil der Welt – zur Realität. In den Mittelpunkt der Aufgabenkultur werden lebensnahe Probleme gestellt, die das fachbezogene Handeln von Lernenden erfordern. Die Bearbeitung einer mathematischen Modellierungsaufgabe verlangt z.B. die Anwendung mathematischer Werkzeuge und ermöglicht Lernenden, ein lebensweltliches Phänomen besser zu verstehen.

Aufgaben werden häufig in Test- und Lernaufgaben eingeteilt und diese beiden Kategorien unabhängig voneinander diskutiert (vgl. zum Begriff „Aufgabe“ auch Klauer, 1987; Renkl, 1991). Einerseits werden mit Aufgaben „im Rahmen der mündlichen, schriftlichen, gestalterischen oder praktischen Leistungsfeststellungen die jeweiligen Anforderungen operationalisiert“ (Thonhauser, 2008, S.10). Eine Testaufgabe dient dazu, das Vorhandensein einer Kompetenz und Fertigkeit zu überprüfen. Andererseits gelten Aufgaben als Vehikel im Lernprozess (ebd.). Lernaufgaben sollen hingegen vorhandene Kompetenzen entwickeln bzw. neue Kompetenzen aufbauen. Solch eine bipolare Einteilung wird dem Begriff „Aufgabe“ jedoch nicht immer gerecht. Bis auf spezielle Aufgabenformate, wie etwa dem Multiple-Choice-Aufgabenformat, kann man sich durchaus Testaufgaben vorstellen, die auch im Unterricht zu Lernzwecken eingesetzt werden können und umgekehrt. Test- und Lernaufgaben unterscheiden sich zwar hinsichtlich ihres Zwecks, sind sich aber zugleich ähnlich. Beide beziehen sich auf einen bestimmten Inhalt, bezüglich dessen ein bestimmtes (Lösungs-) Verhalten erwartet wird (Klauer & Leutner, 2007). Wenn durch die Bearbeitung einer Sequenz von Aufgaben Lernprozesse angeregt werden sollen, bedeutet das, dass der Lösungsprozess einer Aufgabe

Auskunft über das erreichte Lernniveau eines Schülers geben und auf seine Lernschwierigkeiten hinweisen kann. Zugleich soll die Aufgabe Lernmöglichkeiten anbieten.

Wenn die Testaufgaben die genannten Anforderungen erfüllen, sind sie zugleich auch Lernaufgaben (vgl. Leutner, Fischer, Kauertz, Schabram, & Fleischer, 2008; siehe auch Selbstdiagnosebögen von Reiff, 2006). Bei der Konstruktion von Aufgaben sollte jedoch berücksichtigt werden, ob diese in Lern- oder in Leistungssituationen verwendet werden sollen. Wird eine Aufgabe eingesetzt, um Lernprozesse anzuregen, sollte bei der Aufgabenkonstruktion die Aufmerksamkeit stärker auf den möglichen Lernertrag gerichtet sein. Wenn die Aufgabe für einen Test entwickelt wird, stehen spezifische psychometrische Eigenschaften wie etwa Trennschärfe (vgl. Lienert & Raatz, 1994) im Vordergrund (Leutner, et al., 2008). Auch die Schwierigkeit einer Aufgabe wird in Lern- und Leistungssituationen unterschiedlich gewichtet. Ein Test enthält sowohl Aufgaben, die fast alle lösen können, als auch Aufgaben, die kaum eine Testperson erfolgreich bearbeiten kann. Dies ist notwendig, um im oberen und unteren Bereich der Leistungen ausreichend differenzieren zu können. Der Test orientiert sich nicht an den vorhandenen Kompetenzen. Stattdessen wird eine Norm gesetzt, die Lernende erfüllen müssen. Bei den Lernaufgaben sind beide Schwierigkeitspole eher selten zu finden. Der Schwierigkeitsgrad soll an die individuellen Bedürfnisse der Lernenden angepasst werden, sodass Schüler bei der Bearbeitung einer Aufgabe neue Elemente erlernen bzw. einüben. Zugleich darf eine Aufgabe nicht zu schwer sein. Zu schwere Aufgaben schränken die Selbständigkeit und dadurch auch den Lernertrag stark ein. Diese Beispiele zeigen, dass die Unterteilung in Lern- und Leistungsaufgaben in einigen Situationen hilfreich, in anderen dagegen auch vernachlässigbar ist.

Eine feinere Einteilung der Aufgabentypen wird von Müller und Helmke vorgeschlagen und beinhaltet neben Testaufgaben (im Originaltext „Aufgaben für Leistungsdiagnostik“) und Lernaufgaben zudem noch Übungs- bzw. Anwendungsaufgaben, mit denen Lernende ihr an Lernaufgaben erworbenes Wissen auf andere Kontexte übertragen und ihre Fertigkeiten einüben (siehe auch Astleitner, 2008, S. 74; Müller & Helmke, 2008). In der fach- und allgemeindidaktischen Literatur werden Aufgaben mit mehreren Lösungsmöglichkeiten (so genannte Aufgaben mit einer divergenten Lösungsstruktur) und mit Realitätsbezug für einen Einsatz im Unterricht favorisiert (Hascher & Hofmann, 2008). Diese Aufgaben stehen auch im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit.

Ein offenes Problem stellt mangelnde Theorie zu Lernaufgaben dar. Während die Kriterien bei den Testsaufgaben durch Validität, Reliabilität, Objektivität und Schwierigkeit klar definiert und seit Jahrzehnten anerkannt sind, ist es bei Lernaufgaben schwieriger, eindeutig festzuschreiben, welchen Anforderungen diese genügen sollen. Nicht zuletzt deshalb wird in den Aufgabenforschungen hauptsächlich das Kriterium der Aufgabenschwierigkeit intensiv untersucht (siehe Astleitner, 2008). Tatkräftige Impulse für das Verständnis der Rolle von Lernaufgaben werden durch die Entwicklung und die empirisch gestützte Validierung von Kompetenzmodellen erwartet. Die Analyse von längsschnittlich angelegten Kompetenzentwicklungsmodellen soll Erkentnisse über die Genese der Kompetenzen liefern. Mit Hilfe von Aufgaben sollen die Kompetenzen im Unterricht weiter untersucht werden (Leutner, et al., 2008). Bevor jedoch zu Kompetenzentwicklungsmodellen übergegangen wird, sollen erst die Kompetenzstrukturmodelle konzipiert werden, die die vorhandenen Kompetenzen in einer Art Momentaufnahme (im Querschnitt) abbilden. Die beiden Arten von Kompetenzmodellen werden derzeit im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen" untersucht (Klieme & Leutner, 2006).

2.2.2 Umgang mit neuen Aufgaben im Unterricht

Eine andere wichtige Forschungsfrage bildet der Umgang mit neuen Aufgaben. Als eine Voraussetzung für den optimalen Lernertrag bei der Bearbeitung solcher Aufgaben im Unterricht wird die Aufgeschlossenheit für unterschiedliche Lösungswege seitens der Lehrpersonen und der Schüler angesehen (Hascher & Hofmann, 2008; Neubrand, 2006). Die Lösung der Aufgaben dürfte dabei weniger kognitiv aktivierend wirken, wenn die Lehrperson einen einzigen Lösungsweg und ein bestimmtes Lösungsergebnis präferiert und diesen während der Erarbeitungs- oder Reflexionsphasen aufoktroyieren will (vgl. Messner & Blum, 2006; Schukajlow, Blum, et al., 2009). Vermutlich sollten neue Aufgaben, die mehrere Lösungen zulassen und durch Realitätsbezug gekennzeichnet sind, eher in kooperativen Settings eingesetzt werden.

Während die Notwendigkeit von Reflexionsphasen im Lernprozess, in denen die Lernenden das Feedback zu bearbeiteten Aufgaben erhalten, weitestgehend unbestritten ist, bleibt die Art des Feedbacks seit Jahrzehnten ein lebendiges Forschungsfeld. Ein Projekt zu diesem Thema ist z.B. unter der Leitung von Klieme im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms „Kompetenzmodelle" angesiedelt. Im Projekt „Nutzung und Auswirkungen von Kompetenzmessung in mathematischen Lehr-Lernprozessen" (COCA) werden vor allem die Wirkung unterschiedlicher Feedbackvarianten auf Schülerleistungen und motivationale Einstellungen der Schüler untersucht (Rakoczy & Klieme, 2008), aber auch Wechselwirkungen zwischen Aufgabenmerkmalen und dem Feedback.

Einige zentrale Befunde der Forschungen zum Feedback sind (vgl u.a. Hattie & Timperley, 2007):

(1) Das sachbezogene positive Feedback erweist sich als stärker leistungsfördernd als positives Feedback, das sich ausschließlich auf das Lob beschränkt.

(2) Das Feedback zu einfacheren Aufgaben wirkt günstiger auf den Lernprozess als das zu komplexen (Kluger & DeNisi, 1996).

(3) Die Generalisierbarkeit des Lernens durch das Feedback ist stark eingeschränkt. Das gegebene Feedback wirkt positiv oft nur auf die Lösungshäufigkeit der Aufgaben, zu denen es gegeben wurde (Thompson, 1998). Der Transfer von positiven Effekten des Feedbacks auf andere Aufgaben findet selten statt.

Ein vielversprechendes Feedbackmodell scheint eine Kombination aus motivationalem und sachbezogenem Feedback zu sein. Während das sachbezogene Feedback leistungsfördernd wirken sollte, dürfte motivationales Feedback zu einer Verbesserung der Lehrer-Schüler-Interaktionen beitragen (Jacobs, 2008, S. 109). Durch eine Kombination von sachbezogenem und motivationalem Feedback können sowohl Schülerleistungen als auch -einstellungen verbessert werden. Im Kontext der neuen Aufgabenkultur stellt sich die Frage, wie das Feedback im Unterricht gestaltet werden soll. Da die überprüften Feedbackvarianten bei den komplexen Aufgaben nur schwache Wirkungen zeigen, sollten geeignete Feedbackmaßnahmen für solche Aufgaben entwickelt und untersucht werden.

2.2.3 Realitätsbezogene Modellierungsaufgaben als Kern der neuen Aufgabenkultur im Mathematikunterricht

Die Einführung der neuen Aufgaben, die unterschiedliche Lösungswege zulassen und Realitätsbezüge aufweisen, sowie ihr selbständigkeitsfördernder Einsatz im Unterricht verlaufen in der Schulrealität nicht reibungslos. Die Ursachen hierfür sind vielschichtig: Eine routinebedingte Weiterführung des erlernten Unterrichtsmusters, ein höherer Vorbereitungsaufwand und eine stärkere kognitive Beanspruchung der Lehrer als bei einem traditionellen Unterricht sind nur einige der möglichen Faktoren, die einer solchen Veränderung der Aufgabenkultur im Weg stehen. Dennoch konnten mit den Programmen SINUS und SINUS-Transfer[4] erste Erfolge verzeichnet werden, welche die neuen didaktischen Ideen im mathematischen und naturwissenschaftlichen Bereich in die Praxis umsetzen (BLK, 1997; Prenzel & Baptist, 2001). Am Beispiel des Mathematikunterrichts lässt sich zeigen, wo die Probleme bei der Einführung neuer Aufgaben in den Unterricht liegen und wie sie gelöst werden können.

[4]SINUS – Transfer ist das Fortsetzungsprogramm von SINUS, in dem die Schwerpunkte von den Jahrgangsstufen 7-10 auf 5 und 6 umgelegt wurden.

Entsprechend dem in der internationalen PISA-Studie dargelegten Konzept der „mathematical literacy” sollen die Schüler in der Schule lernen, ihr Wissen und ihre Fähigkeiten im Alltag zu nutzen (PISA-Konsortium Deutschland, 2004, S. 47). Auch national ist hierbei eines von drei Hauptzielen des Mathematikunterrichts „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen“ (Winter, 1995, S. 37). Nach dem Stand der aktuellen Forschungslage reicht es hierfür nicht aus, ausschließlich innermathematische Fragestellungen wie z.B. Termumformungen oder auch in einen Text „eingekleidete“ Rechenaufgaben (Blum, 1996; Niss, Blum, & Galbraith, 2007) zu behandeln, weil gerade der Transfer auf die Realität problematisch ist (vgl. auch das Konzept von „situated cognition“ bei Greeno, 1989; Reusser, 2001b). Aus diesem Grund sollten in der Schule Aufgabenstellungen behandelt werden, die auf realitätsbezogenen Problemen beruhen. Realitätsbezogene Aufgaben, die für ihre Lösung substantielle Übersetzungsleistungen zwischen Realität und Mathematik von Schülern fordern, sich nicht schematisieren lassen und stärker zum Nachdenken anregen, werden in der Didaktik der Mathematik als Modellierungsaufgaben bezeichnet. Modellierungsaufgaben erlauben ferner unterschiedliche Lösungswege und besitzen ein großes Motivierungspotential. Das Lösen von Modellierungsaufgaben fördert gleichzeitig den Aufbau verschiedener Kompetenzen und das Verständnis mathematischer Inhalte (vgl. Leiss, Möller, & Schukajlow, 2006). Trotz dieser Vorteile gewährleistet eine entsprechende Auswahl von kognitiv aktivierenden Aufgaben für den Unterricht allein keinen Lernerfolg. Ebenso wichtig ist die angemessene Behandlung der Modellierungsaufgaben im Unterricht, die den Kompetenzerwerb bei Schülern anregen soll.

2.3 Lernprozesse beim Problemlösen

Da in dieser Arbeit das Lernen an Problemen untersucht wird, sollen Erkenntnisse aus der Problemlöseforschung erörtert werden. Das Lernen an Problemen stellt einen wichtigen Bereich des Lernens dar und betrifft höhere Lernprozesse, bei denen Wissenserwerb durch eine Wissens*konstruktion* erfolgt. Das unterscheidet diese Lernart vom Lernen am Modell (Bandura, 1976), bei dem neues Wissen durch die Beobachtung und Nachahmung der vorgeführten Handlungen erworben wird. Während das Lernen am Modell vom Lernenden eine *Rezeption* des Wissens erfordert, findet beim Lernen an Problemen eine eigenständige *Konstruktion* statt.

Die Betrachtung von Problemlöseprozessen im Theorieteil ist notwendig, sowohl zur nachfolgenden Fokussierung auf die Schwierigkeiten und Strategien im Problemlöseprozess, als auch zur Analyse von fachdidaktischen Instrumenten wie z. B. dem Modellierungskreislauf.
Nach der Begriffsklärung werden unterschiedliche Einteilungen in Problemgruppen betrachtet und realitätsbezogene Modellierungsaufgaben in die vorgestellten Taxonomien eingeordnet. Anschließend werden Problemlöseprozesse aus unterschiedlichen Perspektiven in ihrer Entwicklung vorgestellt. Im darauf folgenden Unterabschnitt werden Ergebnisse der Problemlöseforschungen zu Schwierigkeiten und Strategien zusammengefasst.

2.3.1 Problemtypen in verschiedenen Forschungstraditionen

Bevor gängige Einteilungen in Problemgruppen sowie Analysen von Problemlöseprozessen betrachtet werden, sollen die Begriffe „Handeln", „Verhalten", „Tun" und „Problem" verdeutlicht werden.
Drei dieser Begriffe – „Verhalten", „Tun" und „Handeln" – bilden ein begriffliches Fundament der kognitiven Handlungstheorie von Aebli, auf die in dieser Arbeit mehrfach zurückgegriffen wird, und werden wie folgt definiert: Unter „Verhalten" werden alle Tätigkeiten oder Reaktionen eines Organismus verstanden. „Tun" ist ein zielgerichtetes, absichtsvolles Verhalten. „Handeln" ist ein „Tun" mit „hohem Grad der Bewusstheit und der Zielgeleitetheit" (Aebli, 1980, Bd. 1, S. 18, 19).
Eine häufig zitierte Definition des Begriffs „Problem" wurde vom Gestaltpsychologen Dunker vorgeschlagen: Es besteht ein Problem, „Wenn ein Lebewesen ein Ziel hat und nicht weiß, wie es dieses Ziel erreichen soll. Wo immer der gegebene Zustand sich nicht durch bloßes Handeln […] in den erstrebten Zustand überführen lässt, wird das Denken auf den Plan gerufen. Ihm obliegt es, ein vermittelndes Handeln zu konzipieren" (Duncker, 1935/1974, S. 1).
Die Bedeutung des Problemlösens in Beruf und Alltag wird deutlicher, wenn man sich klar macht, dass jede Tätigkeit ein Ziel voraussetzt und das Ziel nicht immer unmittelbar – in einem Zug – erreicht werden kann. Trifft die Handlungsperson auf dem Lösungsweg auf Hürden, die das Erreichen des Ziels behindern, und wird ihr dies bewusst, entsteht für diese Person ein Problem. Probleme können somit nicht nur im Handeln, sondern auch im Wahrnehmen, Deuten und anderem zielgerichtetem Verhalten entstehen (Aebli, 1980, Bd. 2, S. 13).
Sowohl Gestaltpsychologen wie Köhler oder Wertheimer als auch Behavioristen wie Thorndike oder Skinner haben Problemlöseprozesse untersucht (Köhler, 1921/1963; Skinner, 1971a; Thorndike, 1922; Wertheimer, 1945/1964). Wie schon soeben aufgezeigt, wird eine

Handlung zum Problem, wenn bei ihrer Ausführung eine Hürde auftritt. Die Gestaltpsychologen sprechen in diesem Fall von *einer Lücke* in der Handlungsstruktur, welche die Ausführung der Handlung behindert (Wertheimer, 1945/1964, S. 58).

Aebli unterscheidet darüber hinaus zwei andere Problemarten: widersprüchliche und zu komplexe Handlungspläne (Aebli, 1980, Bd. 2, S. 14). Nehmen wir das Beispiel eines Autoren, der beim Verfassen eines Textes seine Arbeit einerseits schnell, andererseits gut machen möchte. Werden ihm diese zwei evtl. sich widersprechenden Ziele bewusst, kann dies für ihn zum Problem werden. Diese Art von Problemen bezeichnet Aebli als Widerspruchsprobleme. Ein dritter Problemtyp entsteht in der Handlung, wenn der Handlungsplan zu kompliziert ist und der Handelnde ihn vereinfachen will. Beispiele sind zu komplizierte Texte, die Wiederholungen enthalten, oder auch zahlreiche mathematische Aufgaben wie etwa Terme, die vereinfacht werden sollen. In der vorgestellten Taxonomie stehen somit die Strukturen des Handelns im Vordergrund. Im Problem mit „Lücke" ist die Handlungsstruktur nicht vollständig. Wegen der Lücke in der Handlungsstruktur kann die Handlung nicht ausgeführt werden. Bei den widersprüchlichen Handlungsabsichten muss sich der Problemlöser zwischen zwei alternativen Strukturen entscheiden. Im Fall der erwünschten Vereinfachung des Handlungsplans will der Problemlöser die vorhandene Struktur optimieren.

Da Aufgaben, die im Rahmen dieser Arbeit analysiert werden, zur Gruppe von Problemen mit Lücke gehören, soll diese Problemart genauer betrachtet werden. Probleme mit Lücke sind weit verbreitet und treten in unterschiedlichen Bereichen menschlicher Tätigkeiten auf. Zwei Typen von Problemen mit Lücke sind Interpolations- und Gestaltungsprobleme. Bei den Interpolationsproblemen sind Ausgangs- und Endstrukturen des Problems eindeutig definiert und der Problemlöser soll die beiden „Pole" des Problems miteinander verbinden (Aebli, 1983, S. 285). Beim Lösen eines Gestaltungsproblems geht man hingegen von einer unbestimmten Ausgangssituation und unklaren Lösungsmitteln aus. Nur das Ziel ist beim Gestaltungsproblem eindeutig vorgegeben.

Ein typisches Beispiel der Interpolationsprobleme sind mathematische Beweise. Eine einfache Aufgabe, die Unterschiede zwischen Interpolations- und Gestaltungsproblemen veranschaulichen kann, ist das Problem mit der Äquivalenz zweier Figuren (aus Aebli, 1983, S. 286):

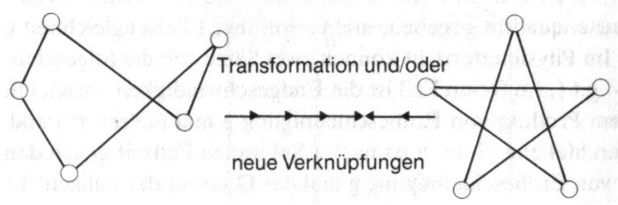


Abbildung 1. Interpolationsprobleme

Das Interpolationsproblem geht von einer klaren Ausgangslage aus und spezifiziert Mittel, mit denen das angegebene Ziel zu erreichen ist: Mit Hilfe der Transformation und/ oder neuer Verknüpfungen soll in der Abbildung 1 eine Figur in die andere überführt werden. Die Aufgabe des Problemlösers besteht darin, Bindeglieder zwischen beiden Figuren zu finden und sie miteinander zu verknüpfen. Eine andere Problemart – das Gestaltungsproblem – ist in der Abbildung 2 abgebildet.

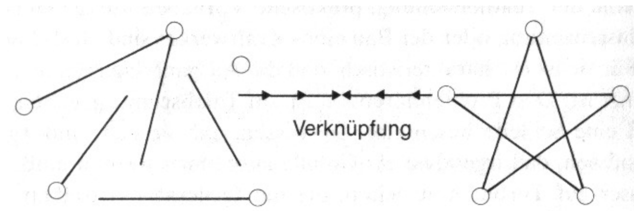


Abbildung 2. Gestaltungsprobleme

Die Gemeinsamkeit zwischen beiden Problemvarianten besteht in einer Lücke zwischen der Anfangslage und dem Ziel, die im Lösungsprozess geschlossen werden soll. Den Hauptunterschied macht der Grad der Unschärfe bei den Angaben aus. Gestaltungsprobleme bieten viel mehr Spielräume bei ihrer Lösung, sind aber dadurch im Allgemeinen auch anspruchsvoller. Realitätsbezogene Modellierungsaufgaben, wie sich im weiteren Verlauf der Arbeit zeigen wird, gehören zu Gestaltungsproblemen. Dieses kann durch die Analyse der Aufgabe „Riesenschuhe“ (aus Drüke-Noe & Leiß, 2005)veranschaulicht werden.

Riesenschuhe

Florentino Anonuevo Jr. poliert in einem Sportzentrum auf den Philippinen das laut Guinness Buch der Rekorde weltgrößte Paar Schuhe mit einer Breite von 2,37 m und einer Länge von 5,29 m.

Wie groß wäre der Riesenmensch ungefähr, dem dieses Paar Schuhe passen würde? Beschreibe deinen Lösungsweg.

Abbildung 3. Aufgabe Riesenschuhe (aus Drüke-Noe & Leiß, 2005)

Im Bild zur Aufgabe Riesenschuhe ist ein großes Paar Schuhe abgebildet, das gerade poliert wird. Im Text sind die Länge und Breite der Schuhe angegeben. Die Aufgabe besteht darin, die Höhe eines Riesenmenschen zu bestimmen, dem dieses Paar Schuhe passen würde. Eine mögliche Lösung wäre, eine Annahme über den Zusammenhang zwischen der Höhe des Menschen und seiner Schuhlänge zu treffen (z.B. der Mensch ist 10-mal so groß wie seine Schuhe) und dann die Schuhlänge mit dem Proportionalitätsfaktor 10 zu multiplizieren. Die Annahme zum Zusammenhang zwischen Schuhlänge und Körpergröße kann der Problemlöser mit Hilfe der Messung eigener Körper- und Schuhmaße begründen.

Die für die Gestaltungsprobleme charakteristische Unschärfe ist an mehreren Stellen im Lösungsprozess sichtbar. Erstens braucht man nicht unbedingt die Schuhlänge und -breite, um die Höhe des Riesenmenschen zu finden. Eine von beiden Angaben reicht zur Bestimmung der Körpergröße des Riesenmenschen. Dies zeigt die Unschärfe in der Ausgangslage in der Aufgabe Riesenschuhe. Zweitens muss der Problemlöser das Verhältnis zwischen den Schuhmaßen und der Höhe des Riesen wissen, um diese Aufgabe zu lösen. Weder die Art dieses Zusammenhangs noch die Notwendigkeit ihn einzuschätzen sind aber in der Aufgabe vorgegeben. Das ist die Unschärfe der Mittel zur Erreichung des Ziels. Kontrastierend zu diesem Beispiel könnte die Aufgabe Riesenschuhe wie folgt umformuliert werden:

Weltgrößte Schuhe

Das weltgrößte Paar Schuhe ist 5,29 m lang. Wie groß wäre der Mensch, dem dieses Paar Schuhe passen würde, wenn ein Erwachsener im Durchschnitt etwa 10-mal so groß wie seine Schuhe ist?

Abbildung 4. Aufgabe Weltgrößte Schuhe

Die Aufgabe „Weltgrößte Schuhe" geht von einer klar abgegrenzten Ausgangslage aus und legt auch die Mittel zur Beantwortung der Frage – den Zusammenhang zwischen der Menschengröße und der Schuhlänge – offen. Um diese Aufgabe zu lösen, muss man lediglich die Schuhlänge mit dem Faktor 10 multiplizieren. Das Ergebnis wäre dann die Antwort auf die gestellte Frage. Die Aufgabe Weltgrößte Schuhe gehört zur Gruppe von Interpolationsproblemen.

Nun soll eine andere Charakterisierung und Typisierung der Probleme beispielhaft betrachtet werden. Diese Typisierung kommt aus einer in der Problemlösepsychologie anerkannten Richtung, Psychologie der Informationsverarbeitung.

In der Problemlösepsychologie der Informationsverarbeitung wird eine ähnliche Kategorisierung des Problembegriffs vorgenommen. Im Mittelpunkt des Forschungsinteresses stehen wieder Probleme mit Lücke. Während Aebli primär die Struktur der Probleme in den Vordergrund der Kategorisierung gestellt hat, unterscheiden Dörner, Funke u. a. Probleme gemäß dem Informationsgehalt, der in der Aufgabenstellung enthalten ist. Die Art des Informationsgehalts entspricht in diesem Fall dem Strukturierungsgrad des Problems. Wenn die Unschärfe in der Ausgangslage und den vorgegebenen Mitteln groß ist (Gestaltungsproblem), werden solche Probleme als „nicht wohldefiniert" (oder „komplex") bezeichnet. Bei den Interpolationsproblemen kann man hingegen sagen, dass das Problem „wohldefiniert" (oder „einfach") ist, weil sowohl die Ausgangslage als auch die Mittel der Problemlösung eindeutig beschrieben sind. Zwei Problemtypen, die den Gestaltungs- und Interpolationsproblemen entsprechen, sind somit die komplexen (ill-defined) und die einfachen (well-defined) Probleme. Die Einteilung in die komplexen und einfachen Probleme wird in der Literatur allerdings unterschiedlich spezifiziert. In der Regel werden Probleme entweder über das Modell des Problemraums (Dörner, 1995) in einfache und komplexe eingeteilt oder mit Hilfe charakteristischer Merkmale beider Problemgruppen gekennzeichnet und so unterschieden (Funke, 2006a). Wird der Problemlöseprozess als Lösungssuche im Problemraum analysiert (siehe Unterabschnitt 2.3.2), sind komplexe Probleme durch die Unbestimmtheit zweier von drei Komponenten der Problemraumdefinition charakterisiert: dem Anfangszustand, dem Endzustand oder der Operation. D.h., dass der Problemlöser eine Repräsentation des Anfangszustandes des Problems bildet, aber weder den Zielzustand kennt, noch weiß wie er ihn erreichen kann. Dies sind u. a. Probleme, bei denen die Fragestellung nicht eindeutig ist und zusätzliche Annahmen erfordert. Auch bei dieser Beschreibung sind Parallelen zur aeblischen Beschreibung von Gestaltungsproblemen zu sehen. Der Ausgangszustand, die Operation und der Endzustand entsprechen der Ausgangslage, den vorgegebenen Mitteln und dem Endziel bei Aebli.

Definitionsmerkmale eines komplexen Problems nennt Funke in Anlehnung an Dörner und Putz-Osterloch (Dörner, 1980; Funke, 2006b, S. 379; Putz-Osterloch, 1981):

- Komplexität von Anforderungen an den Problemlöser, die durch die Anzahl der beteiligten Variablen bestimmt wird.
- Vernetztheit der angegebenen Variablen. Je mehr Querverbindungen zwischen den beteiligten Variablen vorhanden sind, desto komplexer ist die Aufgabe.
- Dynamik der Aufgabenstellung, die durch Veränderungen der Problemsituation im Verlauf der Zeit charakterisiert wird. Typische Beispiele stellen Umweltprobleme dar
- Intransparenz der Situation. In der Problembeschreibung sind nicht alle Informationen über das Problem gegeben.
- Polytelie (Vielzieligkeit). Der Problemlöser muss entscheiden, welche Ziele für ihn vorrangig sind.

Realitätsbezogene Modellierungsaufgaben, zu denen zum Beispiel die Aufgabe Riesenschuhe gehört, weisen einige von den Eigenschaften komplexer Probleme auf. Orientiert man sich an Jonassen(2000), der statt einer dichotomen Einteilung der Probleme einen kontinuierlichen Übergang von einfachen zu komplexen Problemen vorgeschlagen hat, ist es näher liegend, die realitätsbezogenen Modellierungsaufgaben den komplexen Problemen zuzuordnen. Aus den Eigenschaften komplexer Probleme ist nur die Dynamik für sie untypisch. Andere Merkmale können zwar je nach Aufgabenstellung stärker oder schwächer ausgeprägt sein, treten in der Regel auf. Die Analyse der Aufgabe Riesenschuhe veranschaulicht die genannten Eigenschaften von Modellierungsaufgaben.

- Komplexität: In der Aufgabe Riesenschuhe gibt es mehrere Variablen, welche die Lösung beeinflussen können. Eine solche Variable ist die Form der Schuhe, die bei der Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Schuhlänge und Größe des Menschen eine Rolle spielt.
- Vernetztheit: Die Vernetztheit von unterschiedlichen Angaben und Annahmen zeigt sich im Zusammenhang zwischen der Schuhgröße und Schuhbreite: Forschungen in der Sportmedizin haben nachgewiesen, dass kürzere Füße bereiter als längere sind (Grau & Mauch, 2009, date accessed: 01.03.2010). Der Zusammenhang zwischen Fußlänge und Fußbreite beeinflusst die Auswahl der Schuhe und erschwert die Bestimmung einer typischen Relation zwischen der Körper- und der Schuhgröße.
- Intransparenz: Es gibt in der Aufgabenstellung keinen Hinweis darauf, welche Faktoren bei der Lösung berücksichtigt werden sollen. Die Bedeutsamkeit einzelner Variablen für die Lösung soll vom Problemlöser eigenständig eingeschätzt werden.
- Polytelie: Die Vielzieligkeit ist beim Lösen der Aufgabe Riesenschuh nicht vorhanden. Das einzige Ziel ist die Bestimmung der Größe eines Riesen. Es gibt aber Modellierungsaufgaben, bei denen die Polytelie eine Rolle spielt. In der Aufgabe Regenwald, die im Rahmen dieser Arbeit zur Erkundung von Lösungsprozessen eingesetzt wurde, wird zum Beispiel gefragt, welche Wirkung die Werbeaktion einer Brauerei im Hinblick auf die Regenwaldabholzung hat (siehe Aufgabe in der Abbildung 26). Der Begriff „Wirkung“ wird dabei nicht eindeutig definiert. Der nachhaltige Schutz des Regenwaldes in einem Gebiet könnte mehr Abholzung in anderen Gebieten bewirken. In diesem Fall würde man ein Ziel – die Verbesserung der Ökologie im geschützten Gebiet – erreichen. Global könnte jedoch eine Verschlechterung der Umweltbedingungen eintreten, falls in anderen Ländern mehr Regenwald abgeholzt wird, um den Holzmangel auf dem freien Markt auszugleichen.

Die Analyse von Problemtypen in unterschiedlichen Forschungstraditionen zeigt eine hohe Konvergenz in diesem Bereich des Problemlösens. Die Modellierungsaufgaben gehören hiernach zu Gestaltungsproblemen oder in einer anderen Forschungstradition zu komplexen (ill-defined) Problemen. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden deswegen stärker Ergebnisse zu diesen Problemgruppen berücksichtigt.

2.3.2 Problemlöseprozess

In diesem Unterabschnitt werden die wichtigsten Erkenntnisse zum Verlauf der Problemlöseprozesse vorgestellt. Die Analyse beginnt mit dem Modell des reflektierenden Denkens von

Dewey, das als Vorläufer zeitgenössischer Konzeptionen betrachtet werden kann. Anschließend werden Forschungsergebnisse aus der behavioristischen Tradition, aus der Sicht von Gestalttheorien und schließlich aus der Perspektive der kognitiven Psychologie beleuchtet.

Problemlöseprozesse bei Dewey. Als Vorläufer der Beschreibung von Lösungsprozessen kann Dewey mit seinem Modell des reflektierenden Denkens angesehen werden. Der Lösungsprozess läuft im Dewey'schen Modell wie folgt ab (Dewey, 1910/2001, S. 56):

(1) Man begegnet einer Schwierigkeit.
(2) Sie wird lokalisiert und präzisiert.
(3) Der Ansatz einer möglichen Lösung wird entwickelt.
(4) Eine logische Entwicklung der Konsequenz des Ansatzes wird überlegt.
(5) Weitere Beobachtungen und experimentelles Vorgehen führen zur Annahme oder Ablehnung der angenommenen Lösung.

Im vorgestellten Modell werden fünf logisch verschiedene Stufen im Denkprozess beschrieben, die auch als zeitlich geordnete Schritte im Problemlöseprozess verstanden werden können. Die besondere Bedeutung wird hier Schwierigkeiten beigemessen. Schwierigkeiten sind für Dewey Auslöser der Denkprozesse. „Die Schwierigkeit mag genug eindringlich empfunden werden, um das Denken sofort zu einer Lösung des Problems anzuregen, oder es kann anfänglich ein unbestimmtes Unbehagen, ein Schock verspürt werden, und der bestimmte Versuch einen Weg aus dieser Schwierigkeit zu finden, erst später unternommen werden“ (Dewey, 1910/2001, S. 56)

Behavioristische Theorien von Thorndike und Skinner. Da der Behaviorismus mehr als 50 Jahre eine vorherrschende Lerntheorie war, gab es in dieser Zeit verschiedene Forscher, die das Lernen von diesem Standpunkt aus betrachtet haben. An dieser Stelle werden die seinerzeit bedeutenden Grundprinzipien genannt. Eins davon war die Theorie von Thorndike zum Lernen durch „Versuch-und-Irrtum“ (trial and error).

Thorndike hat gemessen, wie viel Zeit Versuchstiere brauchen, um ihr Ziel (Futter) zu erreichen. Er hat beobachtet, dass Tiere nach einigen Versuchen den Weg zum Futter schneller als am Anfang finden. Dieses Ergebnis hat er dadurch erklärt, dass das richtige Verhalten verstärkt und das falsche gelöscht wird. Aus diesen Beobachtungen hat er das Gesetz der Auswirkungen formuliert (law of effect). Das Gesetz der Auswirkungen besagt, dass jene Reaktionen im Kopf des Tieres mit der gegebenen Situation verknüpft werden, die zu einem befriedigenden Zustand (Belohnung) führen. Dagegen werden Reaktionen, die zu einem unangenehmen Zustand führen, abgeschwächt (Thorndike, 1922). Spätere Untersuchungen belegen, dass die unangenehmen Zustände, die auch als Strafe bezeichnet werden können, einen geringeren Einfluss als Belohnungen auf das Verhalten haben. Die Befunde zu der Wirkung von Belohnungen wurden hingegen bestätigt und dienten als ein Anhaltspunkt für die Theorie des operanten Konditionierens, die von Skinner entwickelt wurde (Skinner, 1971a).

Skinner hat Experimente mit Tieren von Thorndike unter anderen Bedingungen durchgeführt und ist später auch zu Experimenten zum menschlichen Lernen übergegangen. Gemäß Skinner kann die Reaktion auch ohne einen Reiz auftreten. In diesem Fall spricht er über eine operante oder spontane Reaktion. Wird ein operantes Verhalten durch eine zeitnahe positive Reizsituation verstärkt, erhöht sich seine Auftretenswahrscheinlichkeit. Um das erwünschte Verhalten zu erreichen bzw. zu verändern, können somit Verstärkungspläne herausgearbeitet werden. Wichtig sind beim Entwurf von Verstärkungsplänen dauerhafte Verhaltensänderungen durch variable Zeiten und/ oder Intensität der Verstärkung zu erreichen (siehe zu Verstärkungsplänen in Pädagogik: Steiner, 2001). Operantes Lernen bleibt bis heute eine effektive Möglichkeit, das Lernen anzuregen. Dennoch gibt es Phänomene, die mit dem behavioristischen Ansatz nicht zu erklären sind. Bevor solche Phänomene vorgestellt werden, sollen Lern- und Problemlöseprozesse aus Sicht der Gestaltpsychologie erläutert werden.

Problemlöseprozesse aus Sicht der Gestaltpsycholgen Köhler und Wertheimer. Die Ursprünge der kognitiven Psychologie und Problemlösetheorien liegen in der Gestaltpsychologie. Der Gestaltpsychologe Köhler hat das Verhalten von Schimpansen untersucht und die Ergebnisse daraufhin von einem rationalen Standpunkt aus interpretiert (Köhler, 1921/1963). In einer Reihe von Experimenten hat Köhler festgestellt, dass Menschenaffen in der Lage sind, Werkzeuge herzustellen und zu gebrauchen. Solche Fähigkeiten zeigen die Affen, wenn sie vor ein Problem gestellt werden. Der Affe Sultan saß in einem Käfig und bekam eine Banane außerhalb des Käfigs hingelegt. Zwei Stäbe, die im Käfig lagen, waren zu kurz, um die Frucht zu holen. Sultan verband nach einigen erfolglosen Versuchen zwei kurze Stäbe miteinander und konnte so das Futter in seine Reichweite schieben. In einem anderen Versuch wurden Kisten von Affen aufeinander gestapelt, um eine in der Höhe befestigte Frucht zu holen.

Abbildung 5. Versuch mit Menschenaffen (Köhler, 1926)

Wie kann man diese Versuche erklären? Gemäß Köhler besitzt die Umwelt eine Struktur – in Köhlers Terminologie eine „Feldstruktur“ –, die von Tieren und Menschen geistig erfasst werden kann. Eine Handlung kann ausgeführt werden, wenn der Handelnde die ganzheitliche Struktur der Umwelt in seinem Geist abbildet. Dann gewinnt er „die Einsicht“ und kann durch die Ausführung der Handlung sein Ziel erreichen. Benutzt man die vorher eingeführte Terminologie des Problemlösens, kann man sagen, dass der Affe die Ausgangslage (die Frucht ist zu hoch zum Holen), die Mittel (leere Kisten) und das Endziel (Frucht in der Hand) erfasst hat und die Lücke zwischen Anfangs- und Endzustand erfolgreich schließen konnte, indem er die Kisten zu einem Turm aufgestellt hat. In diesem zielgerichteten Vorgang sieht Köhler keinen bloßen durch Reiz-Reaktion geleiteten Versuch- und Irrtum-Prozess, wie er etwa vom Behavioristen Thorndike postuliert wurde (Thorndike, 1922). Es ist vielmehr ein kreativer Akt, der zum Erfolg geführt hat.

Eine ähnliche Position vertritt Wertheimer, der eine der ersten Analysen eines Lösungsprozesses eines mathematischen Problems entworfen hat. Im Manuskript „Produktives Denken“ untersucht Wertheimer, wie ein Parallelogramm zu einem flächengleichen Rechteck transformiert werden kann, und zeichnet einige mögliche Überlegungen des Problemlösers (Wertheimer, 1945/1964, S. 60) ein.

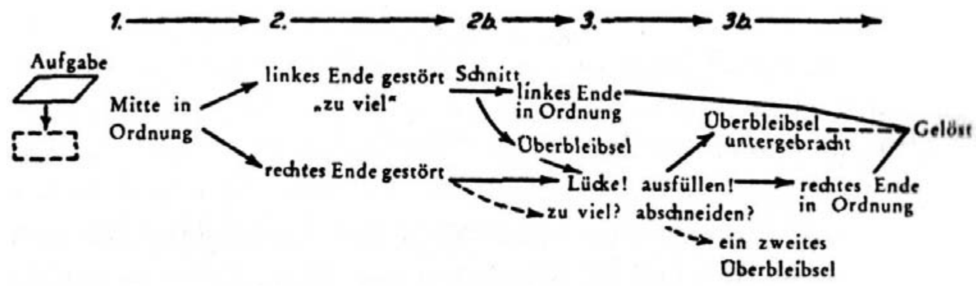


Abbildung 6. Analyse des Lösungsprozesses bei Wertheimer (Wertheimer, 1945/1964, S. 60)

Um zu zeigen, dass ein Parallelogramm und ein Rechteck mit gleich großen Grundseiten und Höhen gleich große Flächeninhalte haben, wird der Lösungsprozess in kleinere Schritte aufgeteilt. Im ersten Schritt vergleicht der Problemlöser die Mitte des Parallelogramms mit dem Rechteck und stellt fest, dass rechts „zu viel“ und links „zu wenig“ Fläche vorhanden ist. Er macht einen Schnitt am linken Ende und füllt mit dem Überbleibsel die Lücke rechts aus. Auch ein alternativer Weg, bei dem die rechte Ecke abgeschnitten sein soll, ist in der Abbildung 6 eingetragen. Die Analyse von Wertheimer ist einer der ersten Versuche, den Problemraum einer Aufgabe zu erfassen.

Kognitive Landkarten von Tolman. Der Behaviorist Tolman hat die Frage der Existenz von kognitiven Landkarten (cognitive map) in die wissenschaftliche Diskussion eingebracht. Gemäß Tolman sind im Gedächtnis von Tieren und Menschen kognitive Landkarten gespeichert, die verschiedene Wege vom Start zum Ziel abbilden und dadurch die Auswahl des optimalen Weges im Raum ermöglichen. Seinen Beobachtungen zufolge verfügen Ratten nach einigen Laufversuchen im Labyrinth über verschiedene Informationen zu Länge, Schwierigkeit und Verlauf der Wege, die zum Ziel führen (Tolman, 1932/1967, S. 176).

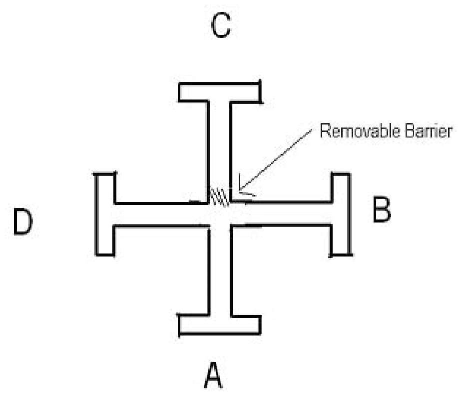


Abbildung 7. Versuchsaufbau von Tolman (Abbildung aus Hothersall, 1995, S. 498)

In einem Versuch (Abbildung 7) hat Tolman Ratten am Eingang A starten lassen. Nach einigen Versuchen haben die Ratten gelernt, dass sie nach rechts zum Ausgang B abbiegen müssen, um Futter zu bekommen. Dann wurde als Startpunkt der Eingang C ausgewählt. Um zum Futter (Ausgang B) zu gelangen, mussten die Ratten nun links und nicht rechts abbiegen, was sie auch taten. Dies spricht gegen die einfache Reiz-Reaktions-Kette („Biege immer rechts ab und du bekommst Futter“) und bestätigt zugleich die Vermutung, dass der Plan der Umgebung bei Ratten in einer kognitiven Landkarte gespeichert wird. Die kognitive Landkarte stellt eine Art von innerer Planung der Umgebung dar. Unklar ist aber in Tolmans Theorie, wie die Landkarten im Gedächtnis repräsentiert sind.

Problemlöseprozesse bei Pólya. Etwa zeitgleich zu Wertheimer wurden von Pólya die Grundlagen des Lösungsprozesses von mathematischen Aufgaben in einem Vierphasen-Modell angelegt (Pólya, 1948, S. 5-6). Pólya unterscheidet folgende vier Phasen:

(1) die Aufgabe verstehen,
(2) einen Lösungsplan erstellen,
(3) den Lösungsplan ausführen,
(4) den Lösungsweg überprüfen.

Aus diesen Aktivitäten leitet Pólya mögliche Lehrerinterventionen ab. Pólyas Beschreibung des Lösungsprozesses hat ihre Aktualität bis heute nicht verloren. Empirische Untersuchungen zum Problemlöseverhalten von Carlson und Bloom stellen eine ähnliche Abfolge der Lösungsschritte fest. Die Lösungsschritte sind bei ihnen Orientierung, Planung, Ausführung und Kontrolle (Carlson & Bloom, 2005). Ein charakteristisches Merkmal der Beschreibung von Lösungsprozessen bei Pólya ist die Betonung der Planung und Kontrolle der Lösung, die heutzutage als metakognitive Strategien bezeichnet werden und einen wichtigen Teil von Problemlöseaktivitäten bilden.

Das TOTE-Modell. Eine weitere wichtige Entwicklung im Lernen durch Problemlösen ist das TOTE-Modell von Galanter, Miller und Pribram, durch welches die Kontroll- und Planungsmechanismen im Denken und Problemlösen näher erläutert werden. Miller, Galanter und Pribram waren, wie auch Tolman, mit der Reiz-Reaktions-Kette der Behavioristen nicht zufrieden (Miller, Galanter, & Pribram, 1973, S. 29-33). Die Beobachtungen der Handlungen von Menschen sowie theoretische Überlegungen zu der möglichen Natur der Handlungen haben sie angeregt, zwischen dem Bild und dem Plan im kognitiven System zu unterscheiden. Das Bild ist das Wissen des Organismus. Der Plan ist ein Handlungsentwurf, der die Ausführung von Operationen steuert. Operationen sind in dieser Theorie Handlungen eines Tieres oder eines Menschen. Aus der Notwendigkeit, die Handlungen zu steuern, wurde von den Autoren der TOTE-Theorie die Existenz einer Rückkopplungsschleife gefolgert. Die Rückkopplungsschleife (TOTE-Einheit) erlaubt bewusst oder unbewusst, ein angesetztes Ziel durch mehrere Annäherungsversuche zu erreichen. Die Funktion der TOTE-Einheit kann man sich wie folgt vorstellen: Menschen wie Tiere führen Handlungen aus, um ein bestimmtes

Ziel zu erreichen. Sie prüfen hierfür eine Situation (Test), wirken auf die Situation ein (Operation) und prüfen das Ergebnis (Test).

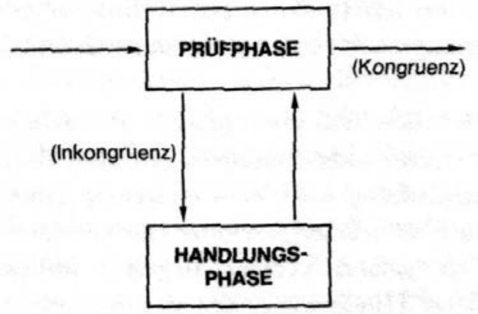


Abbildung 8. TOTE-Einheit

Führte die Handlung zum Ziel, wird die Schleife unterbrochen (Exit). Andernfalls wird der TOTE-Vorgang so lange wiederholt, bis das Ziel erreicht oder aufgegeben wird. Auch das Problemlösen funktioniert gemäß dem TOTE-Vorgang. Bei der Bestimmung des Flächeninhalts in der Abbildung 6 wird die Situation vor jedem Schritt analysiert, eine Handlung durchgeführt, deren Erfolg überprüft und ggf. die Handlung revidiert. Die herausragende Bedeutung der Steuerungseinheiten im kognitiven System wird im Unterabschnitt zu den Strategien wieder aufgegriffen.

Handlungen und Operationen bei Piaget und die Medientheorie von Bruner: kognitive Wende. Bartlett und Piaget haben in ihren Arbeiten den Schemabegriff eingeführt, der als ein Baustein des Denkens und Handelns betrachtet werden kann. Bartlett versteht unter einem Schema „an active organisation of […] past experiences“ (Bartlett, 1932/1967, S. 201). Er beschreibt weiter, wie Schemata aufgebaut sind, und unterstreicht bei der Beschreibung ihre mehrstufige strukturelle Organisation, die eine flexible Anwendung erlaubt. Bartlett geht in seiner Theorie weiter als Köhler: Er beschränkt sich nicht auf die Existenz von ganzheitlichen Strukturen, sondern konkretisiert die Handlungsstruktur mit Hilfe des Schemabegriffs.

Einen entwicklungstheoretischen Zugang zum Schemabegriff findet Jean Piaget. Beim Aufbau einer Entwicklungstheorie führt er im sensomotorischen Verhalten des Kleinkindes Saug- und Greifschemata ein. Mit Handlungsschemata ausgerüstet, erkunden die Kleinkinder die Welt. Zentral in diesem Prozess sind die Begriffe der Assimilation und der Akkommodation. Ein Kind wendet die vorhandenen Schemata auf verschiedene Gegenstände an und prüft, welche Gegenstände dies zulassen. Nach Bedarf können die Handlungsschemata verändert werden, sodass das Schema-Repertoire im Laufe der Zeit erweitert wird. Mit der geistigen und physischen Weiterentwicklung gehen die konkreten Handlungen zu den abstrakten Handlungen über, die von Piaget „Operationen“ genannt werden. Eine Operation setzt den Begriff der

Handlungsschemata auf der Ebene des inneren und systematisierten Handelns fort (Aebli, 1980, Bd. 1, S. 49). Der Entwicklungs- und Lernprozess bei Piaget besteht in einer Erweiterung von vorhandenen Operationen und Handlungsschemata.

Auch im Problemlösungsprozess wird den Schemata eine wichtige Bedeutung zugesprochen. Steht der Problemlöser vor einem Problem, greift er auf das vorhandene Schematarepertoire zurück. Deswegen ist es wichtig, über unterschiedliche Operationen und Handlungsschemata zu verfügen sowie die Fähigkeit zu besitzen, sie an die Gegebenheiten der Situation anzupassen.

Die Konzeption zur Entwicklung mentaler Operationen aus konkreten Handlungen führte zur kognitiven Wende in der Psychologie. Es gibt zwar Verhaltensweisen, die ohne Annnahme der Abbildung der Realität im Gedächtnis adäquat beschreiben werden können, wie z.B. Wirkungen von Verstärkungsplänen (siehe Behavioristische Lerntheorien von Thorndicke und Skinner in diesem Abschnitt), ihre Gültigkeit ist aber eingeschränkt.

Während Piaget in Europa die kognitive Wende eingeleitet hat, waren die Arbeiten von Bruner in den USA bahnbrechend. Gemäß der Medientheorie von Bruner können Denkprozesse und Problemlöseprozesse in drei Medien stattfinden: enaktiv, symbolisch/ sprachlich und ikonisch. Die Medientheorie wird im Unterabschnitt 2.4.2 im Zusammenhang mit der Schwierigkeit von Aufgaben beschrieben. Hier soll lediglich auf die Bedeutung der Medien des Denkens für den Lern- und Problemlöseprozess hingewiesen werden. Die von Bruner eingebrachte und im Kontext des Problemlösens entscheidende Idee ist die Wahl einer passenden Repräsentation des Problems im Lösungsprozess. Je nach Medium des Denkens und der Repräsentation des Problems kann die Lösung eines Problems einfacher oder schwieriger sein. Aus diesem Grund gehört der Wechsel der Repräsentation zu einer wichtigen Strategie beim Problemlösen. In der Aufgabe Riesenschuhe wäre eine Möglichkeit das Medium zu wechseln, eine Skizze der Situation anzufertigen:

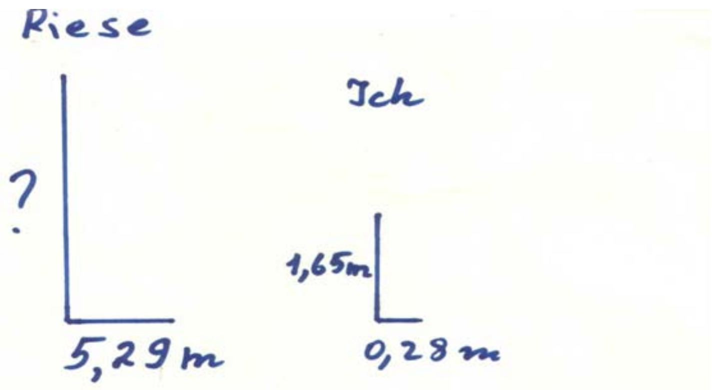


Abbildung 9. Skizze zur Aufgabe Riesenschuhe

Die in der Aufgabe symbolisch/ sprachlich repräsentierte Situation (siehe Abbildung 3) wird in der Skizze ikonisch dargestellt. Diese Darstellung kann helfen, die Lösungsidee zu finden und die Aufgabe zu lösen.

Problemlöseprozess bei Aebli. Aebli betrachtet den Problemlöseprozess als Finden und Abrufen von Lösungsideen. Die Ideen sind für ihn Handlungsschemata, Operationen und Vorstellungen von Objekten (Aebli, 1980, S. 56). Die Bedeutung von Handlungsschemata und Operationen beim Problemlösen wurde im Unterpunkt zu Piaget in diesem Abschnitt hervorgehoben. Objekte sind neben Begriffen auch „konkrete Sachvorstellungen“ wie z.B. „Mit einem Lineal kann ich eine Streckenlänge messen“. Einige Probleme erfordern statt einer mehrschrittigen Lösungskonstruktion das Abrufen einer konkreten Lösungsidee. In der Aufgabe Riesenschuhe ist die Idee, die eigene Schuhlänge zu messen und in Relation zu der Körpergröße zu betrachten. Findet der Problemlöser diese Idee, hat er ein „A-ha-Erlebnis“ oder gewinnt (nach der Begrifflichkeit der Gestaltpsychologie) eine Einsicht. Bausteine einer Lösungsidee sind zweifellos im Gedächtnis gespeichert. Die Hauptschwierigkeit ist es, diese Bausteine einer Lösungsidee in der konkreten Situation zu aktivieren und zusammenzubringen.
Ein wesentlicher Punkt beim Problemlösen ist die Ansicht, dass die Gegebenheiten einer Situation und die Zielvorstellung für das Finden einer Lösung immer in einer neuen Weise gesehen werden müssen. Lautet das Problem etwa aus sechs Streichhölzern vier Dreiecke zu bauen, soll der Problemlöser, anstatt alle Streichhölzer auf einer Fläche zu platzieren, aus ihnen eine Pyramide bauen. Diese Idee, eine Pyramide zu bauen, kommt aus dem Schemarepertoire eines Menschen. Auch, wenn wir in unserem Leben solche Pyramiden mehrmals gesehen und gezeichnet haben, ist es eine große Hürde, dieses Schema in der konkreten Situation auf das gestellte Problem zu übertragen. Je breiter das Repertoire und je zugänglicher die Schemata sind, desto einfacher ist es dabei, die passenden Schemata abzurufen und eine Lösung zu konstruieren (Aebli, 1980, S. 57).

Problemraum von Newell und Simon. Eine in der kognitiven Psychologie etablierte Beschreibung des Lösungsprozesses ist die Suche des Weges vom Anfangszustand zum Endzustand des Problems im Problemraum der Aufgabe (Newell & Simon, 1963; Newell & Simon, 1972; Sydow, 1968). Nach diesem Modell besitzt jedes Problem einen objektiven Problemraum, der aus allen möglichen Lösungswegen besteht.

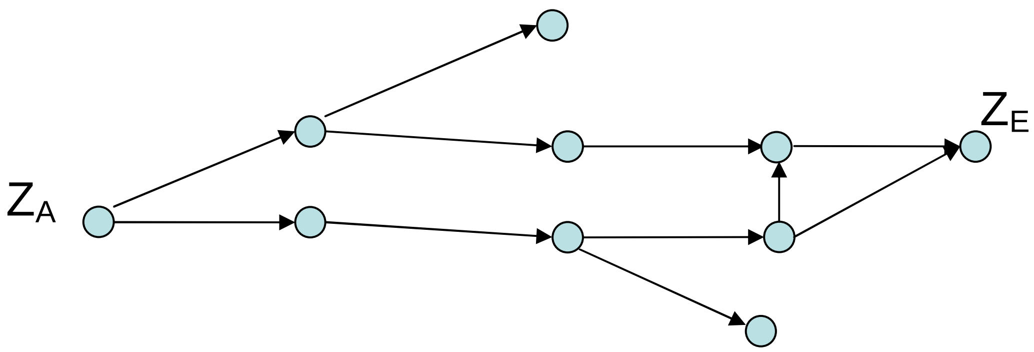


Abbildung 10. Problemraum einer Aufgabe (in Anlehnung an Newell & Simon, 1972)
Kreise stellen Zustände des Problems dar. Pfeile sind Operatoren im Problemraum

Der Problemlöser nimmt zuerst das Problem wahr. Das bedeutet, er konstruiert eine mentale Repräsentation des Anfangszustands und des Endzustands des Problems. Seine Aufgabe ist es, den Anfangszustand in den Endzustand mit Hilfe von Operatoren zu überführen und somit das Problem zu lösen. Auf dem Lösungsweg liegen Barrieren, die den Lösungsprozess behindern. Ferner verläuft der Weg über verschiedene Zwischenzustände, durch die der Problemlöser hofft, näher an den Endzustand zu rücken.

Der Problemlöser agiert innerhalb seines subjektiven Problemraums, der durch individuelle Repräsentationen des Problems und zugängliche Operatoren aber auch durch seine Überzeugungen determiniert wird. Glaubt z.B. ein Schüler, dass eine mathematische Aufgabe alle Informationen in Form von bestimmten Zahlen enthalten soll, ist sein Problemraum beim Lösen der Aufgabe Riesenschuhe viel zu eng, um eigenständig eine Lösung zu finden. Er denkt nicht daran, eine Annahme über den Zusammenhang zwischen der Körpergröße und der Schuh- (bzw. Fuß-)länge zu treffen, und scheitert an dieser Stelle im Lösungsprozess.

Problemlösepsychologie der Informationsverarbeitung. Seit den 50er Jahren des letzten Jahrhunderts bemühen sich Informatiker und Psychologen, Programme zu entwickeln, die menschliche Denkprozesse simulieren. Die Grundannahme ist hierbei, dass kognitive Systeme lebendiger Organismen nachgebaut werden können. Das geschieht mit Hilfe von Computerprogrammen. Reize, Befehle und andere Daten werden zu Eingangsgrößen, die durch die Operationen eines Computerprogramms bearbeitet werden. Am Ende wird ein Resultat wiedergegeben. Hinter dem Computerprogramm steht eine Theorie, deren Güte am Übereinstimmungsmaß der ausgegebenen Computerdaten zu den empirisch erhobenen Daten gemessen wird (Bower & Hilgard, 1983).

Das Besondere in diesem Theorierahmen ist die Sichtweise auf das Problemlösen, die mit Hilfe der Terminologie der Informationsverarbeitung beschrieben wird. Ein Problemlöser nimmt die Informationen aus der Umwelt auf und entwickelt zwei Repräsentationen des Problems: den Anfangs- und den Endzustand. Sind diese Repräsentationen nicht identisch, sucht er nach Operationen, die es ihm erlauben, den Anfangs- in den Endzustand zu überführen (Funke & Zumbach, 2006, S. 207; Newell & Simon, 1972, S. 83-86).

Bei allen Vorteilen, die der vorgestellte Zugang zu kognitiven Prozessen bietet, stößt er an einigen Stellen an seine Grenzen. Da die Denkweise eines Menschen wenige Aufschlüsse über die Repräsentation des Wissens im Gedächtnis erlaubt, kann man den Denkprozess mit solchen Programmen nur eingeschränkt nachbilden. In diesem Fall kann höchstens die funktionale Analogie des Programms zu menschlichen Denkprozessen erwartet werden. Es ist zwar theoretisch möglich, ein Computersystem so zu programmieren, dass nach außen menschenähnliche Reaktionen erzeugt werden. Aus diesen Reaktionen kann aber nicht die Identität des Programms mit den menschlichen Denkprozessen gefolgert werden. Ob die Denkprozesse wirklich genau so funktionieren, wie sie programmiert wurden, kann nicht festgestellt werden.

2.4 Schwierigkeiten und Strategien im Lern- und Problemlöseprozess

In diesem Abschnitt werden verschiedene Forschungszugänge zu Schwierigkeiten, Fehlern und Strategien beleuchtet. Am Modell des Problemraums von Newell und Simon können Schwierigkeiten und Fehler eingeführt und veranschaulicht werden. Aktuelle Bemühungen im Rahmen der PISA-Studie, Aufgabenschwierigkeiten theoretisch zu beschreiben und empirisch zu überprüfen, werden im Abschnitt zum Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe beschrieben. Eine Klassifizierung der Schwierigkeiten im Rahmen der Handlungstheorie von Aebli schließt diesen Abschnitt ab. Strategien im Lösungsprozess werden zunächst mit Hilfe von Theorien des Problemlösens und darauf mit Hilfe von Modellen zum Lernen aus Texten beschrieben. Charakteristisch für die Lernstrategieforschung der letzten Jahre ist das Übertragen theoretischer und empirischer Erkenntnisse der Forschungen zur kognitiven und metakognitiven Informationsverarbeitungstheorie auf andere Gebiete wie z. B. der Emotionen und der Kooperation. Aus diesem Grund werden am Ende des Abschnitts neben kognitiven und metakognitiven Strategien auch eine Gruppe der Ressourcenmanagementstrategien, nämlich Strategien für das kooperative Lernen, beschrieben.

Schon bei Dewey stehen Schwierigkeiten und Strategien im Lern- und Problemlöseprozess im Zentrum des Forschungsinteresses (vgl. Dewey, 1910/2001). Zwei Forschungszweige, die seit mehreren Jahrzehnten parallel zueinander Schwierigkeiten und Strategien in verschiedenen Inhaltsbereichen untersuchen, sind „Lernen aus Texten“ und die „Problemlösepsychologie“. Im Bereich der Problemlösepsychologie stellen sich Wissenschaftler die Frage, wie Probleme gelöst werden. Forscher, die Lernprozesse bei der Textbearbeitung im Fokus haben, fragen, wie Menschen aus Texten lernen. Die Versuchspersonen beider Forschungsrichtungen werden in der Regel vor verschiedene Anforderungen gestellt. Der Problemlöser soll primär die Lösung finden, der Lernende soll im Text vorhandene Informationen entschlüsseln, abspeichern und sie wiedergeben können. Ein Vergleich zwischen den genannten Forschungsperspektiven kann helfen, im ersten Schritt ein differenziertes Bild von Schwierigkeiten und Strategien zu konstruieren und diese im zweiten Schritt bei den Modellierungsaufgaben empirisch zu identifizieren.

2.4.1 Schwierigkeiten im Problemlöseprozess

Im Problemraum von Newell und Simon (vgl. Unterabschnitt 2.3.2) sind Schwierigkeiten Barrieren, die das Ausführen eines Operators behindern und dadurch den Lösungsprozess erschweren (Newell & Simon, 1972). Sind dem Problemlöser die Schwierigkeiten bewusst, überlegt er sich im Problemlöseprozess, wie er sie umgehen kann. Eine Lösungssuche im Problemraum lässt sich als eine schrittweise Überwindung von Schwierigkeiten vorstellen, die solange dauert, bis der angestrebte Zustand erreicht wird.

Im Problemlöseprozess können Schwierigkeiten zu Fehlern führen. Wird z.B. in der Aufgabe „Zuckerhut“ (siehe Abbildung 18, S.88) die Angabe 30 km/h in 3 Minuten als eine irrelevante Information angesehen, kann keine Überlegung helfen, sich im Problemraum weiter vorwärts zu bewegen. Im Problemraum sind Fehler Operatoren, die auf die „Holzwege“ im Problemlöseprozess führen.

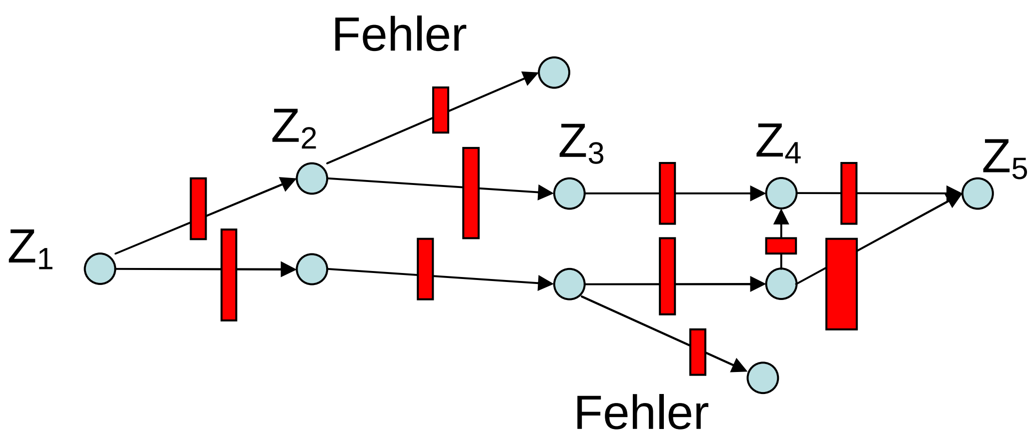


Abbildung 11. Schwierigkeiten und Fehler im Problemraum

Kreise stellen Zustände des Problems dar. Pfeile und Rechtecke sind Operatoren und Schwierigkeiten im Problemraum

Eine andere Definition von „Fehler“ bieten Miller et al.(1973). Fehler sind für sie Ist-Soll-Abweichungen bei der Realisierung von Absichten. Hat der Problemlöser die Absicht, näher an den Endzustand zu rücken. Bewegt er sich aber in die andere Richtung, wird dies als Fehler angesehen. Dieses Verständnis von Fehlern vernachlässigt die Situation, in welcher der Problemlöser sich erst vom Ziel in die falsche Richtung bewegen muss. Eine Handlung, die nach der Definition von Miller et al. kurzfristig als Fehler angesehen wird, kann sich demnach längerfristig als Erfolg erweisen. Beim Schachspiel wird zum Beispiel oft erst eine Figur geopfert, um darauf das ganze Spiel zu gewinnen.

Da die Realisierung einer Absicht erst im Handeln erfolgt, können Fehler zwar an verschiedenen Stellen auftreten, sichtbar werden sie jedoch erst beim Handeln (Schaub, 2006, S. 447). Es dürfte angenommen werden, dass Fehler immer durch Schwierigkeiten verursacht werden. Ein Problemlöser bemüht sich meist, einen Fehler im Lösungsprozess zu vermeiden bzw. ihn zu korrigieren. Einen Fehler zu korrigieren, bedeutet, den Fehler erstens *zu erkennen*, zweitens zu der Auslöseschwierigkeit im Lösungsprozess *zurückzukehren* und drittens diese Schwierigkeit endgültig *zu überwinden*.

Oser unterscheidet Fehler, die er als Abweichungen von einer Norm versteht, von Irrtümern. Irrtümer entstehen, wenn die Norm der handelnden Person noch nicht bekannt ist, und erst als Ergebnis des Erkundungsprozesses erfahren wird. Wenn ein Kind z.B. eine Vase noch nie auf den Fussboden fallen ließ und keinen Tadel dafür bekommen hat, weiß es nicht, dass das Füllenlassen einer Vase ein Fehler ist. Erst durch das Leben in der Gesellschaft lernen wir Normen kennen und können unsere Handlungen als Fehler erkennen (siehe auch Spychiger, 2006). Wissen über mögliche Fehler und Irrtümer werden von Oser als „negatives" Wissen bezeichnet. Negatives Wissen ist u.a.: „ein ganzheitliches Erinnern an die Umstände, in denen ein Fehler zustande gekommen ist, an die missratene Logik, die Gefühle des Versagens, die erlebten Konsequenzen" (Oser, 2007, S. 204).

Den Fehlern im Lernprozess wurde in der Zeit nach der TIMS- und PISA-Studie viel Aufmerksamkeit gewidmet. Zum Beispiel ist ein Teil der neuen Aufgabenkultur unter der Idee „Aus Fehlern lernen" wiederzufinden, der als ein wichtiger Baustein des Unterrichts angesehen wird (BLK, 1997). Oser u. a. sprechen in diesem Zusammenhang von „positiver Fehlerkultur" und Reusser sogar von „Fehlerdidaktik", die für die Verbesserung der Unterrichtsqualität notwendig ist (Oser, Spychiger, Hascher, & Mahler, 1997; Reusser, 1999, S. 203). Die Fehlerkultur und Fehlerdidaktik wird im Abschnitt zu allgemeindidaktischen Konzeptionen detailliert beleuchtet (vgl. Unterabschnitt 2.5.3).

Mindestens genauso wichtig wie Erkenntnisse über Fehler ist das Wissen über Schwierigkeiten und Strategien im Lösungsprozess, da im Lernprozess das Feststellen von Fehlern allein keine Hilfe bieten kann.

2.4.2 Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe

Der Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe wird durch die Anzahl von Schwierigkeiten beim Lösen der Aufgabe charakterisiert. Eine wichtige und zugleich anspruchsvolle Herausforderung an fachdidaktische Theorien ist es, den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe gut einschätzen zu können. Der Versuch jedoch, eine universelle Schwierigkeitsskala zu entwickeln, einen objektiven Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe festzustellen und eine optimale Passung der Aufgabenanforderungen an die individuellen Fähigkeiten des Problemlösers zu erreichen, ist leider zum Scheitern verurteilt. Zwei gewichtige Gründe dieses Scheiterns sind die Mehrdimensionalität der zum Lösen erforderlichen Operationen und die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen von Problemlösern (Aebli, 1980, Bd. 2, S. 354-356). Die Bemühungen, eine passende Aufgabencharakterisierung zu finden, gehen in zwei Hauptrichtungen. Zunächst kann der Bereich enger definiert werden, aus dem die zu charakterisierenden Aufgaben ausgewählt werden, indem man beispielsweise nur Mathematikaufgaben allgemein oder sogar nur Mathematikaufgaben zu einem Inhaltsbereich betrachtet. Eine andere Möglichkeit, die Schwierigkeitsanalyse der Aufgaben zu vereinfachen, liegt darin, eine bestimmte Population von Problemlösern auszuwählen und deren Lernvoraussetzungen genau zu ermitteln.

Neue Versuche, Aufgaben gemäß dem Schwierigkeitsgrad oder den Anforderungen zu kategorisieren, wurden im Rahmen der PISA-Studie und den Bildungsstandards unternommen. Das Ziel der Aufgabenklassifikation war, Testitems zu entwickeln, welche die Fachkompetenz der Schüler adäquat abbilden. Dafür wurde die Gesamtkompetenz normativ dimensioniert und die Ausprägung der jeweiligen Anforderungsdimension definiert. Als Faktoren, die den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe bestimmen, werden in „PISA-Naturwissenschaften“ formale, wissensbezogene sowie kognitive Anforderungen genannt. Mit diesem Schema ist es gelungen, 45% der Varianz der Itemschwierigkeit zu erklären (Prenzel, Häusler, Rost, & Sinkbeil, 2002; Prenzel, et al., 2001). Eine ähnlich gute Aufklärung der Schwierigkeit erhielt man auch in der PISA-Studie zu Mathematik (Neubrand, Klieme, Lüdtke, & Neubrand, 2002). In den Bildungsstandards des Fachs Mathematik werden die Aufgaben – zum Teil in Anlehnung an die PISA-Studie – nach allgemeinen mathematischen Kompetenzen, inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen und Anforderungsbereichen unterschieden(Blum, 2006, S. 3). Inwiefern diese Einteilung eine empirische Aufgabenschwierigkeit vorhersagen kann, wurde in einer neuen Studien von Turner et al. (in press)empirisch überprüft. Demnach kann mit einem solchen Kompetenzmodell über 60% der Varianz in Itemschwierigkeiten erklärt werden.

Einen an der Lösungsstruktur orientierten Zugang zu Aufgabenschwierigkeiten hat Aebli gewählt. „Wenn Handeln und Operieren heißt, Elemente zu verknüpfen, und wenn Begriffsinhalte objektivierte Handlungen und Operationen darstellen, so wird jede Analyse der Schwierigkeit von Aufgaben damit beginnen müssen, ihre Struktur zu untersuchen“ (Aebli, 1980, Bd. 2, S. 357). Wird der Einfluss von Vorwissen des Problemlösers außer Betracht gelassen, hängt die Schwierigkeit der Lösungsstruktur von der Komplexität der zu verknüpfenden Elemente und der Relationen ab. Auch nimmt Einfluss an welcher Stelle des Elementes und wie die Handlung oder Operation anzusetzen wären. Schließlich ist die Ergebnisoperation ein weiterer Schwierigkeitsfaktor, da sie aus der Verknüpfungsstruktur resultiert (Aebli, 1980, Bd. 2, S. 359). Ein einfaches Beispiel, das diese drei Schwierigkeitsmerkmale illustriert, ist eine Rechenaufgabe mit zwei Zahlen. In der Aufgabe $\frac{1}{2}+3$ sind Zahlen Elemente, die man verknüpfen soll, und die Addition ist die zugehörige Operation. Die Aufgabenschwierigkeit wird durch die Auswahl von Elementen und die Auswahl der Operation beeinflusst. Wird in der Aufgabe $\frac{1}{2}+3$ anstelle $\frac{1}{2}$ eine 1 genommen (ein Element wird ausgetauscht) wird die Aufgabe im Allgemeinen leichter. Genau so ist die Aufgabe $\frac{1}{2}+3$ im Allgemeinen leichter als $\frac{1}{2}\cdot 3$ (die Operation wird ausgetauscht). Beim Lösen der Aufgabe $\frac{1}{2}\cdot 3$ muss man sich überlegen, auf welches Element von $\frac{1}{2}$ (auf 1 oder auf 2) die Multiplikation angewandt werden soll oder, mit anderen Worten, an welcher Stelle sie angesetzt wird. Ferner kann die Komplexität der Ergebnisoperation bei der gleichen Operation unterschiedlich sein. In der Aufgabe $\frac{1}{2}\cdot 3331$ kann das Ergebnis lauten „1665,5“ oder auch „Es ist keine ganze Zahl“. Um die letzte Antwort zu bekommen, muss die Zahl 1665,5 nicht unbedingt ausgerechnet werden. Es reicht zu wissen, dass keine ganze Zahl das Ergebnis sein kann, wenn man $\frac{1}{2}$ mit einer ungeraden Zahl multipliziert.

Einen zweiten Baustein der Aufgabenschwierigkeit bilden Medien des Denkens und die Modalität der Objekte. Die Grundlagen einer Theorie, die sich mit den Medien des Denkens befasst („Medientheorie“), wurden von Bruner in Anlehnung an Entwicklungstheorien von Vygotskij und Piaget angelegt (Piaget, 1936/1991, 1937/1991; Vygotskij, 1969). Bruner hat dabei angenommen, dass Wissen und Erfahrungen in drei Medien gespeichert und entwickelt werden können: in Handlungen (enaktives Wissen), in Vorstellungsbildern (ikonisches Wissen) und sprachlich/ symbolisch (symbolisches Wissen) (Bruner, Olver, & Greenfield, 1971). „Jede dieser drei Darstellungsmethoden, die handlungsmäßige, die bildhafte und die symbolische, hat ihre eigene Art, Vorgänge zu repräsentieren. […] Die Wechselwirkung ihrer Anwendungen bleibt ein Hauptmerkmal des intellektuellen Lebens des Erwachsenen" (Bruner, 1971, S. 21). Jedes Medium hat seine Vor- und Nachteile (Schnotz, 1994, S. 145-168). Die Repräsentationen können in jedem Medium nebeneinander bestehen und nach Bedarf kann ein Teil der Informationen aus einem in das andere Medium übersetzt werden. Aebli hat die Handlungs-, Operations- und Begriffsstrukturen mit Hilfe der Medientheorie analysiert, wobei auch die Frage, ob die Strukturen modal oder amodal – d.h. inner- oder außerhalb eines Mediums – repräsentiert sind, eine zentrale Stellung in seiner Theorie annimmt. Nach Meinung von Aebli sind die Objekte der Handlungen modal repräsentiert. Hingegen haben die Beziehungen zwischen den Objekten im Moment der Entstehung eine amodale Natur. Im Laufe der Objektivierung kann aus einer Struktur ein Begriff entstehen, der in einem der drei Medien modal repräsentiert wird.

In der gegenwärtigen Diskussion wird die Frage der Vor- und Nachteile eines der drei Medien nicht mehr so kontrovers wie früher diskutiert. Der Fokus der Diskussion hat sich in der kognitiven Psychologie von der Frage „symbolisch/ bildhaft/ enaktiv" auf den Vergleich „propositional" vs. „analog" (z.B. bildhaft oder auditiv) verschoben. Eine propositionale Repräsentation kann man sich als ein Begriffsnetz vorstellen. Müssen aus der propositionalen Repräsentation Inferenzen gebildet werden, werden schrittweise logische Regeln angewandt. Eine analoge Repräsentation (z.B. in Form eines „spatial image") hingegen bildet die Wirklichkeit so ab, dass die Informationen aus der Repräsentation direkt – d.h. ohne zusätzliche Schlussfolgerungen – ablesbar sind. Die „Spatial-Images" müssen aber nicht unbedingt den gleichen Aufbau wie reale Bilder haben. Sie weisen nur eine funktionelle Ähnlichkeit zu den echten Bildern auf (Lüer, Werner, & Lass, 1995), dies bedeutet, dass eine analoge Repräsentation eines Gegenstandes die gleichen Funktionen wie ihr Urbild hat.

Empirische Ergebnisse zeigen, dass beide dieser Repräsentationsformen möglich sind und jede ihre Stärke- und Schwäche hat. Dabei ist es umstritten, ob es prinzipiell möglich ist, empirisch zu belegen, welche Art der Repräsentation in einem konkreten Fall gebildet wird(vgl. hierzu Diskussion zwischen Anderson und Pylyshyn in Anderson, 1978; Pylyshyn, 1981). Die meist geteilte Meinung ist, dass modale Repräsentationen parallel gebildet werden und einander ergänzen (vgl. z.B. das Modell von Schnotz & Dutke, 2004, S. 76).

Schwierigkeiten einer Aufgabe werden u. a. von der Modalität (Anschaulichkeit) der Objekte und von der Einbeziehung der „externen Gedächtnissysteme“ (schriftliche Externalisierung der Gedanken) in den Lösungsprozess beeinflusst. Während die Wahl einer geeigneten Modalität jeweils aufgaben- und vorwissenspezifisch ist, scheint das Aufschreiben von Gegebenheiten einer Aufgabe oder von Zwischenergebnissen und anderen Notizen immer eine nützliche Unterstützung des Arbeitsprozesses zu sein (Aebli, 1980, Bd. 2, S. 359). Dies wird auch in einer empirischen Untersuchung bestätigt (Mourtos, DeJong Okamoto, & Rhee, 2004). Eine Erklärung des letztgenannten Phänomens kann aus der Kapazitätseinschränkung des Arbeitsgedächtnisses gefolgert werden. Eine Entlastung des Arbeitsgedächtnisses in Folge einer Lösungsdokumentation führt offenbar zur Befreiung von kognitiven Kapazitäten, die für die Informationsverarbeitung benutzt werden können.
Nicht nur das Medium, in dem eine Repräsentation des Problems gebildet wird, sondern auch die Art der Repräsentation des Problems beeinflusst den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe. Ein Text kann verwirrend, das Bild irreführend und die Handlung chaotisch sein. Auch eine Kombination aus Text und Bild misslingt manchmal, weil Bilder nicht immer das Leseverständnis erleichtern (Schnotz & Bannert, 2003).

2.4.3 Strategien

Das Forschungsfeld der Lern- und Problemlösestrategien ist durch verschiedene Forschungszugänge und Klassifikationen gekennzeichnet (zu Strategien im Problemlösen vgl. Funke, 2006a; zu Lernstrategien vgl. Krapp, 1993). Gemeinsam ist beiden Forschungsgebieten die Annahme, dass ein Problemlöser den Ablauf kognitiver Prozesse beeinflussen kann. Nachdem im Unterabschnitt zu den Schwierigkeiten (vgl. Unterabschnitt 2.4.1) die Theorie des Problemlösens in den Mittelpunkt gestellt wurde, werden in diesem Teil sowohl Strategien des Problemlösens als auch der Zugang zu Strategien über das Textverstehen berücksichtigt. In der Mathematikdidaktik wurden Strategien des Problemlösens rezipiert, fachspezifisch konkrettisiert (Schupp, 2002), Konzeptionen der Strategievermittlung entwickelt und empirisch evaluiert (Bruder, 2002, 2003; Perels, Otto, Schmitz, & Bruder, 2007).
Strategien in der Psychologie des Problemlösens. Im Bereich des Problemlösens wird der Begriff Strategie wenig verwendet (Ausnahme ist z.B. Pólya, 1948). Stattdessen spricht man von Algorithmen und Heuristiken. „Algorithmisches Problemlösen führt bei einfachen Problemen immer zur Lösung, wenn die speziellen Regeln zur Überführung eines Ausgangszustandes in einen Endzustand berücksichtigt werden“ (Funke & Zumbach, 2006, S. 208). Heuristiken sind hingegen Faustregeln, die nicht immer zum Erfolg führen (Anderson, 1989, S.

193). Algorithmen und Heuristiken sind Strategien, die sich in der Erfolgsaussicht aber auch in der Spezifizierung ihrer Anwendungsbedingungen unterscheiden. Für Algorithmen sind die Anwendungsbedingungen eindeutiger als für Heuristiken beschrieben. Ferner führen Algorithmen immer zum Erfolg, wenn sie richtig angewandt werden. Für die Heuristiken gilt das nicht. In der Problemlösepsychologie spielt die Art der Repräsentation beider Strategietypen im Gedächtnis eine untergeordnete Rolle. Hier ist der Forschungsgegenstand vor allem die Effektivität von Lösungsstrategien. Die Wirksamkeit von Strategien wird meistens über die Qualität der Lösung und über die Geschwindigkeit der Lösungskonstruktion bestimmt.

Wie auch bei Schwierigkeiten werden die Strategien der Lösungssuche in der Problemlösepsychologie in das Modell des Problemraums einer Aufgabe eingebettet. Heuristiken und Algorithmen helfen dem Problemlöser, den Abstand zwischen Anfangs- und Endzustand des Problems zu reduzieren. Einige dieser Strategien werden im Folgenden erläutert.

Mittel-Ziel-Analyse. Gemäß Newell und Simon ist es vorteilhaft zu versuchen, „schwierige Unterschiede zu eliminieren, auch wenn dadurch neue, weniger schwierige Unterschiede entstehen können“ (Newell & Simon, 1972, S. 416). Um ein Problem zu lösen, soll der Problemlöser das Hauptziel in Teilziele zerlegen und sich bemühen, das Hauptziel schrittweise über die Teilziele zu erreichen. Die Strategie „Mittel-Ziel-Analyse“ besteht aus einer Reihe von Teilstrategien, die im Computerprogramm „General Problem Solver” implementiert wurden (Newell & Simon, 1963). Es ist jedoch anzumerken, dass die Zielsetzung von Newell und Simon – ein Computerprogramm zum Problemlösen zu entwickeln – Grenzen in der Anwendung ihrer Mittel-Ziel-Analyse-Methode auf Menschen setzt. Eine Strategie, die sich gut in ein Computerprogramm implementieren lässt, kann für Menschen auch gänzlich ungeeignet sein. So kann eine große Zahl von Teilzielen bei der Mittel-Ziel-Analyse in Millisekunden vom Computer abgespeichert und nachher systematisch abgearbeitet werden. Das menschliche Gehirn ist aber aus dieser Sicht ganz anders konstruiert und löst daher auch ein Problem anders. Da „die Versuchspersonen Schwierigkeiten haben dürften, viele Ziele und Teilziele abrufbar im Kurzzeitgedächtnis zu behalten“ (Anderson, 1989, S. 202), ist der Versuch, Aufgaben mit computerähnlichen Methoden wie die von Newell und Simon von Menschen lösen zu lassen, zum Scheitern verurteilt. Also müssen Menschen andere Methoden beim Problemlösen anwenden. Die wesentliche Hürde des auf Simulation angelegten Zugangs zur Überprüfbarkeit von Gedächtnismodellen ist somit die Unwissenheit über den Aufbau des menschlichen Gehirns. Solange dies nicht geklärt ist, müssen wir bei der Simulation von Denkprozessen entweder mit Modellen wie z. B. ACT und ACT-R (Anderson, 1983; Anderson, et al.,

2004) arbeiten und diesen Modellen zugrunde liegende Annahmen in Kauf nehmen oder aber fallanalytische Forschungsmethoden anwenden.

Analogie. Eine andere schon in die Assoziationstheorien eingeflossene Heuristik ist das Problemlösen durch Analogiebildung. Beim Lösen eines unbekannten Problems sucht die Versuchsperson nach einem ähnlichen Problem, dessen Lösung ihr schon bekannt ist. Die Übertragung einer bekannten Lösung auf ein neues Problem – ein Wissens- und Fähigkeitstransfer –, stellt jedoch eine sehr anspruchsvolle Aufgabe dar, an der viele Problemlöser scheitern (Mähler & Hasselhorn, 2001). Wie Holyoak, Mayer und andere Kognitionspsychologen festgestellt haben, sind Problemlöser oft schon nicht in der Lage, eine strukturelle Ähnlichkeit von zwei vorgegebenen Aufgaben zu erkennen (Holyoak, 1984; Mayer, 1992). Vor allem schwache Problemlöser lassen sich eher über Kontextmerkmale wie z.B. den Ort des Geschehens, Handlungspersonen etc. bei der Bildung von Analogien in die Irre führen und identifizieren so keine Ähnlichkeit zum Problem, die bei der Lösungsfindung hilfreich wäre (Reed, 1999, S. 114).

Vor- und Rückwärtsstrategie. Beim Lösen eines Problems kann die Richtung der Lösungssuche gewählt werden. Entweder bewegt sich der Problemlöser von den Angaben zum Ziel hin, oder aber vom Ziel zu den Angaben. Diese Strategien kann man an einer mathematischen Aufgabe veranschaulichen. Wird die Lösung vorwärts gesucht, überlegt sich der Problemlöser, welche Größe er mit den Angaben berechnen kann, und ob diese Zwischengröße ihn näher ans Ziel bringt. Die Rückwärtsstrategie besteht dagegen in der Suche eines neuen Ziels, das möglichst nahe an den Angaben liegt. Beim Lösen der Aufgabe Zuckerhut (siehe Abbildung 18, S. 88) kann man sich z.B. erst überlegen, dass der Weg von der Talstation bis zum Fuß des Berges etwa genau so groß ist, wie der Weg von der Talstation bis zur Mitte des Berges. Dann wird analysiert, ob das neue Teilziel mit Hilfe dieser Angaben erreichbar ist. In der Praxis wird meistens eine Mischform beider Strategietypen angewandt. Die Experten-Novizen Forschung zum Problemlöseverhalten in der Physik zeigt jedoch, dass Experten häufiger vorwärts und Novizen häufiger rückwärts die Lösung suchen (Larkin, 1981).

Repräsentation des Problems. Wie schon im Unterabschnitt über Schwierigkeiten beschrieben, beeinflusst die Art der Repräsentation des Problems im Gedächtnis die Schwierigkeit der Lösungssuche. Bei der Lösungsfindung kann nicht nur der Wechsel der Medien, sondern auch der Wechsel der Repräsentation in einem Medium helfen. Zahlreiche Beispiele hierfür sind z.B. bei Anderson und Newell und Simon zu finden (Anderson, 1989; Newell & Simon, 1972).

Es gibt neben den genannten auch andere Strategien wie z.B. „Abstrahieren vs. Konkretisieren“, „Analysieren“, „breite vs. tiefe Lösungssuche“ sowie „Makrooperatoren verwenden“ (Dörner, 1995).

Strategien im Bereich „Lernen aus Texten“. Anders als in der Problemlösepsychologie wird der Strategiebegriff in der Lernpsychologie stärker theoriegeleitet präzisiert. Weitgehend einig sind sich Lernpsychologen in der Ansicht, dass ein Lernender nicht nur Fertigkeiten und Fähigkeiten, sondern auch Steuerungseinheiten braucht, die gezielte Wissensveränderungen anleiten. Kirby schreibt in diesem Zusammenhang von „skills domain“ und „strategies domain“ (Kirby, 1988).

Der Begriff „Lernstrategie“ wird von verschiedenen Autoren unterschiedlich definiert. Friedrich und Mandel bezeichnen Lernstrategien in Anlehnung an Weinstein und Mayer als „jene Verhaltensweisen und Gedanken, die Lernende aktivieren, um ihre Motivation und Prozesse des Wissenserwerbs zu beeinflussen und zu steuern“ (Friedrich & Mandl, 2006, S. 1; Weinstein & Mayer, 1986). Krapp folgert aus den Hierarchiestufen der “skills domain“ von Kirby, dass Lernstrategien „mental repräsentiert“ und „im Gedächtnis als aufrufbare Handlungspläne gespeichert sind“ (Krapp, 1993, S. 3). Die beiden Definitionen ergänzen einander: *Lernstrategien sind jene Verhaltensweisen und Gedanken, die den Wissens- und Fähigkeitserwerb in motivationalen, kognitiven, sozialen und anderen Bereichen steuern. Im Gedächtnis sind Lernstrategien in Form von aufrufbaren Handlungsplänen repräsentiert (vgl. zu verschiedenen Facetten der Lernstrategieforschung Krapp, 1993; zu anderen Definitionen von Strategien vgl. Olson, 1971).*

Gemäß den in der Definition der Lernstrategien genannten Bereichen können unterschiedliche Lernstrategiegruppen gebildet werden. Eine empirisch gut nachgewiesene Kategorisierung der Lernstrategiedomäne kommt aus dem Bereich der Selbstregulation[5]. Eine Forschergruppe um Pintrich hat auf der Basis von Weinsteins und Mayers Strategieeinteilung eine Kategorisierung von Lernstrategien entwickelt (Pintrich, 1999; Pintrich & Garcia, 1994). Pintrich unterscheidet drei Hauptgruppen von Lernstrategien: kognitive Lernstrategien, metakognitive Lernstrategien und Strategien des Ressourcenmanagements. Unter kognitiven Lernstrategien wird die Gruppe von Strategien verstanden, die eine unmittelbare Informationsaufnahme und Informationsverarbeitung anleitet. Die zweite Hauptkategorie – metakognitive Lernstrategien – umfasst Lernstrategien, welche die kognitiven Strategien überwachen und steuern. Meta-

[5] An dieser Stelle ist auf die enge Verwandtschaft von Selbstregulation und Lernstrategien hinzuweisen. Pintrich bezeichnet Selbstregulation wie folgt: „Self-regulated learning is defined as the strategies that students use to regulate their cognition (i.e., use of various cognitive and metacognitive strategies) as well as the use of resource management strategies that students use to control their learning“ (Pintrich, 1999, S. 459).

kognitive Strategien sind z.B. Planen, Überwachen und Regulation des Lernprozesses. In der Gruppe der Strategien des Ressourcenmanagements sind Lernstrategien zu finden, die die Informationsverarbeitung indirekt unterstützen. Solche Strategien sind z.B. bewusste Zeiteinteilung, Eingliederung in eine Arbeitsgruppe, Abschirmung von Störungsfaktoren u. a. (vgl. K. P. Wild, 2001). In einer neueren Einteilung von Strategien wird vorgeschlagen, zwei kognitive Strategien – die Wiederholungs- und Elaborationsstrategien – aus kognitionspsychologischen Gründen in eine Gruppe einzuordnen (Steiner, 2006) und weitere Strategien wie etwa Strategeien der Wissensnutzung, Help-Seeking-Strategien, Emotionsstrategien etc. zu betrachten (Friedrich & Mandl, 2006).
Die nachfolgende Beschreibung von Lernstrategien beruht zum größeren Teil auf den Arbeiten von Weinstein und Mayer, Pintrich sowie von Friedrich und Mandl (Friedrich & Mandl, 1997; Friedrich & Mandl, 2006; Pintrich, 1999; Weinstein & Mayer, 1986).

Gruppe 1, Kognitive Lernstrategien. Weinstein und Mayer charakterisieren Strategien in Bezug auf die Ziele, die im Lernprozess verfolgt werden. „Each of learning strategies may be used to achieve a certain goal for influencing the cognitive processes in encoding“(Weinstein & Mayer, 1986, S. 317). Lerntheoretisch stützen sich die Autoren auf die kognitive Theorie der Informationsverarbeitung und auf den Konstruktivismus (Weinstein, Husman, & Dierking, 2000, S. 729; Weinstein & Mayer, 1986, S. 315-316). In der Analyse von Lernstrategien wurden die eingesetzten Strategien an allgemeine Anforderungen der Aufgabe gekoppelt. Die kognitiven Anforderungen des Lernens aus Texten werden unter dem Namen „encoding process“ zusammengefasst und bestehen aus Auswahl bzw. Organisation von neuen Informationen und deren Integration in vorhandene Wissensstrukturen.
Weinstein und Meyer unterscheiden Wiederholungs-, Organisations-, Elaborationsstrategien, Strategien zur Verständniskontrolle (Bezeichnung von Pintrich u. a. „Kritisches Denken“) und affektive Strategien (Pintrich, 1989). Die Wiederholungs-, Organisations- und Elaborationsstrategien zielen direkt auf die Informationsverarbeitung und sind jeweils in zwei Strategiegruppen aufgeteilt: einfache und komplexe Anforderungen. Die Einteilung der Strategien nach dem Schwierigkeitsniveau präzisiert zwar die Strategiegruppen, impliziert aber zugleich eine dichotome Einteilung der Aufgaben in komplexe und einfache Aufgaben. Die „einfache“ Anforderung wäre z.B., 10 Wörter aus einer Fremdsprache auswendig zu lernen, die komplexe wäre, die wichtigsten Informationen aus einem Text zu entnehmen. Diese zwei Arten von Aufgaben erfordern nach Meinung der Autoren den Einsatz von unterschiedlichen Strategien. Es ist aber bekannt, dass eine „einfache“ Anforderung, wie 10 Wörter auswendig zu lernen,

durch eine Strategie aus dem Bereich der komplexen Anforderungen, wie z.B. durch die Organisation der Information (eine Merkgeschichte) oder Elaboration des Wissens, bewältigt werden kann (Steiner, 2006). Aus diesem Grund wird auf diese Unterscheidung hier nicht eingegangen.

Wiederholungsstrategien sind auf Selektion und Speicherung dargebotener Informationen gerichtet. Elaborationsstrategien zielen auf die Verknüpfung von neuen mit vorhandenen Informationen. Organisationsstrategien reduzieren neue Informationen vor der Speicherung auf das Wesentliche, indem sie eine Umstrukturierung der vorliegenden Informationen anleiten. Die Strategie „Kritisches Denken" prüft, ob die neuen Informationen den vorher abgespeicherten Informationen widersprechen. Dies ist für die Kohärenz des Wissens verantwortlich (siehe zu Kohärenzbildung beim Lesen Schnotz, 1994). Die Kategorie Verständniskontrolle/ Kritisches Denken gehört zu der Gruppe metakognitiver Strategien. Affektive Strategien kann man der Gruppe „Ressourcenmanagement" zuordnen.

Gruppe 2, Metakognitive Strategien. Planung, Überwachung/ Kontrolle und Regulation bilden die Gruppe der metakognitiven Strategien. Hinweise auf die hohe Bedeutung von Planung- und Kontrollstrategien im Bereich des geometrischen Problemlösens geben z.B. Studien von Chinnappan & Lawson(1996).

Planung: Der Lernende setzt die Ziele vor dem Lernprozess und plant, wie diese Ziele erreicht werden können.

Überwachungsstrategien/ Kontrolle: Während des Lernprozesses wird der Einsatz kognitiver Strategien überwacht. Wenn eine kognitive Strategie nicht adäquat eingesetzt wird, sollten die Überwachungsstrategien dies registrieren und weitere Strategien – vor allem Regulationsstrategien – aktivieren.

Regulationsstrategien optimieren den Informationsverarbeitungsprozess (vgl. zu Metakognitiven Strategien z. B. Pintrich, 1999). Sie können andere metakognitive oder kognitive Strategien einschalten, um die gesetzten Ziele dadurch erreichbar zu machen oder sie ggf. zu korrigieren.

Gruppe 3, Ressourcenmanagement. Pintrich und Mitarbeiter haben festgestellt, dass eine Komponente des erfolgreichen Lernens die effektive Nutzung zeitlicher, sozialer und anderer Ressourcen ist. Diese Befunde (z.B. zu Help-Seeking) wurden auch im Klassenraum repliziert, in dem die Fremdsteuerung traditionell im Vordergrund steht (zu Help-Seeking im Klassenraum siehe Boekaerts, 2002; zu Fremd/ Selbststeuerung vgl. Schiefele & Pekrun, 1996;

Schworm & Fischer, 2006). Diese Gruppe der Strategien schließt auch Kooperative Strategien ein. Die große Bedeutung des kooperativen Lernens für den Wissenserwerb wurde in verschiedene Lerntheorien angenommen und auch empirisch in einer Reihe von Untersuchungen und Metanalysen bestätigt (Hattie, 2007; Hattie, Biggs, & Purdie, 1996; Vygotskij, 1969). Aus diesem Grund wird in diesem Unterabschnitt auch eine Gruppe der Ressourcenstrategien beschrieben: Strategien für das kooperative Lernen.

Ressourcenmanagement: Strategien für das kooperative Lernen. Das Lernen findet selten ausschließlich individuell statt. Auch wenn zunächst alleine gelernt wird, versuchen die Lernenden durch Austausch, über das Gelernte zu reflektieren. Ferner suchen die Lernenden nach Hilfen und ziehen dafür Experten, z. B. Lehrer oder Eltern, heran. Eine soziale Interaktion zwischen Individuen kann so den Lernprozess erleichtern oder aber behindern. Für eine erfolgreiche Zusammenarbeit brauchen Lernende gut funktionierende soziale Strategien, die ihr Lernverhalten anleiten.

Obwohl verschiedene Aspekte der Zusammenarbeit von Lernenden gut erforscht sind, fehlt eine systematische Betrachtung des gemeinsamen Lernens aus der lernstrategischen Perspektive. Dies kann dadurch erklärt werden, dass die Lernstrategieforschung sich bis heute auf andere Aspekte – vor allem kognitive, metakognitive und emotionale Variablen – konzentriert hat. Einzelne Bausteine der Theorie zu Strategien für das Kooperative Lernen findet man u.a. in den Forschungen zum Kooperativen Lernen, zur Ko-konstruktion und in der Theorie zum Academic-Help-Seeking.

Kooperatives Lernen. Eine grundlegende Voraussetzung für die Entwicklung und Anwendung kooperativer Strategien ist das gemeinsame (oder kollaborative) Lernen von mehreren Personen. Das kollaborative Lernen kann sowohl kooperativ als auch kompetitiv (wettbewerbsorientiert) ablaufen. Traditionelle kollaborative Lerngruppen wie z.B. Schulklassen sind häufig kompetitiv orientiert (Aronson, 2004). Schüler konkurrieren in diesen Lerngruppen um Noten, Ansehen der Peers, Lehrerunterstützung u.s.w. (Boekaerts & Corno, 2005). Die Konkurrenz muss nicht immer für alle Schüler kontraproduktiv sein. Slavin unterstreicht jedoch, dass die kompetative Atmosphäre vor allem für leistungsschwache Schüler sehr belastend ist (Slavin, 1996, S. 3). Auch ist die Kooperation innerhalb der Gruppe in Bezug auf die Leistungen im Durchschnitt erfolgreicher als eine Konkurrenzsituation (Johnson & Johnson, 1994, S. 40-43). Eine Metaanalyse von Slavin, die fast 100 Studien zum Kooperativen Lernen umfasst, belegt eine eindeutige Überlegenheit kooperativer Lernformen im Hinblick auf die Schülerleistungen und soziale sowie motivationale Kompetenzen. Den entscheidenden Einfluss auf Leistungszuwächse beim kooperativen Lernen üben zwei Faktoren aus: Gruppenbelohnung und individuelles Lernen der Gruppenmitglieder. So Slavin: „Group rewards based on the individual learning of all group members are extremely important in producing positive achievements outcome in cooperative learning“ (Slavin, 1996, S. 45).

Ko-konstruktion. Empirische Befunde zum Erfolg kooperativer Lernformen werden mit Hilfe von Entwicklungstheorien von Piaget (Doise & Mugny, 1984) und Vygotskij (Vygotskij, 1969) sowie aus der Perspektive von Situated- and Social-Shared-Cognition (J. S. Brown, Collins, & Duguid, 1989) begründet (vgl. Reusser, 2001a; Slavin, 1996, S. 17-19). Reusser unterstreicht, dass Wissen und Fähigkeiten in einer sozialen und kulturellen Umgebung konstruiert werden, und führt den Begriff der „Ko-konstruktion“ ein. „The basis of personal development and enculturation […] is not the socially isolated construction of knowledge, but its co-construction in a social and cultural space“ (Reusser, 2001a, S. 2058). Die Ko-konstruktion kann dementsprechend auch soziale Konstruktion genannt werden (Oeter, 2001). Das kollaborative Lernen sollte so verlaufen, dass ko-konstruktive Prozesse jedes Gruppenmitglieds angeregt werden. Die Ko-konstruktion kann über eine den Lernprozess fördernde Mischung aus individueller und kooperativer Arbeit angeregt werden.

Eine empirische Untersuchung von Vidacovic und Manfred in kooperativen Lernumgebungen auf der Basis von Ko-konstruktion bestätigt auch theoretische Überlegungen von Aebli (vgl. Aebli, 1980, Bd. 2, S. 359), nach denen Verstehensprozesse durch eine Externalisierung von Gedanken der Lernenden beeinflusst werden können: „.. changes in understanding may result from parallel and successive internalization and externalization of ideas by individuals in a social context” (Vidacovic & Martin, 2004, S. 465). Somit eröffnet die ko-konstruktive Sichtweise auf die Lern- und Problemlöseprozesse eine neue Perspektive in den Forschungen zu kooperativen Lernstrategien.

Da Lernstrategien als abrufbare mentale Handlungspläne definiert wurden (vgl. die Definition von Lernstrategien in diesem Unterabschnitt), impliziert ihre Anwendung immer ein Ziel. Dieses Ziel ist es, den Wissenserwerb im weiten Sinne zu steuern. Während kognitive Strategien eine unmittelbare Informationsverarbeitung anleiten und metakognitive Strategien für Planung, Monitoring und Regulation des Lernprozesses verantwortlich sind, ist die Aufgabe kooperativer Strategien, den Einsatz kognitiver und metakognitiver Strategien zu unterstützen und so eine bessere Lernqualität zu erreichen. Wegen ihrer unterstützenden Funktion werden Ressourcenstrategien auch Stützstrategien genannt (Friedrich & Mandl, 1992; Krapp, 1993).

Die Annahme, dass kooperative Strategien über kognitive Strategien auf den Lernerfolg wirken, führt zu einer komplexen Abhängigkeit. Bei der empirischen Untersuchung des Zusammenhangs zwischen kooperativen Strategien und Leistungen sollen deshalb kognitive Strategien wegen ihrer Mediatorenfunktion berücksichtigt werden.

In der Forschungspraxis wurden einzelne Kooperationsstrategien zu Kooperationsskripts zusammengefasst und ihre Wirkung auf Lernleistungen wurde überprüft. Ein Kooperationsskript ist z.B. das Konzept „Reciprocal-Teaching”, dessen Effekte auch in Schüler-Gruppen nachgewiesen wurden (siehe Metaanalyse bei Rosenschein, Meister, & Chapman, 1996). Das Reciprocal-Teaching wurde für den Wissenserwerb mit Texten von Palincsar und Brown entwickelt (Palincsar & Brown, 1984). Die Grundidee dieses Konzepts ist, dass ein Lernender die Lehrerrolle übernehmen kann. Diese Idee wurde auf kleine Lerngruppen übertragen, in denen Lernende beim Lesen nach jedem Textabschnitt ihre Rollen tauschen. Durch die Rollenzuweisung werden Strategien des kooperativen Lernens und kognitive Strategien der Tiefenverarbeitung wie Elaboration und Organisation häufiger als beim individuellen Lernen angewandt (zu Tiefen- vs. Oberflächenverarbeitung vgl. Entwistle & Ramsden, 1983; Ertl & Mandl, 2006, S. 276; Krapp, 1993; E. Wild, Hofer, & Pekrun, 2001).

Academic-Help-Seeking. Eine insbesondere für das Problemlösen wichtige Strategiegruppe ist die Hilfesuche (Academic-Help-Seeking). Die Strategie des Hilfesuchens beinhaltet im weiteren Sinn auch Interaktionen mit Informationsquellen wie Lehrbüchern, Lexika, computerunterstützten Lernumgebungen oder sogar mit der Aufgabenstellung. Im engeren Sinn ist das Help-Seeking vor allem auf soziale Interaktionen mit Lehrern, Mitschülern und Eltern angewiesen (Newman, 2000). Ein etabliertes Modell zum Help Seeking wurde von Nelson-Le Gall vorgelegt (Nelson-Le Gall, 1981). Im Modell von Nelson-Le Gall wird unterstrichen, dass ein aktives Hilfesuchen von einer passiven Abhängigkeit von anderen unterschieden werden kann. Im aktiven Hilfesuchverhalten werden fünf aufeinander aufbauende Stufen vorgeschlagen:

(1) den Bedarf an Hilfe erkennen,
(2) die Entscheidung treffen, sich helfen zu lassen,
(3) Personen identifizieren, die Hilfe leisten können,
(4) Strategien kooperativen Lernens einsetzen, um Hilfe zu bekommen,
(5) den Erfolg der Hilfe evaluieren.

Strategien des kooperativen Lernens im Hilfesuchverhalten können sich unterscheiden, müssen aber adaptiv sein, weil unterschiedliche Strategien je nach Situation und helfender Person unterschiedlich effektiv sind. Zum Beispiel ist eine aggressive Hilfeforderung eines Jugendlichen bei Erwachsenen kontraproduktiv, bei Peers jedoch oft wirksam (Ladd & Oden, 1979). Untersuchungen des Schülerverhaltens im Unterricht deuten zudem darauf hin, dass es Schüler gibt, die Hilfe zu oft suchen und schon bei der minimalsten Schwierigkeit die Lehrperson fragen (Boekaerts, 2002). Eine typische Strategie des kooperativen Lernens ist es, Fragen zu stellen. Die Fragen können sowohl verbal als auch nonverbal gestellt werden. Solche verbalen Fragen von Schülern haben in der Regel Ja-Nein- oder W-Form. Eine Ja-Nein-Frage könnte sein: „Ist 10 mal 13 gleich 130?“, eine W-Frage ist: „Wie viel ist 10 mal 13?“ (Cazden, 1972; Ladd & Oden, 1979 S. 237).

Die Fähigkeit eine effektive Help-Seeking-Strategie auszuwählen und sie situationsgemäß anzuwenden, unterstützt den individuellen Wissenserwerb und erleichtert soziale Kommunikation zwischen den Interaktionsteilnehmern.

2.5 Zur Bedeutung von Schüler-Schwierigkeiten und deren Strategien zu ihrer Überwindung in didaktischen und unterrichtlichen Konzeptionen

Das Wissen von Lehrpersonen über Schwierigkeiten und Strategien der Schüler reicht meistens nicht aus, um Lernprozesse der Schüler zu verbessern. Der produktive Umgang mit Schüler-Schwierigkeiten und -Strategien im Unterricht, z.B. eine angemessene Einbindung in die bestehenden Lehr-Lernformen, entscheidt darüber, ob aus Schwierigkeiten etwas gelernt werden kann. Deshalb ist es notwendig, bestehende didaktische Konzeptionen vorzustellen, die wertvolle Anregungen zur Entwicklung von Bausteinen einer Didaktik der Aufgabenkultur leisten können.

Das Hauptanliegen dieses Abschnitts ist es, führende allgemein- und fachdidaktische Konzeptionen dahingehend zu überprüfen, inwiefern sie das Problem der Schüler-Schwierigkeiten und deren Strategien zum Thema machen. Zugleich werden theoretische Grundlagen für die eigene Position geschaffen. Bei der Analyse von älteren Unterrichtskonzeptionen kann nicht davon ausgegangen werden, dass der Begriff Strategie explizit genannt wird. Es wird deswegen die Bedeutung der Selbststeuerung von Lernenden im Lernprozess analysiert und die Möglichkeiten der Lernstrategievermittlung, insbesondere im problemorientierten Unterricht, werden dargelegt.

Die Begriffe Didaktik, Unterricht, Lehren, Lernumgebung und Instruktion werden in gängiger Weise verwendet. Hilbert Mayer definiert Didaktik als „Theorie des Lehrens und Lernens“ (Jank & Meyer, 2000, S. 16; vgl. auch Klafki, 1970, S. 64). Zwischen Didaktik und Unterrichtskonzeption besteht ein bedeutender Unterschied. Während der Begriff „Didaktik“ theoriebestimmte Konzeptionen meint, sind Unterrichtskonzeptionen näher an der Praxis angelegt und liefern daher oft genauere Anweisungen für die Planung und Durchführung des Unterrichts (vgl. zur Abgrenzung Unterrichtskonzeptionen von didaktischen Theorien Jank & Meyer, 2000, S. 291). Mit Unterricht sind Situationen gemeint, „in denen mit pädagogischer Absicht und in organisierter Weise innerhalb eines bestimmten institutionellen Rahmens von professionell tätigen Lehrenden Lernprozesse initiiert, gefördert und erleichtert werden“ (Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001, S. 603). Die Begriffe *„Unterricht“, „Instruktion“ und „Lehren“* werden in der Regel in dieser Arbeit gleichbedeutend verwendet, obwohl sie unterschiedliche Akzente aufweisen. Gelegentlich wird über Lernumgebung gesprochen. Der Begriff *„Lernumgebung“* spezifiziert die persönlichen, situativen und materiellen Bedingungen und unterstreicht, dass beim Lernen mehrere Faktoren mitwirken und die Lernqualität maßgeblich beeinflussen. Diese Faktoren sind Unterrichtsmethoden, Unterrichtstechniken, Lernmaterialien, Medien, sozial-kulturelle Merkmale u. a. (vgl. zur Definition des Begriffs „Lernumgebung“ Collins, Brown, & Newman, 1989, S. 454; Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001, S. 603).

2.5.1 Übersicht über drei führende allgemeindidaktische Konzeptionen in Deutschland

In der Bundesrepublik wurde die didaktische Landschaft jahrzehntelang hauptsächlich durch drei didaktische Richtungen bestimmt (vgl. Messner, 1983/1995): die bildungstheoretische Didaktik (vgl. Klafki, 1963/1975), die lerntheoretische (oder „Berliner“) Didaktik (Heimann, Otto, & Schulz, 1972) sowie kommunikations- und handlungsorientierte Konzeptionen (vgl. zu handlungsorientierten Didaktik z. B. Garlichs, Heipke, Messner, & Rumpf, 1974; später Gudjons, 1986; H. Meyer, 1987; zu kommunikativer Didaktik siehe Schaefer & Schaller, 1976).

Bildungstheoretische Didaktik. In der bildungstheoretischen Didaktik von Wolfgang Klafki wird unter Didaktik (in der Originalschrift „Didaktik im engeren Sinn“) – anders als in dieser Arbeit – eine begründete Auswahl der Unterrichtsinhalte verstanden. Einen besonderen Wert legt der Autor auf die didaktische Analyse. Die Unterrichtsmethodik, welche sich mit Möglichkeiten der Vermittlung von Unterrichtsinhalten befasst, soll erst nach den didaktischen Entscheidungen bei der Unterrichtsvorbereitung herangezogen werden. „Fragen des ‚Wie’, der Methodik, sind abhängig von Problemen der Didaktik, Fragen des ‚Was’ von der Erziehung und Bildung“ (Klafki, 1963/1975, S. 26). Die Selbststeuerung von Lernprozessen und

ihre Bedeutung für den Wissenserwerb werden in der bildungstheoretischen Didaktik nicht erwähnt. In der späteren kritisch-konstruktiven Didaktik sind Überlegungen zur Bedeutung der Selbstregulation der Lernenden zu finden (Klafki, 1991, S. 283). Dies geschieht u.a. als Reaktion auf die Tätigkeitspsychologie von Galperin (Galperin & Leontjew, 1974).
Da in der bildungstheoretischen Didaktik didaktische Inhalte im Vordergrund stehen, wird darin auf die Lernprozesse nicht eingegangen. Insofern werden in der Didaktik von Klafki die Strategien und Schwierigkeiten nicht thematisiert.

Lerntheoretische Didaktik. Stärker als die bildungstheoretische Didaktik bezieht sich die lerntheoretische Didaktik auf in den 60er Jahren bekannte psychologische Grundlagen. Für die Unterrichtsanalyse und Planung sollen sechs Entscheidungsfelder in ihrer Interdependenz betrachtet werden: anthropogene und sozial-kulturelle Voraussetzungen sowie Intentionalität, Thematik, Methodik und Medienwahl. Fähigkeiten und Fertigkeiten werden in etwas ungewohnter Bestimmung als Stufen der pragmatischen Dimension von Intentionen unterschieden (Heimann, et al., 1972, S. 27). Fähigkeit bedeutet, eine Handlung ausführen zu können. Fertigkeit heißt, dass eine Person die Handlung tatsächlich ausführt. Die höchste Stufe der pragmatischen Intention wird erreicht, wenn die Person eine Gewohnheit erworben hat und die Handlung immer wieder ohne Mühe ausführt. Der Lehrer soll sich bei der Planung der Stunde bewusst machen, welche von diesen Stufen er im Unterricht ansprechen möchte. Gemäß der lerntheoretischen Didaktik erwerben Schüler erst die Fähigkeit, eine Handlung auszuführen, dann die Fertigkeit und schließlich die Gewohnheit (Heimann, et al., 1972). Statt Bildung wie bei Klafki rücken Lernvoraussetzungen und handelnde Gestaltung durch Lehrer in den Mittelpunkt. Durch die Berücksichtigung von Lernvoraussetzungen der Schüler bei der Unterrichtsvorbereitung kommt die Idee der Adaptivität des Lernens zum Vorschein und wird hier vorweggenommen. Weder Handlungspläne noch Selbststeuerung von Lernenden werden in diese Überlegungen mit einbezogen.

Handlungsorientierte Didaktik. Die Konzeption des handlungsorientierten Unterrichts wird in der Fassung von Meyer und Jank vorgestellt (Jank & Meyer, 2000; H. Meyer, 1987). Mayer bezeichnet handlungsorientierten Unterricht als „einen ganzheitlichen und schüleraktiven Unterricht, in dem die zwischen dem Lehrer und den Schülern vereinbarten Handlungsprodukte die Organisation des Unterrichts leiten, sodass Kopf- und Handarbeit in ein ausgewogenes Verhältnis zueinander gebracht werden können“ (H. Meyer, 1987, S. 402). Das Hauptanliegen des handlungsorientierten Unterrichts ist, sich bei der Unterrichtsvorbereitung stärker an Interessen der Schüler zu orientieren, mehr Freiräume für die Selbständigkeit der Schüler zu schaffen und ein ganzheitliches Lernen zu ermöglichen. Lernpsychologische Grundlagen des Lernens spielen in Meyers Darstellung des Unterrichts allerdings eine untergeordnete Rolle. Es wird beispielsweise keine der Lerntheorien systematisch dargestellt. Die Analyse der Lerngesetzmäßigkeiten im Kapitel zur Ergebnissicherung im Buch „Unterrichtsmethoden" zeigt z.B., dass Regeln des Übens sich stärker an Oberflächenstrukturen und Wiederholungstechniken als an einer Organisation und Elaboration des Wissens orientieren. Auch die vorhandenen Empfehlungen zur Strukturierung von Lerninhalten beziehen sich auf die Vorstrukturierung des Lehrers anstatt darauf, die Bedeutsamkeit der eigenständigen Organisation der Information durch Lernende hervorzuheben. Dies verdeutlicht das folgende Zitat: „Sinnvolle und strukturierte Zusammenhänge werden leichter gelernt und bleiben besser im Gedächtnis haften als zusammenhanglose Informationen: Ein gereimtes Gedicht lernt sich entscheidend leichter als ein Prosatext; eine Scheck-Liste mit Ja/ Nein-Alternativen lernt sich besser als eine Problemanalyse" (H. Meyer, 1987, S. 169). Wie man mit Schüler-Schwierigkeiten umgeht, dazu wurde hier keine spezielle Methode entwickelt.

Zusammengefasst lässt sich sagen, dass lernpsychologische Grundlagen des Lernens in den drei in Deutschland führenden allgemeindidaktischen Konzepten bisher nicht ausreichend berücksichtigt wurden (vgl. Messner & Reusser, 2006). Eine Ausnahme stellt im deutschsprachigen Raum die Didaktik von Aebli dar, die eine praxisorientierte Unterrichtsanleitung auf kognitionspsychologischer Grundlage anbietet (Aebli, 1983).

2.5.2 Didaktik auf psychologischer Grundlage von Aebli

Aebli unterscheidet in den Grundformen des Lehrens drei Dimensionen: Erstens Medien des Lehrens, zweitens den auf das Lehren übertragenen Prozess des Wissensaufbaus – von Handlung zu Operation und Begriff – und drittens vier Funktionen oder „Arten des Lernens" im Lehrprozess (Aebli, 1983). In den Grundformen des Lehrens stehen stets der Lernende und seine Erfahrungen im Mittelpunkt des Lehr-Lernprozesses. Die erste Dimension gründet sich auf drei Medien des Denkens von Bruner: dem enaktiven, dem symbolischen und dem ikonischen Medium. Durch Vorführen wird am stärksten das handlungsbezogene Medium angesprochen, durch Erzählen und Referieren das sprachlich-symbolische Medium und durch Anschauen und Beobachten das ikonische Medium (Bruner, et al., 1971). Die fünfte und sechste Grundform des Lehrens – Lesen und Schreiben – können gleichermaßen drei Medien des Denkens ansprechen. Die ersten fünf Grundformen sollen dem Lehrenden zeigen, dass der

Lernprozess in einem oder mehreren Medien abläuft, und verdeutlichen, wie eine Unterrichtsgestaltung mediengerecht aufgebaut werden kann.
Die zweite Dimension beschäftigt sich mit der strukturellen Natur des Wissensaufbaus. Das Lehren soll an der Handlung ansetzen, die dann in die Operation überführt werden soll. Am Ende des Lernprozesses steht letztendlich der Begriff. Die siebte, achte und neunte Grundform des Lehrens sind die Erarbeitung von Handlungsabläufen, der Aufbau von Operationen und die Bildung von Begriffen.
Schließlich wird der Lehrprozess durch vier verschiedene Funktionen charakterisiert. Handlung, Operation oder Begriff müssen nach Aebli problemlösend aufgebaut, durchgearbeitet, eingeübt und zur selbständigen Anwendung angeleitet werden. Dem Lehrer soll es bewusst sein, welche Funktionen in welcher Unterrichtsphase berücksichtigt werden müssen, um den Lernprozess besser zu steuern. Idealtypisch sollen alle vier Funktionen von einem Individuum in- oder außerhalb des Unterrichts der Reihe nach abgearbeitet werden. Die große Stärke der von Aebli dargebotenen Didaktik besteht im Bezug von Lehrprozessen auf kognitive Lernprozesse. Da Aeblis Grundformen (1) „mit ihrer Bindung an die Kognitionstheorie im Vergleich zu den dominierenden Ansätzen psychologisch verengt erscheinen" und (2) im Unterschied zu anderen Didaktiken einem besonderen gesellschaftlichen Bedürfnis – Legitimation von Unterrichtsinhalten – nicht entsprachen, wurden sie in der Vergangenheit nicht ausreichend rezipiert (Messner, 2007, S. 105). Erst seit einigen Jahren erlebt die Aeblische Konzeption eine Renaissance (Messner & Reusser, 2006).
Aeblis Überlegungen zur didaktischen Vermittlung von Strategien wurden im Aufsatz „Sind Regeln des Problemlösens lehrbar?" dargelegt (Aebli, Ruthemann, & Staub, 1986, S. 630). Dabei wird folgende Abfolge der Strategievermittlung (bei Aebli: „Vermittlung von Regeln des Problemlösens") angeboten (ebd., S. 630ff):

- Als erstes wird Schülern eine neue oder eine bekannte Aufgabe vorgelegt. Beim Lösen der Aufgabe sollen sie ihren eigenen Lösungsprozess beobachten und die Qualität des Verstehens kritisch beurteilen. „Bei bekannten wie bei neuen Aufgaben ist es empfehlenswert, dass man den Lernenden zuerst mit den ihm vertrauten Mitteln einen oder mehrere *eigene Lösungsversuche* unternehmen lässt. Man wird dabei von Anfang an darauf hinweisen, dass er dabei eine reflektive Haltung einnimmt, dass er sich bei der Aufgabenlösung selbst beobachtet und insbesondere die Güte seines Verstehens kritisch zu beurteilen sucht" (ebd).
- Der Lehrer soll einem Schüler nach einem Fehler beim Lösen der Aufgabe bzw. bei der anschließenden Reflexion über den Lösungsprozesses seine individuelle Schwie-

rigkeit bewusst machen. „Im nächsten Schritt soll die Diagnose des ungünstigen Verhaltens stehen. Ihr Ziel ist es, das unbestimmte Gefühl des Ungenügens, bewusst zu machen, begrifflich zu fassen und zu benennen“ (ebd).

- Ursachen des Scheiterns bei der Bearbeitung einer Aufgabe müssen auf das fehlerhafte Problemlöseverhalten und nicht etwa auf fehlende Begabung zurückgeführt werden. „Der nächste Schritt besteht darin, die aufgetretene Schwierigkeit auf ein falsches Lern- oder Problemlöseverhalten zurückzuführen, das heißt in ihm Schwierigkeit zu erkennen“ (ebd).
- Strategien werden von der Fragestellung/ Zielsetzung abgeleitet und damit begründet. Ist die Begründung zu kompliziert und den Schülern nicht plausibel, kann die Effektivität einer Strategie durch die Beobachtung des Expertenverhaltens und die eigene Erfahrung mit der Problemstellung untermauert werden. „In gewissen Fällen kann man die Regel aus dem angestrebten Ziel ableiten [...]. Die Begründung anderer Regeln ist zu schwierig, als dass man sie aus der Diagnose der aufgetretenen Schwierigkeiten ableiten könnte. In diesem Fall wird man die Regel demonstrieren und ihre positive Wirkung aufweisen“ (abd).
- Die Anwendung einer neuen Strategie soll von einem Experten (am besten dem Lehrer) demonstriert werden. Während der Aufgabenlösung soll die Lehrperson laut denken und sowohl Schwierigkeiten als auch Strategien verbalisieren. „Modelling von Problemlöseverfahren erfordert *lautes* Denken. Dieses spielt ganz allgemein eine grundlegende Rolle, wenn Regeln vermittelt werden. Einmal fordern wir den Lernenden auf, bei seinen eigenen Lösungsversuchen laut zu denken, damit wir sehen, wie er vorgeht. Der neue Gedanke im kognitiven Modelling besteht aber darin, dass das Verhaltensmodell das laute Denken bewusst einsetzt, um sein Vorgehen für den Lernenden sichtbar zu machen“ (ebd).
- Die Schüler werden vom Lehrer angeleitet, die vorgezeigten Strategien zu verinnerlichen. Die Fremdinstruktion soll dadurch in die Selbstinstruktion übergehen. Dem Problemlöser muss dabei klar werden, worin die Strategien bestehen. „Die Regel muss ausgearbeitet, in der Form einer Selbstinstruktion formuliert und benannt werden“ (ebd).
- Abschließend sollen die Strategien erst unter Anleitung und später selbständig angewandt werden. In diesem Punkt sind deutliche Parallelen zum Apprenticeship-Ansatz zu erkennen (siehe Unterabschnitt 2.5.5). Der Lehrer unterstützt den Lernenden beim Lösen durch Instruktionen („scaffolding“). Die Lehrerhilfe wird mit zunehmender

> Selbstsicherheit der Schüler schrittweise zurückgenommen („fading“). Bei der Anwendung von Strategien sollen kritische Beobachtungen und die Reflexion des eigenen Problemlöseverhaltens fortgesetzt werden. „Der Lernende erhält die Gelegenheit, die Regel selbst anzuwenden. […] Die Instruktionen des Lehrenden unterstützen die Arbeit des Lehrenden wie ein Gerüst. […] Allmählich wird die Unterstützung wegfallen: das Gerüst wird schrittweise entfernt, das Regelgebäude steht aus eigener Kraft. Man hat es ‚fading' genannt“ (ebd).

In dieser Konzeption wurden Grundlagen des Wissens- und Fähigkeitserwerbs ausgearbeitet, die ihre Aktualität bis heute nicht verloren haben. Sie zeichnet sich zum einen durch eine ausgewogene Integration von unterschiedlichen Lerntheorien wie Lernen durch Beobachten und kognitive Theorie sowie durch eine Balance zwischen Lehrerinstruktion und eigener Konstruktion aus. Zum anderen ist ein wichtiger Gedanke darin enthalten: Eine Korrektur des Problemlöseverhaltens kann durch das Bewusstmachen von Strategien erreicht werden.

Für die Implementation dieser Unterrichtskonzeption sind zwei Fragen von entscheidender Bedeutung:

Erstens, welche Schwierigkeiten haben die Schüler im Lösungsprozess, und zweitens, welche Strategien wenden sie an, um diese Schwierigkeiten zu überwinden? Die Vermittlung der Strategien über das Lernen am Modell kann nur dann funktionieren, wenn der Problemlöser seine eigenen Schwierigkeiten während der Lehrerdemonstration erkennt, die Strategien des Lösens nachvollziehen kann, sie mit Lehrerunterstützung durcharbeitet, in reichhaltigen Kontexten übt und bei der Bearbeitung von neuen Aufgaben anwendet. Andernfalls macht die aufwändige Aneignung und Einübung von neuen Strategien für den Lernenden keinen Sinn und ist von Anfang an zum Scheitern verurteilt. Folglich soll die Lehrperson sowohl Schüler-Schwierigkeiten als auch Schüler-Strategien kennen, um eine effektive Unterrichtsplanung zu entwerfen.

2.5.3 Fehlerdidaktik von Oser

In der Geschichte des Bildungswesens galten Fehler lange als negative Begleiter des Lernens. Frechsein, Naschen und Stehlen stünden in einer Reihe mit Ängstlichkeit, Stottern oder Zwängen und mussten „ausgemerzt“ werden (Spychiger, 2006). Erst in den 70er Jahren wurden die Schülerfehler als Chance im Lernprozess erkannt. Mit Hilfe der Fehler wurden in der Mathematikdidaktik die Denkabläufe studiert und die daraus resultierenden Ergebnisse in die Lehrerausbildung mit einbezogen (vgl. z.B.Malle, 1993). Die wachsende Anerkennung der Fehler führte in den 90er Jahren zur Entwicklung der Fehlerdidaktik, die sich auf die Theorie des negativen Wissens stützt. Wie schon im Unterabschnitt 2.4.1 erläutert, ist das negative Wissen ein Wissen über Fehler und Irrtümer, die im Handeln entstehen können. Begehen wir einen Fehler oder einen Irrtum, bleibt im Gedächtnis eine Erinnerung an die nicht erfüllte Norm, die unser Verhalten in neuen Situationen begleitet. Um Wirkungsmechanismen des negativen Wissens zu erklären, wird auf die Lernstrategietheorie zurückgegriffen: Die Erinnerungen an Fehler und Irrtümer werden in der neuen Situation zu einer metakognitiven Strategie, die „als mehr oder weniger ausgeprägtes Warnsystem fungiert“ (Oser, 2007, S. 204). Als Beispiel wird von Oser das Linksabbiegen genannt. Beim Linksabbiegen begleiten uns die Erinnerungen an eine Situation, in der ein entgegenkommendes Fahrzeug zu spät gesehen wurde und ein Unfall beinahe passiert wäre. Die kontrollierende Funktion dieser Erinnerung hilft uns, einen neuen Fehler zu vermeiden (ebd., S. 204). Aufgrund theoretischer und empirischer Analysen der schulischen Fehlerkultur wird von Oser, Hascher und Spychiger (1999) folgender Umgang mit Schülerfehlern im Unterricht vorgeschlagen:

1. Fehlersensibilität: den Fehler und seine Konsequenzen erkennen,
2. Fehleranalyse: den Fehler verstehen und
3. Fehlerkorrektur: den Fehler korrigieren.

Der Umgang mit Fehlern wurde auch in den Fachdidaktiken empirisch untersucht. Heinze (2004) hat festgestellt, dass Fehlersituationen im herkömmlichen fragend-entwickelnden Mathematikunterricht selten thematisiert werden. Meyer, Seidel & Prenzel (2006) bestätigen diese Ergebnisse für das Fach Physik und führen sie vor allem auf die Vermischung der Lern- und Leistungssituationen im Unterricht zurück. Die permanente Leistungsbeurteilung zwingt die Lernenden, ihre Fehler zu verschweigen, und behindert dadurch den Lernprozess.

Solch ein reges Interesse an Fehlern hat sogar in einzelnen Veröffentlichungen zur Verherrlichung des Fehlers geführt. Von einigen Autoren werden die Fehler gelobt (Kahl, 1995). Gelegentlich findet man auch Aussagen wie z.B. „nur aus Fehlern kann man lernen“. In diesem Zusammenhang betonen Oser und Spychiger (2005; zit. nach Spychiger, 2006): „Fehler werden zwar als Lern- und Wissenspotenzial eingestuft, der einschlägige Lernprozess aber nicht verniedlicht, sondern als dem Wesen nach eher schmerzhaft verstanden“.

Ein anderer Aspekt der Fehlerkultur ist die Differenzierung zwischen „guten“ und „schlechten“ Fehlern (Chott, 2006). Aus „guten“ Fehlern kann man viel lernen. Die „schlechten“ bieten kaum solche Lerngelegenheiten. Ein „schlechter“ Fehler passiert z.B., wenn man sich beim Aufschreiben eines Antwortsatzes verschreibt und statt einer 5 eine 7 notiert. Die Aufgabe der Lehrperson ist es, die „guten“ Fehler zu diagnostizieren und als Lerngelegenheit auszunutzen.

Während metakognitive Strategien – vor allem Kontrolle – eine wichtige Rolle in der Fehlerdidaktik spielen, wird die Bedeutung der Schwierigkeiten unterschätzt. Nicht nur Fehler, sondern auch Schwierigkeiten können negative Emotionen verursachen und in Erinnerung bleiben. Schwierigkeiten können aber auch mit positiven Emotionen einhergehen. Wenn eine Schwierigkeit überwunden wird, fühlen wir Freude, Stolz und andere positive Emotionen. Erinnerungen an den Erfolg machen uns Mut und helfen in der neuen Situation, die Hürden zu bewältigen.

2.5.4 Kognitivistisch und konstruktivistisch orientierte Unterrichtskonzeptionen

Während in den vorgestellten Didaktiken – mit Ausnahme der Didaktik von Aebli und von Oser – die Lernpsychologie eine untergeordnete Rolle gespielt hat, orientieren sich die Unterrichtskonzeptionen stark an lernpsychologischen Grundlagen des Lehr-Lernprozesses. Reinmann-Rothmeier und Mandl unterscheiden zwei Positionen zum Lehren und Lernen: kognitivistisch und konstruktivistisch orientierte Ansätze (Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001, S. 605).

Die kognitivistisch „gefärbte“ Gruppe der Lehr-Lerntheorien versucht, Unterrichtsinhalte optimal zu strukturieren und dem Lernenden dadurch eine sinnvolle Rezeption zu ermöglichen.

Dem Lehrer kommt in dieser Gruppe idealtypisch eher eine aktive und dem Lerner eher eine passive Funktion zu. Unterrichtsinhalte sollen durch eine geschickte Sequenzierung des Materials und eine schrittweise Demonstration einzelner Wissenselemente in die Köpfe der Lernenden transportiert werden. Während frühere Unterrichtsmodelle dieser Gruppe wie Konzepte des Programmierten Unterrichts von Skinner (noch behavioristisch orientiert) oder des Mastery Learning von Bloom allein eine geeignete Sequenzierung der Inhalte und die Instruierung der Lernenden als entscheidend für den Lernerfolg ansahen, berücksichtigt Ausubel im Expository Teaching Ansatz das Vorwissen der Schüler und nähert sich dadurch der konstruktivistisch orientierten Theoriegruppe (Ausubel, 1974; Bloom, 1976; Skinner, 1971b). Die letzte Generation von Vertretern der kognitivistischen Gruppe erkennt sogar einige Prinzipien des gemäßigten Konstruktivismus (vgl. Merrill, 1992, S. 99) an und betont die Notwendigkeit der Vermittlung von Lernstrategien (Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001, S. 609).

Die konstruktivistische Gruppe der Lehr-Lerntheorien hebt die Bedeutung der aktiven Wissenskonstruktion hervor. Der Lerner und nicht der Lehrer steht jetzt im Zentrum des Lehr-Lernprozesses. Die Unterrichtskunst besteht in der anregenden Gestaltung der Lernumgebungen, deren Ziel es ist, Aktivitäten der Schüler zu stimulieren. Eine besondere Bedeutung wird in der konstruktivistischen Auffassung des Lehr-Lernprozesses dem Konzept des situierten Lernens beigemessen, das Kontextbedingungen und soziale Interaktionen zwischen den Lernenden in den Vordergrund gestellt hat (J. S. Brown, et al., 1989; Greeno, 1989). Bei der Gestaltung von Lernumgebungen wird konsequent auf Schüler-Selbständigkeit geachtet, weil die Wissenskonstruktion in dieser Theorie als eigenaktiver Prozess betrachtet wird. Aufgaben werden hierfür weniger als in kognitivistischen Theorien strukturiert und gleichen den komplexen („ill-defined“) Problemen. Ein Beispiel des konstruktivistisch orientierten Ansatzes – das Cognitive Apprenticeship – wird anschließend dargestellt. Dieser Ansatz liegt thematisch nah an der neuen Aufgabenkultur: Er arbeitet mit problemorientierten realistischen Aufgabenstellungen und fördert die Entwicklung strategischen Wissens der Schüler.

2.5.5 Der Cognitive Apprenticeship-Ansatz – Eine Rahmentheorie der Instruktion

Die Autoren des Cognitive Apprenticeship-Ansatzes haben drei erfolgreiche Instruktionsdesigns in Lesen, Schreiben und Mathematik unter dem Gesichtspunkt des Cognitiven-Apprenticeship-Ansatzes analysiert und die Schlussfolgerung gezogen, dass die drei Designs einen gemeinsamen Kern aufweisen. Dieser Kern wurde in einem „Rahmenmodell zur Entwicklung von Lernumgebungen“ („A framework for designing learning environments“) zusammengefasst (Collins, et al., 1989). Eine herausragende Rolle spielen in dieser Konzeption Strategien. „A key goal in the design of teaching methods should be to help students acquire and integrate cognitive and metacognitive strategies for using, managing, and discovering knowledge“ (Collins, et al., 1989, S. 480). Vier Dimensionen charakterisieren nach Meinung der Autoren jede Lernumgebung:
Inhalt (Content), Unterrichtsmethoden (Methods), Sequenzierung (Sequence) und Soziologie (Sociology) (siehe Abbildung 12).

Content
Domain knowledge Heuristic strategies Control strategies Learning strategies
Methods
Modelling Coaching Scaffolding and fading Articulation Reflection Exploration
Sequence
Increasing complexity Increasing diversity Global before local skills
Sociology
Situated learning Culture of expert practice Intrinsic motivation Exploiting cooperation Exploiting competition

Abbildung 12. Vier Dimensionen einer Lernumgebung (Collins, et al., 1989)

Inhalte. Zu den Inhalten gehören neben bereichspezifischem Wissen auch drei Arten von Strategien: Heuristische Strategien, Kontrollstrategien und Lernstrategien. Heuristische Strategien bezeichnen im Cognitiven-Apprenticeship-Ansatz diejenigen Techniken, die die Aufgabenlösung unterstützen. Sie sind nicht nur in der Mathematik, sondern auch in anderen Bereichen zu finden. Zum Beispiel kann man vor dem Schreiben eines Aufsatzes bewusst einplanen, die Einführung nach dem Fertigstellen des Hauptteils umzuschreiben. Die Anwendung dieser Heuristik spart Zeit, weil der Verfasser die Einführung in der ersten Fassung bewusst ins „Unreine“ schreibt.

Kontrollstrategien regulieren den Lösungsprozess. Sie helfen, Schwierigkeiten bei der Bearbeitung einer Aufgabe zu identifizieren und ihre Ursachen zu klären. Zum Beispiel wurden die Schüler im Konzept des Textverstehens „Reciprocal Teaching“ von Palincsar und Brown aufgefordert, ihre Schwierigkeiten zu verbalisieren (Palincsar & Brown, 1984). Infolge der Verbalisierung haben die Schüler die Schwierigkeiten besser verstanden und ihre Strategien optimiert sowie das Leseverstehen verbessert.

Schließlich sollen Lernstrategien Schülern helfen, den Erwerb von anderen Strategiearten und Wissen selbständig zu regulieren. Der allgemeine Rahmen hierfür wird traditionell von der Lehrperson geschaffen. Der Lehrer bereitet Aufgaben für die Schüler vor, legt genaue Zeiteinteilung, Hilfsmittel und Interaktionsformen im Unterricht fest. Der Lernende sollte jedoch in der Lage versetzt werden, selbständig seinen Wissens- und Fähigkeitserwerb zu steuern. Es bedarf deshalb einer zielgerichteten Schulung von Strategien zur selbständigen Wissensaneignung. Der Lernende soll beispielsweise lernen, nicht nur eigene Ziele zu setzen, seinen Arbeitsplatz vorzubereiten etc., sondern auch, diese Strategien im Hinblick auf den Wissenserwerb zu verbessern.

Methoden. Die sechs Methoden des Lernens von Collins et al. 1989 erinnern zum Teil an die Konzeption von Aebli et al. 1986:

- Demonstration der Aufgabenlösung durch einen Experten (Modelling),
- Unterstützung des Lernens vom Lehrer während der selbständigen Aufgabenbearbeitung (Coaching),
- Das Anbieten eines kognitiven Gerüstes (Scaffolding), das im Laufe der Übung zurückgenommen wird (Fading),
- Verbalisierung des Lernprozesses (Articulation),
- Reflexion der Lernprozesse (Reflection),
- Anleiten zum selbständigen Wissens- und Fähigkeitserwerb (Exploration).

Sequenzierung. Unter Sequenzierung wird im Cognitiven Apprenticeship-Ansatz eine hohe Aufgabenkomplexität, eine breite Variation von Aufgaben und eine Präferenz von globalem und nicht von lokalem Wissen und Fähigkeiten verstanden. Das letzte Prinzip bedeutet, dass z.B. im Mathematikunterricht nicht gewartet werden muss, bis Schüler Termumformungen perfekt beherrschen. Diese Fertigkeit kann und soll an komplexeren Aufgaben mitgeübt werden.

Soziologie. Situiertes Lernen, eine Expertisekultur, intrinsische Motivation, Kooperation und produktives Nutzen der Konkurrenz bilden zusammen die soziokulturelle Dimension des Cognitiven Apprenticeship-Ansatzes. Grundprinzipien des situierten Lernens und der Kooperation wurden in vorherigen Abschnitten angesprochen (vgl. zu situiertem Lernen Unterabschnitt 2.5.4; zu Kooperation siehe Unterabschnitt 2.4.3). Mit Expertenkultur ist ein Austausch von Erfahrungen zum Expertendenken zwischen den Schülern gemeint. Eine intrinsische Motivation wird beobachtet, wenn der Lerner die Auseinandersetzung mit Lerninhalten „um ihrer selbst willen“ und nicht aufgrund einer Aufforderung „von außen her“ anstrebt (E. Wild, et al., 2001, S. 221). Diese Art von Motivation soll in der dargestellten Lernkonzeption verstärkt werden. Das wettbewerbsorientierte Denken kann nach Meinung von Collins et al.

1989 den Lernprozess positiv beeinflussen, wenn die Schüler um den besseren Lösungsprozess und nicht um das bessere Ergebnis konkurrieren. Auch eine Konkurrenz *zwischen* Kleingruppen halten die Autoren für lernförderlich, weil sie die Kooperation innerhalb der Gruppe verstärken kann.

2.5.6 Schüler-Schwierigkeiten und -Strategien in fachdidaktischen Konzeptionen in Deutschland

Fachdidaktische Konzeptionen in der Mathematik. Die Analyse deutschsprachiger Fachdidaktiken der 70er Jahre zeigt einen hohen Grad der Rezeption kognitiver Grundlagen des Lernens. Dies ist nicht zuletzt einer breiten Rezeption der „Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland“ von Lenné (Lenné, 1969) zu verdanken, in der Schwachpunkte der „traditionellen“, stofforientierten Didaktik auf theoretischer und empirischer Basis aufgezeigt und neue Entwicklungsrichtungen wie Didaktiken von Wittenberg (1963) und Wagenschein (1965) sowie Didaktik der Neuen Mathematik (siehe z.B. Freudenthal, 1966) überzeugend dargestellt wurden. In der Didaktik der Mathematik hängt die Aufnahme von Lerntheorien zudem mit den Forschungen von Piaget zusammen, die stark mathematisch-naturwissenschaftlich orientiert waren. Kritische Rezeptionen der Piagetschen Entwicklungstheorie sowie behavioristisch und kognitivistisch orientierte Unterrichtsansätze – wie z.B. Lerntheorien von Bruner, Gagné und Aebli – findet man in den Büchern von Zech und Wittmann (Gagné, 1973; Wittmann, 1978; Zech, 1986). In den Fachdidaktiken dieser Autoren sind die Begriffe Strategien, Heuristiken und Schwierigkeiten zu finden, wenn auch in etwas anderer Bedeutung als in dieser Arbeit. Wittman bezeichnet kognitive Strategien als „allgemeine intellektuelle Haltungen und Fähigkeiten“ (Wittmann, 1978, S. 53). Aufgrund des anderen Verständnisses kognitiver Strategien fallen bei Wittmann allgemeine Kriterien des guten Unterrichts, wie „Schüler zum divergenten Denken zu ermutigen“, „offene und herausfordernde Probleme zu stellen“, „ein konstruktives Verhältnis zu Fehlern aufzubauen“ etc., unter Strategievermittlung(Wittmann, 1978, S. 83).

De Corte et al. 1996 halten neben den instruktionalen Designs wie Anchored Instruction (Cognition and Technology Group at Vanderbilt, 1991) und Cognitive Apprenticeship (Collins, et al., 1989) auch Grundprinzipien des Freudentals Institute´s Realistitic Mathematics Education (RME) für den Erwerb mathematischen Wissens und mathematischer Fähigkeiten für wichtig (De Corte, Greer, & Verschaffel, 1996, S. 523). Diese Prinzipien der mathematischen Bildung sind gemäß der Auffassung des RME folgende:

(1) Die Basis der mathematischen Grundbildung ist die Exploration und das Modellieren in realistischen Kontexten an ausgewählten Beispielen.
(2) Vom Lernen an Beispielen sollen die Schüler schrittweise auf eine höhere Abstraktionsebene aufsteigen.
(3) Die Schüler werden ermutigt, ihre eigenen Strategien und Heuristiken anzuwenden, bei der Lösungssuche zu experimentieren und über den Lösungsprozess zu reflektieren.
(4) Mathematik soll in sozialen Interaktionen mit Mitschülern und in kooperativen Lernumgebungen gelernt werden.
(5) Eine Vernetzung der Inhalte und Fähigkeiten soll stets angestrebt werden.

Der Punkt 3 in dieser Konzeption schließt kognitive und metakognitive Strategien ein. Die zentrale Aufgabe des Lehrers ist gemäß der RME-Konzeption, statt eine Lösung zu erklären, Schüler bei der Konstruktion eigener Lösung zu unterstützen (vgl. auch Leiss, et al., 2006).

Nun soll die Studie von Maaß in Hinblick auf die Schüler-Schwierigkeiten und -Strategien beleuchtet werden. In dieser Studie wurde die Integration anspruchsvoller realitätsnaher Modellierungsaufgaben in die gängige Unterrichtspraxis empirisch evalueirt (Maaß, 2004). Modellierungsaufgaben wurden von Maaß an zwei Klassen im Regelunterricht exemplarisch behandelt. In dieser Untersuchung wurde den Schülern eine vereinfachte Version des Modellierungskreislaufs (siehe Abbildung 9) vom Lehrer präsentiert und beim Lösen der Modellierungsaufgaben unterstützend eingesetzt (siehe ausführliche Erläuterungen zum Modellierungskreislauf im Abschnitt 3.1).

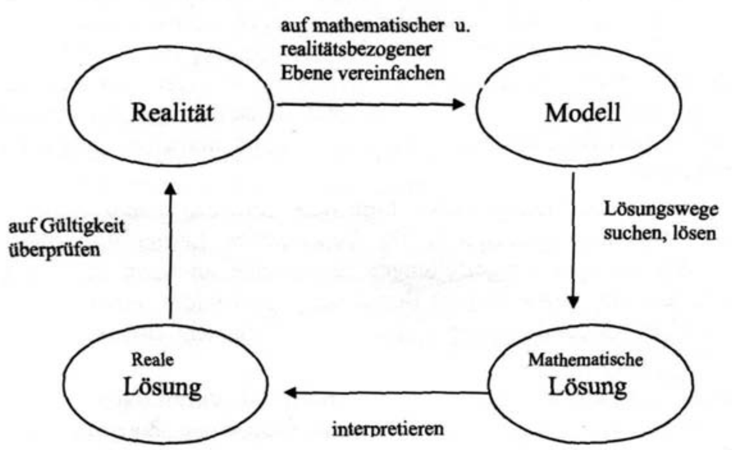


Abbildung 13. Eine Darstellung des Modellierungsprozesses nach Maaß, 2004

Im Vordergrund der Studie stand aber nicht der Kreislauf als metakognitives Instrument, sondern die Vermittlung der Modellierungskompetenz über die kognitiv anspruchsvollen Aufgaben. Die einjährige Studie zeigt eine positive Entwicklung der Modellierungskompetenz bei

der Mehrheit der Schüler. Methodisch hat sich die Gruppenarbeit als eine zentrale Sozialform bei der Behandlung von Modellierungsaufgaben bewährt. Eine projektorientierte Behandlung von Modellierungsaufgaben, in die eine Phase der selbständigen Informationsbeschaffung integriert ist, wäre ebenfalls für die Eigenentwicklung der Modellierungsfähigkeit wichtig.
Problematisch ist in der Konzeption von Maaß, dass Schüler mit dem vorliegenden Metaschema wenig praktische Hilfen zur Aufgabenlösung bekommen. Sie können zwar einzelne Modellierungsschritte benennen: „Lösungswege suchen, lösen“ oder „auf mathematischer und realitätsbezogener Ebene (die Realität) vereinfachen“, jedoch bleibt es unklar, *wie* sie dies selbst umsetzen können. Es fehlen somit handlungsbezogene Strategien, die helfen sollen, die gestellten Anforderungen zu überwinden. Positiv ist, die Orientierung der Modellierungsschritte an den Schüler-Schwierigkeiten zu beurteilen: Insbesondere wurden Verbesserungsvorschläge zum Optimieren des Modellierungskreislaufs (z.B. Trennung des Interpretierens vom Validieren) mit schülerspezifischen Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben begründet. Außerdem hat diese Studie gezeigt, dass es schon in der 7. Klasse möglich ist, Modellierungskompetenz der Schüler zu fördern.

Fachdidaktische Konzeptionen in der Physik. Wie auch in Mathematik nehmen Aufgaben in Naturwissenschaften eine zentrale Stellung in den didaktischen Konzeptionen ein (Fischer & Draxler, 2002, S. 300). Diese werden hier jedoch nicht allein Schülern präsentiert. Statt wie in der Mathematik eine Textaufgabe vorzulegen, wird den Schülern in Naturwissenschaften ein Problem idealtypisch entweder in einem Experiment nahe gebracht oder die Schüler stoßen bei einem eigenen Experiment selbst auf das Problem.
Wie in der Mathematikdidaktik wurden in der Physikdidaktik die Entwicklungs- und Lerntheorien von Gagné, Piaget und Aebli konstruktiv aufgenommen (vgl. z.B. Bleichroth, 1991; Willer, 2003). Die bedingungslose Akzeptanz der Stufenkonzeptionen von Piaget wurde in den letzten Jahrzehnten von einer kritischen Auseinandersetzung abgelöst. Insbesondere Willer kritisiert die starre Abgrenzung von Piagetschen Entwicklungsstufen (präoperationales Stadium, Stufen der konkreten Operation und formalen Operation). Bei der Darstellung von psychologischen Grundlagen stützt er sich im Wesentlichen auf Aeblis Konzeption der Begriffsbildung(Willer, 2003, S. 191). Gerade in der Physik bietet die psychologische Didaktik von Aebli einen Weg, von experimentellen Handlungen über Operationen zu physikalischen Begriffen zu gelangen. Die größte Bedeutung erlangte Wagenschein, der in Einklang mit Klafkis bildungstheoretischer Didaktik das exemplarische Lernen propagierte (siehe zu Klafkis Didaktik Unterabschnitt 2.5.1). Wagenscheins Auffassung von Unterricht wird jedoch in

der letzten Zeit nicht mehr als die einzig wahre angesehen. Willer verweist u. a. auf mögliche Transferprobleme, wenn Schüler an einigen wenigen Beispielen physikalische Methoden gelernt haben. Empirische Studien belegen ferner Vorteile integrativer Konzepte, in denen der Weg von fundamentalen Erfahrungen zum fachlich Elementaren und umgekehrt bestritten wird (Willer, 2003, S. 112, S. 248).

Eine maßgebliche Wirkung auf die Gestaltung des Physikunterrichts wurde durch die Untersuchungen von Wagenschein und Daumenlang über Alltagsvorstellungen von Studenten und Erwachsenen zur Physik erzielt (Daumenlang, 1969; Kircher, Girwidz, & Häussler, 2000, S. 62). Wagenschein hat mit Hilfe von Befragungen festgestellt, dass Studenten wie auch Erwachsene ein falsches Verständnis vieler physikalischer Phänomene haben. Hierdurch wurde die Aufmerksamkeit der Wissenschaft auf die Schüler-Schwierigkeiten beim Verstehen von Physik gelenkt. Daraufhin wurden intensive Forschungen zu den Alltagsvorstellungen von Kindern durchgeführt. Eine Ursache fest verankerter Fehlkonzeptionen sehen Forscher in der natürlichen Sprache. Während die Didaktik der Mathematik sich bemüht, vorhandene Konzepte (Grundvorstellungen) offen zu legen und aufzubauen, muss der Physikunterricht oft mit den fehlerhaften Schülervorstellungen aus dem Alltag kämpfen. Konstruktivistische Lerntheorien, die auch in der Physikdidaktik in gemäßigter Form eine bedeutsame Position erlangen konnten, fordern vom Lehrenden an vorhandene und zum Teil falsche Schülervorstellungen anzuknüpfen, statt ihnen einfach ein neues Konzept vorzulegen. Das ist nur dann möglich, wenn die Lernvoraussetzungen in der Lerngruppe ausreichend berücksichtigt wurden. Eine Diagnose der Schülervorstellungen vor der Unterrichtseinheit sowie Monitoring der Schülervorstellungen während der Unterrichtssequenz gehören deshalb zu den wichtigsten Aufgaben im Physikunterricht. Für die Diagnostik und das Monitoring der Schülervorstellungen müssen vorhandene Schülervorstellungen empirisch erfasst werden. Der zentrale Ansatz hierzu ist die Anwendung externer Visualisierungen von Begriffsnetzen. Dieser Zugang ermöglicht einerseits eine Momentaufnahme des Wissens und andererseits fördert er durch die Reflexion bei den Lernenden eine Organisation und Umstrukturierung vorhandenen Wissens. Zwei sehr verbreitete Visualisierungsstrategien sind Mind Maps und das Concept Netz (vgl. zu Strategien der externen Visualisierung Renkl & Nückles, 2006). Mind Maps zeigen eine gewisse Nähe zu den Assoziationstheorien, weil die Beziehungen zwischen den Begriffen in dieser Darstellungsart explizit nicht benannt sind. Concept Netze sind eine vereinfachte Variante der propositionalen Netze und haben ihren Ursprung in den Sachverhältnissen von Selz.

Als großer Nachteil bestehender Unterrichtskonzeptionen mit traditionellen Aufgabenstellungen wird die konvergente Aufgabenführung angesehen (Fischer & Draxler, 2002, S. 301).

Wie auch im Mathematikunterricht müssen häufiger offene, problemorientierte Aufgaben, die mehrere Lösungswege zulassen, im Unterricht eingesetzt werden. Neben einer experimentellen Lösungssuche können und sollen Schüler in diesen Aufgaben physikalische und mathematische Modelle für die Suche nach der Antwort auf die gestellte Frage einsetzen. Bei der Einführung solcher Aufgaben darf jedoch der Schwierigkeitsgrad nicht unterschätzt werden. Sogar eine fachlich relativ einfache Textaufgabe zur Bestimmung des Wegs aus Geschwindigkeits- und Zeitangaben wurde in der internationalen PISA-Studie nur von 36% der Schüler gelöst (PISA-Konsortium Deutschland & Prenzel, 2005, S. 396). Dies zeigt, dass Schülern Lösungsstrategien fehlen, um auf die Anforderungen solcher Aufgaben vorbereitet zu begegnen.

3 Modellierungsaufgaben und ihre Lösungsprozessanalysen als Kern einer prozessorientierten Didaktik

3.1 Modellierungsaufgaben

3.1.1 Zentrale Merkmale von problemorientierten Modellierungsaufgaben

In den vorangegangenen Abschnitten wurde ein breites Spektrum an Lern- und Problemlösetheorien vorgestellt, die helfen können, Schwierigkeiten und Strategien im Problemlöseprozess besser zu verstehen. In diesem Abschnitt folgen eine Bestimmung des ausgewählten Problemtyps der Modellierungsaufgaben und eine Darstellung speziell für diesen Aufgabentyp entwickelter Lernprozessanalysen. Das führende Schema zur Analyse von Modellierungsaufgaben – der Modellierungskreislauf – stammt zwar aus der Didaktik der Mathematik, wird aber unter dem Gesichtspunkt der Lese-, Problemlöse- und Lernstrategieforschung betrachtet.

Im Abschnitt 1.2 wurden das kognitive Potenzial von Modellierungsaufgaben und ihre Rolle in den gegenwärtigen fach- und allgemeindidaktischen Konzeptionen angesprochen. Die im Folgenden formulierten Anforderungen an „gute“ Aufgaben verdeutlichen die Bedeutung dieses Aufgabentyps und ihre Vorteile im Forschungsprozess:

- Die Aufgaben sollen die Lösungskonstruktion ermöglichen und nicht nur fertiges Wissen abfragen. Die eigenständige Lösungskonstruktion fördert den Wissensaufbau und schafft kognitive Voraussetzungen für die Beobachtung der Lernprozesse bei den Versuchspersonen.
- Die Aufgaben sollen so konzipiert werden, dass ihre Lösungen einen Transfer von erworbenem Wissen und Fähigkeiten auf alltägliche Probleme erleichtern. Dieses Merkmal wird im Hinblick auf ein Ziel der schulischen Bildung bestimmt: die Anwendung im alltäglichen Leben. Die Bedeutung des „pragmatischen“ Aspekts der Bildung ist international und fächerübergreifend anerkannt und im Schulcurriculum fest verankert (vgl. z. B. Baumert & PISA-Konsortium, 2001; Freudenthal, 1977; Winter, 1995).
- Die Aufgaben sollen motivierend gestaltet werden und Interesse bei Schülern wecken. Motivation und Interesse hängen positiv mit der Lernbereitschaft von Schülern, deren Kreativität, Selbständigkeit (Schiefele & Pekrun, 1996, S. 269) und schließlich auch mit deren Leistungen zusammen (Helmke & Schrader, 2006; Helmke & Weinert, 1997).
- Die Schüler sollen im Unterricht sinnvolle Fragestellungen bearbeiten. Oft enthalten Schulaufgaben Fragestellungen, die ausschließlich für die Übung einer bestimmten

Operation entwickelt wurden – so genannte „eingekleidete“ Aufgaben. Manchmal ist der Aufgabenkontext in solchen Aufgaben unrealistisch und festigt dadurch ein falsches Bild über das Fach, das dann als realitätsfremd wahrgenommen wird.

- Die Aufgaben sollen mehrere Lösungswege zulassen und dadurch innere Konstruktionsprozesse unterstützen. Durch unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten haben solche Aufgaben einen variablen Schwierigkeitsgrad, der eine individuelle Entwicklung von Fachkompetenzen fördert.

Gemäß den angegebenen Aspekten sollen Aufgaben von einer authentischen Situation ausgehen und nicht zu eindeutig aber auch nicht zu offen gestellt werden. Sind die Aufgaben zu eindeutig gestellt, wird den Schülern ein Teil des Konstruktionsprozesses vorweggenommen. Ferner fördern solche Aufgaben eine oberflächliche Bearbeitung, die in der Mathematik die Suche nach einer passenden Rechenoperation und in der Physik nach einer passenden Formel aufgrund einzelner Schlüsselwörter beinhaltet (Fischer & Draxler, 2002; Reusser & Stebler, 1997; Schoenfeld, 1982, S. 27; Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000). Wird die Aufgabe andererseits zu offen gestellt, kann keine befriedigende Lösung gefunden werden. Für eine sinnvolle Bearbeitung sehr offener Aufgaben müsste der Problemlöser eine Phase der Informationssuche einlegen. Erst nach dieser Phase kann der Problemraum der Aufgabe mit Hilfe der gesammelten Informationen sinnvoll eingeschränkt und das gestellte Problem somit lösbar gemacht werden. Die Fermi-Aufgaben eignen sich eher für einen projektorientierten als für einen Regelunterricht. Dies sollte jedoch nicht so interpretiert werden, dass die genannten Aufgabentypen aus dem Curriculum ausgeschlossen werden müssten. Schon aus kognitionspsychologischen Gründen ist es notwendig, ein vielfältiges Angebot an Aufgaben im Unterricht zu präsentieren, um die Übung von Teilhandlungen und eine breite Wissensvernetzung zu schaffen.

Die oben genannten Anforderungen werden durch realitätsnahe, anspruchsvolle Modellierungsaufgaben erfüllt. Werden Textaufgaben als eine verbale (Text) und ikonische (Bild) Beschreibung eines Problems definiert, stellen die hier vorgestellten Modellierungsaufgaben eine Untergruppe von *Textaufgaben* dar.[6] In der Didaktik der Mathematik werden Modellierungsaufgaben über Anforderungen, wie z.B. Verstehen, Annahmen treffen etc., definiert, die der Problemlöser im Lösungsprozess bewältigen soll (Blum & Niss, 1991; Niss, et al., 2007,

[6] In der Mathematikdidaktik wird der Begriff „Textaufgaben“ manchmal für die Bezeichnung einer Teilmenge von Modellierungsaufgaben – „eingekleideten“ Aufgaben – verwendet. Die Lösung von „eingekleideten“ Aufgaben erfordert oft neben dem Verstehen nur eine elementare „Entkleidung“ eines mathematischen Problems. „Word problems are nothing more than a ‚dressing up’ of a purely mathematical Problem in words referring to a segment of a real world“ (Niss, et al., 2007, S. 11).

S. 12). Zur zweckdienlichen Verallgemeinerung der Definition für andere Fachgebiete, wie z. B. der Physik, wird hier ein Zugang zum Modellieren und zu den Modellierungsaufgaben gewählt, der im Artikel von Niss, Blum und Galbraith im Kapitel „Models und Modeling“ angebahnt wurde (vgl. Niss, et al., 2007, S. 8). *Modellierungsaufgaben sind problemorientierte authentische Textaufgaben, die für ihre Lösung eine Konstruktion, Bearbeitung und Validierung von Modellen erfordern.* Die Bedeutung des Begriffs „Modell“ wird von Richard Mayer so erklärt: „A model of a system includes the essential parts of the system as well as the cause-and-effect relations between a change in the status of one part and a change in the status of another part“ (Mayer, 1992, S. 431). Aebli nennt ein Modell eine Abstraktion einer wirklichen Handlung, die wesentliche strukturelle Züge des Prototyps beibehält. Nach der Konstruktion eines Modells sollte geprüft werden, ob das vom Modell simulierte Ergebnis und die im Modell ablaufenden Teilprozesse dem tatsächlichen Vorgang angemessen entsprechen (Aebli, 1980, Bd. I, S. 74). Welche Modellarten in der Definition von Modellierungsaufgaben unter „verschiedenartigen Modellen“ gemeint sind, wird erst nach der Analyse von Lösungsprozessen präzisiert.

3.1.2 Aufgabenbeispiele

In diesem Unterabschnitt werden die Aufgaben Murmeln und Tanken vorgestellt, auf die im Laufe dieses Abschnitts mehrfach zurückgegriffen wird. Bei der Charakterisierung von Bearbeitungsprozessen werden neben den zwei genannten Aufgaben auch die Aufgabe Riesenschuhe (vgl. Abbildung 3) in die Analysen einbezogen. Das erste Beispiel stellt doe einfache Aufgabe Murmeln dar, diese braucht keine Erläuterungen zu ihrer Lösung.

Murmeln

Peter hat 5 Murmeln. Rita hat 7 Murmeln.
Wie viele Murmeln haben die Kinder zusammen?

Abbildung 14. Aufgabe Murmeln

Die Aufgabe Tanken ist eine komplexe Modellierungsaufgabe, die von Leiss im Rahmen der Doktorarbeit konstruiert und detailliert analysiert wurde(Leiss, 2007).

Tanken

Herr Stein wohnt in Trier 20 km von der Grenze zu Luxemburg entfernt. Er fährt mit seinem VW Golf zum Tanken nach Luxemburg, wo sich direkt hinter der Grenze eine Tankstelle befindet. Dort kostet der Liter Benzin nur 1,05 Euro, im Gegensatz zu 1,30 Euro in Trier.
Lohnt sich die Fahrt für Herrn Stein?

Abbildung 15. Aufgabe Tanken (aus Blum & Leiss, 2005b)

3.1.3 Lösungsprozesse bei einfachen Textaufgaben

Die Darstellung von Lösungsprozessen im Rahmen der Problemlösepsychologie von Wertheimer, Dewey, Pólya und Newell & Simon wurde unter Unterabschnitt 2.1.2 geschildert. In den 70er und 80er Jahren wurden in der Mathematik vorwiegend einfache *Textaufgaben* aus dem Grundschulbereich analysiert (vgl. die Aufgabe „Murmeln“ in der Abbildung 14).

Für diesen Aufgabentyp liegen viele empirische Befunde und eine Reihe von Theorien vor, die mit Computersimulationen validiert wurden (De Corte, Verschaffel, & De Win, 1985; Reusser, 1989; Riley, Greeno, & Heller, 1983). Fasst man empirische Untersuchungsergebnisse zu solch einfachen Textaufgaben zusammen, sind es drei Faktoren, welche die Schwierigkeit dieser Aufgaben bestimmen. Die sprachlich-linguistische Komponente einer Textaufgabe und ihre Repräsentation in der Aufgabenstellung beeinflusst den Aufbau der propositionalen Textbasis (Kintsch & Greeno, 1985; Staub & Reusser, 1995). Die handlungsbezogene Komponente umfasst die Handlungsstruktur, die für das Verstehen der Situation maßgeblich ist (Reusser, 1989). Die Komplexität der für die Lösung erforderlichen mathematischen Modelle ist der dritte Einflussfaktor, der über das „logisch-mathematische Problemmodell“ beschrieben wird (Riley, et al., 1983). Reusser betrachtet den Lösungsprozess bei einfachen Textaufgaben aus zwei Blickwinkeln. Einerseits „lassen sich Mathematisierungsprozesse als ein Oszillieren zwischen mindestens drei Verständnisebenen begreifen: dem lexikalisch-syntaktischen Textverstehen, dem Situation- und Sachverstehen und dem quantitativ-numerischen Verstehen“ (Reusser, 1997, S. 153). Andererseits kann der Lösungsprozess sequenziell charakterisiert werden als „ein von einer Problemsituation geleiteter planvoller Vorgang, bei welchem ausgehend vom Problemtext eine sachhaltige Situationsvorstellung gebildet und schrittweise auf das quantitative Gerüst reduziert wird“ (ebd). Diese sequenzielle Beschreibung von Reusser bildet nicht den ganzen Lösungsprozess ab. Der Lösungsprozess endet nicht mit der Konstruktion des quantitativen Gerüstes oder eines mathematischen Modells. An einer anderen Stelle erläutert Reusser, dass er unter dem mathematischen Gerüst neben der mathematischen Gleichung auch das numerische Ergebnis versteht (Reusser, 1997, S. 152). Es gibt beim Lösen von mathematischen Textaufgaben jedoch noch weitere Aktivitäten – wie z.B. Interpretieren und Validieren des Modells. Diese und andere Tätigkeiten können am Modellierungskreislauf von Blum und Leiss veranschaulicht werden (vgl. Blum & Leiss, 2005a; andere Modellierungskreisläufe siehe bei Borromeo Ferri, 2006).

3.1.4 Modellierungskreislauf – ein Modell zur Analyse von Lösungsaktivitäten bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben

Das hier dargestellte Modellierungskreislaufschema wurde auf Grund von theoretischen und empirischen Erkenntnissen über Lösungsprozesse von Schülern bei der Bearbeitung komplexer Modellierungsaufgaben, wie z.B. der Aufgabe „Tanken“, entwickelt und charaktierisiert in idealtypischer Weise die einzelnen Bearbeitungsschritte.

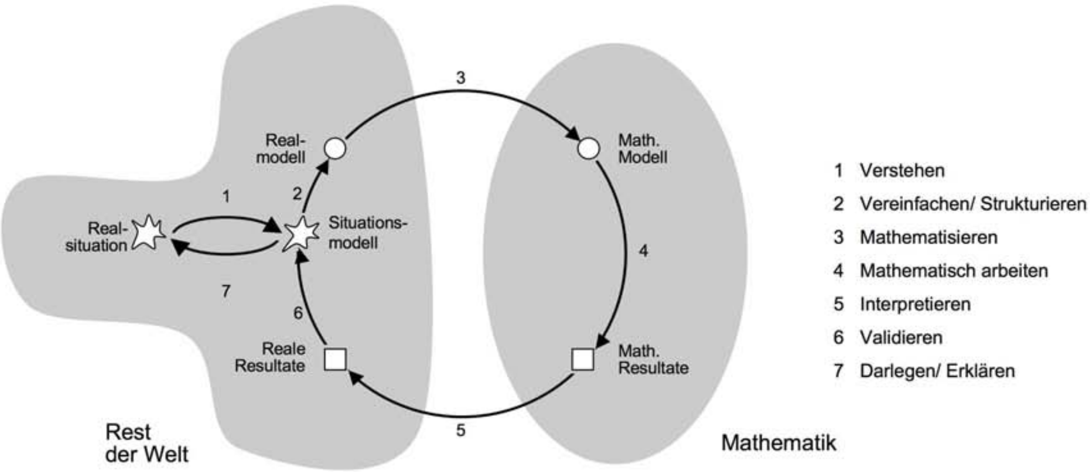


Abbildung 16. Modellierungskreislauf (Blum & Leiss, 2007)

Der Lösungsprozess einer Textaufgabe beginnt mit dem Lesen der Aufgabenstellung. Das Ziel des Lesens ist es, die in der Aufgabe beschriebene Situation zu verstehen und das Situationsmodell zu bilden. Der zweite Schritt ist es, ein konstruiertes Situationsmodell durch die Vereinfachung, Strukturierung und Präzisierung in das Realmodell umzubauen, welches im dritten Schritt mathematisiert und dadurch in ein mathematisches Modell überführt wird. Dann wird das mathematische Resultat berechnet, das in Bezug auf die Realität interpretiert und im Hinblick auf das vorhandene Situationsmodell validiert wird. Schließlich wird der Lösungsprozess des Modellierens vom Problemlöser dargelegt (Blum & Leiss, 2005a, 2006, 2007).

An dieser Stelle sollen theoretische Grundlagen aus der Lese- und Kognitionsforschung für die Analyse des Lösungsprozesses herangezogen werden, um den Modellierungskreislauf kritisch zu betrachten. Die Charakterisierung der Bearbeitungsprozesse wird erst mit dem Modellierungskreislauf an verschiedenen Aufgaben veranschaulicht. Anschließend werden Lösungsprozesse mit dem Modell der sequenziellen Bearbeitung von Modellierungsaufgaben analysiert, das im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurde. Als Beispiel für die zweite Analyse wurde die Aufgabe Tanken ausgewählt. Bevor einzelne Aktivitäten im Modellierungskreislauf detailliert analysiert werden, sollte auf die Einteilung zwischen der Mathematik und dem Rest der Welt hingewiesen werden. Diese Einteilung erklärt sich mit der Entwicklung der

Mathematikdidaktik, die seit Jahrzehnten gegen das rein mathematische Verstehen in der Mathematikdidaktik kämpft und die Integration von authentischen anwendungs- und realitätsbezogenen Aufgaben in den Unterricht fordert (vgl. z.B. schon Freudenthal, 1977). Die Trennung der Mathematik von „der Welt“ macht dabei deutlich, welche Fähigkeiten durch die Behandlung von ausschließlich innermathematischen Aufgaben im Klassenzimmer *nicht* erworben werden können (vgl. Treilibs, Burkhardt, & Low, 1980). Dennoch ist die genannte Trennung nur formal. So Blum und Niss: „For a strict separation of mathematics from the real world often means that things which are inseparable and linked together – as mathematics and physics have been for centuries – are examined in a merely formal manner“ (Blum & Niss, 1991, S. 40). Als formale Trennung vermittelt diese einem Außenstehenden allerdings den Eindruck, dass die Mathematik und der „Rest der Welt“ zwei verschiedene und sogar disjunkte Wissensbereiche seien. Daher wird bei den Lösungsprozessanalysen auf die Trennung von Fach- und Weltwissen verzichtet.

Verstehen. Die erste Handlung des Problemlösers bei der Aufgabenbearbeitung ist das Lesen der Aufgabenstellung. Die Aufgabenstellung wird im Modellierungskreislauf eine „reale Situation“ genannt. Genauer gesagt ist die Aufgabenstellung eine Beschreibung einer realitätsbezogenen Situation. Das Ziel des Lesens ist, die Aufgabe zu verstehen. Eine Textaufgabe zu verstehen, bedeutet, eine mentale Repräsentation der Aufgabenstellung zu bilden, die entweder als propositionale Textbasis oder als ein rein analoges Modell (etwa ein Bild der Situation) oder als ein analog-propositionales mentales Modell repräsentiert werden kann. Die Grundlagen für den Aufbau von mentalen Repräsentationen bilden der Text, das Bild der Situation und das Vorwissen des Lesers. Der Begriff *Situations*modell wurde von Reusser und anderen Forschern gewählt, um die Bedeutung der mentalen Repräsentation einer Situation beim Lesen zu unterstreichen (vgl. Leiss, Schukajlow, Blum, Messner, & Pekrun, 2010). Im Leseprozess werden nicht nur das Situationsmodell, sondern auch propositionale Textbasis und *Text*repräsentationen – wie z.B. die Repräsentation der Textoberfläche[7] – konstruiert (vgl. z.B. Christmann & Groeben, 1999; Schnotz, 1994; van Dijk & Kintsch, 1983). Für das Problemlösen ist das Situationsmodell von entscheidender Bedeutung, weil es eine effektive Inferenzenbildung ermöglicht. „The situation model which is the result of […] interpretational process provides the basis for further cognitive operations, such as formal, logical reasoning,

[7] Über die Abbildung der Textoberfläche im Gedächtnis wird gesprochen, wenn die Person den Text wortwörtlich wiedergeben kann. Das Verstehen des Textes setzt hingegen das Erfassen von Tiefenstrukturen des Textes – vor allem seiner globalen Bedeutung – voraus.

as well as other types of inference and problem-solving activities“ (van Dijk & Kintsch, 1983, S. 341). Beim Lesen werden ferner individuelle Erfahrungen des Problemlösers über die geschilderte Situation, den Ort des Geschehens, Handlungspersonen und anderen Handlungsmerkmale aktiviert. Aus diesen Wissensfragmenten wird das neue Situationsmodell konstruiert. Van Dijk & Kintsch betonen, dass die Konstruktion des Situationsmodells nicht ausschließlich über Schlussfolgerungen aus der propositionalen Textbasis erfolgt (van Dijk & Kintsch, 1983, S. 336-337). Die Textbasis leitet nur das Bilden des Situationsmodells. Es gibt aber noch einen Prozess, der die Konstruktion des Situationsmodells konstituiert. Reusser nennt ihn die Vergegenwärtigung der Sachstruktur. Darunter versteht Reusser unter anderem „die Identifikation der Protagonisten der Handlung, die zeitliche und funktionale Bestimmung des Handlungsablaufs und die Identifikation einer mathematisch bedeutsamen Lücke“ (der Fragestellung) im Handeln (Reusser, 1997, S. 152). Das Verstehen kann hierbei als durch die Aufgabenstellung geleitetes Strukturieren des eigenen Wissens charakterisiert werden. In der Aufgabenstellung enthaltene Informationen werden einerseits reduziert und andererseits durch individuelles Wissen ergänzt. Durch diese Aktivitäten wird das erste Modell im Lösungsprozess – das Situationsmodell – konstruiert.

Vereinfachen. Während ein auf Grundlage einfacher Textaufgaben konstruiertes Situationsmodell notwendige und hinreichende Informationen für den Mathematisierungsprozess beinhaltet, muss bei Modellierungsaufgaben noch ein Schritt vor dem Mathematisieren gemacht werden. Dieser Schritt besteht aus der Vereinfachung und Strukturierung des Situationsmodells zum Realmodell. Im Unterschied zum *Verstehen* erfolgen im zweiten Schritt keine Ergänzung des Situationsmodells mehr. Es sind nur rein reduktive Prozesse. Einige solcher Prozesse wurden von Van Dijk und Kintsch Makrooperationen (Macro-Operators) genannt (van Dijk & Kintsch, 1983, S. 370).
Schon das *Verstehen* einfacher Textaufgaben kann durch die Umformulierung des Textes oder seine Ergänzung mit einem neuen, für die Lösung irrelevanten Textabschnitt erschwert werden (Reed, 1999). Zum Beispiel wenn etwa zu der in diesem Unterabschnitt angegebenen Murmeln-Aufgabe (siehe Abbildung 14) eine lange Passage über die Freundschaft von Peter und Rita hinzugefügt wird. Wird die Aufgabe zusätzlich mit irrelevanten Zahlen ergänzt, wächst ihr Schwierigkeitsgrad sprunghaft (Reusser, 1988). Der Problemlöser muss in diesem Fall *beim Vereinfachen* wesentlich mehr irrelevante Informationen mit Hilfe von Makrooperationen ausfiltern und kann das Problem nicht nur durch die Anwendung von Schlüsselwortstrategien lösen, die in der Mathematisierung aus einzelnen Keywords wie z.B. „mehr“ (Addi-

tion) und „weniger“ (Subtraktion) bestehen (vgl. u. a. Schoenfeld, 1982; Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000).

Eine andere Art reduktiver Strategien ist die Festlegung einer nicht angegebenen Größe, die eine einfache Alternative zur Einführung einer Variablen darstellt. In der Aufgabe Riesenschuhe ist solch eine Vereinfachung die Annahme über den Zusammenhang zwischen der Höhe des Riesenmenschen und seiner Schuhlänge. Handlungstheoretisch bedeutet die Konstruktion eines Realmodels die Auswahl von Handlungsstrukturen, die im nächsten Schritt mathematisiert werden. Dies geschieht durch die Überprüfung der Strukturen auf ihre Mathematisierbarkeit und setzt somit die Kenntnis mathematischer Operationen voraus.

Ob es Sinn macht, zwischen Realmodell und Situationsmodell zu unterscheiden, wird in der mathematikdidaktischen Diskussion kontrovers diskutiert (vgl. zum Überblick Borromeo Ferri, 2006) und hängt von der jeweiligen Aufgabenstellung ab. Bei einer einfachen (well-defined) Aufgabe ist der Reduktionsschritt sehr einfach und muss nicht isoliert betrachtet werden. In der Didaktik der Mathematik wird in einem solchen Fall gesagt, dass das Realmodell in der Aufgabenstellung vorgegeben ist (Blum & Niss, 1991). Ist die Aufgabe in ihrer Textausführung komplex und weist zudem Merkmale eines ill-defined Problems auf, scheint es sinnvoll zu sein, diese zwei Schritte voneinander zu trennen, um damit zusammenhängende Schwierigkeiten unterscheiden zu können.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass reduktive Strategien eine eigene Strategiegruppe darstellen. Sie unterscheiden sich von Verstehensstrategien durch eine weniger ausgeprägte individuelle Ergänzung von vorgegebenen Informationen.

Mathematisieren. Der dritte Schritt im Modellierungskreislauf ist die Übersetzung des Realmodells in ein fachspezifisches mathematisches Modell. In diesem Prozess werden Objekte und Zusammenhänge (Relationen) zwischen den Objekten zu einem neuen Modell zusammengefügt (Blum & Niss, 1991; De Corte, Verschaffel, & O'pt Eynde, 2000, S. XII). Die Entwicklung eines mathematischen Modells geschieht in Abstimmung mit den bekannten mathematischen Operationen. In Anlehnung an Natan, Kintsch & Young (1992) kann angenommen werden, dass der Problemlöser die Handlungsstrukturen des Realmodels mit den mathematischen Strukturen koordiniert und dadurch ein adäquates mathematisches Modell aufbauen kann. Kleine et al. (2005) sehen „Grundvorstellungen mathematischer Inhalte“ als das entscheidende Bindeglied zwischen mathematischen Strukturen und Handlungen (siehe zu Grundvorstellungen Oehl, 1962; vom Hofe, 1995). Der Ablauf des Mathematisierens kann mit Hilfe der Handlungstheorie von Aebli und der Entwicklungstheorie von Piaget erläutert werden (vgl. Piaget, 1947, 1950/1975).

Der Mathematisierungsprozess hat strukturelle Ähnlichkeit mit der Konstruktion von Operationen aus Handlungen (vgl. Abschnitt 2.3). Der Problemlöser soll von allen Aspekten bis auf einen abstrahieren und eine operative Struktur im Handlungsablauf identifizieren(vgl. Reusser, 1997, S. 150). Aus der vorgestellten Handlung des Zusammenlegens von Peters und Ritas Murmeln (siehe Abbildung 14) wird z.B. die Operation des Zusammenfügens von zwei Mengen der Mächtigkeit fünf und sieben „5+7“ konstruiert. In der Aufgabe Riesenschuhe sind die Handlungen komplexer als in der Murmeln-Aufgabe und müssen sequenziell mathematisiert werden. Vermutet der Problemlöser, dass die Relation zwischen der Körpergröße eines Menschen und seiner Schuhlänge für die Lösung der Riesenschuhe-Aufgabe wichtig ist, konzentriert er sich bei der Aufgabenlösung auf einen Aspekt beider Objekte: die Bestimmung der Relation zwischen zwei Längen. Alle anderen Aspekte, wie z.B. Breite oder Farbe der Schuhe, werden dabei nicht beachtet.

Nachdem das mathematische Modell durch die Abstraktion konstruiert wurde, geht es dem Problemlöser darum, Schlussfolgerungen aus diesem Modell in Form von mathematischen Ergebnissen zu ziehen, das Ergebnis auf vorher entwickelte Modelle zu übertragen und die Passung des Ergebnisses an die Modelle zu überprüfen.

Mathematisch arbeiten. Das Schlussfolgern im mathematischen Modell wird im Modellierungskreislauf „mathematisches Arbeiten“ genannt. Mathematisches Arbeiten besteht in der Ausführung von Operationen verschiedener Komplexität und Anzahl. Einige mathematische Operationen, wie z.B. der Satz des Pythagoras, erfordern gleich mehrere Fähigkeiten und Fertigkeiten vom Problemlöser. Die Anwendung des Satzes des Pythagoras setzt u.a. das Beherrschen von elementaren arithmetischen Operationen und der mathematischen Operation „Wurzelziehen“ voraus. Um den Satz des Pythagoras im allgemeinen Fall anzuwenden, muss der Problemlöser die aufgestellte Gleichung darüber hinaus umformen können.

Am Ende des *mathematischen Arbeitens* steht ein mathematisches Objekt (oft eine Zahl), welches das mathematische Resultat darstellt. Dieses Objekt verkörpert das Resultat der Anwendung des mathematischen Modells auf das in der Aufgabe beschriebene Phänomen. Bevor jedoch die Qualität des Resultats bestimmt und somit die Fragestellung beantwortet werden kann, muss das mathematische Ergebnis in die „Sprache“ dieser Modelle zurückübersetzt werden.

Interpretieren. Der Übersetzungsprozess aus dem fachspezifischen mathematischen Modell in die Sprache des Real- und Situationsmodells heißt im Modellierungskreislauf „Interpretieren“ und führt vom mathematischen zum realen Resultat. In der Murmelaufgabe (siehe Abbildung 14) werden nach diesem Schritt aus dem mathematischen Ergebnis „12“ „12 Murmeln“. Das reale Resultat schließt die Lücke im Realmodell. Man kann an dieser Stelle die Passung des realen Resultats in das Realmodell überprüfen, ggf. ein neues mathematisches Modell konstruieren oder einen Teil des Modellierungskreislaufs neu durchlaufen. Die Möglichkeit, ein neues mathematisches Modell zu konstruieren, wird jedoch in den nächsten Schritt des Modellierungskreislaufs verlagert (vgl. zu den empirischen Gründen der Unterscheidung von Interpretieren und Validieren Maaß, 2004, S. 290).

Validieren. Das Ergebnis der Interpretation kann nicht nur im Realmodell, sondern auch im Situationsmodell überprüft werden. Der Problemlöser begegnet der Situation wieder in ihrer vollen Komplexität. Dafür soll er erstens das Situationsmodell einschließlich der Lücke aus dem Gedächtnis und aus dem Text rekonstruieren und zweitens kontrollieren, ob das reale Resultat das Situationsmodell sinnvoll ergänzt und die Lücke geschlossen wird. Dies ist der Fall, wenn die gestellte Frage sich mit dem realen Resultat befriedigend beantworten lässt. Validieren ist die Kontrolle und die Wertung des Ergebnisses. Analog zu der Kategorie „Kritisches Prüfen“ beim Textverstehen (vgl. Unterabschnitt 2.4.3) besteht die Kontrolle im Modellierungskreislauf in der Prüfung, ob die neuen im mathematischen Modell ermittelten Informationen den im Situationsmodell abgespeicherten Informationen widersprechen. Wenn der Problemlöser mit den Ergebnissen der Kontrolle nicht zufrieden ist oder aus einem anderen Grund den Lösungsprozess überprüfen will, kann er an dieser Stelle die Qualität des Aufbaus der gebildeten Modelle oder die Bearbeitung des mathematischen Modells kontrollieren. Er aktiviert hier die metakognitiven Strategien: Regulation und Planung läuft einen Teil oder auch den ganzen Modellierungsprozess solange durch, bis die befriedigende Lösung erreicht oder auf ihre Suche verzichtet wird.

Vermitteln. Schließlich soll der Lösungsprozess dokumentiert werden. Die Lösungsdokumentation beginnt in der Regel schon während der Konstruktion des Situations- und Realmodells und durchzieht alle Stationen des Modellierungskreislaufs.
Eine Analyse dieses Modellierungskreislaufs führt zu folgenden Fragen:

- Eine Trennung der Mathematik vom „Rest der Welt“ könnte missverstanden werden, da sie die Vorstellung unterstützt, dass Mathematik einen autonomen, vom Weltwissen getrennten Wissensbereich darstellt.
- Im Modellierungskreislauf ist der Übergang zwischen den einzelnen Stationen nur in eine Richtung möglich. Dies kann einer realen Aufgabenbearbeitung nur dann entsprechen, wenn der Modellierungskreislauf als ein vom zeitlichen Ablauf unabhängiges Modell verstanden wird. Der Versuch einen tatsächlichen Bearbeitungsablauf einer Modellierungsaufgabe mit dem Modellierungskreislauf zu beschreiben, führt unweigerlich zur Einführung von neuen Pfeilen (siehe Borromeo Ferri, 2007). „Schuld“ daran sind metakognitive Strategien, die Vor- und Rückgriffe auf die nächsten und vorherigen Stationen anleiten.
- Die Verortung des Validierungsschritts erscheint aus der Sicht der Lernstrategieforschung nicht vollständig. Dieser Schritt legt an einer Stelle des Modellierungskreislaufs metakognitive Strategien offen: Überwachung oder Kontrolle des Ergebnisses. Diese Strategie kann jedoch in jedem Modellierungsschritt ihre Funktion erfüllen. Die metakognitiven Strategien Regulation und Planung, deren Bedeutsamkeit auch in der Mathematik seit langem bekannt ist, sind hingegen in keinem der Lösungsschritte explizit sichtbar (vgl. zu Planung Pólya, 1948).
- Die Vermittlung der Lösung stellt zweifellos einen Teil des Modellierens dar und ist schon vor Jahrzehnten als eine eigene Aktivität erfasst worden (vgl. „expose“ bei Treilibs, et al., 1980). Die Integration dieses Schrittes im vollen Umfang in den Modellierungskreislauf ist jedoch problematisch, weil die Dokumentation des Lösungsweges – wie auch die metakognitiven Strategien – nicht im Modellierungskreislauf verortet werden können, wenn der Modellierungskreislauf als sequenzielles Modell entlang der Zeitachse verstanden wird. Erstens fängt die Dokumentation schon mit dem Lesen an und endet mit dem Aufschreiben des Antwortsatzes. Zweitens kann der Start- und Zielpunkt des Pfeils „Vermitteln“ vom Situationsmodell zu der realen Situation nicht ausreichend begründet werden.
- Bei realen Modellierungsprozessen werden einzelne Modelle nicht streng nacheinander, sondern schon in früheren Phasen der Lösung antizipiert, sodass Modellieren im Allgemeinen mehrdimensional abläuft. Die Mehrdimensionalität ist ein Grund, warum Computersimulation menschlicher Lösungsprozesse an ihre Grenzen stoßen. Ein

Computer kann Informationen nur sequentiell verarbeiten. Im menschlichen Gehirn verlaufen unterschiedliche Denkprozesse hingegen parallel.

Aufgrund der Analyse des Modellierungskreislaufs kann gefolgert werden, dass der Modellierungskreislauf sehr präzise Modellierungsaktivitäten beschreibt und nur mit einer minimalen Modifikation – Ausschluss der Einteilung des Wissens in Mathematik und den „Rest der Welt" – als diagnostisches Instrument für Lehrer geeignet ist (Schukajlow, 2006). Auch für die Analyse von individuellen Lösungsprozessen ist der Modellierungskreislauf geeignet, wenn man auf die angegebene Reihenfolge der Stationen verzichtet. Von drei metakognitiven Strategien ist eine Strategie – die Kontrolle – an einer Stelle in den Modellierungskreislauf integriert worden.

3.1.5 Ein Modell der sequenziellen Bearbeitung von Modellierungsaufgaben

Das folgende Modell wurde als *sequenzieller* Algorithmus konzipiert und beschreibt deswegen nicht im vollen Umfang die realen Modellierungsprozesse. Durch einen flexiblen Wechsel von Modellierungsstationen innerhalb des Modells wird versucht, die Charakterisierung der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben näher an die realen Lösungsvorgänge anzulehnen. Wird in der Beschreibung des Modellierungskreislaufs vom modellhaften Charakter der Handlungen ausgegangen, kann in Anlehnung an Reusser (1989) folgender Algorithmus für die Analyse der kognitiven Aktivitäten vorgeschlagen werden:

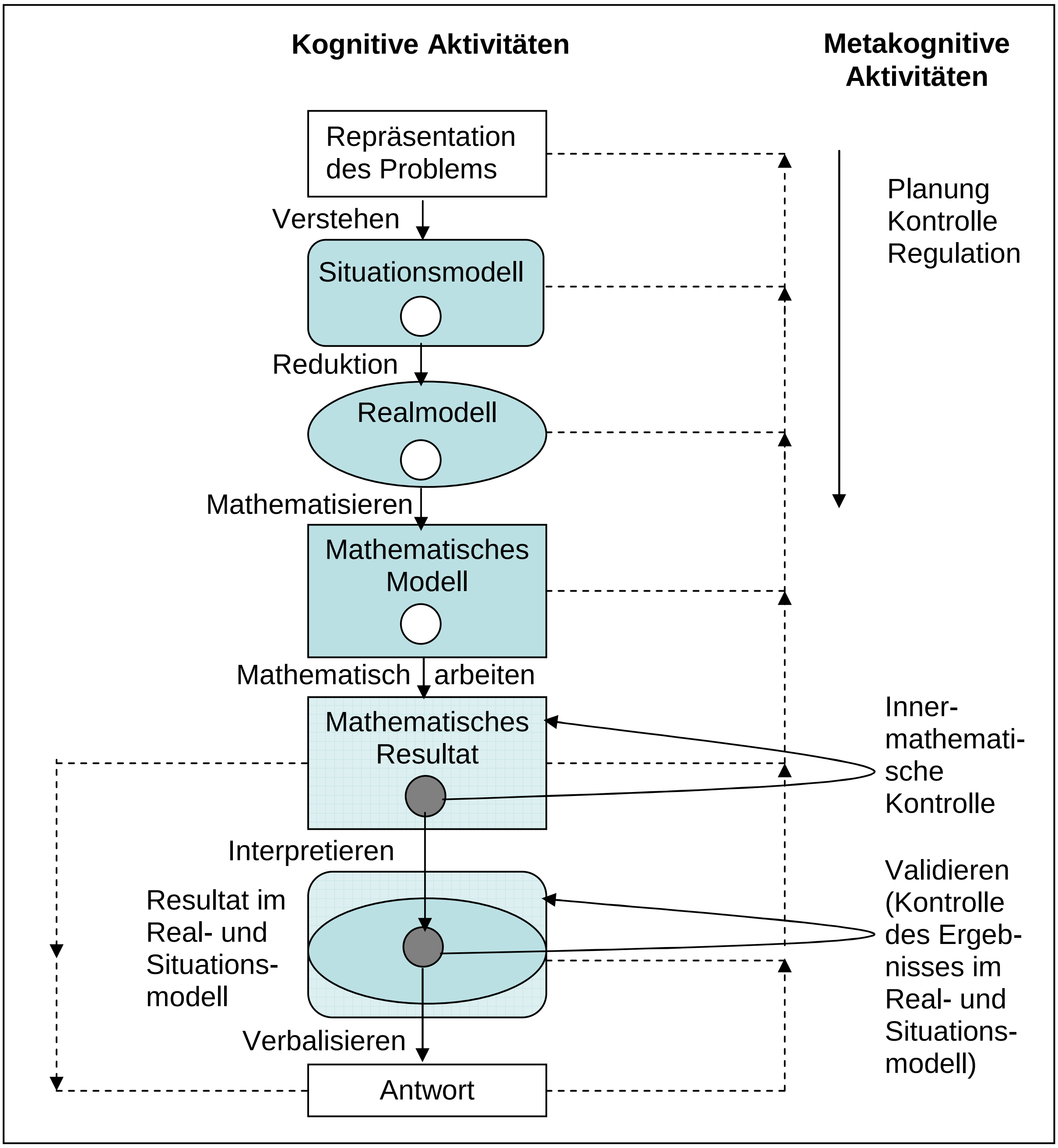


Abbildung 17. Kognitive und metakognitive Prozesse bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben

In diesem Algorithmus wurden metakognitive Strategien (Planung, Kontrolle und Regulation) und kognitive Strategien (Problembearbeitung) separat dargestellt, um aufgabenspezifische Anforderungen angemessen unterscheiden zu können. Zur besseren Beschreibung kognitiver Prozesse wurde die Dokumentation der Lösung auf *eine* Antwortsatzformulierung reduziert. Durch die Einführung der gestrichelten Pfade wird ausgedrückt, dass die Reihenfolge der Stationen flexibel gestaltet werden kann. Bis auf zwei Schritte entsprechen die Aktivitäten bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben dem Modellierungskreislauf von Blum und Leiß (siehe Abbildung 16). Durch die Wahl unterschiedlicher Rahmungen einzelner Stationen (Situationsmodell, Realmodell, mathematisches Modell) wird in den Vordergrund gestellt, dass der Problemlöser sich mit drei Modellarten auseinandersetzen und Resultate in jedem dieser Modelle betrachten muss. Kreise in den Stationen veranschaulichen Informationslücken in mentalen Repräsentationen der Modelle, die während der Aufgabenbearbeitung geschlossen werden müssen.

Der Prozess des Modellierens kann mit dem vorgestellten Algorithmus genauer wie folgt beschrieben werden (wobei die Aufgabe Tanken diesmal als Beispiel dient):

1. Das Verstehen des Problems besteht im Aufbau einer kohärenten Repräsentation der Situation (Situationsmodell). Das Situationsmodell enthält eine Informationslücke – die Fragestellung, die der Problemlöser nicht unmittelbar beantworten kann. In der Aufgabe Tanken werden im Situationsmodell zwei alternative Möglichkeiten, das Auto zu tanken, abgebildet: in Trier, in der Nähe, für 1,30 € oder in Luxemburg, 20 Kilometer von Trier entfernt, für 1,05 €. Die Informationslücke bildet die begründete Wahl einer dieser Tankmöglichkeiten (die Lösung der Aufgabe „Tanken“ wird hier präsentiert in Anlehnung an Leiss, 2007; zitiert nach Schukajlow, Blum, et al., 2009).
2. Im zweiten Schritt wird aus dem Situationsmodell ein mathematisierbares Realmodell transformiert. Dieses geschieht im Vorgriff auf mathematisches Wissen, das vermutlich beim Verstehen der Aufgabe aktiviert worden ist. Beim Lösen der Aufgabe „Tanken“ kann als Grund für die Wahl einer Tankstelle der Kostenfaktor ausgewählt werden. Zur Präzisierung und Vereinfachung des Situationsmodells kann angenommen werden, dass sich die Tankstelle in Trier direkt an der Haustür befindet und der Weg für die Hin- und Rückfahrt nach Luxemburg 40 km lang ist. Annahmen über Tankvolumen (z.B. Volltanken mit 50 Liter) und Benzinverbrauch des Wagens (z.B. 8 Liter pro 100 km) müssen getroffen und in die Lösung mit einbezogen werden.
3. Das Realmodell wird zu einem mathematischen Modell modifiziert. Die Beziehungen zwischen einzelnen Einflussgrößen werden mathematisiert und mit Hilfe von Gleichungen oder Graphen dargestellt. Eine Lösungsmöglichkeit ist der Vergleich zweier linearer Funktionen:

$$Kosten_{Trier}(x) = x\ 1{,}3\ €/Liter$$

$$Kosten_{Luxemburg}(x) = 8\ (40/100)\cdot 1{,}05\ €/Liter + x\cdot 1{,}05\ €/Liter,\ (mit\ x = 50\ Liter)$$

4. Durch das mathematische Arbeiten wird die Lücke im Lösungsprozess geschlossen. Als Ergebnis des mathematischen Arbeitens entsteht ein mathematisches Resultat, das mit Hilfe mathematischen Wissens kontrolliert werden kann. Der Lösungsprozess wird oft schon an dieser Stelle abgebrochen werden. Der Problemlöser schreibt in diesem Fall die Ergebniszahl als Antwortsatz, ohne sich die reale Bedeutung des mathe-

matischen Resultats bewusst zu machen. In der Aufgabe „Tanken“ könnte ein solches falsches Ergebnis etwa ein Unterschied der Tankkosten von 1000 € sein. Ein richtiges mathematisches Resultat könnte in diesem Fall sein:

$$Kosten_{Trier}(50) = 65\ €$$

$$Kosten_{Luxemburg}\ (50) = 55{,}86\ €$$

$$65\ € - 55{,}86\ € = 9{,}14\ €$$

5. Das mathematische Ergebnis wird in Bezug auf die Realität interpretiert und in einem Real- oder Situationsmodell validiert. Der Problemlöser fragt sich an dieser Stelle, ob z.B. der Unterschied von 9,14 € unter Annahmen des Real- und Situationsmodells realistisch ist und ob die Präzision der Annahmen das Ergebnis deutlich beeinflussen kann. In der Aufgabe Tanken sind Annahmen, welche bei der Begründung der Wahl der Tankstelle einbezogen werden können, der Verschleiß des Autos durch die Fahrt nach Luxemburg, zusätzliche Zeit, die für diesen Weg benötigt wird, Umweltbelastung u.s.w.
6. Das reale Ergebnis wird in einem Antwortsatz verbalisiert. Der Problemlöser schreibt z.B.: „Durch das Tanken in Luxemburg kann man zwar ca. 9 € sparen, aber mit Rücksicht auf andere Faktoren wie Zeitfaktor, Verschleiß des Wagens und Umweltbelastung durch zusätzliche Fahrt nach Luxemburg würde ich in Trier tanken“.

Einzelne Schritte des Modellierungskreislaufs wurden detailliert im Unterabschnitt 3.1.4 beschrieben. Der vorgestellte Zugang zu Modellierungsaufgaben und zum Modellierungsprozess über die Konstruktion, Bearbeitung und Validierung von Modellen erlaubt es auch, die Modellierungsaktivität fachübergreifend zu betrachten. Bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben aus anderen Fächern kommen nämlich entweder fachspezifische Modelle hinzu oder es werden mathematische Modelle durch fachspezifische Modelle ersetzt. Beim Lösen der Aufgabe Tanken könnte ein solches fachspezifische Modell aus den Wirtschaftswissenschaften kommen und würde helfen, die durchschnittlichen Kosten einer Arbeitsstunde, die für die Fahrt nach Luxemburg und zurück anfallen können, einzuschätzen. Ein Modell aus der Ökologie könnte die Umweltbelastung der Fahrt nach Luxemburg (etwa über den Ausstoß von Kohlendioxid) berechnen. Im nächsten Abschnitt wird an weiteren Beispielen gezeigt, wie sich der Lösungsprozess einer Modellierungsaufgabe mit dem vorgestellten Algorithmus beschreiben lässt.

Durch die Analyse von Modellierungsaktivitäten vom Standpunkt der Lese- und Lernstrategieforschung konnten die einzelnen Stationen und Lösungsschritte des Modellierungskreislaufs differenzierter interpretiert werden. Auch die Erkenntnis, dass beim realen Problemlösen nicht in einer schematisch-sequenziellen Weise vorgegangen wird, sondern, dass verschiedene Stationen gleichzeitig antizipiert werden können, bahnt sich durch neuere Forschungen an. In diesem Abschnitt wurde zudem ein modifizierter Algorithmus der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben vorgestellt, in welchem die metakognitiven Strategien vollständig integriert sind. Auf diesem Hintergrund wurde der Modellierungskreislauf neu interpretiert und der Modellcharakter des Schemas stärker herausgestellt. Mit dem neuen Schema ist es möglich, die Schülerbearbeitungsprozesse ohne zusätzliche Modifikationen vollständig zu beschreiben.

3.2 Lösungsprozessanalysen der in der Studie eingesetzten Aufgaben

In diesem Abschnitt werden idealtypische Lösungsprozesse der Modellierungsaufgaben Zuckerhut, Abkürzung und Regenwald analysiert.[8] Eine theoretische Analyse von Lösungsprozessen ist notwendig, um Schüler-Schwierigkeiten und -Strategien bei der Aufgabenbearbeitung zu erkennen und individuelle Lösungsprozesse zu rekonstruieren.

3.2.1 Zuckerhut

Die Aufgabe Zuckerhut ist eine Aufgabe, die nach den Lehrplänen des Hessischen Kultusministeriums für Physik und Mathematik je nach Schulzweig den Jahrgangsstufen 8 bzw. 9 zugeordnet werden kann (vgl. Hessisches Kultusministerium, 2002). Das Thema „Satz des Pythagoras“ soll in allen Schulzweigen im 9. Schuljahr behandelt werden. In Physik wird das Thema „gleichmäßige Bewegung“ je nach Bildungsgang im 8. bzw. 9. Schuljahr unterrichtet. Kognitionstheoretisch kann die Aufgabe Zuckerhut als problemorientierte Modellierungsaufgabe bezeichnet werden, die anspruchsvolle Leistungen des Textverstehens und der Strukturierung erfordert.

Repräsentation des Problems. In der Aufgabe Zuckerhut ist eine authentische Situation beschrieben und mit einer fotografischen Abbildung veranschaulicht. Das Bild zeigt, welche Form der Zuckerhutberg hat, kann jedoch zugleich durch die Perspektivität der Seilbahndarstellung – die Tragseile scheinen von der Zuckerhutberg nach oben zu führen – den Aufbau eines irreführenden Situationsmodells verursachen. Im Text sind neben der allgemeinen Beschreibung der Situation und der für die Aufgabenlösung notwendigen Zahlen auch Informationen aufgeführt, die für die Bearbeitung der Aufgabe irrelevant sind. Der Aufgabentext und

[8] Die Aufgaben Zuckerhut, Abkürzung und Regenwald wurden von D. Leiss im Rahmen des DISUM-Projektes entwickelt bzw. adaptiert (siehe Zuckerhut in Blum & Leiss, 2007; Regenwald in Leiss, et al., 2006)

das Bild der Situation sind somit Informationsträger und repräsentieren zusammen ein Problem.

Zuckerhut

Aus einer Zeitungsmeldung:

Die Zuckerhutbahn benötigt für die Fahrt von der Talstation bis zum Gipfel des als Zuckerhut bekannten Berges rund 3 Minuten. Dabei fährt sie mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h und überwindet einen Höhenunterschied von ca. 180 m. Der Cheftechniker Giuseppe Pelligrini würde viel lieber zu Fuß gehen. So wie früher, als er Bergsteiger war und erst von der Talstation über die ausgedehnte Ebene zum Berg rannte und diesen dann in zwölf Minuten bestieg.

Wie weit ist die Strecke ungefähr, die Giuseppe von der Talstation bis zum Fuß des Berges rennen musste? Schreibe deinen Lösungsweg auf.

Abbildung 18. Aufgabe Zuckerhut (aus Blum & Leiss, 2007)

Situationsmodell. Die Lösung der Aufgabe Zuckerhut beginnt mit der Konstruktion eines Modells der Situation. Der Problemlöser identifiziert zwei alternative Wege von der Talstation bis zum Gipfel des Berges. Der erste Weg kann mit der Seilbahn gefahren werden und dauert 3 Minuten, wenn die Seilbahn mit der Geschwindigkeit 30 Kilometer pro Stunde fährt. Der zweite, zu Fuß gegangene Weg, besteht aus zwei Teilen: er führt erst von der Talstation bis zum Fuß des Berges und dann über den steilen Berghang hinauf bis zur Bergstation. Das Bergsteigen dauert 12 Minuten. In der Aufgabe wird nach der Länge des ersten Teils des Gehweges von der Talstation bis zum Fuß des Berges gesucht.

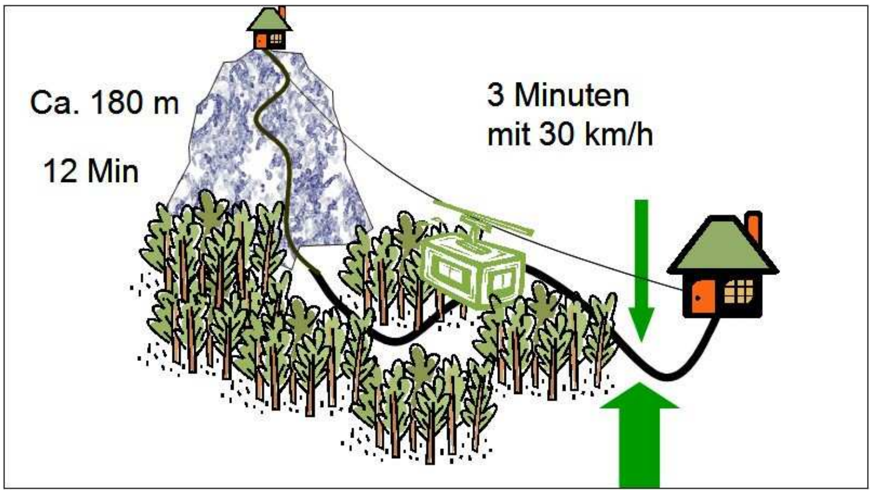


Abbildung 19. Ein Situationsmodell zur Aufgabe Zuckerhut

Bei der Konstruktion des Situationsmodells wird ein Teil von den für die Lösung irrelevanten Informationen ausgefiltert (vgl. Unterabschnitt 3.1.4). Zum Beispiel kann der Beruf und der Name der Handlungsperson (Cheftechniker Giuseppe Pelligrini) schon beim ersten Lesen aus dem Situationsmodell ausgeschlossen werden. Andererseits werden Informationen an einigen Stellen ergänzt, insbesondere wenn keine entsprechenden Hinweise im Text oder Bild vorhanden sind bzw. nicht erkannt wurden. Hierzu gehört der Verlauf des Weges von der Talstation bis zum Fuß des Berges, der weder auf dem Bild zu sehen noch im Text beschrieben ist.

Realmodell. Wenn die Versuchsperson die Aufgabe Zuckerhut schon einmal gelöst hat, kann sie die Antwort aus dem Gedächtnis sofort abrufen und somit die gestellte Frage unmittelbar nach der Konstruktion des Situationsmodells beantworten. Andernfalls muss der Problemlöser das Situationsmodell der Aufgabe Zuckerhut solange ändern, bis er die Lösung finden kann. Da in der Aufgabe die *Länge* des Weges ermittelt werden soll, vermutet der Problemlöser, dass die Lösung im mathematischen Modell gefunden werden kann. Wegen der Komplexität des Situationsmodells muss jedoch erst ein Realmodell konstruiert werden, das eine strukturelle Ähnlichkeit zum Situationsmodell beibehält, sich aber zugleich mathematisieren lässt.
Der Problemlöser überlegt sich an dieser Stelle im Lösungsprozess, welche Vereinfachungen das Situationsmodell substanziell nicht verändern. Er kann u.a. annehmen, dass der Berg schmal ist, und seine Breite im Realmodell vernachlässigen. Das Seil der Seilbahn wird als straff gespannt angenommen und Pelligrinis Weg führt idealisiert direkt von der Talstation bis zum Fuß des Berges (vgl. Abbildung 20). Bei der Beschreibung der Bewegung der Gondel können Kenntnisse des Problemlösers aus der Physik über die Bewegung der Körper herangezogen werden. Ein einfaches Modell, das die Bewegung der Gondel beschreibt, ist die gleichförmige Bewegung auf einer gradlinigen Strecke. Bei der gleichförmigen Bewegung fährt die

Gondel mit einer unveränderten Geschwindigkeit von 30 Kilometer pro Stunde von der Tal- zu Bergstation. In der Realität verlangsamt und beschleunigt sich die Gondel.

Eine zusätzliche Schwierigkeit der Aufgabe Zuckerhut verbirgt sich in einer überflüssigen Zeitangabe. Wenn ein Problemlöser gewohnt ist, dass in einer Mathematikaufgabe alle Zahlen bei der Lösung berücksichtigt werden sollen, ist es eine große Hürde für ihn, diese 12 Minuten als irrelevant für die Lösung zu erkennen.

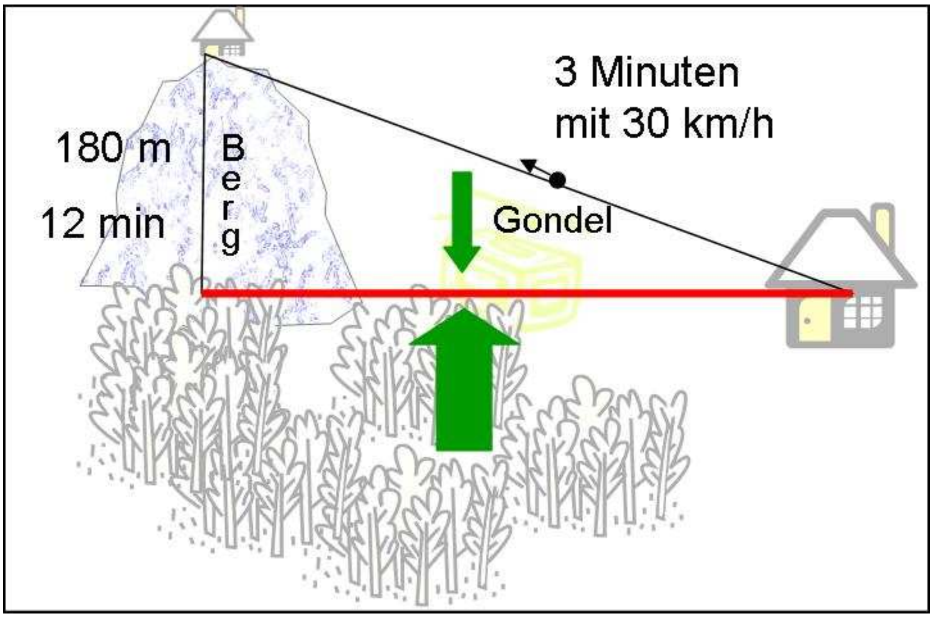


Abbildung 20. Ein Realmodell zur Aufgabe Zuckerhut

Mathematisches Modell. Das Realmodell wird mathematisiert, indem mathematische Operationen, Begriffe und Grundvorstellungen auf das Realmodell übertragen werden. Mit Hilfe der Grundvorstellungen zur Proportionalität erkennt der Problemlöser an dieser Stelle, dass die Zeit und der von der Seilbahn zurückgelegte Weg zueinander proportional sind. Ferner wird das rechtwinklige Dreieck im Realmodell identifiziert und die Möglichkeit erkannt, den Satz des Pythagoras anzuwenden. Das straff gespannte Seil wird als Hypotenuse, die Wege von der Talstation bis zum Fuß des Berges und von dem Fuß des Berges zum Gipfel werden als Katheten im rechtwinkligen Dreieck übersetzt. (siehe Abbildung 21).

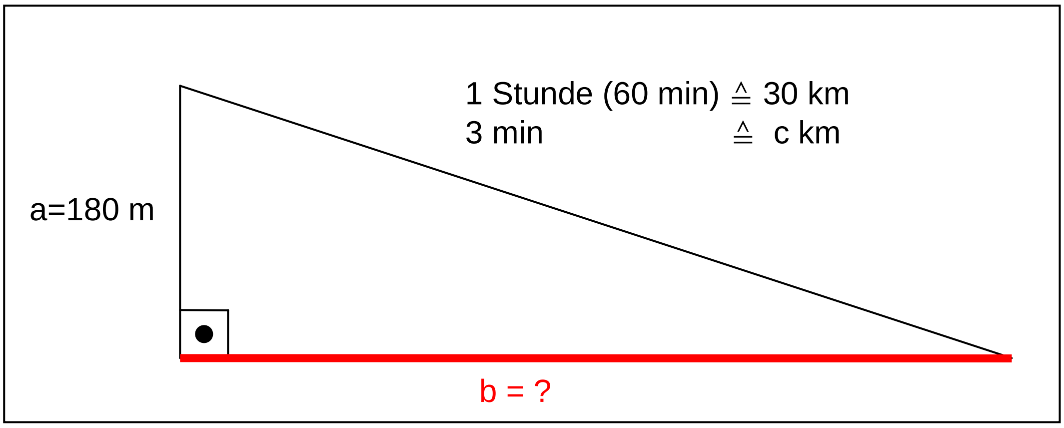


Abbildung 21. Ein mathematisches Modell zur Aufgabe Zuckerhut

Mathematisches Resultat. Im mathematischen Modell wird die gesuchte Größe – die Länge der unteren Kathete – mit Hilfe mathematischer Verfahren bestimmt. Zuerst berechnet der Problemlöser die Länge der Hypotenuse im Dreieck z.B. mit dem Dreisatz.

$$60 \text{ Minuten} \triangleq 30 \text{ Kilometer}$$

$$1 \text{ Minute} \triangleq 0{,}5 \text{ Kilometer}$$

$$3 \text{ Minuten} \triangleq 1{,}5 \text{ Kilometer}$$

Dann wird die untere Kathete mit dem Satz des Pythagoras ausgerechnet.

$$\mathrm{b} = \sqrt{(1{,}5km)^2 - (0{,}18km)^2} \approx 1{,}49km$$

Das mathematische Resultat lautet: Die Länge der unteren Kathete beträgt ca. 1,49 Kilometer. Die innermathematische Kontrolle (Überprüfung aufgrund des vorhandenen mathematischen Wissens) kann sowohl beim Zwischenergebnis (1,5 Kilometer) als auch beim Endergebnis (1,49 Kilometer) durchgeführt werden. Beim Endergebnis hängt die innermathematische Kontrolle mit dem Verstehen von Beziehungen zwischen den Seitenlängen in einem Dreieck zusammen. Wenn eine Seite wesentlich kleiner als die andere Seite im Dreieck ist, muss die dritte Seite auch fast genau so lang sein wie die längste Seite im Dreieck. Für die Aufgabe Zuckerhut kann die innermathematische Kontrolle lauten: Beträgt die Länge einer Kathete im rechtwinkligen Dreieck 0,18 km und die der Hypotenuse 1,5 km, *kann* die Länge der anderen Kathete 1,49 km – also fast genau so lang wie die Hypotenuse – sein.

Resultat im Real- und Situationsmodell. Nach dem Interpretieren des mathematischen Resultats im Realmodell kann die in der Aufgabe gestellte Frage beantwortet werden: Die Länge des Weges von der Talstation bis zum Fuß des Berges beträgt im idealisierten Realmodell ca. 1,49 Kilometer (vgl. Abbildung 20).

Das Resultat im Situationsmodell (vgl. Abbildung 19) bezieht sich nun auf den tatsächlichen Weg von der Talstation bis zum Fuß des Berges. Spätestens an dieser Stelle sollte das Endergebnis überprüft werden (vgl. Abbildung 17). Zu beachten ist vor allem die sinnvolle Genauigkeit des Resultates, die unter den Annahmen im Realmodell erreicht werden kann. Das Ergebnis von ca. 1,49 Kilometer sollte im ersten Schritt zu ca. 1,5 Kilometern korrigiert werden. Dieses Resultat ist als erste Annäherung an die Lösung zu verstehen, bei der man nicht stehen bleibt. Vor allem soll die Breite des Berges anhand des Fotos auf etwa 100 m geschätzt und der Weg von der Talstation bis zum Fuß des Berges von ca. 1,5 auf ca. 1,4 Kilometer korrigiert werden. Wünschenswert für tieferes mathematisches Verständnis wäre es auch, den Einfluss von verschiedenen Annahmen auf das Endergebnis einzuschätzen und dieses entsprechend zu verändern. So kann z.B. der Weg von Pelligrini von der Talstation bis zum Fuss des Berges als ungerade angenommen werden. Dies würde zur Verlängerung des Weges wieder auf eine längere Strecke (mehr als 1,4 km; z.B. auf ca. 1,5 km) führen.

Es gibt noch andere Möglichkeiten, die Aufgabe Zuckerhut zu lösen. Die vorgestellte Lösung wurde ausgewählt, weil sie sowohl im Labor als auch im Unterricht von Schülern entwickelt wurde.[9]

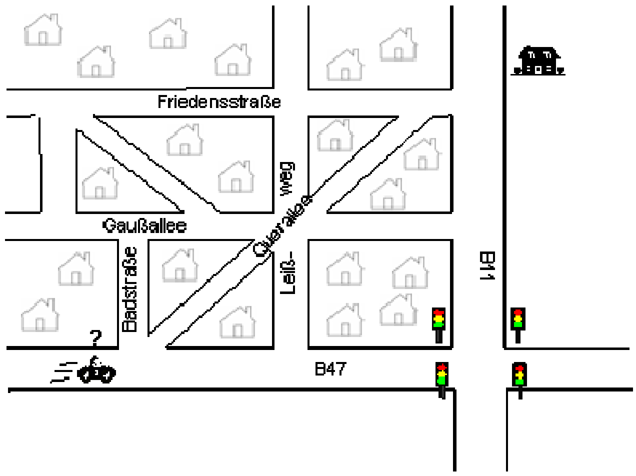
3.2.2 Abkürzung

Die Aufgabe Abkürzung ähnelt in ihrer Struktur der Aufgabe Zuckerhut. Um die Aufgabe zu lösen, muss der Problemlöser in der Aufgabe Abkürzung wie auch in der Aufgabe Zuckerhut zwei verschiedene mathematische Verfahren kennen: die proportionale Zuordnung und den Satz des Pythagoras.

[9] Die Aufgabe Zuckerhut wurde im Rahmen des DISUM-Projektes mehrfach im Labor und im Unterricht eingesetzt. Keiner der Schüler hat eine Lösungsvariante entwickelt, die sich wesentlich von der dargelegten Lösung unterscheidet. Die Wahl eines anderen Lösungsweges beeinflusst maßgeblich die Schwierigkeiten und Strategien bei der Aufgabenbearbeitung. Ist z.B. ein Schüler mit den Beziehungen zwischen den Seitenlängen in einem Dreieck vertraut, könnte er sagen: „Die untere Kathete ist hier im Dreieck fast genau so lang wie die Hypotenuse (ca. 1,5 km).“ Mögliche Schwierigkeiten dieses Schülers bei der Anwendung des Satzes des Pythagoras hätten bei dieser Lösungsvariante nicht beobachtet werden können.

Abkürzung

Herr Blum befindet sich auf der B47, auf dem Weg nach Hause und ist mal wieder viel zu spät dran. Gleich kommt er zu der Kreuzung, wo nach links die Badstraße und die Querallee abzweigen. Normalerweise müsste er von dort noch 1,5 km auf der Bundesstraße B47 weiter fahren, dann bei der Ampel links auf die Bundesstraße B11 abbiegen und noch 2 km geradeaus fahren, bis er zu Hause ist.



Obwohl er auf der Bundesstraße mit 70 km/h fahren darf, überlegt er, eine Abkürzung durch das angrenzende Wohngebiet (max. Geschwindigkeit überall 30 km/h) zu fahren (siehe Skizze – nicht maßstäblich).

Lohnt sich die Abkürzung durchs Wohngebiet für Herrn Blum? Begründe deine Entscheidung.

Abbildung 22. Aufgabe Abkürzung

Repräsentation des Problems. Die reale Situation ist in der Aufgabe Abkürzung durch das Bild und den Text repräsentiert. Während in der Aufgabe Zuckerhut die Fotographie der Seilbahn eine *zusätzliche* Hilfe bei der Lösungskonstruktion darstellt, müssen in der Abbildung zur Aufgabe Abkürzung Informationen aus der modellartigen Darstellung entnommen werden. Andererseits wird darin das mathematische Modell vorbereitet. Diese Informationen betreffen den Verlauf der Straßen und andere die Fahrzeit beeinflussende Faktoren (wie z.B. Ampeln).

Situationsmodell. Der Problemlöser erkennt nach dem Lesen des Textes und Betrachten des Bildes mehrere Fahrwege, die Herr Blum auf dem Weg nach Hause nehmen kann. Es ist Aufgabe des Problemlösers zu entscheiden, ob sich eher die Abkürzung oder eher der Weg über die Bundesstraßen für Herrn Blum lohnt. Die in der Skizze zum Situationsmodell abgebildeten Fahrwege verlaufen über verschiedene „Hindernisse" (vgl. Abbildung 23). Auf dem Weg über die Bundesstraßen steht eine Ampel, die unter Umständen rot sein kann. Beim Weg über das Wohngebiet können eher Autos oder Fußgänger die Straßen überqueren und die Fahrt behindern. Ferner ist es möglich, dass andere Faktoren, wie z.B. ein Rückstau beim Linksabbiegen, die Fahrzeit erheblich steigern oder dass nicht mit der Fahrzeit zusammenhängende Einflussfaktoren, wie z.B. die Belastung der Anrainer durch Lärm und Abgase, vom Problemlöser berücksichtigt werden. Um eine begründete Entscheidung für einen und gegen den anderen Fahrweg treffen zu können, muss die Komplexität der Situation reduziert werden. Dies geschieht durch die Konstruktion des Realmodells.

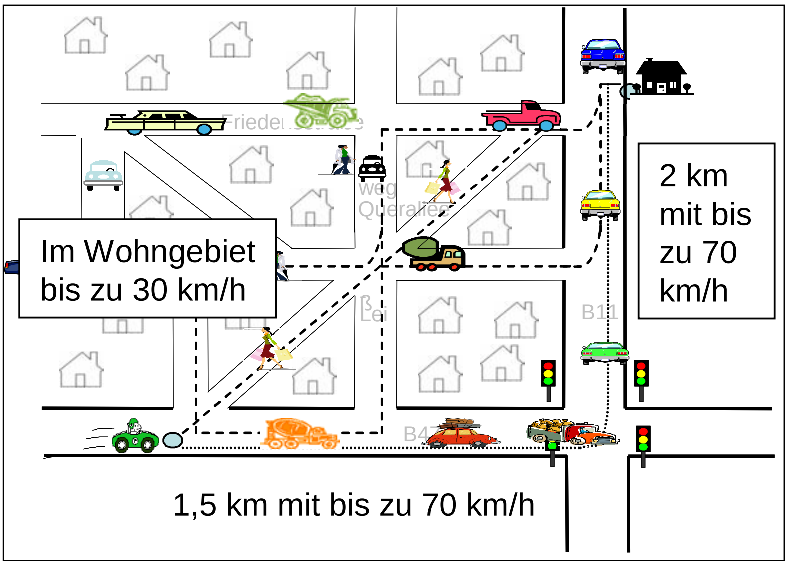


Abbildung 23. Ein Situationsmodell zur Aufgabe Abkürzung

Realmodell. Beim Aufbau des Realmodells aus dem Situationsmodell wird vom Problemlöser ein Weg durch das Wohngebiet als der kürzeste identifiziert und dadurch die Komplexität der Situation reduziert. Die Identifikation der Abkürzung wird durch das Weltwissen des Problemlösers geleitet. Das Weltwissen gründet in diesem Fall auf der Erfahrung, dass eine zwei Punkte verbindende *gerade* Strecke kürzer als eine krumme Linie ist.

Die Abkürzung und die Bundesstraßen sind so in der Skizze abgebildet, dass der Problemlöser eine Anordnung der Straßen in ein rechtwinkliges Dreieck erkennen kann. Diese Anordnung lässt den Problemlöser schon an dieser Stelle im Lösungsprozess die später zu realisierende Relevanz des pythagoreischen Lehrsatzes vermuten.

Im einfachsten Realmodell kann angenommen werden, dass beide Fahrwege mit einer unveränderten Geschwindigkeit von 70 km/h bzw. 30 km/h befahren werden. Diese Annahmen setzen voraus, dass keine Hindernisse die Fahrt beeinflussen. Wird die Entscheidung allein aufgrund der Fahrzeit getroffen, kommt es darauf an, inwieweit die kürzere Fahrstrecke über die Querallee die größere Geschwindigkeitsbegrenzung im Wohngebiet ausgleichen kann.

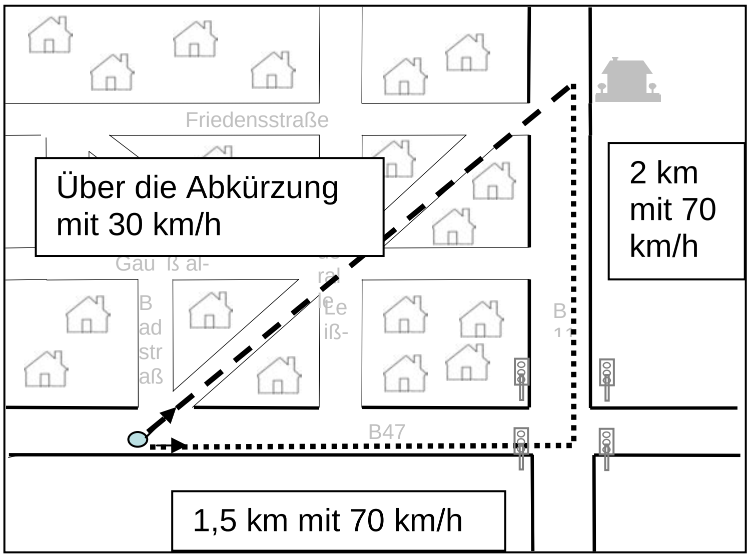


Abbildung 24. Ein Realmodell zur Aufgabe Abkürzung

Mathematisches Modell. Beim Mathematisieren wird die proportionale Zuordnung der Zeit zum Weg identifiziert (siehe hierzu Analyse der Aufgabe Zuckerhut). Ferner erkennt der Problemlöser, dass die Straßenabschnitte ein rechtwinkliges Dreieck bilden: Der Weg über die Querallee bildet die Hypotenuse und zwei Bundestraßenabschnitte entsprechen den Katheten im rechtwinkligen Dreieck.

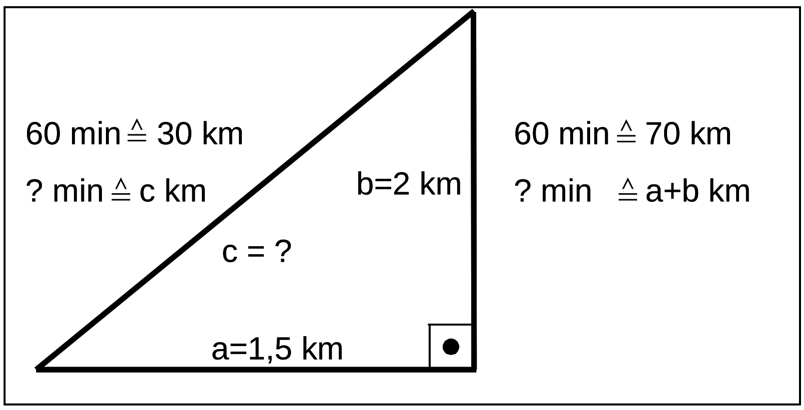


Abbildung 25. Ein mathematisches Modell zur Aufgabe Abkürzung

Mathematisches Resultat. Die Anwendung des Satzes des Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck erlaubt es, die Hypotenusenlänge im rechtwinkligen Dreieck zu berechnen:

$$(1{,}5\ km)^2+(2\ km)^2=c^2$$

$$\mathrm{c} = \sqrt{2{,}25\ km^2 + 4\ km^2}$$

$$\mathrm{c} = \sqrt{6{,}25\ km^2}$$

$$c = 2{,}5\ km$$

Die Hypotenuse im Dreieck ist somit 2,5 km lang. Die Länge beider Katheten, die den Weg über die Bundesstraßen repräsentieren, wird mit Hilfe der Addition bestimmt:

$$2\ km + 1{,}5\ km = 3{,}5\ km$$

Im nächsten Schritt kann die Zeit berechnet werden, die notwendig ist, um 2,5 km mit der Geschwindigkeit von 30 km/h bzw. 3,5 km mit der Geschwindigkeit von 70 km/h zurückzulegen. Es ist möglich, diese Zeit z.B. mit dem Dreisatz zu bestimmen.

Für die Geschwindigkeit von 30 km/h und einer Streckenlänge von 2,5 Kilometern:

$$30\ Kilometer \triangleq 60\ Minuten$$

$$1\ Kilometer \triangleq 2\ Minuten$$

$$2{,}5\ Kilometer \triangleq 5\ Minuten$$

Für die Geschwindigkeit von 70 km/h und einer Streckenlänge von 3,5 Kilometern:

$$70\ Kilometer \triangleq 60\ Minuten$$

$$1\ Kilometer \triangleq 6/7\ Minuten$$

$$3{,}5\ Kilometer \triangleq 3\ Minuten$$

Die Fahrt über die durch die Hypotenuse des Dreiecks repräsentierte Strecke dauert also 5 Minuten und die Fahrt über die beiden Katheten angesichts der höheren Geschwindigkeit nur 3 Minuten. Da 3 Minuten weniger als 5 Minuten sind, lohnt es sich anscheinend nicht, den kürzeren Weg entlang der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck auszuwählen. Wie auch beim Lösen der Aufgabe Zuckerhut kann die innermathematische Kontrolle einzelne Rechnungen oder auch das Endergebnis betreffen. Es kann zum Beispiel mit Hilfe der Grundvorstellungen zur Proportionalität überlegt werden, dass 3 Minuten ein richtiges Zwischenergebnis ist, weil $\frac{60}{70}$ so groß wie $\frac{3}{3{,}5}$ ist(vgl. zu Grundvorstellungen zu Proportionalität Jordan, 2006; vom Hofe, 1995).

Resultat im Real- und Situationsmodell. Im Realmodell wird das mathematische Ergebnis in die Realität übersetzt und lautet nun: Es lohnt sich nicht, die Abkürzung zu nehmen, weil die Fahrt durch das Wohngebiet unter Annahme des Realmodells länger als die Fahrt über die Bundesstraßen dauert.

Auch im Realmodell kann das Ergebnis kontrolliert bzw. validiert werden. Die Geschwindigkeit des Autos über die Abkürzung darf nur etwa halb so groß sein wie über die Bundesstraßen, wenn sich die Nutzung der Abkürzung nicht lohnen soll. Wie man auf der Skizze sieht, kann dadurch entstehender Zeitverlust nicht über den Unterschied in der Länge des Fahrweges ausgeglichen werden. [10]

Im Situationsmodell kann der zeitliche Unterschied zwischen 5 und 3 Minuten unter der möglichen Ungenauigkeit der Modellannahmen validiert werden. Schon durch eine geringe Abweichung der Gegebenheit der Situation – wie z.B. die rote Ampel an der Kreuzung der Bundesstraßen –, die einen wesentlichen Einfluss auf die Zeit ausübt, können die Fahrzeiten stark variieren. Bei der Entscheidung für den einen oder den anderen Weg spielen neben der reinen Fahrzeit auch Fahrsicherheit, Fahrkomfort, Umweltbelastung, Zustand der Fahrbahn eine große Rolle.

3.2.3 Regenwald

Während die Aufgaben Zuckerhut und Abkürzung für schülerspezifische Lösungen ähnliche mathematische Verfahren erfordern, stellt die Aufgabe Regenwald zum Teil andere Anforderungen an die Problemlöser. Bei dieser Aufgabe werden weder die Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur noch der Satz des Pythagoras für die Lösung gebraucht. Sie unterscheidet sich ferner auch durch ihre Mehrschrittigkeit, die nach vorhandenen Erkenntnissen die Komplexität einer Aufgabe maßgeblich steigern kann.

[10] Die aufgeführte Argumentation stellt eine vollständige Lösungsmöglichkeit dar. Da aber Schüler solche Lösung nicht produzieren, wird sie in der Aufgabenanalyse im Abschnitt zur Kontrolle des Ergebnisses benutzt.

Regenwald

Da täglich weltweit ca. 24000 Quadratkilometer Regenwald abgeholzt werden und jeder Deutsche im Durchschnitt 130 Liter Bier im Jahr trinkt, hat sich eine Bierbrauerei die im Folgenden beschriebene „Regenwald-Aktion“ ausgedacht:

„Die Regenwald-Aktion läuft vom 01.05. bis 31.07.2002. In diesem Zeitraum wird für jeden verkauften Kasten Bier unserer Brauerei ein Quadratmeter Regenwald in Dzanga Sangha (Zentralafrikanische Republik) nachhaltig geschützt.“

Wie ist die Wirkung dieser Aktion in Bezug auf die Regenwald-Abholzung einzuschätzen? Begründe Deine Antwort!

Abbildung 26. Aufgabe Regenwald

Repräsentation des Problems. Die reale Situation wird in der Aufgabe Abkürzung durch den Text und das Bild dargestellt. Das Bild enthält hier zwar Informationen über die Menge des Biers in einem Kasten, bietet aber keine Hilfen bei der Konstruktion des Situationsmodells. Das ist ein wesentlicher Unterschied zu den Aufgaben Zuckerhut und Abkürzung.

Situationsmodell. Das Situationsmodell zur Aufgabe Regenwald besteht aus zwei auf den ersten Blick unabhängigen Sachverhalten: aus dem jährlichen Bierkonsum eines Deutschen und der gewaltigen täglichen Regenwaldabholzung. Diese zwei Informationen werden in der Aufgabenstellung durch die Werbeaktion einer Brauerei in Verbindung gesetzt. Die Brauerei verpflichtet sich in der Zeit der Regenwald-Aktion (1.05-31.07) für jeden verkauften Kasten Bier 1 m^2 Regenwald in Afrika nachhaltig zu schützen. Der Problemlöser soll entscheiden, wie wirksam der Regenwald durch diese Aktion geschützt werden kann (siehe Abbildung 27).

Abbildung 27. Situationsmodell zur Aufgabe Regenwald

Realmodell. Das Situationsmodell soll durch die Reduktion der Komplexität zum Realmodell entwickelt werden. Im Realmodell wird die Wirkung der Regenwald-Aktion auf die Frage reduziert, wie viel Regenwald die Brauerei in der Aktionszeit retten kann und ab welcher Zeitspanne die Aktion als wirksam bezeichnet wird (z.B. ein Monat, eine Woche oder ein Tag ohne Regenwaldabholzung). Um die geschützte Fläche einzuschätzen, soll die Anzahl von Bierkästen bestimmt werden, die in Deutschland in der Aktionszeit von der Brauerei verkauft werden. Diese Einschätzung erfordert eine Präzisierung einiger Ausgangsgrößen wie der Aktionsdauer, der Anzahl der Deutschen, des Markanteils dieser Brauerei etc.

Die Konstruktion eines möglichen Realmodells kann mit der Identifikation der Dauer der Regenwald-Aktion anfangen, die auf drei Monate beschränkt ist. Auch Annahmen über die Anzahl der Deutschen (ca. 80 000 000) und den Markanteil der Brauerei, die die Aktion durchführt (z.B. 1/5 des gesamten Bierumsatzes), sind für die Einschätzung der Anzahl der verkauften Bierkästen notwendig. Da die genannten Präzisierungen und getroffenen Annahmen sich auf die Gesamtmenge des getrunkenen Biers beziehen, soll im nächsten Schritt die Menge des verkauften Biers in die Anzahl von Kästen umgerechnet werden. Dafür ist es notwendig zu wissen, wie viel Liter Bier ein Kasten enthält. Diese Information kann der Problemlöser entweder aus seinem Alltagswissen abrufen oder im Bild zur Aufgabe ablesen. Im letzteren Fall soll erst die Anzahl von Bierflaschen auf dem Bild abgezählt (12 Flaschen) und das Volumen einer Flasche (0,5 Liter) festgelegt werden[11]. Mit allen aufgeführten Annahmen und Angaben ist es möglich, die Fläche, die in drei Monaten durch die Werbeaktion geschützt werden kann,

[11] In der Realität kommen eher Kisten mit 11, 20 oder 24 Flaschen vor. Die Flaschengröße variiert je nach Kistengröße zwischen 0,33 und 0,5 Liter. Im Folgenden soll sich auf eine Betrachtung der Kistengröße mit 12 Flaschen entsprechend der Abbildung beschränkt werden.

ungefähr einzuschätzen. Zu der Wirkung der Werbe-Aktion kann überlegt werden, dass die Aktion die Regenwald-Abholzung zumindest für einen Tag kompensieren sollte, um über einen bemerkbaren Effekt für die Umwelt zu sprechen.
Bevor der Lösungsprozess weiter ausgeführt wird, soll auf zwei Aspekte hingewiesen werden. Beim Aufbau des Realmodells werden erstens auch andere Annahmen getroffen, wie z.B. der gleichmäßige Bierverbrauch eines Deutschen über das ganze Jahr. Zweitens wird die Analyse des Lösungsprozesses nach Stationen des Modellierungskreislaufs bei der Aufgabe Regenwald durch eine nicht lineare Struktur der Lösung besonders erschwert. Die Notwendigkeit, die Gleichmäßigkeit des Bierverbrauchs anzunehmen, wird für den Problemlöser zum Beispiel erst nach dem Verstehen des mathematischen Begriffs „Durchschnitt“ ersichtlich und erfordert somit einen Vorgriff auf das mathematische Wissen. Ferner wird jede einzelne Sachstruktur über mehrere Stationen bearbeitet. Erst dann wird zu einer anderen Struktur übergegangen. Jede einzelne Struktur wird in die Mathematik übersetzt, mit ihr wird mathematisch gearbeitet und das mathematische Ergebnis in die Realität interpretiert. Somit ist beim Lösen der Aufgabe Regenwald ein häufiger Wechsel zwischen den Stationen des Modellierungskreislaufs zu erwarten.

Mathematisches Modell. Wie im Unterabschnitt 3.1.4 erläutert, werden Zusammenhänge zwischen Begriffen bei der Konstruktion des mathematischen Modells mit Hilfe der Grundvorstellungen in mathematische Operationen übersetzt. Angaben, die mit Hilfe einer arithmetischen Operation verbunden sind, werden eine „arithmetische Struktur“ genannt. In der Aufgabe Regenwald wird der Mathematisierungsprozess auf Grund der Mehrschrittigkeit der Lösung vielfach angewandt und betrifft mehrere arithmetische Strukturen. Aus den Angaben zur Aktionsdauer (3 Monate oder ¼ Jahr) und zum jährlichen Bierkonsum eines Deutschen (130 Liter Bier im Jahr) soll zum Beispiel berechnet werden, wie viel Liter Bier ein Deutscher im Durchschnitt während des Aktionszeitraums trinkt. Bei der Übersetzung des Zusammenhangs zwischen den aufgeführten Sachstrukturen in die Mathematik kann der Problemlöser sich vorstellen, wie 130 Liter Bier auf vier gleich große Jahresabschnitte aufgeteilt werden. Die diesem Zusammenhang entsprechende mathematische Operation heißt Division und die Struktur kann mathematisch als 130 (Liter): 4 aufgeschrieben werden. Ähnlich werden auch andere Strukturen mathematisiert. Soll nun der Bierkonsum aller Deutschen ausgerechnet werden, wird die Trinkmenge einer Person mit der Gesamtzahl der Deutschen (80 000 000) multipliziert: (130 (Liter):4)·80 000 000. Das Ergebnis wird durch 5 geteilt, um das Biervolumen auszurechnen, das von dieser einen Brauerei im Aktionszeitraum verkauft wurde: ((130 (Liter):4)·80 000 000):5. Die ausgerechnete Biermenge soll dann von Litern in Kästen umgerechnet werden. Hierfür wird erst mit Hilfe der Multiplikation bestimmt, wie viel Liter Bier ein Kasten enthält: In die 12 Flaschen à 0,5 Liter passen 12 · 0,5 (Liter). Die gesamte Biermenge wird im nächsten Schritt durch die Biermenge in einem Kasten geteilt: (((130 (Liter):4)·80 000 000):5): (12 · 0,5 (Liter)). Das Ergebnis spiegelt die Anzahl von Kästen wider, die wiederum die Größe der geretteten Regenwaldfläche in m^2 angibt. Da aber die Regenwaldabholzung in Quadratkilometer angegeben ist, wird nun das Ergebnis in Quadratmeter durch 1 000 000 geteilt (((130 (Liter) :4)·80 000 000):5): (12 · 0,5 (Liter)):1 000 000 und mit der angegebenen Zahl von 24 000 km^2 verglichen.

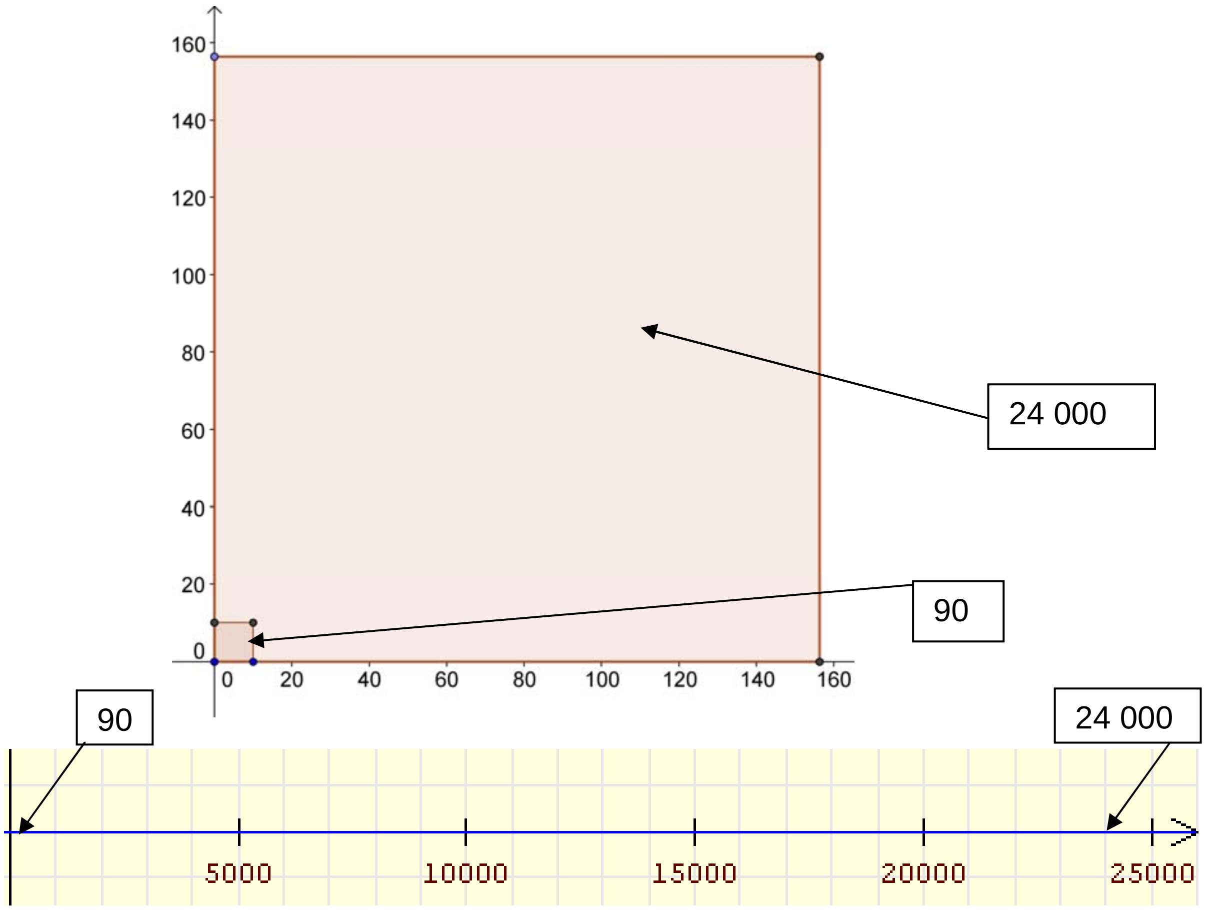
In diesem Abschnitt wurde sowohl das mathematische Arbeiten als auch Interpretation der Zwischenergebnisse in die Realität mit einbezogen. Ohne die Interpretation ist es nicht möglich, einzelne Rechenschritte verständlich zu beschreiben.

Mathematisches Resultat. Das mathematische Resultat bekommt man durch folgende Berechnungen:

$$[((130 : 4)\cdot 80\,000\,000) : 5] : [12 \cdot 0{,}5] :1\,000\,000 \approx 90\ (km^2).$$

Nach jeder Anwendung der mathematischen Operation kann eine innermathematische Kontrolle mit Hilfe eines anderen Rechenverfahrens durchgeführt werden. Beim Teilen von 130 durch 4 bekommt man z.B. 32. 32 ist ein richtiges Ergebnis, weil 32 · 4 =130 ist. Mit Hilfe der Mathematik kann das relativ klein ausgefallene Ergebnis (90 km^2) auf Plausibilität überprüft werden. Im mathematischen Term steht zwar eine sehr große Zahl von 80 Millionen, aber vor allem durch die Umrechnung von Quadratmeter in Quadratkilometer wird das Ergebnis durch eine Million geteilt und scheint mit etwa 90 km^2 von der Größenordnung mathematisch korrekt zu sein.

Der Flächeninhalt 90 km^2 wird dann mit den 24 000 km^2 verglichen. Die 90 km^2 sind wesentlich weniger als 24 000 km^2. Dies kann man sich entweder durch eine Vorstellung der Flächeninhalte beider Quadrate, durch eine Zuordnung der Zahlen 90 und 24 000 auf dem Zahlenstrahl oder durch die Berechnung des Anteils der Zahl 90 von 24 000 klar machen (siehe Abbildung 28).



$$\frac{90}{24000} \approx \frac{100}{2500} \approx \frac{4}{1000} = 4 \text{ Promille}$$

Abbildung 28. Vergleich zweier Zahlen (90 und 24 000) im mathematischen Modell zur Aufgabe Regenwald

Resultat im Real- und Situationsmodell. Das Resultat lautet im Realmodell: Da die Fläche, die durch die Werbeaktion geschützt wird, unter den getroffenen Annahmen wesentlich kleiner als die täglich abgeholzte Regenwaldfläche ist, ist die Wirkung der Aktion auf die Regenwaldabholzung sehr gering. Die Plausibilität der Lösung kann zusätzlich im Situationsmodell überprüft werden. Wenn man sich die riesige Zahl von 24 000 km^2 oder 24 000 000 000 (vierundzwanzig Milliarden) m^2 täglich abgeholzten Regenwaldes vorstellt und mit dem durch einen Kasten geschützten Flächeninhalt von einem Quadratmeter vergleicht, wird es klar, dass solch eine Aktion kaum etwas bringen kann. 24 Milliarden m^2 durch die Regenwald-Aktion zu schützen, würde bedeuten, 24 Milliarden Bierkästen in Deutschland zu verkaufen. Das entsprechend gewaltige Biervolumen wäre nicht erreichbar. Auch unter den großzügigsten Annahmen im Realmodel (etwa die Teilnahme aller Biermarken an der Aktion oder Ausweitung dieser Aktion auf Europa) könnte nicht ein Mal annähernd die notwendige Biermenge verkauft werden. Werden die Berechnungen der Regenwaldabholzung und des

Bierverbrauchs auf den Aktionszeitraum von drei Monaten bezogen (siehe die Lösung in der Abbildung 29), zeigt sich ein ähnliches Bild: Die Zahl 2 160 000 ist viel größer als die Zahl 40. Somit bringt die Aktion dem Regenwald kaum etwas.

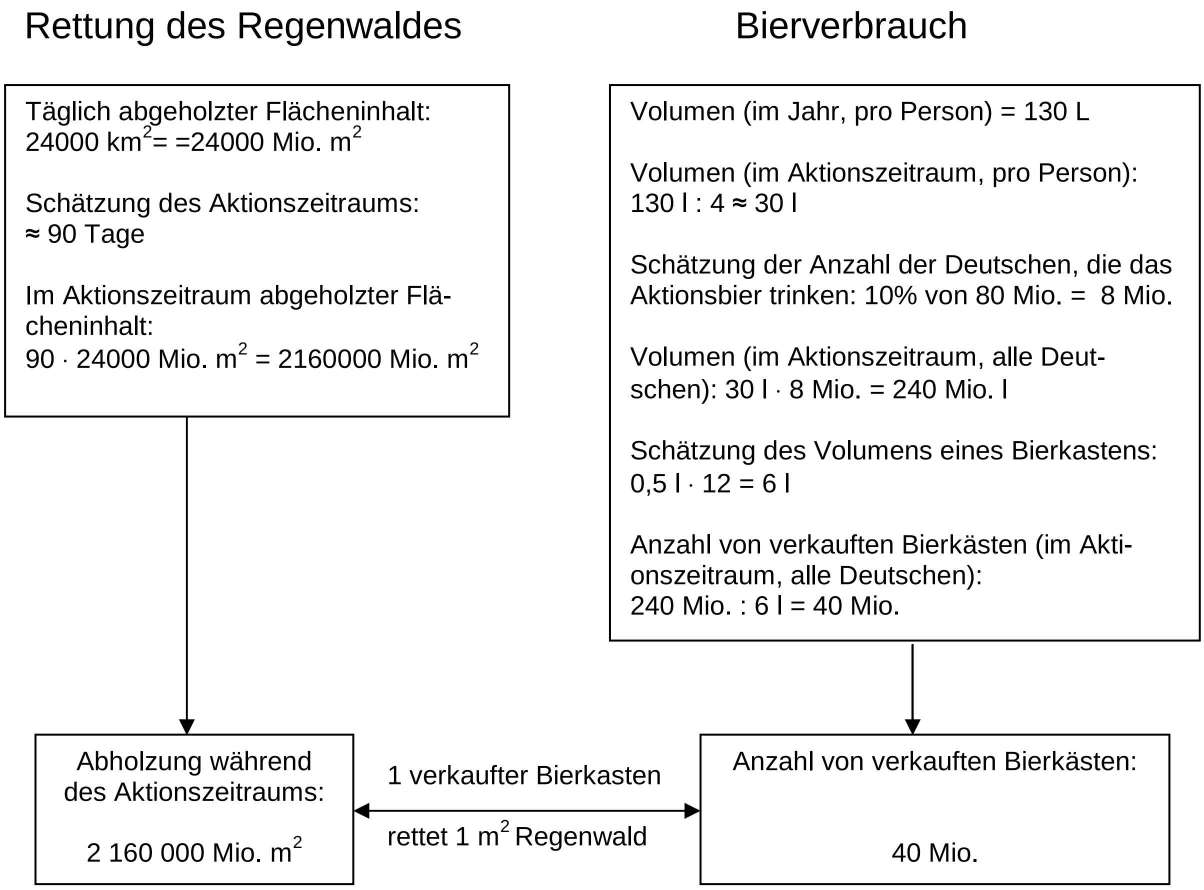


Abbildung 29. Eine Lösung der Aufgabe Regenwald

Eine ganz andere Einschätzung der Wirkung ist möglich, wenn die gerettete Fläche an sich betrachtet wird. 90 km^2 kann als groß wahrgenommen werden. Es ist besser, diese Fläche zu retten, als gar keine. Wenn jeder Nahrungsmittelhersteller eine ähnliche Aktion durchführen würde, wäre eine bedeutende Einschränkung der Regenwaldabholzung auf Dauer erreichbar.

4 Empirische Studie: Vier Fallanalysen – Schwierigkeiten und Strategien von Schülern beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben

4.1 Präzisierung der Fragestellung

Ein Überblick über verschiedene Theorien und empirische Ergebnisse aus den Bereichen der Lehr-Lernforschung, der Problemlöseforschung, der kognitiven Psychologie, der Problemlösepsychologie und der Allgemein- und Fachdidaktiken hat gezeigt, dass Schüler-Schwierigkeiten und Schüler-Strategien eine bedeutende Rolle für den Lernprozess spielen, jedoch an den Modellierungsaufgaben nicht ausreichend erforscht sind. In Wissenschaftsrichtungen zu den Lerntheorien und dem Problemlösen sowie in den Fachdomänen Mathematik, Physik und Lesen liegt eine Vielfalt von Konzeptionen vor, die auf die Ebene der konkreten Aufgabenstellungen heruntergebrochen werden müssen, um eine erfolgreiche Lernprozessorientierung der Didaktik zu ermöglichen. Die Ergebnisse der Erhebung und Auswertung von Schüler-Schwierigkeiten und -Strategien beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben werden als Grundlagen für die Weiterentwicklung der Didaktik der neuen Aufgabenkultur verwendet. Es resultieren daraus drei zentrale Fragestellungen dieser Arbeit:

1. Welche Schwierigkeiten haben Schüler beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben?
2. Welche Strategien wenden sie bei der Aufgabenbearbeitung an?
3. Welche didaktischen Konsequenzen können aufgrund der Antworten auf die erste und zweite Frage für die Didaktik der neuen Aufgabenkultur gezogen werden?

4.2 Die Methode

Der Gegenstand der vorliegenden Untersuchung sind Lösungsprozesse von Schülern beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben. Die Untersuchung wurde im Rahmen der DISUM-Studie durchgeführt (siehe Blum, et al., 2004; Messner & Blum, 2006). Da eine quantitative Analyse von schriftlich festgehaltenen Schülerlösungen nicht erlaubt, differenzierte Einblicke in die kognitiven Denkprozesse der Lernenden während der Lösungskonstruktion zu erlangen (Leiss, 2007, S. 139), wurde hier eine qualitative Analyse von Videodaten von vier Schülern und jeweils drei Aufgaben ausgewählt. Die Untersuchungsmethode entspricht der qualitativen Fallanalyse von Lösungsprozessen, die sich im allgemeinen Vorgehen an die Grounded Theory (Strauss & Corbin, 1990) anlehnt (siehe Unterabschnitt 4.2.3).

In diesem Abschnitt wird die Auswahl (Sampling) von Aufgaben und Schülern für die Untersuchung theoretisch begründet, die Methode der Datenerhebung und realisierte Stichprobe vorgestellt sowie das Vorgehen bei der Datenauswertung beschrieben.

4.2.1 Auswahl von Aufgaben und Versuchspersonen

Das methodische Vorgehen orientiert sich an den Outcomes der Lernenden. Die Forschungsfragen der Arbeit gelten den Lösungsprozessen bei der Bearbeitung von Modellierungs*aufgaben* durch die *Schüler*. Für die Datenerhebung wurden gemäß der Typologie von „Sampling Strategies" (Kuzel, 1992; Patton, 1990)Aufgaben und Schüler mit Hilfe von zwei Sampling-Strategien ausgesucht: „maximum variation" und „homogeneous". Die Homogenität des Samplings spiegelt sich in der Auswahl der Schüler aus *einem* Jahrgang wider. Der Jahrgang 9 wurde ausgewählt, weil in diesem Jahrgang noch Schüler aller Schulzweige vertreten sind. Schüler des 9. Jahrgangs stehen am Ende der Sekundarstufe 1 und sollen, normativ gesehen, für die beruflichen Anforderungen weitestgehend vorbereitet sein. Bei der Auswahl der Schülerpopulation wurde im Wesentlichen dem Ansatz der PISA-Studie und des DISUM-Projektes gefolgt[12]. Innerhalb des 9. Jahrganges wurden Lösungsprozesse von Schülern verschiedener Fähigkeitsniveaus von mäßigen Hauptschülern bis zu guten Gymnasiasten analysiert. Das Fähigkeitsniveau der Schüler wurde über die Zugehörigkeit zur Schulform und der Mathematiknote eingeschätzt. Diese Einschätzung beruht auf Ergebnissen der PISA-Studie, die u.a. gezeigt hat, dass in der Hauptschule überwiegend Schüler der Kompetenzstufe I und II und im Gymnasium der Kompetenzstufe III und IV zu finden sind (Baumert & PISA-Konsortium, 2001, S. 180, 181). Die Schüler-Stichprobe bezieht sich somit exemplarisch auf das Fähigkeitsspektrum deutscher Schüler des 9. Jahrgangs. Innerhalb des Jahrgangs ist die Schülerpopulation heterogen.

Für die Untersuchung der Lösungsprozesse von Schülern mit einem *breiten* Fähigkeitsspektrum spricht die Möglichkeit, Strategien und Schwierigkeiten von guten und mäßigen Problemlösern direkt miteinander zu vergleichen. Hierbei wird angenommen, dass effektive Strategien, die einem mäßigen Problemlöser fehlen, von einem guten Problemlöser angewandt und in seinem Lösungsprozess beobachtet werden können.[13]

[12] In PISA wurden die 15-jährigen Schüler unabhängig von der Jahrgangsstufe getestet (siehe genaue Angaben zur PISA-Population in PISA-Konsortium Deutschland, 2004, S. 24ff). Die Mehrheit der deutschen PISA-Schüler war zum Zeitpunkt der Messung im 9. Jahrgang (ebd). Im DISUM-Projekt werden Schüler der Jahrgangsstufe 9 untersucht.

[13] Die Unterschiede zwischen den Fähigkeitsniveaus der Versuchspersonen sollten aber nicht so groß wie z.B. bei Schülern und Lehrern sein, da Experten und Novizen sehr unterschiedliche Strategien benutzen (Larkin, 1981). Der Bezug von Ergebnissen auf einander kann hierdurch erschwert werden. Zu empfehlen ist es deswe-

Auch die Aufgabenauswahl kombiniert die Sampling-Strategien „Homogenität“ und „Breite der Variation“. In der Grounded Theory, die in dieser Arbeit für die Analyse von Lösungsprozessen verwendet wurde (Näheres siehe im Unterabschnitt 4.2.3), wird empfohlen erst zwei strukturähnliche Untersuchungsgegenstände zu betrachten und dann einen Gegenstand mit einer anderen Struktur zur Überprüfung der Analyse hinzunehmen (vgl. Tiefel, 2005). Den Untersuchungskontext bilden die Modellierungsaufgaben Zuckerhut, Abkürzung und Regenwald. Auf die vorliegende Untersuchung angewandt bedeutet dies, dass zunächst als exemplarisches Beispiel aus den thematischen Inhaltsbereichen „Satz des Pythagoras“ und „proportionale Funktionen“, nämlich die Bearbeitung der Aufgaben Zuckerhut und Abkürzung durch die Schüler, untersucht wird. Die gewonnenen Ergebnisse werden dann an einer charakteristischen Aufgabe mit ähnlichen Anforderungen für den Schwerpunkt „proportionale Funktionen“ (Aufgabe Regenwald) überprüft. Die Lösung der Modellierungsaufgabe Regenwald erfordert eine mehrfache Anwendung des Wissens und Fähigkeiten zur Proportionalität. Diese Aufgabe wurde als kontrastierendes Beispiel in die Analyse einbezogen. Dadurch wird angestrebt, die Relevanz der Untersuchung im Hinblick auf erweiterte mathematische Inhalte zu zeigen.

Tabelle 1. Modellierungsaufgaben und Schüler, die die Aufgaben bearbeitet haben[14]

	Manfred$_{KS1}$	Olliver$_{KS2}$	Bernd$_{KS3}$	Kathrin$_{KS4}$	S1$_{KS1}$	S2$_{KS2}$	S3$_{KS3}$	S4$_{KS4}$
Zuckerhut	X	X	X	X				
Abkürzung	X	X	X	X				
Regenwald	X	X	X	X				
Strohrollen	X	X	X	X				
Wassermax					X	X	X	X
Riesenschuhe					X	X	X	X
Parklücke					X	X	X	X
Leuchtturm					X	X	X	X

In den Spalten der Tabelle 1 sind die anonymisierten Vornamen der Schüler aufgeführt, die an der Untersuchung teilgenommen haben. In den Zeilen sind Modellierungsaufgaben abgebildet, die von den Schülern bearbeitet wurden (Näheres hierzu siehe im Unterabschnitt 4.2.2).

gen, neben Novizen und Experten auch gute Problemlöser, die in dieser Untersuchung vor allem durch Gymnasiasten repräsentiert werden, stärker in die Untersuchungen einzubeziehen (vgl. Funke & Zumbach, 2006).

[14] Jede Aufgabe wurde von einem Schülerpaar bearbeitet. Die Lösungsprozesse eines Schülers, der anschließend interviewt wurde, wurden dann analysiert (siehe hierzu Punkt 3.2.2).

Die analysierten Fälle (realisierte Stichprobe) sind in der Tabelle grau hinterlegt. Die Gründe für die Aufgaben- und Schüler-Auswahl wurden vorher ausführlich erläutert.

Da es sich um eine qualitative Untersuchung handelt, benötigen weder die Aufgaben- noch das Schüler-Sampling den Anspruch auf die Repräsentativität. Miles und Huberman schreiben zu der Zusammensetzung von Samplings in qualitativen Forschungsmethoden Folgendes: „Choices of informants, episodes, and interactions are beeing driven by a *conceptual question*, not a concern for 'representativeness'" (Miles & Huberman, 1994, S. 29; vgl. auch Strauss & Corbin, 1990, S. 191, 192). Die ausgewählten Aufgaben sind zwar nicht repräsentativ für alle schulischen Unterrichtsaufgaben, können dennoch als typische Modellierungsaufgaben aus der neuen Aufgabenkultur angesehen werden. Die von Schülern bearbeiteten Modellierungsaufgaben weisen die charakteristischen Eigenschaften von Modellierungsaufgaben auf (siehe die Aufgabenanalysen und Diskussion hierzu in Abschnitten 2.5 und 3.2). Im Vergleich zu PISA-Aufgaben, die für die Testzwecke konstruiert wurden, sind die Aufgaben Zuckerhut, Abkürzung und Regenwald (siehe Aufgaben im Abschnitt 3.2) offener gestellt und erlauben es dadurch besser, die Lernprozesse von Schülern zu erfassen.

Das angewandte Untersuchungsverfahren strebt auf induktivem Weg Repräsentativität an, indem ein Inhaltsbereich durch sorgfältig ausgewählte Fälle „ausgeschöpft" wird. Wegen der detaillierten Untersuchung von hypothetisch erschließbaren Lösungsprozessen der Schüler ist die Konzentration auf wenige Fälle notwendig.

4.2.2 Beschreibung der realisierten Stichprobe und der Erhebungsmethode

Für die Rekonstruktion der individuellen Lösungsprozesse wurde ein aus vier Modellierungsaufgaben bestehendes Set vier Schülerpaaren zum Bearbeiten im Labor angeboten. Den Schülern wurde mitgeteilt, dass sie vier mathematische Aufgaben bearbeiten sollen und dass einer der Schüler nach der Aufgabenbearbeitung interviewt wird. Für das Interview wurde jeweils derjenige Schüler ausgewählt, der bei der Aufgabenbearbeitung die Schwierigkeiten in stärkerem Maße verbalisiert hat. Dadurch sollte der Zugang zu den Denkprozessen der ausgewählten Schüler erleichtert werden. In diesem Sinne wurde unmittelbar nach der Aufgabenbearbeitung einer der Neuntklässler aus jedem Schülerpaar mit der Methode „stimulated recall" (nachträgliches lautes Denken) interviewt (Kagan, Krathwohl, & Miller, 1963; Weidle & Wagner, 1994). Alle Aufgabenbearbeitungen und Interviews wurden videographiert (siehe Abbildung 30) und Transkriptionen erstellt (siehe Transkriptionsregeln bei Selting, et al., 1998).

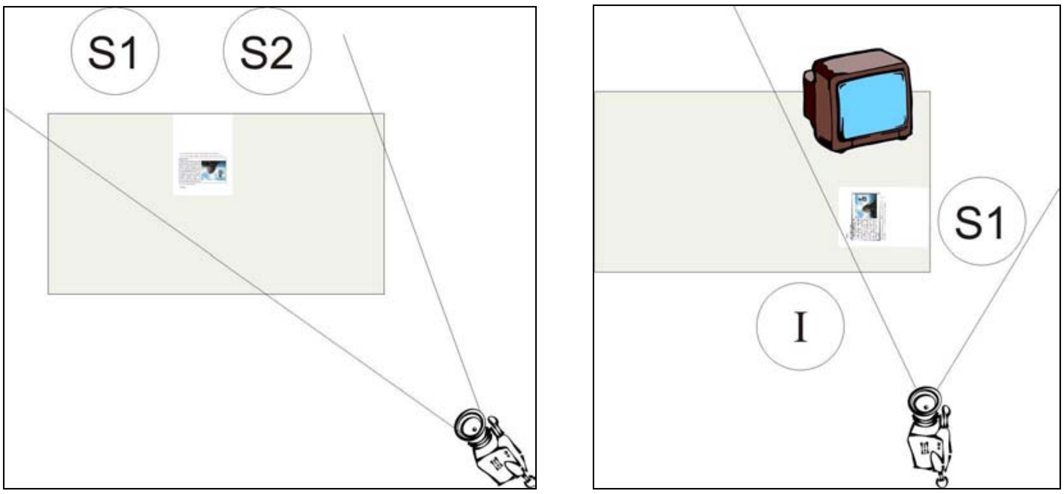


Abbildung 30. Skizze von Videoaufnahmen der Aufgabenbearbeitung (links) und des Interviews (rechts). S ist die Abkürzung für Schüler und I für Interviewleiter

Üblicherweise werden beim lauten Denken die Versuchspersonen aufgefordert, ihre Gedanken *während* einer Problembearbeitung zu verbalisieren (vgl. Duncker, 1935/1974). Demgegenüber wird beim stimulated recall das laute Denken zur nachträglichen Rekonstruktion eingesetzt. Abweichungen der Schülererklärungen vom tatsächlichen Verhalten werden dadurch vermieden, dass man begleitend die Videoaufnahmen abspielt.

Das nachträgliche laute Denken (stimulated recall) wurde in der Untersuchung wie folgt angewandt: Die Aufgabenbearbeitung wurde mit einer Videokamera aufgenommen und unmittelbar danach mit Hilfe eines Videorekorders einem der Schüler vorgespielt. Waren Handlungen oder Äußerungen des Schülers während der Aufgabenbearbeitung nicht selbsterklärend, hat der Versuchsleiter die Aufnahme angehalten und die Versuchsperson um Erläuterungen gebeten. Auch der Schüler konnte das Videoband anhalten und sein Verhalten kommentieren.

Eine methodische Herausforderung besonderer Art ist die Rekonstruktion von individuellen Lösungsprozessen bei Schülerpaaren. Die Entscheidung, Schülerpaare statt einzelner Schüler die Aufgaben bearbeiten zu lassen, wurde aufgrund folgender Überlegung gefällt: Die Kommunikation zwischen den Schülern während der Aufgabenbearbeitung ermöglicht das Aufzeichnen ihrer verbalen Äußerungen und erlaubt dadurch einen Einblick in ihre Denkprozesse. Eine stille Bearbeitung der Aufgabe durch einzelne Schüler würde hingegen nur wenige Anhaltspunkte für die Analyse des Lösungsprozesses liefern, da nur die aufgeschriebene Lösung zur Verfügung stünde. Die Herausforderung, einen individuellen Lösungsprozess aus der gemeinsamen Lösungskonstruktion zweier Schüler herauszufiltern, wurde durch die Einbeziehung von Erläuterungen eines Schülers aus dem Interview bewältigt.

Eine alternative Erhebungsmethode wäre, einen Schüler aufzufordern, den Lösungsprozess während der Aufgabenbearbeitung durch das laute Denken zu verbalisieren. Das laute Denken entspricht jedoch nicht dem gewohnten Lösungsverhalten und bringt dadurch unvorhersagbare Einflüsse ins Spiel. Während Untersuchungen von Flaherty zeigen, dass das laute Denken bei der Lösung von Aufgaben einen negativen Effekt auf die Lösungsergebnisse von Schülern hat (Flaherty, 1974), wurden von Brown positive Effekte des lauten Denkens auf die Lösung vom Turm-von-Hanoi-Problem festgestellt (A. L. Brown, 1984).

Ein Vorteil des nachträglichen lauten Denkens bei Schülerpaaren ist, dass diese Methode auf der Basis des tatsächlich auf dem Videoband fixierten Materials angewandt wird und zugleich jedoch kognitive Denkprozesse während der Aufgabenbearbeitung nicht stört. Nachteile dieser Methode wie Retrospektivität der Beschreibung (vgl. Kagan, et al., 1963, S. 84-85) und soziale Erwünschtheit beeinflussen jedoch nur geringfügig die Rekonstruktion des individuellen Lösungsprozesses der Schüler. Das Problem der Retrospektivität wurde durch den geringen Abstand zwischen dem Interview und der Aufgabenbearbeitung minimiert. Soziale Erwünschheit spielt immer noch eine Rolle und muss bei der Datenauswertung berücksichtigt werden, verzerrt aber die Erklärungen der Schüler eher weniger als bei anderen Interviewtypen: Da die Handlungen und verbale Äußerungen der Schüler auf dem Bildschirm fixiert sind, bewegen sich die Interpretationen des Lösungsprozesses während des Interviews in dem durch die abgebildete Realität vorgegebenen Rahmen. Dadurch sind Verzerrungen durch beabsichtigte oder unbeabsichtigte Fehlinterpretationen des Verhaltens durch Probanden beim stimulated recall als unerheblich einzuschätzen. Um der sozialen Erwünschheit beim Interview entgegenzuwirken, wurde ferner der Interviewleiter über die wichtigsten Prinzipien des Interviewdurchführung instruiert (vgl. Hermanns, 2004). Die Interviews wurden von M. Müller im Rahmen seiner wissenschaftlichen Arbeit im Rahmen des 1. Staatsexamens durchgeführt. Die Qualität der Interviews ist als sehr hoch einzuschätzen.

4.2.3 Datenanalyse

Vor der Datenanalyse wurden zunächst verbale und non-verbale Aktivitäten der Schüler während der Aufgabenbearbeitung und des Interviews in einem Transkript festgehalten (siehe Transkriptregeln bei Selting, et al., 1998). Die Datenanalyse wurde mit Hilfe von Kodierungen durchgeführt. Der Kodierungsprozess besteht in der Analyse und Etikettierung von einzelnen Informationseinheiten, wie z.B. Wörtern, Sätzen, Abschnitten, Handlungen und Bildern, im Hinblick auf die Fragestellung. Die Etiketten oder Codes sind definiert als „tags or labels for assigning units of meaning to the descriptive or inferential information compiled during a study“ (Miles & Huberman, 1994, S. 56). In der Definition von Codes wird auf zwei unterschiedliche Arten des Kodierens hingewiesen: deskriptive und inferentiale Codes. Während sich der Forscher beim deskriptiven Kodieren bemüht, Interpretationen bei der ersten Kodierung zu vermeiden, sind Interpretationen beim inferentialen Kodieren ein notwendiger Bestandteil der Analyse. In der Regel enthalten die Codes beim ersten Kodieren am Anfang wenig und bei den nächsten Kodierungen immer mehr Interpretationen.

Darüber hinaus kann zwischen einem deduktiven und einem induktiven Zugang zur Datenanalyse gewählt werden. Beim deduktiven Zugang schaut der Forscher mit einem bestimmten theoriegeleiteten Blick auf die Daten. Die Analysekategorien müssen in einem Kodierschema vor der Analyse schriftlich beschrieben werden. Das Kodierschema wird durch die Materialanalyse schrittweise an die empirischen Daten angepasst, bis eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Kodierschema und Daten erreicht wird (vgl. z.B. Mayring, 2003; Miles & Huberman, 1994). Beim induktiven Zugang darf der Forscher in der ersten Phase die Daten nicht interpretieren. Erst beim zweiten und dritten Kodierungsvorgang werden Interpretationen stärker in die Analyse einbezogen, sodass das Kodierungsschema erst während der Datenanalyse entwickelt und an weiteren Daten überprüft und verfeinert wird(vgl. zu dieser Methode Strauss & Corbin, 1990).

Welcher Zugang bei der Datenanalyse gewählt wird, hängt u.a. von dem Stand der Forschung im jeweilgen Gebiet ab. Sind wesentliche Bausteine einer Theorie schon in der Literatur vorhanden, ist es zu empfehlen, das Kodierungsschema aufgrund der theoretischen Analysen zu entwickeln. Wurde die Fragegestellung bisher wenig erforscht, ist es besser, bei der ersten Kodierungsphase mit Interpretationen zurückhaltend umzugehen. Anderfalls droht die Gefahr, sich nur an einer bestimmten Sichtweise zu orientieren und die Fragestellung dadurch einseitig zu beleuchten.

Da Schwierigkeiten und Strategien bis jetzt unterschiedlich differenziert untersucht wurden – die Schwierigkeits-Theorie enthält nur einzelne Fragmente, die Strategien-Theorie ist hingegen gut ausgearbeitet –, wurde in dieser Arbeit eine Kombination beider Zugängen zur Datenanalyse angewandt. Bei der Vorbereitung zum Kodierungsprozess wurden Tabellen erstellt, in denen neben den verbalen und non-verbalen Aktivitäten der Schüler auch Zeit, Sequenzen und Situationsbeschreibungen festgehalten wurden.

Tabelle 2. Ein Ausschnitt aus dem Transkript zur Bearbeitung der Aufgabe Zuckerhut durch Manfred und seinen Partner

Zeit	Sequenz	Situationsbeschreibung	Aktivität*	Handlungen von Manfred	Handlungen Manfreds Partner
….	….	….	…	…	…
01:29	4	M liest einzelne Angaben aus dem Zeitungsartikel vor.	V	Also, mit der Bahn braucht man drei Minuten und die fährt ungefähr dreihundert Kilometer äh dreißig Kilo-	

				meter pro Stunde und überwindet einen Höhenunterschied von hundertachtzig Meter.	
			NV	*M zeigt dabei immer wieder mit seinem Stift in den Aufgabentext.*	
…	…	…	…	…	…

* V und NV sind Abkürzungen der verbalen und non-verbalen Aktivitäten

Anschließend wurde das Interview der jeweiligen Schüler dokumentiert:

Tabelle 3. Ein Ausschnitt aus dem Tranksript zum Interview von Manfred nach der Bearbeitung der Aufgabe Zuckerhut

Zeit in der AB	Zeit im I	Zitat*	Beschreibung des I´s
…	…	…	…
01:42	02:43	I: Mmm da hast du das noch mal verdeutlicht. Wieso hast du das gemacht? M: Um halt die einzelnen ähm Werte, dass mir die erst mal eienen bisschen klar werden im Kopf. I: Deswegen hast du die auch noch mal vorgelesen? M: Ja. I: Hmhm (*bejahend.*) okay.	M erklärt, dass die Aufgabe durch das Vorlesen einzelner Zahlenwerte und Sätze aus der Aufgabe für ihn klarer wird.
…	…	…	

* I und M sind Abkürzungen für Interviewleiter und Manfred

Anhand der angefertigten Transkripte und Situations- und Interviewbeschreibungen wurden Schüler-Schwierigkeiten wie folgt analysiert:

- Die Schwierigkeiten wurden am Anfang deskriptiv kodiert (offene Kodierung). Bei dieser offenen Kodierung wurden Schwierigkeiten des ersten Schülers bei der Bearbeitung der Aufgabe Zuckerhut identifiziert und benannt. Dabei wurden in den Transkripten der Aufgabenbearbeitung und des Interviews Stellen markiert, an denen die Schwierigkeiten beobachtet wurden. Manfred fällt es z.B. schwer, beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut, Pelligrinis Weg zu rekonstruieren AB_M (32:18).
- Im zweiten Schritt hat man die Befunde im Hinblick auf ihre Merkmale charakterisiert (axiale Kodierung), indem zu jeder Schwierigkeit Bedingungen/ Ursachen, Handlungen und Folgen der Schwierigkeiten beschrieben wurden. Bei der axialen Kodierung werden einzelne Schwierigkeitskategorien auf eine neue Weise zusammengebracht (Strauss & Corbin, 1990, S. 96ff). Manfreds Schwierigkeit mit der Rekonstruktion des Fußweges von Pelligrini könnte u.a. durch semantische Hürden im Aufgabentext zustande kommen (Bedingung/ Ursache). Die Schwierigkeit löst das mehrmalige Lesen der Aufgabe Zuckerhut aus (Handlungen) und behindert weitere Lösungsschritte (Folgerungen). Anhand der genannten Merkmale wurden einzelne Schwierigkeiten miteinander verglichen und zu einem einheitlichen Kodierungsschema zusammengefasst. Das Kodierschema besteht aus dem Tätigkeitstyp (z.B. Lesen und Verstehen der Textaufgabe), der kognitiven Realisierung (z.B. Identifikation der Fragestellung) und der

spezifischen Realisierung an der Aufgabe (z.B. der Weg von der Talstation bis zum Fuß des Berges bei der Aufgabe Zuckerhut).

- Mit Hilfe des entwickelten Schemas wurde überprüft, ob weitere drei Schüler die gleichen Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgabe Zuckerhut hatten. Nach der Analyse der Aufgabe Zuckerhut wurden die Schüler-Schwierigkeiten an den Aufgaben Abkürzung und Regenwald mit dem Kodierungsmuster analysiert und mit wenigen Ergänzungen bestätigt.

Bei der Analyse von Schwierigkeitsmerkmalen wurden die Strategien identifiziert und den gängigen Strategiengruppen (vgl. Abschnitt 2.4) – Ressourcenstrategien, kognitiven Strategien (Bearbeitungsstrategien) und metakognitiven Strategien – zugeordnet:

- Bearbeitungsstrategien (kognitive Strategien): Wiederholungs-, Organisations- und Elaborationsstrategien. Eine Organisationsstrategie ist z.B. eine Skizze zu zeichnen.
- Metakognitive Strategien: Planung, Überwachung/ Kontrolle und Regulation. Bernd merkt bei der Bearbeitung der Aufgabe Regenwald an: *„Das kann nicht stimmen, weil kleine Kinder nicht trinken dürfen"* (AB_B 30:58). Dabei wendet er eine Kontrollstrategie an.
- Ressourcenstrategien: Kooperative Strategien. Eine bei der Bearbeitung der Modellierungsaufgaben häufig beobachtete kooperative Strategie ist, den Partner zu fragen. Manfred: *„Wie hast du das gerechnet?"* (AB_M 35:19).

Bei den Ressourcenstrategien wurde nur eine Strategiengruppe berücksichtigt: Strategien für das kooperative Lernen. Andere wichtige Ressourcenstrategien z. B. volitionale Strategien oder Zeitmanagement sind in die Datenanalyse nicht eingegangen, da sich die Untersuchungsbedingungen im Labor wesentlich von denen im Unterricht unterscheiden. Eine authentische Erfassung dieser Strategienarten war deswegen im Rahmen der durchgeführten Untersuchung nicht möglich. Der in diesem Abschnitt erläuterte Aufbau der Untersuchung zeigt Möglichkeiten aber auch die Grenzen, die bei der Interpretation der Ergebnisse bedacht werden sollten.

4.3 Analyse von Schwierigkeiten und eingesetzten Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut

In diesem Abschnitt werden Schwierigkeiten und Handlungsstrategien von vier Schülern verschiedener Kompetenzstufen[15] analysiert, die bei der Bearbeitung der Aufgabe Zuckerhut vorkommen.

Die Darstellung aller Fälle geschieht nach folgendem Aufbau des Abschnitts: Am Anfang wird eine Beschreibung der Aufgabenbearbeitung gegeben, die naturgemäß Erklärungen zum Lösungsweg und einige Interpretationen beinhaltet. Anschließend werden die bei der Bearbeitung auftretenden Schwierigkeiten analysiert. Bei der Analyse des Lösungsverhaltens werden die Schwierigkeiten identifiziert, einschließlich der Fehler, die durch sie verursacht werden (siehe Unterabschnitt 2.4.1). Zum Schluss folgt eine Beschreibung der von Schülern angewandten Handlungsstrategien. Bei der Analyse der Aufgabenbearbeitung werden Begriffe benutzt, die im theoretischen Teil der Arbeit eingeführt wurden.

4.3.1 Aufgabe Zuckerhut. Fallskizze Manfred, Kompetenzstufe 1

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Manfred liest die Aufgabenstellung laut vor, stolpert über mehrere Wörter und fragt schließlich den Versuchsleiter, ob er auch „den Satz unten“ (die Fragestellung) vorlesen soll. Nach dem ersten Vorlesen liest Manfred die Aufgabe noch einmal für sich und wiederholt die seiner Meinung nach wichtigsten Angaben aus dem Text. Aus dem Interview kann entnommen werden, dass er zwei alternative Wege von der Talstation bis zum Gipfel des Berges erfasst: den Weg mit der Seilbahn und den Fußweg. Dem Seilbahnweg ordnet er die Angaben über die Geschwindigkeit, Zeit und Höhenunterschied zu: *„Also, mit der Bahn braucht man drei Minuten und die fährt ungefähr dreihundert Kilometer äh dreißig Kilometer pro Stunde und überwindet einen Höhenunterschied von hundertachtzig Meter“* (AB_M 1:29). Zu Pelligrinis Weg zu Fuß sagt Manfred, dass dieser 12 Minuten dauert. Manfreds Äußerungen ist nicht zu entnehmen, ob er versteht, wie Fußweg und Seilbahnweg im Einzelnen verlaufen. Beim Zuordnen der Angaben erfasst Manfred den Höhenunterschied als ein Attribut der Seilbahnstrecke und Pelligrinis Fußweg wird folglich nur die Laufzeit zugeordnet. Bei der Zuordnung der Zeit (12 Minuten) beachtet Manfred offenbar nicht, dass die 12 Minuten zu einer Teilstrecke und nicht zum gesamten Weg Pelligrinis gehören. Er meint, Pelligrinis kompletter Fußweg,

[15] Kompetenzstufe wird anhand der Schulform und der Note in Mathematik geschätzt (vgl. auch Punkt 4.2.1). Kompetenzstufe 1 – Hauptschüler mit mäßigen Noten in Mathematik (Fall Manfred), Kompetenzstufe 2 – Hauptschüler mit guten Noten in Mathematik (Fall Oliver), Kompetenzstufe 3 – Gymnasiast mit mäßigen Noten in Mathematik (Fall Bernd), Kompetenzstufe 4 – Gymnasiast mit guten Noten in Mathematik (Fall Kathrin)

und nicht nur das Besteigen des Berges, dauere 12 Minuten. *„Er muss ja den Berg (in 12 Minuten) noch hoch“* (I_M 66:31)[16]. Die gesuchte Strecke ist für Manfred der gesamte Fußweg Pelligrinis. Es folgt eine Phase lautlos lesenden Durchwanderns des Textes (fünf Minuten). Manfred findet in dieser Zeit keinen Zusammenhang, der ihm hilft, die Aufgabe zu lösen. Daraufhin brechen er und sein Partner die Bearbeitung ab. Sie kehren erst zum Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut zurück, nachdem sie die anderen Aufgaben bearbeitet haben.

Der erneute Versuch, die Aufgabe zu lösen, beginnt mit dem Lesen und Zeichnen einer Skizze. Es gelingt Manfred, die räumliche Struktur der Situation durch das Zeichnen der Skizze zu rekonstruieren und die Angaben – bis auf die 12 Minuten – richtig zuzuordnen (siehe Abbildung 31). Manfred zeichnet zuerst die Höhe und anschließend die ansteigende Linie, die dem Seil entspricht, und verbindet die beiden Strecken.

Abbildung 31. Skizze von Manfred zur Aufgabe Zuckerhut

Verblüfft stellt Manfred fest, dass in seiner Skizze ein Dreieck entstanden ist. *„Obwohl mal guck ma [.] hier ne, wenn er hier lang geht (zeigt auf die untere, noch nicht eingezeichnete Kathete) [.] dann wärs ja auch Pythagoras“* (AB 33:05). Er identifiziert somit den Satz des Pythagoras als eine die Streckenlängen verbindende Relation im rechtwinkligen Dreieck und formuliert ihn wie folgt: *„Die (Hypotenuse) ist genauso lang wie die beiden (Katheten) zusammen[17]“* (AB_M 33:17). Da von drei Seitenlängen im Dreieck nur eine explizit gegeben ist, weiß er nicht, wie die Aufgabe gelöst werden kann. Manfred erkennt nicht die Möglichkeit, die andere Seite, die Hypotenusenlänge, im Dreieck zu bestimmen. Sein Partner berechnet mit einem scheinbaren „Kunstgriff“ die unbekannte Kathete im Dreieck aus einer bekannten Kathete, indem er die Kathetenlänge (180 Meter) quadriert und aus dem Ergebnis die Wurzel zieht.

$$\textit{Untere Kathete} = \sqrt{(180\,m)^2} = 180\,m$$

[16] „AB_M“ und „I_M“ sind die Abkürzungen für die Aufgabenbearbeitung und Interview von Manfred

[17] Manfred vermischt hier die Aussage über die Flächeninhalte der Quadrate an den Seiten des Dreiecks mit der Aussage über die Seitenlängen des Dreiecks. Während die Flächeninhalte der Quadrate an Seitenlängen in einer einfachen additiven Beziehung zueinander stehen, verbindet die Seitenlängen eine nicht lineare Funktion mit Wurzeln. Flächeninhalte: $A_{(\text{Quadrat an Hypotenuse})}=A_{(\text{Quadrat an einer Kathete})}+A_{(\text{Quadrat an anderer Kathete})}$. Seitenlänge: $(\text{Hypotenusenlänge})^2 = (\text{Eine Kathetenlänge})^2 + (\text{Andere Kathetenlänge})^2$

Manfred versteht diese Berechnungen nicht, kann aber auch keine Alternative anbieten. Im nächsten Schritt berechnet Manfreds Partner mit dem Satz des Pythagoras „die Summe“ der beiden Kathetenlängen im Dreieck. Er tippt die folgenden Zahlen in den Taschenrechner ein:

$$\text{„}\textit{Summe“ der beiden Kathetenlängen} = \sqrt{(180m)^2 + (180m)^2} = 254{,}6\ m$$

Anschließend schreibt Manfred im Antwortsatz: *„Er (Pelligrini) muss 254,6 m zu Fuß gehen“* (AB_M 36:21).

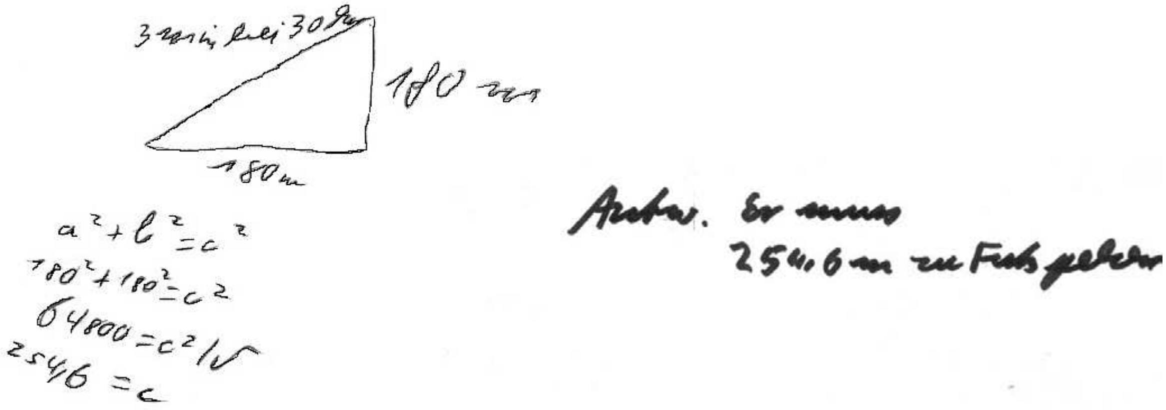


Abbildung 32. Lösung der Aufgabe Zuckerhut von Manfred und seinem Partner

Analyse von Manfreds Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Im ersten Teil der Aufgabenbearbeitung sind in Manfreds Situationsverständnis große Defizite aufgetreten, die zum Abbruch des Lösungsprozesses führten. Er hat vermutlich eine fehlerhafte Vorstellung vom Streckenverlauf der Seilbahn und vom Pelligrinis Fußweg. Weder der Seilbahnweg noch Pelligrinis Fußweg werden somit in ihrer räumlichen Struktur erfasst. Ferner wird die Zeitangabe (12 Minuten) einer falschen Strecke zugeordnet. Manfred gelang es während der ersten Bearbeitungsphase nicht, eine problembezogene Handlungsstruktur zu konstruieren.

Im zweiten Anlauf liest Manfred erneut die Aufgabenstellung und zeichnet eine Skizze. Beim Zeichnen der Skizze gelingt es Manfred, die Situation – bis auf die Fragestellung – zu verstehen. Manfred sagt im Interview bzw. bei der Aufgabenbearbeitung Folgendes: *„Er (Pelligrini) muss von diesem Punkt (zeigt auf den linken unteren Punkt des rechtwinkligen Dreiecks) diese […] Strecke laufen (fährt mit dem Finger die untere Kathete in der Skizze ab) [.] und dann noch den Berg hoch (fährt mit dem Finger die Kathete „Höhenunterschied“ ab)“* (I_M 69:17). *„Die (Seilbahnstrecke) geht ja schräg hoch“* (I_M 10:41).

Vier aufgabenspezifische Schwierigkeiten sind auf Grund der Datenanalyse im ersten Teil des Lösungsprozesses zu erkennen: „Rekonstruktion des Seilbahnwegs“, „Rekonstruktion des Fußwegs“, „Zuordnung der Werte“ (bei Manfred Zuordnung der 12 Minuten) und „Identifikation des Weges von der Talstation bis zum Fuß des Berges“. Die genannten Schwierigkeiten lassen sich den zwei allgemeinen Kategorien „Angaben im Aufgabentext und Bild lesen (verstehen)“ und „Identifikation der Fragestellung“ zuordnen (vgl. zur Übersicht Abbildung 39).

Im weiteren Lösungsprozess entdeckt Manfred anhand der Skizze die Operation, welche die Längen im rechtwinkligen Dreieck verbindet (Satz des Pythagoras), erkennt aber nicht den Zusammenhang zwischen Weglänge, Geschwindigkeit und Fahrzeit der Seilbahn. Ferner hat er Probleme beim Anwenden der Pythagoras-Struktur auf die gegebene Situation. Somit sind die Identifikation von mathematisierbaren Strukturen (Pythagoras- und Geschwindigkeits-Zeit-Weg-Struktur) und die Verbindung von beiden Strukturen zu einem mathematischen Modell wichtige Hürden bei der Aufgabenbearbeitung, die Defizite in Manfreds Lösungskompetenz aufdecken. In dieser Kategorie sind Manfreds Schwierigkeiten in der Konstruktion und Verbindung von Lösungsstrukturen zusammengefasst.

Schließlich musste Manfred das von ihm entwickelte mathematische Modell umformen, um die gesuchte Größe zu berechnen. Er überlässt das jedoch seinem Partner. Vermutlich kennt Manfred die notwendigen mathematischen Operationen nicht, bzw. ist nicht sicher, ob er sie richtig anwenden kann. Die regelgerechte Umformung der aufgebauten Pythagoras-Struktur und der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur, welche die einwandfreie Ausführung von mathematischen Rechenoperationen voraussetzt, ist eine weitere Schwierigkeit von Manfred beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut.

Es sind hier somit drei wesentliche Herausforderungen, die Manfred Schwierigkeiten im Lösungsprozess bereiten:

- Lesen und Verstehen der Textaufgabe
- Verstehen des Zusammenhangs zwischen Aufgabe und mathematischer Lösungstruktur
- Umformung mathematischer Strukturen und Ausführung der Rechenoperationen.

Gemeinsam ist diesen Teilhandlungen die komplexe Anforderung, verschiedenartige Zusammenhänge oder Sachverhältnisse in den vorhandenen Strukturen zu erschließen und mit ihnen sinnvoll umzugehen.

Die durch die Analyse des ersten Falls erstellte Schwierigkeitsstruktur zur Aufgabe Zuckerhut wird weiter in den Fällen 2, 3 und 4 überprüft und ggf. verändert.

Analyse von Handlungsstrategien im Lösungsprozess

Der Fall Manfred ist für die Analyse von Bearbeitungsstrategien von besonderem Interesse, weil dieser Schüler die gravierenden Verstehensschwierigkeiten selbständig überwindet. Somit stellt sich die Frage, was er beim zweiten Anlauf der Aufgabenbearbeitung strategisch anders macht.

Im ersten Teil der Bearbeitung der Aufgabe Zuckerhut sind folgende Handlungsstrategien zu beobachten: Manfred liest ausgewählte Stellen aus dem Aufgabentext vor und verbalisiert eine seiner Meinung nach lösungsrelevante Information aus dem Gedächtnis. *„Rennen tut man ungefähr zehn kmh“* (AB_M 1:45). Alle diese Handlungen erfolgen in den ersten 2 Minuten. Danach folgt eine *5-minutige* Phase stillen Denkens, die mit dem Abbruch der Aufgabenbearbeitung endet. Der zweite Anlauf beginnt mit dem Lesen der Aufgabe. Daraufhin wird die Fragestellung von Manfred in eigenen Worten erfasst. Er sagt: *„Wie lang ist der Weg ohne Höhenunterschied?“* (AB_M 31:36). Gleich im Anschluss zeichnet Manfred eine Skizze und beschriftet sie. Bei der Anfertigung der Skizze geht er sukzessiv vor, d.h. einzelne Angaben aus dem Text werden Schritt für Schritt in die Skizze eingebaut. Beim Zeichnen der Skizze versucht Manfred, den Fußweg von Pelligrini in die gezeichnete Skizze zu integrieren. Er analysiert dafür die teils schon angefertigte Skizze, liest den Aufgabentext noch einmal, kommt zu einer wichtigen Schlussfolgerung, dass Pelligrini *„unten lang läuft“* (AB_M 32:53), und zeichnet die untere Kathete im Dreieck (siehe Abbildung 32).

Ein Vergleich der beim ersten und zweiten Teil der Aufgabenbearbeitung angewandten Strategien zeigt die niedrige Effektivität langer stiller Denkphasen bei Manfred, die ohne von außen beobachtbare Aktivitäten ablaufen. Dagegen ist es für Manfreds Lösungsprozess hilfreich, eine Skizze der Situation herzustellen. Das Zeichnen hilft ihm, das Situationsmodell zu bilden. Manfred erfasst dabei auch die Dreieckskonstellation. Aber wie man aus der Lage des Dreiecks vermuten kann, übernimmt Manfred entweder unreflektiert die Struktur der abgebildeten Seilbahn und lässt sich durch die Perspektivität der Fotoaufnahme täuschen oder er beachtet die Fotoaufnahme nicht.

Eine andere, neue Strategie im zweiten Anlauf war die Erfassung der Fragestellung mit seinen eigenen Worten. Die Anwendung dieser zwei Strategien hat Manfred geholfen, im Verständnis der Situation Fortschritte zu machen.

Die zweite Schwierigkeit – die ausgewählten Angaben miteinander zu verbinden – besteht in der Aufdeckung zweier Strukturen: den Satz des Pythagoras und die Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Relation. Den Satz des Pythagoras erkennt Manfred, indem er die Skizze analysiert und daraus Folgerungen über die Seitenlängen zieht.

„Die Schräge (Hypotenuse) ist ja länger (als eine Kathete)“ AB_M (32:58).

„Obwohl guck mal [.] hier ne, wenn er hier lang (zeigt auf untere Kathete) geht, dann wäre es ja auch Pythagoras“ AB_M (33:05).

Manfred kontrolliert seine Überlegungen: *„Das (den Weg von der Talstation bis zum Gipfel des Berges) kann er gar nicht schaffen (in 12 Minuten)“* AB_M (33:27), vernachlässigt dies aber dann und konzentriert sich auf die Längen.
Zu der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur sagt und schreibt Manfred nichts. Deshalb bleibt seine Lösung unzulänglich.
Die Ausführung der Rechenoperationen überlässt Manfred seinem Partner, übernimmt jedoch die Kontrollfunktion. Er kontrolliert das Ergebnis und überwacht und reguliert den Lösungsprozess.
„Also (die untere Kathete ist) auch 180 m, oder wie meinst du das?“ AB_M (34:14).
„Wie hast du das gerechnet? Müssen ja auch Lösungsweg aufschreiben“ AB_M (35:19).
Von den im Unterabschnitt 4.2.3 aufgeführten Strategien konnten bei Manfred bis auf die Planung folgende Strategien identifiziert werden:

Tabelle 4. Übersicht: Manfreds Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut

Handlungsstrategien	**Kommt vor**
Bearbeitungsstrategien	
Wiederholung (z.B. nochmaliges Lesen ausgewählter Textstellen)	ja
Elaboration (z.B. Aktivierung von Informationen aus dem Gedächtnis, die helfen können, die Aufgabe zu lösen)	ja
Organisation (z.B. Erfassen der Fragestellung mit eigenen Worten und Zeichnen einer Skizze)	ja
Metakognitive Strategien	
Planung des Lösungsprozesses	nein
Kontrolle des Ergebnisses und des Lösungsprozesses (z.B. Kontrolle des Zwischenergebnisses und Kontrolle des Gelesenen. Manfred kontrolliert, ob 12 Minuten eine realistische Zahl ist; Manfred nimmt wahr, dass der Lösungsweg nicht aufgeschrieben wurde)	ja
Regulation des Lösungsprozesses (Wird durch eine Kontrollstrategie ein Problem beim Lösungsverhalten festgestellt, werden kognitive Strategien ggf. geändert. Manfred hat die Aufgabenbearbeitung unterbrochen, um den Lösungsweg aufschreiben zu lassen).	ja
Ressourcenstrategien	
Strategien für das kooperative Lernen (Partner fragen: *„Wie lange ist denn das, wie er läuft?“* (AB 33:30)	ja

Bei Manfred findet sich die ganze Palette der Strategien, mit Ausnahme der Planung. Die Strategien werden jedoch nicht auf alle Lösungsschritte bezogen und zielen auf das Verstehen von einzelnen Informationen aus dem Text. Dadurch entsteht eine fragmentarische Lösungsstruktur. Größere Zusammenhänge (z.B. zwischen der Realsituation und mathematischen Strukturen) werden nicht hergestellt.

Analyse der Schlüsselstelle im Lösungsprozess

Das einzige Mal, wo es Manfred gelungen ist, Angaben zu einer Struktur aus mehreren Elementen zu verbinden, ist das Einzeichnen und das Beschriften der Skizze. Diese Organisationsstrategie hat ihn über die Dreiecksstruktur zur Identifikation des Konzepts „Pythagoras“ geführt, das aber nicht in ein lösungsprozessrelevantes mathematisches Modell transferiert werden konnte (Manfred hat statt Seitenquadrate die Seitenlängen addieren wollen.) Es zeigt sich, dass Einzeichnen und Beschriften einer Skizze für die Konstruktion des Situationsmodells und für die Identifikation der räumlichen Sachstrukturen wie z.B. der Satz des Pythagoras eine erfolgreiche Strategie darstellt. Zu ihrer Realisierung ist aber ein Maß an operativer Klarheit nötig, das Manfred nicht erreichen kann, weil ihm das fundierte Wissen um einzelne Begriffe und ihre Zusammenhänge fehlt. Aus didaktischer Sicht könnte Manfred vermutlich nur durch das schrittweise Durcharbeiten des Problems unter Anleitung der Lehrperson geholfen werden (einschließlich übender Wiederholungen).

4.3.2 Aufgabe Zuckerhut. Fallskizze Oliver, Kompetenzstufe 2

Beobachtungen zum Lösungsverhalten. Vor und während der Aufgabenbearbeitung und des Interviews machen Oliver und sein Partner einen gelassenen und selbstsicheren Eindruck. Oliver liest die Aufgabe Zuckerhut (vgl. Abbildung 18) flüssig vor und wiederholt einzelne Angaben aus dem Aufgabentext. Er verbindet schon am Anfang der Aufgabenlösung die Fahrzeit und die Geschwindigkeit. *„Also die Bahn benötigt [.] drei Minuten [.] mit dreißig kmh“* (AB_O 00:46). Danach fokussiert Oliver seine Aufmerksamkeit auf die anderen Angaben. Er entnimmt dem Text, dass der Zuckerhutberg 180 m hoch ist: *„Der Berg ist hundertachtzig Meter hoch“* (AB_O 1:30).

Wie Manfred hat Oliver Probleme bei der Konstruktion des räumlichen Aufbaus der Situation. Oliver sagt im Interview: *„Und halt, dass dann dacht ich, dass diese Strecke halt wie oben (deutet eine Strecke in der Luft an) auch unten (deutet eine parallele Strecke unten an) gleich ist. Deswegen dacht ich mir, die Strecke (Fußweg) müsste auch unten genauso laufen wie als wenn die Bahn oben lang fährt“* (I_O 7:25) (siehe Abbildung 33). Die Seilbahn bewegt sich in Olivers Situationsmodell – offenbar durch die Perspektivität der Fotoaufnahme beeinflusst – zwischen zwei Bergen. Giuseppe Pelligrini muss in diesem Modell erst von einem Berg herunterklettern, dann durch die Ebene zum Zuckerhut-Berg laufen und zum Schluss noch den Zuckerhut besteigen. Sein Partner überzeugt Oliver bei der Aufgabenbearbeitung, dass in der Aufgabe nur Pelligrinis Weg durch die Ebene gesucht ist. Im Interview ist Oliver verunsichert, ob nicht doch der ganze Fußweg von Pelligrini gesucht ist: *„Ich denke ma, das ist ja einen Gipfel, wo die drauf wollen, also müsste Giuseppe auch theoretischerweise runter und hoch (deutet dies in der Luft an)“* (vgl. I_O 10:21). Wie Manfred ordnet Oliver die 12 Minuten irrtümlich Pelligrinis gesamtem zurückzulegenden Weg zu (vgl. I_O 03:01).

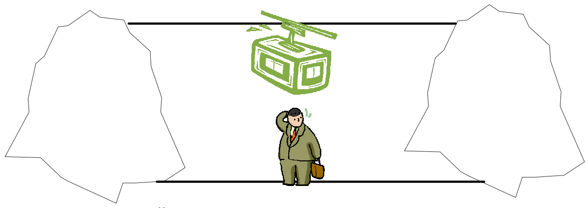


Abbildung 33. Aus der Olivers Äußerung rekonstruierte Skizze zur Aufgabe Zuckerhut

Die gesuchte Strecke kann Oliver ohne den Satz des Pythagoras berechnen, weil in seinem falschen Situationsmodell die Seillänge der Bahn und Pelligrinis Fußweg durch die Ebene gleich lang sind. 30 km/h interpretiert Oliver als 30 Kilometer in einer Stunde (siehe oben AB_O 00:46) und sagt später: *„Fünfzehn Kilometer in [...] ähm [.] (…) halbe Stunde“* (AB_O 2:21). Er erkennt somit die Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur und durch seine operative Deutung der Geschwindigkeit als zurückgelegter Weg in der Zeit findet Oliver den Zusammenhang zwischen der Zeit und dem Weg bei konstanter Geschwindigkeit. Er weiß aber nicht, wie viele Kilometer die Seilbahn in drei Minuten fährt. Olivers Partner erinnert ihn an das Dreisatz-Schema und berechnet dann die Seilbahnlänge und damit auch Pelligrinis Fußweg mit dem Dreisatz. Oliver schreibt im Antwortsatz: *„1500 m ist die Strecke ungefähr.“*

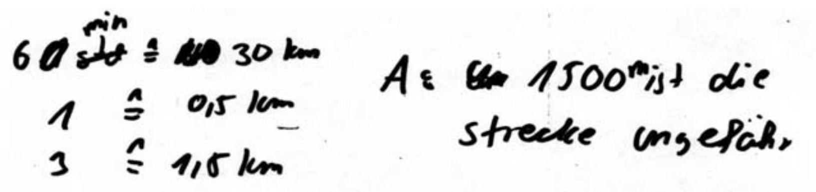


Abbildung 34. Lösung der Aufgabe Zuckerhut von Oliver und seinem Partner

Analyse von Olivers Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Lesen und Verstehen der Textaufgabe. Jede der vier aufgabenspezifischen Schwierigkeiten der Kategorie „Lesen und Verstehen der Textaufgabe“ bereitet Oliver Probleme. An der Konstruktion des Seilbahnwegs scheitert Oliver, weil er die Seilbahndarstellung auf dem Foto wegen ihrer Perspektivität nicht richtig erkennt. Ferner übersieht Oliver die semantischen Hinweise im Aufgabentext. Einer dieser Hinweise ist der Begriff „Talstation“, der andeutet, dass sich eine Seilbahnstation unten im Tal und nicht oben auf einem Berg befinden muss. Die Konstruktion des Fußwegs von Pelligrini muss in die vorhandene Struktur, die bei Oliver zwei Bergstationen, die Handlungsperson Pelligrini, sowie den Seilbahnweg enthält, integriert werden. An dieser Stelle wird ein fremdes Element – der Weg vom Gipfel des ersten Bergs nach unten zur Ebene – hinzugefügt. Bei der Zuordnung der Zahlangaben macht Oliver einen Fehler: Er ordnet die 12 Minuten falsch zu (übersieht den im Text enhaltenen Hinweis auf das Hochsteigen). Für Oliver entsteht durch sein fehlerhaftes Situationsmodell ein großes Problem, nämlich die Lokalisierung der Fragestellung. Ihm scheint es unwahrscheinlich, dass nur der Weg durch die Ebene von einem Fuß des Berges zum anderen gesucht ist, zumal es in der Fragestellung um den Weg von der Talstation bis zum Fuß des Berges geht. Im Interview äußert er seine Unzufriedenheit zu diesem Punkt (I_O 10:21, siehe oben).

Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur. Mit dem Erkennen der Anwendbarkeit (weiter im Text „Erkennen“) der Weg-Zeit-Relation und ihrer Konkretisierung in einem mathematischen Zusammenhang hat Oliver keine Probleme. *Die Pythagoras-Struktur wird von ihm wegen eines falschen Situationsmodels nicht erkannt.* Oliver braucht den Satz des Pythagoras nicht, um eine Antwort auf die von ihm und seinem Partner formulierte Frage zu finden. Er berechnet die Länge der Strecke, die die Seilbahn fährt, die zugleich die Weglänge durch die Ebene zu Fuß ist (vgl. Abbildung 33).

Umformung mathematischer Strukturen und Ausführung der Rechenoperationen. Die Bestimmung der Weglänge über die Relation zwischen der Zeit und dem Weg der Seilbahn bereitet Oliver Schwierigkeiten. Er versucht den Zusammenhang zwischen dem Weg und der Zeit, mit Hilfe der Vervielfachungs-Vorstellung zu lösen(Jordan, 2006; Kirsch, 1991, 2002). Die Vervielfachungs-Vorstellung besagt, dass bei einer proportionalen Zuordnung die Halbierung einer Größe zur Halbierung der anderen Größe führt. Wenn die Bahn 30 km in einer Stunde fährt, dann legt sie 15 km in einer halben Stunde zurück. Welchen Anteil die drei Minuten von einer Stunde ausmachen, kann Oliver nicht sagen und bricht seine richtigen Überlegungen ab. Alternativ hätte Oliver die Stunden in Minuten umrechnen können. Es wäre für ihn dann einfacher gewesen, von 60 Minuten auf 3 Minuten zu schließen. Bevor die mathematische Operation verwendet wird, sollte Oliver somit die Zeit-Einheiten angleichen. Das Erkennen der Notwendigkeit der Einheitenumrechnung und die Durchführung der Umrechnung, stellen ein in der Didaktik der Mathematik bekanntes Problem dar, das durch die nicht-dezimale Einteilung der Stunden in die Minuten erschwert wird.[18] Diese Schwierigkeit lässt sich der Kategorie „Umformung mathematischer Strukturen und Ausführung der Rechenoperationen" zuordnen, wird jedoch durch das Problem zweier nicht kongruenter Messmodelle ausgelöst.

Anhand der Analyse von Olivers Fall konnte festgestellt werden, dass Oliver zwar zum Teil andere Schwierigkeiten im Lösungsprozess hatte als Manfred, dennoch stammen die beobachteten Probleme aus den Bereichen des Situationsverstehens und der Ausführung der Rechenoperationen und können in das bestehende Schwierigkeits-Modell integriert werden.

Analyse von Olivers Handlungsstrategien im Lösungsprozess

Olivers Bemühungen, die beim Lösen der Aufgabe Zuckerhut entstandenen Verstehensschwierigkeiten zu überwinden, sind erfolglos geblieben. Ein wichtiger Unterschied zwischen Olivers und Manfreds Bearbeitungsstrategien besteht darin, dass Oliver *keine Skizze gezeichnet hat* und sie demzufolge *nicht beschriften* konnte. Die Skizze hätte ihm helfen können, Probleme mit dem Situationsmodell zu identifizieren und den Satz des Pythagoras zu erkennen. Die Strategie „Skizze zeichnen" und die Gründe der Anwendung dieser Strategie sind Oliver bekannt. Er sagt von sich aus im Interview (I_O 10:42): *„Wir hätten noch eine Zeichnung dazu machen sollen, um zu wissen halt, wie das aufgebaut ist."*

Warum wurde keine Skizze gezeichnet? Vermutlich ist diese Strategie nicht tief genug als Hilfsstrategie bei Verstehensschwierigkeiten in Olivers Bewusstsein verankert. Die anderen Handlungsstrategien – ausgewählte Textstellen lesen, den Partner fragen, die Situation durch Bewegungen veranschaulichen und diese mit eigenen Worten erfassen – erweisen sich bei Oliver als nicht ausreichend für das Verstehen der Aufgabe und für die nachfolgende Identifikation des Satzes des Pythagoras.

Anders hingegen verläuft das Erkennen der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur. Oliver erkennt beim zweiten Lesen den Zusammenhang zwischen der Zeit und der Geschwindigkeit. Er versucht die Seilbahnlänge daraufhin zu berechnen. Für die Identifikation der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Relation benötigt Oliver somit keine Skizze.

Bei der Berechnung der Weglänge schreibt Oliver seine Überlegungen nicht auf. Vermutlich würde ihm die Umrechnung der Stunden in Minuten gelingen, wenn er eine schriftliche Do-

[18] Unter nicht dezimaler Einteilung der Stunden in die Minuten ist eine historischbedingte Gegebenheit gemeint. Während in einem Euro 100 Cent, in einem Meter 100 cm etc. enthalten sind, besteht eine Stunde nur aus 60 Minuten.

kumentation seiner Gedanken führen würde. Wie für Manfred wäre es dann auch für Oliver möglich, die vorhandenen Strukturen anhand der Dokumentation seiner Gedanken zu analysieren und den fehlenden Baustein zu finden. Olivers Partner hilft ihm, die aufgetretene Schwierigkeit zu umgehen, indem er das Wort „Dreisatz“ sagt und empfiehlt, statt einer Stunde 60 Minuten aufzuschreiben. Bei Oliver wird so das Dreisatz-Schema aktiviert und er berechnet die gesuchte Länge ohne Probleme.

Tabelle 5. Übersicht: Olivers Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut

Handlungsstrategien	**Kommt vor**
Bearbeitungsstrategien	
Wiederholung (z.B. nochmaliges Lesen ausgewählter Textstellen)	ja
Elaboration (z.B. sich an ähnliche Aufgaben erinnern)	ja
Organisation (z.B. Erfassen der Angaben mit eigenen Worten.)	ja, verbal nein, ikonisch
Metakognitive Strategien	
Planung des Lösungsprozesses	nein
Kontrolle des Ergebnisses und des Lösungsprozesses (z.B. Kontrolle des Zwischenergebnisses und Kontrolle des Gelesenen.)	ja
Regulation des Lösungsprozesses (z.B. werden nach den Anregungen des Partners andere mathematische Verfahren angewandt).	ja
Ressourcenstrategien	
Strategien für das kooperative Lernen (z.B. Partner fragen)	ja

Auch bei Oliver findet man eine Vielfalt von Strategien. Wie bei Manfred fehlt auch hier die Planung des Lösungsprozesses. Eine weitere Auffälligkeit besteht darin, dass Oliver eine zeichnerische Rekonstruktion der Realsituation (Skizze) nicht anwendet. Gegenüber Manfred sind bei Oliver einzelne Strukturen im Denken klarer verfügbar, haben also eine größere operative Qualität.

Analyse der Schlüsselstelle im Lösungsprozess

Ein Fortschritt von Olivers Lösung gegenüber der von Manfred liegt in der Identifikation der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur. Da Oliver jedoch den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Weg und Zeit kennt (vgl. I_O 3:01kann er diese Struktur durch die Anwendung des gelernten Schemas aktivieren.

Ein fehlerhaftes Situationsmodell hat es Oliver nicht erlaubt, die Aufgabe Zuckerhut richtig zu lösen. Vermutlich sollte er beim Bearbeiten von Aufgaben häufiger eine schriftliche Repräsentationsform für seine Überlegungen anfertigen. Diese Strategie könnte ihm beim Lösen der Aufgabe Zuckerhut helfen, sowohl das richtige Situationsmodell zu konstruieren als auch die Weglänge zu berechnen, die die Seilbahn in 3 Minuten mit 30 km/h zurückgelegt.

Didaktisch gesehen ist bei Oliver keine durchgängige schrittweise Hilfe bei dem Durcharbeiten der Lösung nötig. Es kann vermutet werden, dass eine punktuelle Unterstützung bei der Konstruktion des Situationsmodels (Rückstellung der perspektivisch verzehrten Sicht, Hinweis auf „Talstation“) ihm zu eigentätigem Weiterarbeiten verhelfen könnte.

4.3.3 Aufgabe Zuckerhut. Fallskizze Bernd, Kompetenzstufe 3

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Zuerst liest Bernd den Aufgabentext vor. Wie auch Oliver will Bernd mit Hilfe der Geschwindigkeits-Zeit-Angaben die Streckenlänge ausrechnen. *„Erstmal gucken, wie viel […] in drei Minuten wie viel Kilometer“* (AB_B 1:25) Er weiß zu diesem Zeitpunkt nicht, wie die Angaben miteinander zusammenhängen, will jedoch anfangen zu rechnen. Bernds Partner unterbricht ihn und schlägt vor, erst die Skizze zu zeichnen. Bernd stimmt sofort zu. Beim Zeichnen stellt sich heraus, dass die Seilbahn bei Bernd nur zum Berghang und nicht zur Bergspitze fährt. Als Bernds Partner ihn fragt: *„Und der Höhenunterschied hundertachtzig ist von [...] mmm von wo nach wo?“*, antwortet Bernd: *„Also von hier unten nach da würde ich mal sagen oder?“* (AB_B 3:18) (Siehe Abbildung 35).

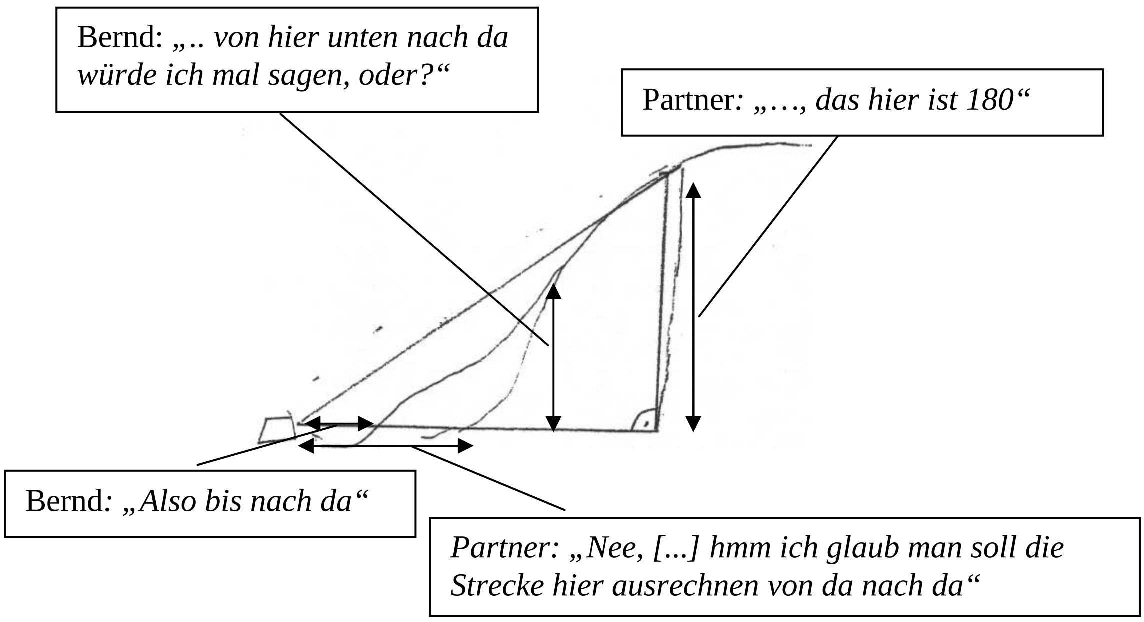


Abbildung 35. Skizze von Bernd zur Aufgabe Zuckerhut

Bernds Partner: *„Ich würde sagen, das hier ist hundertachtzig“ (siehe Abbildung 35). Bernd: „Stimmt, ist ja ganz oben“* (AB_B 3:43). Auch mit der Konstruktion von Pelligrinis Fußweg hat Bernd Probleme. Er überlegt sich, ob Seilbahn- und Fußweg ungefähr parallel verlaufen und gleich lang sind. In seinen Überlegungen geht er von einem schiefen, breiten Berg aus und Pelligrini muss dementsprechend in Bernds Situationsmodell also bis zum Fuß des Berges nicht weit laufen. Bernd: *„Also bis nach da“ (siehe Abbildung 35).* Bernds Partner: *„Nee, [...] hmm ich glaub man soll die Strecke hier ausrechnen von da nach da“ (siehe Abbildung 35)* (AB_B 4:51). Nachdem der Höhenunterschied eingezeichnet wurde, erkennt Bernds Partner das Dreieck. Bernd identifiziert nun einen rechten Winkel im Dreieck. Sein Partner erklärt ihm, dass in der Aufgabe die untere Kathete im Dreieck gesucht ist. Bernd schaut sich das Foto an, um die Überlegungen seines Partners zu überprüfen und sagt: *„Ach so, stimmt ja, weil das ist ja da (zeigt auf das Foto zur Aufgabe Zuckerhut)“* (AB_B 5:05). Die Betrachtung des Fotos überzeugt ihn, dass die untere Kathete im Dreieck als Pelligrinis Fußweg angesehen werden kann. Anschließend beginnen die beiden Schüler, die untere Kathete im Dreieck zu suchen. Mit der Identifikation und Konstruktion der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur hat Bernd keine Schwierigkeiten. Er geht davon aus, dass 3 Minuten ein Zwanzigstel einer Stunde ist und will deshalb 30 km · 1/20 rechnen. Sein Partner besteht jedoch auf der Anwendung einer Formel, die allerdings keiner der beiden Schüler nennen kann. Bernd probiert, die Zahlen mit einfachen Rechenoperationen zu kombinieren und überprüft das Ergebnis stets auf Plausibilität, findet jedoch keine passende Formel und notiert dann seinen vorher entwickelten Lösungsweg und das berechnete Ergebnis (AB_B 11:53).

$$30km \cdot \frac{1}{20} h = 1{,}5$$

Obwohl Bernd das rechtwinklige Dreieck erkennt, wendet er darauf nicht den Satz des Pythagoras an. Bernd sagt: *„Da fehlt doch noch ein Winkel oder?“* (AB_B 5:44). Bernds Partner schlägt vor, die untere Kathete mit dem Satz des Pythagoras zu berechnen. Beim Ausführen der Berechnungen mit Hilfe des Satzes des Pythagoras vergessen Bernd und sein Partner die Wurzel aus dem Ergebnis zu ziehen. Beim Aufschreiben fällt Bernds Partner dieser Fehler auf und sie korrigieren das Ergebnis auf ungefähr 1,49 km.

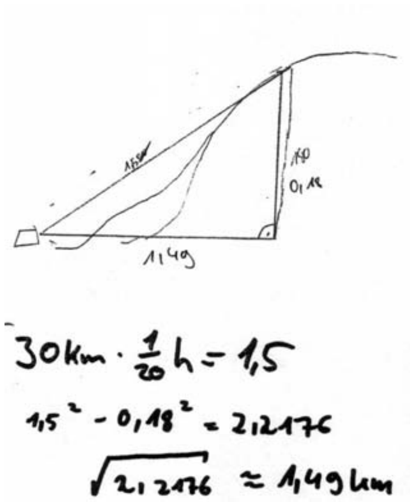


Abbildung 36. Lösung der Aufgabe Zuckerhut von Bernd und seinem Partner

Analyse von Bernds Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Lesen und Verstehen der Textaufgabe. Wie Manfred und Oliver hat auch Bernd Schwierigkeiten, die Aufgabe zu verstehen. Er konstruiert den Seilbahnweg und Pelligrinis Fußweg z.T. falsch. Ursache seiner Fehlkonstruktion ist, dass von ihm in der Aufgabe Zuckerhut Informationen aus dem Bild vernachlässigt wurden. Auf dem Bild ist ein steiler Berg zu sehen. Bernd hat die im Text fehlenden Informationen zum Seilbahnweg und zu Pelligrinis Fußweg ohne Überprüfung ergänzt und so eine unpassende Annahme über die Lage der Bergstation und über die Breite des Berges getroffen. Mit der Zuordnung der 12 Minuten und der Identifikation der Fragestellung hat er in seinem Situationsmodell keine Probleme.

Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur. Beim Erkennen des Zusammenhangs zwischen den Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck zeichnet sich bei Bernd folgendes Muster ab:

Die erste Voraussetzung für das Erkennen des Satzes des Pythagoras ist die Identifikation der Dreiecksstruktur. Die zweite Voraussetzung ist, das Erkennen des rechten Winkels im Dreieck. Die dritte Voraussetzung ist, das Wissen über die Verknüpfung zwischen dem Satz des Pythagoras und dem rechtwinkligen Dreieck und ihre Aktivierung in der entsprechenden Situation.

Die erste und die dritte Voraussetzung haben Bernd für das Erkennen des Satzes des Pythagoras gefehlt. Mit der Identifikation und Rekonstruktion der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur hat er hingegen keine Probleme.

Umformung mathematischer Strukturen und Ausführung der Rechenoperationen. Um die gesuchte Größe auszurechnen, vollzieht Bernd die mehrschrittige Umformung der Pythagoras-Gleichung. Dabei vergisst er, die Wurzel zu ziehen. Damit wird die in der Pythagoras-Struktur vorhandene Lücke – Länge der unteren Kathete – durch eine falsche Zahl geschlossen. Beim Aufschreiben bemerkt Bernds Partner diesen Fehler und korrigiert ihn. Die Bestimmung der Weglänge in der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur gelingt Bernd ohne Schwierigkeiten. Er wird jedoch von seinem Partner verunsichert, der Bernds Lösungsweg nicht verstanden hat. Diese Unsicherheit bewegt Bernd dazu, nach einer anderen Lösungsmöglichkeit, einer passenden Formel, zu suchen. Da diese Suche erfolglos bleibt, greift er auf seine Überlegungen zurück und rechnet die Seillänge richtig aus.

In Bernds Lösungsprozess treten neue Probleme auf: Seine Schwierigkeiten bei der Konstruktion des Situationsmodells und ein Fehler bei der Ausführung der Rechenoperation unterscheiden sich von denen, die Manfred und Oliver hatten. Diese Beobachtungen erlauben es, die aufgabenspezifischen Schwierigkeiten der Schüler zu ergänzen. Dennoch können sie in das bestehende Kategoriensystem integriert werden.

Analyse von Bernds Handlungsstrategien im Lösungsprozess

Die Aufgabenbearbeitung beginnt bei Bernd anders als bei Oliver und Manfred. Es genügt Bernd, den Text einmal vorzulesen, um sich einen Überblick über die Aufgabenstellung zu verschaffen. Es fällt auf, dass Bernd zwar wie die anderen Schüler die ausgewählten Stellen ein zweites Mal liest, jedoch *erfasst er das Gelesene sofort mit eigenen Worten* (siehe oben AB_B 01:25). Wie auch Oliver erkennt Bernd sehr schnell die Möglichkeit, die Länge des Weges, den die Seilbahn in 3 Minuten zurücklegt, auszurechnen und möchte das sofort umsetzen. Er fragt dennoch seinen Partner nach dessen Meinung. Seinen Vorschlag, eine Skizze zu zeichnen**,** nimmt Bernd mit dem Kommentar: *„Erst mal Zeichnung“* AB (02:06) an. An dieser Stelle wollte Bernd erst die Länge des Fahrtwegs berechnen, indem er die entdeckte Relation zwischen der Fahrzeit und dem Fahrtweg in eine mathematische Operation übersetzt und diese ausgeführt hätte. Dies wollte Bernd machen, noch bevor er die Aufgabe in allen Einzelheiten verstanden hat. Eine solche Schlüsselwortstrategie (key words strategy) birgt die Gefahr, dass der Leser die gegebene Situation in der Aufgabe vernachlässigt und einen Rechenweg durchführt, der für die Beantwortung der gestellten Frage irrelevant ist. Die klassische Schlüsselwortstrategie orientiert sich an einzelnen Schlüsselwörtern (z. B. mehr, weniger) beim Lösen einer Aufgabe (vgl. Mayer & Heagarty, 1996; Reusser & Stebler, 1997). Bernd wendet eine Variation dieser Strategie an, die sich an den ausgewählten Sätzen orientiert, weniger Vermutungen erfordert und somit eine höhere Qualität hat. Dennoch ist es nach dem Erkennen einer Rechenmöglichkeit empfehlenswert, diese zunächst im Hinterkopf zu behalten und weiter am Verstehen der gegebenen Aufgabensituation zu arbeiten. So geht Bernd weiter bei der Aufgabenbearbeitung vor. Das Zeichnen einer Skizze und ihre Beschriftung ist eine strategische Handlung, die Bernd hilft, seine Verständnissschwierigkeiten auszuräumen. Eine Analyse der Skizze ermöglicht es Bernd und seinem Partner, die Pythagoras-Struktur zu erkennen. Neu ist eine strategische *Planung* – eine metakognitive Strategie –, die bei Bernd zu beobachten ist. Er sagt: *„Die (Hypotenuse) können wir ausrechnen“* (AB_B 5:38). Er rechnet sie aber nicht aus, sondern er überlegt erst den nächsten Schritt. Somit wird der Lösungsablauf planerisch antizipiert, bevor er ausgeführt wird.

Beim Erkennen der Pythagoras-Struktur hilft Bernd das Zeichnen und Analysieren der Skizze. Welche strategischen Handlungen eine Identifikation der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur unterstützen, konnte aus den Beobachtungen nicht erschlossen werden. Eine neue Strategie zeigt Bernd bei der Suche nach einer passenden Formel für die Rekonstruktion der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Relation. Da er keinen Anhaltspunkt hat, versucht Bernd die Formel über *eine Überprüfungsstrategie* zu finden. Bernd verbindet die angegebenen Zahlen mit verschiedenen mathematischen Operationen und schaut, ob das Ergebnis realistisch ist. Schließlich gibt er diese ineffiziente Strategie auf und schreibt seinen eigenen Lösungsweg nieder.

Wie bei den Schwierigkeiten zu Fall 3 bereits beschrieben, erweist sich eine Externalisierung der Gedanken in schriftlicher Form für die Transformation der Pythagoras-Struktur als hilfreich. Beim Aufschreiben der Berechnungen bemerkt Bernds Partner, dass beide vergessen haben, die Wurzel zu ziehen und korrigiert diesen Fehler.

Eine weitere metakognitive Strategie in Bernds Strategie-Repertoire ist die Kontrolle des Lösungsprozesses. Ähnlich wie Manfred weist er auf die Notwendigkeit hin, die Lösung zu dokumentieren: *„Schreiben wir mal […] den Rechenweg hin“* (AB 11:36)

Bernds Handlungsstrategien beinhalten eine neue, effektive Funktion – die Planung der Lösungsschritte. Die Fixierung seiner Gedanken in Form einer Skizze oder einer schriftlichen Dokumentation des Lösungswegs helfen ihm, die Verstehenshürden zu überwinden und bestätigen damit die Effizienz dieser Lösungsstrategie. Die symbolische und ikonische Externalisierung von Bernds Gedanken ermöglicht ebenso eine Kontrolle des Lösungsprozesses, da aufgeschriebene Informationen leichter überprüfbar sind als mündliche Informationen. Dagegen ist eine Überprüfungsstrategie eine ungeeignete Strategie zur Lösung der Aufgabe Zuckerhut. Obwohl diese Strategie eine hochwertige metakognitive Strategie – Kontrolle des Ergebnisses – beinhaltet, bietet sie bei Modellierungsaufgaben wenig Aussicht auf Erfolg. Bei den überbestimmten und unterbestimmten Aufgaben wie Zuckerhut, die überflüssige Angaben enthalten und zugleich das Treffen von Annahmen erfordern, ist der Einsatz dieser Strategie nicht angemessen. Bei der Beurteilung der Strategiewirksamkeit geht es somit nicht primär um die Strategieart sondern viel mehr um einen situationsadäquaten Einsatz. Es kann daher nicht pauschal über einen effektiven vs. ineffektiven Strategientyp gesprochen werden.

Tabelle 6. Übersicht: Bernds Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut

Handlungsstrategien	**Kommt vor**
Bearbeitungsstrategien	
Wiederholung (z.B. nochmaliges Lesen ausgewählter Textstellen)	ja
Elaboration (z.B. sich an ähnliche Aufgaben erinnern)	ja
Organisation (z.B. Erfassen der Angaben mit eigenen Worten. Zeichnen und Beschriften einer Skizze)	ja
Metakognitive Strategien	
Planung des Lösungsprozesses (z.B. obwohl Bernd erkannt hat, dass die Hypotenuse mit Hilfe der Geschwindigkeit- und Zeitangaben ausgerechnet werden kann, plant er erst den nächsten Lösungsschritt. AB_B 05:38)	ja
Kontrolle des Ergebnisses und des Lösungsprozesses (z.B. Kontrolle des Zwischenergebnisses und Kontrolle des Gelesenen.)	ja
Regulation des Lösungsprozesses (z.B. wird der Lösungsprozess unterbrochen, um den Lösungsweg zu schriftlich festzuhalten).	ja
Ressourcenstrategien	
Strategien für das kooperative Lernen (z.B. Partner fragen)	ja

Bernd unterscheidet sich von Manfred und Oliver nicht in der Vielzahl der eingesetzten Lösungsstrategien, jedoch in den großräumigen, auf die ganze Aufgabe bezogenen Gebrauch von Strategien.

Analyse der Schlüsselstelle im Lösungsprozess

In Bernds Lösungsprozess gibt es mehrere Schlüsselstellen. Beim Verstehen hilft es Bernd, eine Skizze zu zeichnen. Die Skizze hat dabei eine doppelte Funktion: Erstens bringt die Skizze Bernds Lösungsprozess voran und zweitens dient sie als Grundlage für einen ko-konstruktiven Austausch zwischen Bernd und seinem Partner.

Eine neue Strategie, die bei Bernd zu erkennen ist, ist die Planung des Lösungsprozesses. Bernd erarbeitet zunächst einen groben Entwurf der Lösungsstruktur, der dann im zweiten Durchlauf konkretisiert wird.

Bernd arbeitet in seinem Lösungsprozess auf zwei Ebenen: auf der Bearbeitungsebene bildet er früh leitende Strukturelemente und aktiviert sie probehandelnd. Zugleich zeigt sich die Mobilität seines Denkens, indem er bestimmte Rechenschritte vorstellungsmäßig vollzieht. Auffällig ist auch seine Bereitschaft auf korrigierende Hinweise seines Partners einzugehen. Neben diesem Arbeitsverhalten auf der Bearbeitungsebene verliert Bernd nicht die Aufgabenstellung aus dem Blick. Dadurch werden ihm planende und kontrollierende Aktivitäten möglich, die schließlich zur Lösung führen.

4.3.4 Aufgabe Zuckerhut. Fallskizze Kathrin, Kompetenzstufe 4

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Kathrins Partner liest die Aufgabe laut vor und nach einer langen Pause fragt er, ob sie eine andere Aufgabe nehmen sollen. Kathrin bittet ihn, einen Moment zu warten und liest für sich in der Zwischenzeit lautlos den Aufgabentext. Schließlich wiederholt Kathrins Partner die Angaben aus dem Text mit eigenen Worten und sagt zu Kathrin *„Reden!“*, worauf Kathrin erwidert: *„Ich rede gleich! Ich muss erst nachdenken, ok?“* (AB_K 2:55). Dann nennt Kathrin zwei alternative Wege, die von der Talstation zum Berggipfel führen: der eine mit der Seilbahn, der andere zu Fuß (AB_K 3:04).

> Kathrin: *„Ja, ist das nicht [...] von der Talstation bis zum Gipfel 3 Minuten? Und dieser Pelligrini“. (Zeigt mit ihrem Stift in den Aufgabentext.)*
>
> Kathrins Partner: *„von der Talstation über die Ebene dann da hoch.“*
>
> Kathrin: *„in 12 Minuten“.*

Dabei ordnet sie Pelligrinis komplettem Fußweg fälschlicherweise die Zeitangabe von 12 Minuten zu. Ihr Partner korrigiert sie. Kathrins Partner: *„In zwölf Minuten hoch. [....] Der Weg vorher nicht mitgerechnet“* (AB_K 3:26). Kathrin schreibt die ihrer Meinung nach für einen Lösungsweg wichtigen Angaben heraus, konzentriert sich jedoch auf die Zeit und vernachlässigt die Geschwindigkeit der Seilbahn und den von der Seilbahn zu überwindenden Höhenunterschied (AB_K 3:50).

„Tal → Berg 3 min

Tal → Berg 12 min“.

Kathrins Partner erklärt ihr den räumlichen Aufbau der Situation und veranschaulicht seine Erklärungen mit Handbewegungen. Kathrin reagiert erfreut auf seine Erklärungen: *„Hey* *cool!"* (AB_K 4:46). Im Interview erklärt sie, dass sie in diesem Moment verstanden hat, wie die Seilbahn fährt und wie Pelligrini zu Fuß geht. *„Also da ist mir jetzt langsam so gedämmert, was da jetzt so, was die genau meinen"* (I_K 7:10). Kathrin fertigt die Skizze an, beschriftet sie jedoch nicht (vgl. Abbildung 37).

Abbildung 37. Skizze von Kathrin zur Aufgabe Zuckerhut

In der Skizze erkennt Sie weder die Pythagoras-Struktur noch die Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur. Auf die Frage ihres Partners, ob sie die gesuchte Strecke im rechtwinkligen Dreieck ausrechnen sollen, sagt Kathrin, dass sie nur eine Kathetenlänge im Dreieck kennt. *„Was willst du da rechnen, wenn du nur eine Zahl kennst?"* (AB_K 7:00). Auch nach der Hilfsfrage des Partners, wie weit man in drei Minuten mit 30 km/h kommt, kann Kathrin die Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur nicht erkennen und rekonstruieren. Kathrins Partner: *„Wie viel kommt man in drei Minuten mit dreißig kmh?"* Kathrin: *„Keine Ahnung"* (AB_K 7:25). Erst nachdem Kathrins Partner den Begriff Geschwindigkeit operativ als 30 Kilometer in einer Stunde deutet, versteht Kathrin, welchen Zusammenhang dieser Begriff beinhaltet. Sie schreibt (AB 7:33):

1h	3 min
30 km	

Daraufhin berechnet Kathrins Partner 1500 Meter für die Hypotenuse. Nachdem die Hypotenusenlänge im Dreieck ausgerechnet wurde, identifiziert Kathrin den Satz des Pythagoras als eine zum Ergebnis führende mathematische Operation und schreibt den Satz des Pythagoras auf. Nach einer langen Diskussions- und Überlegungsphase schließt Kathrin aus der Anmerkung ihres Partners über die unterschiedliche Lauf- und Bergbesteigungsgeschwindigkeit, dass der Berg spitz sein muss. Kathrins Partner: *„In zwölf Minuten hundertachtzig Meter ist nicht gut"*. Kathrin: *„Ja aber es heißt doch, dass der Berg sehr steil ist, und wenn der Berg sehr steil ist, dann ist da nicht so viel, was da mehr ist, dann können wir das auch so machen."* (Unter „mehr" ist die Breite des Berges gemeint) (AB_K 11:30). Sie stimmt somit seinem Vorschlag zu, die Breite des Berges zu vernachlässigen. Bei der Berechnung der zweiten Kathete im Dreieck erhält Kathrin zufällig nur 180 m als Ergebnis, beachtet aber nicht, dass 180 m bei einer 1500 m lange Hypotenuse und einer 180 m langen anderen Seite zu wenig sind. Nach dem Hinweis des Partners berechnet sie erneut die untere Kathete richtig.

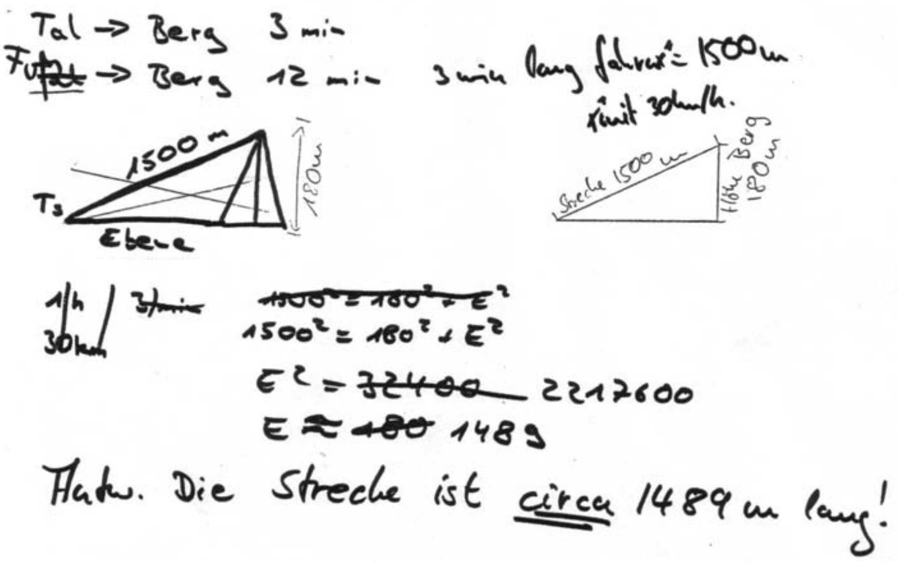


Abbildung 38. Lösung der Aufgabe Zuckerhut von Kathrin und ihrem Partner

Analyse von Kathrins Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Kathrin hat im Lösungsprozess viele Probleme und ihre Lösungsentwicklung wird stark von ihrem Partner beeinflusst. Trotz dieser Schwierigkeiten lässt sich Kathrin nicht von ihrer eigenen Konstruktion ablenken und verdeutlicht im Interview, dass sie den Lösungsweg in allen Einzelheiten verstanden hat. Die Hauptschwierigkeiten im Lösungsprozess liegen bei Kathrin im Textverständnis und beim Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur.

Lesen und Verstehen der Textaufgabe. Gleich zu Beginn fällt es Kathrin schwer, *„den Zugang zu der Aufgabe zu finden“* (I_K 1:52). Sie hat Probleme mit der Konstruktion des Seilbahnwegs und dem Weg von Pelligrini, ordnet eine Angabe (12 Minuten) falsch zu und kann nur mit Mühe die Fragestellung formulieren.

Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur. Kathrin erkennt nicht die Anwendungsmöglichkeit des Pythagorassatzes, kann aber diese Gleichung rekonstruieren, nachdem der Partner ihr hilft. Die Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur bleibt für sie nicht erkennbar und nicht rekonstruierbar.

Umformen mathematischer Strukturen und Ausführung der Rechenoperationen. Bei der Umformung mathematischer Strukturen und der Ausführung mathematischer Operationen hat

Kathrin keine Probleme. Der Fehler, den sie bei den Berechnungen begangen hat, ist ein Flüchtigkeitsfehler.

Analyse von Kathrins Handlungsstrategien im Lösungsprozess

Kathrins Bearbeitung der Aufgabe Zuckerhut zeigt einige Schwierigkeiten im strategischen Bereich. Die ersten 3 Minuten der Aufgabenbearbeitung liest Kathrin den Aufgabentext still und sagt nichts dazu. Erst nach Aufforderung des Partners (*„Reden!“*, AB 02:52) fängt sie an, ihre Gedanken zu verbalisieren. Kathrins Anmerkung im Interview zur Suche eines Zugangs zur Aufgabe bestätigt die Annahme, dass ein Mangel an Bearbeitungsstrategien in der ersten Phase des Textverstehens herrscht. Nachdem das Schweigen gebrochen wurde, zeigt Kathrin die Vielfältigkeit ihrer Handlungsstrategien. Zu den schon genannten Strategien kommt eine neue Organisationsstrategie. Kathrin schreibt die ausgewählten Informationen heraus und ordnet dabei die Zeit den bekannten Strecken zu.

„Tal → Berg 3 min,
Tal → Berg 12 min“.

Bei der Auswahl der Informationen aus dem Text konzentriert sie sich jedoch auf die Zeit- und nicht auf die Längenangaben. Dies lässt vermuten, dass ihre Auswahl der lösungsrelevanten Angaben nicht durch die Fragestellung geleitet wird. In der Fragestellung ist nach der Länge des Wegs und nicht nach der Zeit gefragt. Die Ausrichtung der Bearbeitungsstrategie auf einen für die Lösung irrelevanten Aspekt (Zeit) bringt Kathrin in der Lösungsentwicklung nicht weiter. Dann wendet Kathrin eine andere Strategie an: Sie zeichnet – den Erklärungen ihres Partners folgend – eine Skizze. Auch diese Handlungsstrategie erweist sich als nicht förderlich für das Verstehen der Aufgabe. Kathrin weiß z.B. nicht, welche Strecke in der Skizze den Seilbahnweg darstellt. *„Tausendfünfhundert. Das oder das? (Zeigt auf die Hypotenuse und dann auf die Kathete „Ebene*“)“ (AB_K 08:17). Warum ist das Zeichnen einer Skizze bei Kathrin nicht effektiv? Vergleicht man Kathrins Bearbeitungsstrategien mit denen der anderen Schüler, stellt sich folgender Unterschied heraus: Während die anderen Schüler sukzessiv die Informationen aus dem Text und dem Bild in die ikonische Form übertragen und die Skizze beschriften, notiert Kathrin die Gedanken ihres Partners.

Obwohl die in der Aufgabe enthaltenen mathematischen Verfahren (Satz des Pythagoras und proportionale Zuordnung) Kathrin aus dem Unterricht bekannt sind, ist sie auch beim Erkennen dieser Strukturen im Lösungsprozess auf ihren Partner angewiesen. Die Rekonstruktion der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur überlässt sie ihrem Partner. Den Satz des Pythagoras rekonstruiert Kathrin selbst und ohne Schwierigkeiten.

Die Umformung der Pythagoras-Struktur gelingt Kathrin ohne weiteres bis auf einen Flüchtigkeitsfehler. Eine Kontrolle des Ergebnisses führt sie allerdings nicht durch. Es scheint Kathrin zwar ungewöhnlich, dass die zweite Kathete auch 180 m lang ist, jedoch hätte sie ohne Hinweis ihres Partners das falsche Ergebnis unverändert gelassen. Sie sagt später im Interview (I_K 26:02*) „Es (das Ergebnis) kam mir nur komisch vor. […]mir war das nicht so wirklich klar, dass es falsch ist“*.

Der Fall Kathrin zeigt, dass sowohl die Auswahl der Strategien als auch ihre Ausführungen für die Lösungsentwicklung wichtig sind. Im metakognitiven Bereich ist keine bewusste Planung des Lösungsprozesses zu sehen. Überwachung und Evaluation des Lösungsprozesses sind bei Kathrin auf die Handlungen des Partners gerichtet. Kathrin bezieht, wie auch andere Schüler, das Bild zu wenig in die Bearbeitung ein und merkt erst am Ende der Aufgabenbearbeitung die spitze Form des Berges.

Tabelle 7. Übersicht: Kathrins Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut

Handlungsstrategien	**Kommt vor**
Bearbeitungsstrategien	
Wiederholung (z.B. nochmaliges Lesen ausgewählter Textstellen)	ja
Elaboration	ja
Organisation (z.B. Erfassen der Angaben mit eigenen Worten. Zeichnen und Beschriften einer Skizze)	ja
Metakognitive Strategien	
Planung des Lösungsprozesses	nein
Kontrolle des Ergebnisses und des Lösungsprozesses (z.B. Kontrolle des Zwischenergebnisses und Kontrolle des Gelesenen.)	ja
Regulation des Lösungsprozesses (z.B. wird der Lösungsprozess unterbrochen, um den Lösungsweg schriftlich festzuhalten).	ja
Ressourcenstrategien	
Strategien für das kooperative Lernen (z.B. Partner fragen)	ja

Im Kathrins Verhalten zeigt sich im Gegensatz zu ihrem Partner von Anfang an die Absicht, die Aufgabe Zuckerhut zu lösen. Im Lösungsprozess selbst verhält sie sich reaktiv, hier stammen die entscheidenden Strukturelemente von ihrem Partner. Kathrin hat keine Schwierigkeit, die von ihm kommenden Impulse in den Lösungsprozess umzusetzen. Auch die Transformation der Realsituation in das mathematische Modell und schließlich in die Berechnungen macht ihr – abgesehen von einem Rechenfehler – keine Schwierigkeiten. Die Lösung entpuppt sich als eine gemeinsame Leistung von Kathrin und ihrem Partner, wobei schwer zu erkennen ist, worin Kathrins Eigenanteil an der Gesamtlösung besteht und welche Rolle die Beziehung zu ihrem Partner spielt.

Analyse der Schüsselstelle im Lösungsprozess

Eine wichtige Erkenntnis aus den Beobachtungen von Kathrins Lösungsprozess ist, dass eine Strategie nur Erfolg bringt, wenn sie richtig eingesetzt wird. Zum Beispiel ist das Zeichnen einer Skizze wesentlich effektiver, wenn ein Schüler eigene Gedanken zur Papier bringt. Das Notieren von Gedanken eines anderen, wie bei Kathrin beobachtet wurde, hilft hingegen nicht, das Situationsmodell zu konstruieren.

Da Kathrins Partner die Lösungen schneller findet, läuft der ko-konstruktive Austausch zwischen beiden Schülern einseitig. In dieser ungünstigen Situation gelingt es Kathrin, durch den Wechsel zwischen Nachfragen und Nachdenken die Ideen des Partners zu verstehen.

Zusammenfassung der Schüler-Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut

Anhand der Beobachtungen des Lösungsprozesses zur Aufgabe Zuckerhut konnten individuelle Schwierigkeiten der Schüler erfasst und allgemeinen Schwierigkeits-Kategorien zugeordnet werden (vgl. Abbildung 39). Die Lösungsprozesse der Schüler beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut werden nun mit dem Fokus auf die beobachteten Schüler-Schwierigkeiten neu interpretiert.

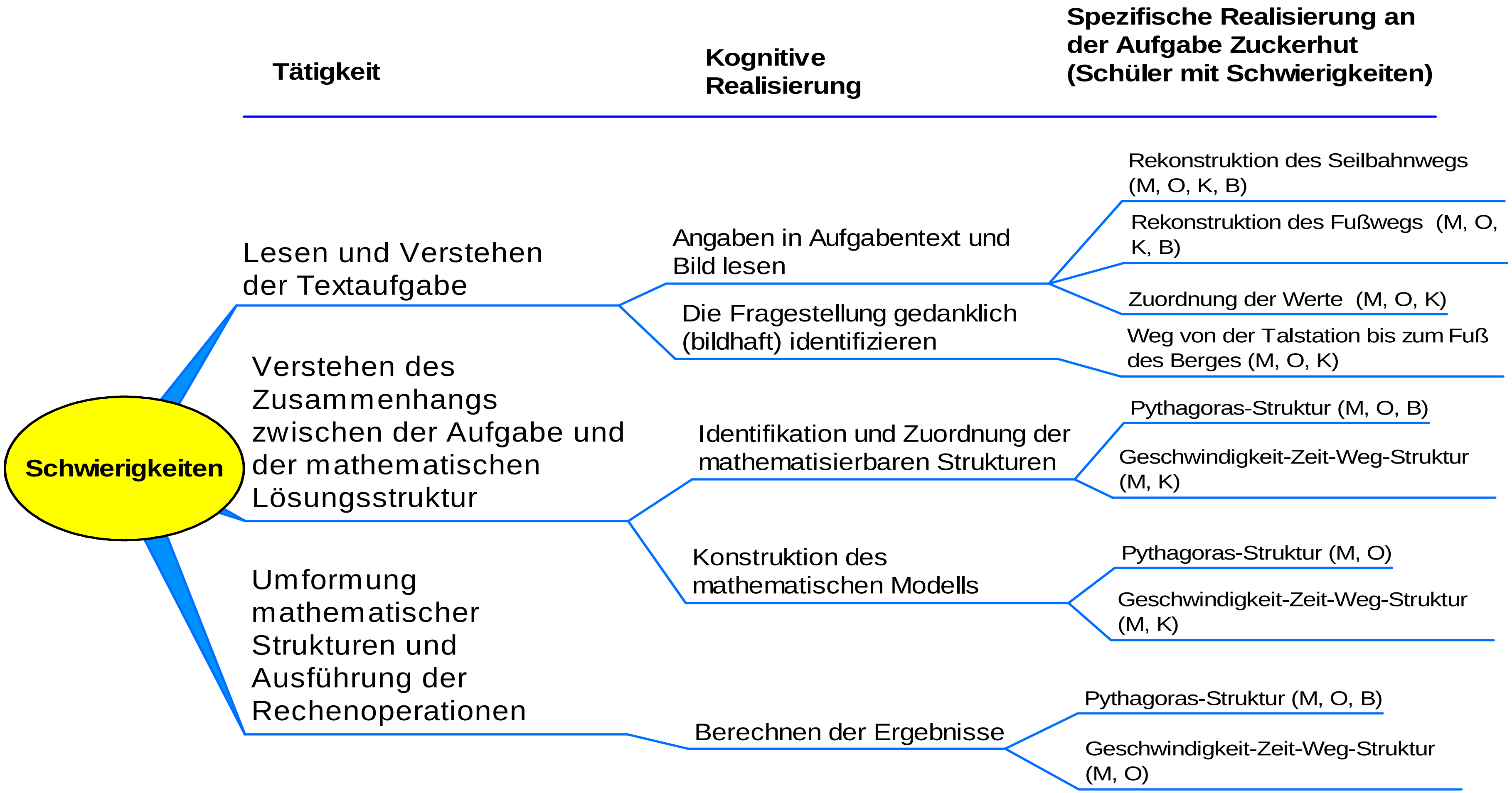


Abbildung 39. Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut

Die Analyse der empirischen Daten von vier Schülern hat gezeigt, dass die beobachteten Schüler am Anfang des Lösungsprozesses einige Probleme beim Lesen und Verstehen der Aufgabenstellung haben. Der Verstehensvorgang umfasst zwei Teilschritte: Die Angaben müssen erstens aus dem Text und aus dem Bild entnommen und zu einem kohärenten Situationsmodell zusammenfügt werden und zweitens muss die Fragestellung im Situationsmodell identifiziert werden.
Schon beim ersten Lesen der Aufgabe treffen die Schüler mögliche Vereinfachungen und wählen bestimmte Informationen aus dem Aufgabentext und dem Aufgabenbild aus. So konstruieren sie Schritt für Schritt ein mentales Situationsmodell, das zwei verschiedene Handlungen des Akteurs (Pelligrini) enthält: das Fahren mit der Seilbahn und die Bewältigung des Fußwegs. Die räumliche Vorstellung der Situation, die für die Kohärenz des Situationsmodells sehr wichtig ist, stellt eine anspruchsvolle Aufgabe dar und bereitet den Schülern die meisten Schwierigkeiten. Während der Konstruktion des Situationsmodells werden die Werte den Strecken zugeordnet, wobei die Zuordnung der 12 Minuten mehrere Schüler überfordert. Zum Schluss wird die Fragestellung in der aufgebauten Struktur identifiziert. Bei weiteren Lesevorgängen werden die vorhandenen Strukturen elaboriert, umstrukturiert, angereichert oder weiter vereinfacht.
Die nächste Schwierigkeitskategorie im Lösungsprozess ist, das Verstehen der Zusammenhänge zwischen der Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur. Der Problemlöser muss in diesem Schritt von der handlungsbezogenen, leicht vorstellbaren Ebene auf eine komplexere, abstrakte Ebene wechseln und die dahinter stehenden Zusammenhänge erschließen. Da die Handlungen in der Kategorie „Lesen und Verstehen der Textaufgabe" im Text beschrieben und als Momentaufnahme auf dem Foto veranschaulicht sind, besteht die Leistung des Lesers zunächst darin, sie zu identifizieren und miteinander zu verbinden. Nun muss im zweiten Schritt mit den abstrakteren Begriffen wie Länge, Zeit und Geschwindigkeit gearbeitet werden. Die Schüler bemühen sich, die Zusammenhänge zu erkennen und sie dann zu rekonstruieren. In der Aufgabe Zuckerhut sind es die Attribute: Länge, Geschwindigkeit und Zeit. Die mathematischen Zusammenhänge, die diese Attribute verbinden, sind: „Satz des Pythagoras" und „Proportionalität zwischen der Zeit und dem Weg bei konstanter Geschwindigkeit". Die oben genannten abstrakten Begriffe miteinander sinnvoll zu einer Struktur zu verbinden, stellt eine Herausforderung dar, die nicht alle untersuchten Schüler bewältigen können.
Im dritten Teil der Aufgabenbearbeitung wird die gesuchte Größe in der aufgebauten Struktur berechnet. Dafür wird diese Struktur neu organisiert und elaboriert. Die Organisation drückt

sich in der Umformung der Struktur aus. Die Elaboration besteht im Heranziehen der Umformungsregeln und im Ausführen der Rechenoperationen. In diesem Teil haben Schüler, die die vorherigen Anforderungen erfolgreich bewältigten, kaum Probleme.
Die beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut aufgetretenen Schwierigkeiten lassen sich somit als eine Abfolge von drei Tätigkeiten darstellen:
Lesen und Verstehen der Textaufgabe → Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur → Umformen mathematischer Strukturen und Ausführen der Rechenoperationen.
Jeder dieser aufeinander aufbauenden Teilprozesse enthält Schwierigkeiten deren Überwindung den eigentlichen Denk- und Lernprozess ausmacht. Die Dokumentation und die Kontrolle des Lösungsprozesses und der Ergebnisse[19] (einschließlich des sinnvollen Rundens und Validierens) sind auch Aspekte, die zweifellos den Lösungsprozess beeinflussen (vgl. Unterabschnitt 3.1.5). Sie sind unter dem Punkt Strategien zu finden.

Zusammenfassung der Schüler-Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut
Die beschriebenen Schwierigkeiten erfordern von Schülern Handlungen, die einen Lösungsprozess konstituieren. Im Mittelpunkt der folgenden Analyse steht die Wirksamkeit der Handlungen hinsichtlich der Lösungsentwicklung.
Alle vier untersuchten Schüler verfügen über unterschiedliche kognitive, metakognitive und kooperative Strategien. Die Analyse der Schlüsselstellen im Lösungsprozess zeigt, dass eine kognitive Organisationsstrategie (Skizze zeichnen und beschriften), eine metakognitive Strategie (Planung) und eine Kooperationsstrategie (Wechsel zwischen individueller Konstruktion und kooperativer Ko-konstruktion) entscheidende Fortschritte im Lösungsprozess bringen können. Bei der Beschreibung der Strategien wurden neben der Handlungsabfolge (Wie wird die Strategie angewandt?) auch Anwendungsbedingungen (Wann wird die Strategie angewandt?) und mögliche fehlerhafte Anwendungen dieser Strategie (Was kann ich dabei falsch machen?) herangezogen (siehe Tabelle 8). Die genannten Elemente der Strategieanwendung wurden durch empirische Analysen des Schülerverhaltens beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut aufgestellt.

Tabelle 8. Überblick über die Schüler-Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut

	Strategie	Anwendungsbedingungen	Handlungsabfolge	Nicht effektive Strategieanwendung
1.	Skizze zeichnen und beschriften	- bei Schwierigkeiten mit „Lesen und Verstehen der Aufgabe“ und „Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der math. Lösungsstruktur“ - Konstruktion von räumlichen Strukturen im Situationsmodell (wie z.B. Lage der Tal- und Bergstationen und Verlauf der Wege von der Tal- zur Bergstation) - Identifikation von geometrischen Strukturen (z.B. Dreieck)	- im Wechsel: mehrmaliges Lesen der Aufgabe, Einzeichnen der Teilstrukturen und ihrer Verbindungen	- Aufzeichnen von Gedanken anderer
2.	Planung	- bei Schwierigkeiten mit „Lesen und Verstehen der Textaufgabe“ und „Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der math. Lösungsstruktur“ - bei Aufgaben, deren Lösung mehrere Lösungsschritte erfordert	- Entwurf einer groben Lösungsstruktur (z.B. „Die Hypotenuse kann ich ausrechnen. Was mache ich dann weiter?“)	- sich in eine Lösungsabzweigung vertiefen - die Zielsetzung aus den Augen verlieren
3.	Wechsel zwischen individueller Konstruktion und kooperative Ko-konstruktion	- bei Schwierigkeiten in verschiedenen Lösungsphasen, wenn eine Hürde selbständig nicht überwunden werden kann	- sich in allen Phasen der Arbeit Zeit nehmen, eigenständig über Probleme nachzudenken, und dies gegenüber anderen zu vertreten; - Die Ergebnisse der individuellen Konstruktion anderen mitteilen und sich ihre Rückmeldungen anhören	- Meinung anderer unkritisch übernehmen - bei der Interaktion von der Sach- auf die Individualebene gehen

4.4 Analyse von Schwierigkeiten und eingesetzten Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung

4.4.1 Aufgabe Abkürzung. Fallskizze Manfred, Kompetenzstufe 1

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Manfreds Partner liest die Aufgabe Abkürzung (vgl. Abbildung 22) vor. Nach dem Vorlesen folgt eine lange stille Phase (ca. 50 Sekunden). Nach dieser Phase merkt Manfreds Partner an, dass der Weg über die Bundesstraßen bis zum Haus *„insgesamt 3,5 Kilometer“* lang ist (AB_M 23:18). Manfred stimmt zu und fragt anschließend, wie lang die Querallee ist. Darauf folgt die zweite stille Phase, die ca. 30 Sekunden dauert, und mit dem Vorschlag von Manfreds Partner beendet wird, die Länge der Querallee mit dem Satz des Pythagoras zu berechnen. Manfred sagt: „*Stimmt*“ (AB_M 24:26) und zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck (siehe Abbildung 40). Die Notwendigkeit eine Skizze zu zeichnen und zu beschriften, erklärt Manfred wie folgt: *„Es fällt leichter ins Auge, wenn man die Maße dran schreibt“* (I_M 49:51).

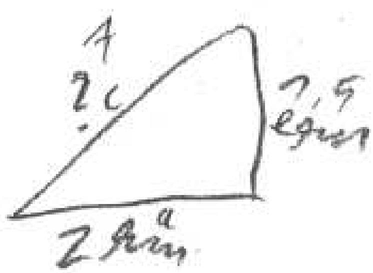


Abbildung 40. Skizze von Manfred zur Aufgabe Abkürzung

Beim Beschriften der Seiten des Dreiecks ordnet er die Längen 2,5 und 1,5 falschen Seiten zu. Dieser unerhebliche Fehler wird vom Partner korrigiert, der anschließend den Satz des Pythagoras formuliert: *„Zwei hoch zwei plus eins Komma fünf hoch zwei gleich c hoch zwei“* (AB_M 25:29). Manfred schreibt: *„$2^2=4$“ und „$2^2+1{,}5^2=c^2$“* (AB_M 25:56) und sagt: *„Dann wäre es sieben Kilometer“* (AB_M 26:14). Dieses falsche Ergebnis bekommt Manfred, weil er $(2)^2+(1{,}5)^2$ als (2+2)+(1,5+1,5) berechnet. Darauf reagiert der Partner mit der Anmerkung: *„Das kann nicht sein, weil du musst ja eins Komma fünf* mal *eins Komma fünf rechnen“*(AB_M 26:14). In dem Moment sagt der Versuchsleiter, dass die Schüler einen Taschenrechner benutzen können. Mit Hilfe des Taschenrechners multipliziert Manfred 1,5 mit 1,5 und bekommt als Resultat 2,25, das er neben dem rechtwinkligen Dreieck notiert (siehe Abbildung 41). Er addiert dann zu 2,25 die vier und kommt auf 6,25 Kilometer. *„Also würde er insgesamt [...] sechs Komma zwei fünf Kilometer auf der Querallee fahren“* (AB_M 26:54). Sein Partner erwidert: *„Du musst doch noch Wurzel daraus ziehen“* (AB_M 25:29) und schreibt die Umformung der Pythagoras-Gleichung wie folgt auf:

$$2^2+1{,}5^2=c^2$$

$$4+2{,}25=c^2$$

$$6{,}25=c^2 \quad |\sqrt{}$$

Dann erklärt er: *„Hier ist Wurzel“* (AB_M 27:43) und deutet dabei mit einem Zeigefinger auf das Wurzelzeichen. Manfred zieht die Wurzel aus der Zahl 6,25 und bekommt die Zahl 2,5.

Sein Partner notiert das Ergebnis: 2,5=c. Manfred ordnet die den Strecken die entsprechenden Geschwindigkeiten zu:

„2,5 = 30 kmh

3,5 = 70 kmh“

An dieser Stelle überlegt Manfred, wie lange der Weg nach Hause über die Abkürzung und über die Bundesstraßen dauert. Sein Partner weist darauf hin, dass die Ampel an der Kreuzung von Bundesstraßen rot sein kann. Manfred stimmt zu und ergänzt noch, dass man nicht weiß, ob sich der Fahrer an die Verkehrsregeln hält. *„Könnte ja hier (zeigt auf die Querallee) auch mit siebzig durchheizen“* (AB 29:07). Da der Fahrer nun nach Manfreds Meinung auf beiden Strecken mit der gleichen Geschwindigkeit fahren könnte, wählt Manfred für die Geschwindigkeit eine runde Zahl (100 km/h), mit der er glaubt, die Fahrzeit einfach ausrechnen zu können. Im Interview antwortet er auf die Frage, ob man eine andere Zahl statt 100 km/h nehmen könnte, dass es möglich wäre, auch z. B. 200 km/h zu nehmen (I_M 58:22). Nachdem Manfred die Geschwindigkeit von 100 km/h für beide Wege festgelegt hat, argumentiert er wie folgt: *„Wenn er zwei Komma fünf Kilometer mit hundert fahren würde, [.] würde er zwei Komma fünf Minuten brauchen [...] Wenn er die drei Komma fünf bei hundert kmh fahren würde, [.....] würde er hier [.] drei Komma fünf Minuten brauchen“* (AB_M 29:58). Im Interview begründet er diese Überlegungen: *„Weil man ähm in einer Minute [.] ein Kilometer schafft. [....] Wenn man hundert kmh fahren würde“*(I_M 58:08). Als Antwortsatz schreibt Manfred: *“Antw. Die Abkürzung lohnt sich, da er 1 min. schneller ist“ (AB_M 30:31).*

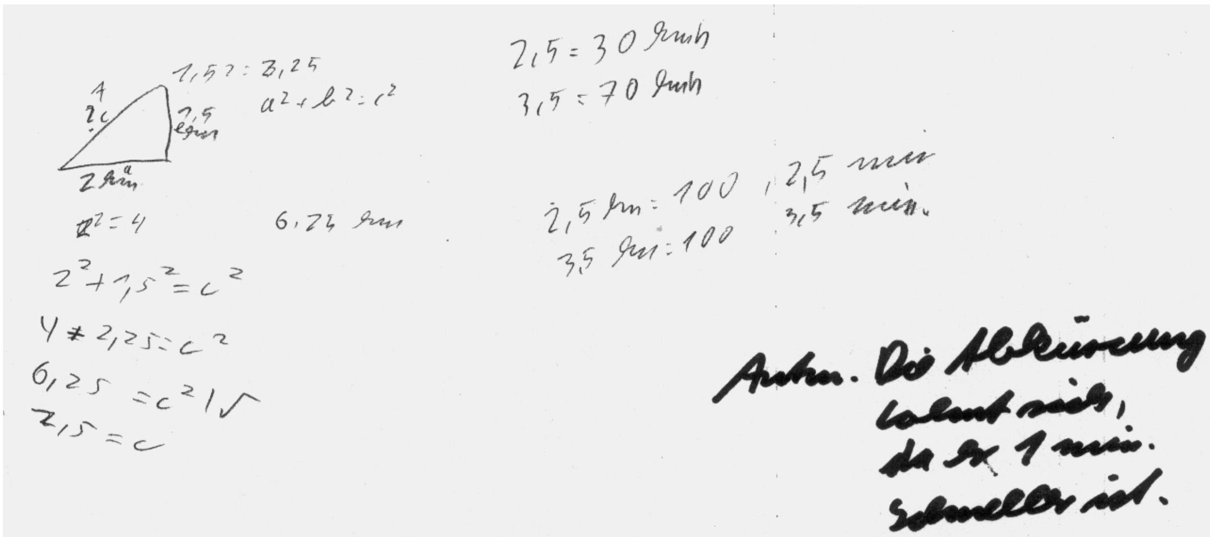


Abbildung 41. Lösung der Aufgabe Abkürzung von Manfred und seinem Partner

Analyse von Manfreds Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Lesen und Verstehen der Textaufgabe. Die Verstehensschwierigkeiten von Manfred liegen im Verstehen der Gegebenheiten der Situation nicht aber in der Identifikation der Fragestellung. Beim Lesen des Textes überlegt er lange, wo im Bild die Bundesstraßen und die Abkürzung dargestellt sind. Beim Zuordnen der Längenangaben aus dem Text zu dem Bild hat Manfred weitere Schwierigkeiten und macht es z.T. fehlerhaft. Die Fragestellung scheint er hingegen verstanden zu haben. Manfred will die Fahrzeit über zwei alternative Wege vergleichen, um Herrn Blum dann den zeitökonomischsten Weg zu empfehlen (vgl. I_M 60:33).

Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur. Aus der Beobachtung des Lösungsprozesses und aus dem Interview geht nicht klar hervor, ob Manfred selbständig die dreiecksähnliche Anordnung der Straßen im Bild erkennt. Auch wenn dies der Fall war, weiß Manfred nicht, dass er die Länge der Querallee im Dreieck mit Hilfe des Satzes des Pythagoras ausrechnen kann. Dies zeigt deutlich seine Äußerung, als er fragt, wie die Länge der Querallee ausgerechnet werden kann (vgl. AB_M 23:47). Der Satz des Pythagoras wird Manfred vom Partner diktiert (vgl. AB_M 25:29). Somit hat Manfred in der Aufgabe Abkürzung Schwierigkeiten mit der Identifikation und Rekonstruktion des Satzes des Pythagoras. Zur Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur hat Manfred eine ungefähre, nicht ausreichend ausdifferenzierte Vorstellung. Er weiß, dass Geschwindigkeit und Weglänge die Fahrzeit beeinflussen. Er ordnet z.B. den Fahrweg den Geschwindigkeiten einwandfrei zu: *„2,5 = 30 kmh“* und *„3,5 = 70 kmh“* (AB_M 28:12). Da aber weder Manfred noch sein Partner wissen, wie daraus die Fahrzeit bestimmt werden kann, nimmt Manfred an, dass der Fahrer mit der gleichen Geschwindigkeit über die Bundesstraßen und über die Abkürzung fährt (AB_M 29:07). Diese unzulässige Annahme deutet auf Schwierigkeiten mit der Rekonstruktion der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur hin.

Umformung mathematischer Strukturen und Ausführung der Rechenoperationen. Beim Berechnen der Ergebnisse tritt bei Manfred das Fehlen elementarer Lernvoraussetzungen im arithmetischen Bereich auf. So denkt er, dass $1{,}5^2 = 1{,}5+1{,}5$ ist (AB_M 26:14). Ferner vergisst Manfred die Wurzel aus einem Zwischenergebnis zu ziehen, um von c^2 auf die Länge von der Hypotenuse c zu schließen (AB_M 27:43). Bei der Berechnung der Fahrzeit denkt Manfred, dass die Geschwindigkeit eines Autos 100 Kilometer in einer Stunde bedeutet, dass es in einer Minute einen Kilometer zurücklegt (I_M 58:08). Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass Manfred sowohl beim Verbinden als auch beim Verstehen des Zusammenhangs zwischen der

Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur sowie bei der Umformung mathematischer Strukturen und der Ausführung der Rechenoperationen große Schwierigkeiten hat. Diese Schwierigkeiten betreffen sowohl die Pythagoras- als auch die Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur.

Analyse von Manfreds Handlungsstrategien im Lösungsprozess

Der Lösungsprozess von Manfred und seinem Partner beginnt mit zwei langen stillen Lesephasen. Während bei der Bearbeitung der Aufgabe Zuckerhut das mehrmalige Lesen des Textes und des Bildes kaum dabei hilft, die Situation zu verstehen, gelingt es Manfred beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung durch diese Handlung, die wesentlichen Angaben in einem Situationsmodell zu integrieren.

Schwierigkeiten mit der Identifikation und Rekonstruktion des mathematischen Modells überwindet Manfred z.T. durch die Nachfrage beim Partner über die Länge der Querallee. Diese Kooperationsstrategie erlaubt es Manfred an mehreren Stellen des Lösungsprozesses weiter zu kommen. Als Manfreds Partner vorgeschlagen hat, die Länge der Querallee mit dem Satz des Pythagoras zu berechnen, zeichnet Manfred von sich aus ein rechtwinkliges Dreieck. Das Zeichnen der Skizze hilft Manfred zu verstehen, wie der Satz des Pythagoras in dieser Aufgabe angewandt werden kann. Beim Beschriften des Dreiecks werden Manfreds Schwierigkeiten mit der Zuordnung der Angaben sichtbar. In dieser Situation folgt Manfred einem Hinweis des Partners, der von sich aus die Fehler korrigiert. Anschließend diktiert der Partner ihm den Satz des Pythagoras. Auch bei anderen Schwierigkeiten wie z.B. der Berechnung von $1{,}5^2$ oder dem Wurzelziehen ist Manfred auf die Hilfe seines Partners angewiesen. Eine Schwierigkeit bleibt für Manfred jedoch unüberwindbar: Manfred wie auch sein Partner können die Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur nicht rekonstruieren. Auch eine Zuordnung von Längen zu den Geschwindigkeiten, die im Allgemeinen eine nützliche Organisationsstrategie darstellt, führt Manfred nicht zur Rekonstruktion der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur hin.

Tabelle 9. Übersicht: Manfreds Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung

Handlungsstrategien	**Kommt vor**
Bearbeitungsstrategien	
Wiederholung (z.B. nochmaliges Lesen ausgewählter Textstellen)	ja
Elaboration (z.B. Aktivierung von Informationen aus dem Gedächtnis, die helfen können, die Aufgabe zu lösen)	ja
Organisation (z.B. Angaben mit eigenen Worten erfassen und Zeichnen einer Skizze)	ja

Metakognitive Strategien	
Planung des Lösungsprozesses	nein
Kontrolle des Ergebnisses und des Lösungsprozesses (z.B. Kontrolle des Lösungsprozesses. AB_M 29:58)	ja
Regulation des Lösungsprozesses (Wird durch eine Kontrollstrategie ein Problem beim Lösungsverhalten festgestellt, werden kognitive Strategien ggf. geändert. Manfred achtet darauf, dass der Lösungsprozess voran schreitet)	ja
Ressourcenstrategien	
Strategien für das kooperative Lernen (Partner fragen: *„Und wie lang ist die Querallee?“* (AB_M 23:47)	ja

Es fällt auf, dass Manfred im strategischen Bereich über gewisses Wissen verfügt, es fehlen ihm aber die elementaren fachlichen Voraussetzungen (z.B. Quadrieren, Wurzelziehen), um die Aufgabe Abkürzung erfolgreich zu bearbeiten. Er bemüht sich mit Strategiewissen fachliche Lücken zu kompensieren (z.B. Strategie die Geschwindigkeiten abzugleichen), stößt jedoch wegen seiner Wissenslücken (z.B. Manfred beachtet nicht, dass in einer Stunde 60 und nicht 100 Minuten sind) an die Grenze.

Analyse der Schüsselstelle im Lösungsprozess

Beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung war Manfred zum größeren Teil auf seinen Partner angewiesen. An einer Stelle im Bearbeitungsprozess ist es auffällig, dass Manfred Schwierigkeiten mit der Rekonstruktion des Zusammenhangs zwischen Geschwindigkeit und Zeit durch eine unrealistische Annahme zu überwinden ersucht. Eine solche Annahme rechtfertigt seinen falschen Lösungsweg und erlaubt es ihm und seinem Partner, zu einem Ergebnis zu kommen. Die Gefahr bei der Legitimation eigener falscher Handlungen ist jedoch, dass die scheinbar umgangene Schwierigkeit dem Schüler nicht bewusst wird und er aus dieser Schwierigkeit nicht lernen kann.

Eine andere wichtige Stelle im Lösungsprozess ist die Anwendung der Organisationsstrategie bei der Konstruktion der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur. Die Zuordnung der Geschwindigkeit zu den Streckenlängen hat allein nicht geholfen, diese Struktur zu rekonstruieren. Vermutlich wäre an dieser Stelle eine Elaboration zur Klärung der Bedeutung des Begriffs Geschwindigkeit notwendig. Eine Aktivierung des Vorwissens zu diesem Begriff könnte helfen, die Geschwindigkeit als „in einer bestimmten Zeit zurückgelegter Weg“ zu deuten und so den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Weg und Zeit zu rekonstruieren.

4.4.2 Aufgabe Abkürzung. Fallskizze Oliver, Kompetenzstufe 2

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Beim Vorlesen der Aufgabe Abkürzung macht Oliver mehrere kleine Pausen, schaut sich das Bild an und verbalisiert seine Gedanken: *„Herr Blum befindet sich auf der B 47. Hier, das ist Herr Blum (zeigt mit seinem Stift auf das Auto in der Skizze)“* (AB_O 13:01). Im Bild sucht Oliver Straßen auf, die im Aufgabentext genannt sind. Nach dem Vorlesen des Textes überlegt Oliver, wo die im Text beschriebenen alternativen Fahrwege abgebildet sind. Beide Wege identifiziert er richtig im Bild, denkt jedoch, dass die Fahrwege über die Bundesstraßen und über die Abkürzung jeweils 2 km bzw. 1,5 km lang sind: *„Wenn er hier siebzig fährt, dann hat er noch zwei Kilometer von hier (zeigt auf die Kreuzung Querallee und B47)“* (AB_O 14:11) *„(Über die Querallee fährt er) dreißig, hat aber eins komma fünf Kilometer“* (AB_O 14:24). Zu dieser Anmerkung von Oliver sagt sein Partner, dass die beiden Längen (1,5 km und 2 km) zum Weg über die Bundesstraßen gehören. Die Äußerung des Partners veranlasst Oliver eine Stelle im Text zu suchen, die diese Informationen enthält. Nachdem er sie gefunden hat, rechnet Oliver den gesamten Weg über die Bundesstraßen aus und kommt auf die Länge von 3,5 km. Nach der Berechung der Länge über die Bundesstraßen fragt Oliver verwundert: *„Und dieser andere Abkürzungsweg, wo steht er?“* (AB_O 14:37). Er sucht die Länge der Abkürzung vergeblich im Aufgabentext und sagt dann: *„Das ist komisch, steht aber nicht, wie lang das (zeigt auf die Querallee) ist“* (AB_O 14:47). Sein Partner erwidert: *„Ausrechnen“*. Beide Schüler lachen über diese nahe liegende Anmerkung und Oliver schlägt vor, mit dem Dreisatz zu rechnen, verdeutlicht aber nicht, was er mit dieser mathematischen Operation berechnen will. Im Interview erklärt Oliver, dass sein Vorschlag „Dreisatz“ sich auf die Fahrzeit über die Bundesstraßen und nicht auf die Länge der Querallee bezog (I_O 34:47), und dass ihm an dieser Stelle der Aufgabenbearbeitung noch nicht klar war, wie er die Länge der Querallee ausrechnen könnte (I_O 35:00). Olivers Partner versteht nicht, wie der Dreisatz in dieser Aufgabe angewandt werden soll und sagt: *„Hier so ein Dreieck […] Pythagoras oder so ausrechnen“* (AB_O 15:13). Über diese Aussage des Partners ist Oliver erstaunt. Nach einer kleinen Denkpause erkennt er jedoch die dreiecksähnliche Anordnung der Straßen. *„Da hast du auch wieder Recht. Lass uns mal machen. [..] Das muss c sein (zeigt wahrscheinlich auf die B47)“* (AB_O 15:25). Obwohl die Hypotenuse in der üblichen Schreibweise des Satzes des Pythagoras als c bezeichnet wird, nennt Oliver eine Kathete an dieser Stelle „c“. Das irritiert seinen Partner, der auf die Querallee im Bild zeigt, und sagt: *„Das ist c“* (AB_O 15:25). Diesen Einwand versteht Oliver sofort und merkt an, dass sie wissen, wie lang die andere zwei Seiten im Dreieck sind. Anschließend beginnt er, die Formel des Pythagoras-Satzes aufzuschreiben, ist aber nicht sicher, ob sie richtig ist: *„Erstmal Formel. A Quadrat plus oder mal, plus ne (schreibt a^2 +)?“* (AB_O 15:54).

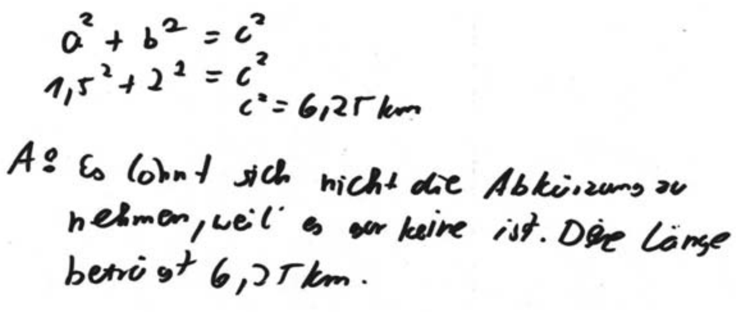


Abbildung 42. Lösung der Aufgabe Abkürzung von Oliver und seinem Partner

Nachdem sein Partner bestätigt, dass in der Formel ein Pluszeichen stehen soll, schreibt Oliver sie richtig auf. Beim Einsetztzen der Werte in die Formel macht Oliver einen Fehler: In die Variable a wird von ihm statt die Länge einer Kathete die Summe von beiden Kathetenlängen eingesetzt. *„So a Quadrat [.] drei komma fünf [.] nää?“* (AB_O 16:02). Olivers Partner sagt: *„Nee“* und Oliver verbessert sich: *„Nein, eins komma fünf“* (AB_O 16:06). c^2 rechnet Oliver mit dem Taschenrechner einwandfrei aus, vergisst jedoch anschließend Wurzel aus dem Ergebnis zu ziehen und kommt auf eine Länge der Abkürzung von 6,25 km. Er und sein Partner sind im ersten Moment erstaunt, dass die Abkürzung in ihrer Lösung länger als der Weg über die Bundesstraßen (3,5 km) ist. Während Olivers Partner lange über diesen Widerspruch nachdenkt und erst nach dem Lesen des Kommentars zur Aufgabe (*„Skizze, nicht maßstabgetreu“)* und Bemühungen, die Hypotenuse als arithmetisches Mittel der Katheten zu berechnen, das Ergebnis so belässt, ist Oliver sehr schnell sicher, dass das Ergebnis richtig ist: *„Haben wir die Lösung doch. [.] Antwort “* (AB_O 16:45). Bevor Oliver den Antwortsatz aufschreibt, liest er noch ein Mal die Aufgabe und schaut sich das Bild an. Im Interview erklärt Oliver, dass er überprüfen wollte, ob *„alles“* bei der Lösung berücksichtigt wurde. Eine wichtige Anmerkung des Partners, die auf den Fehler mit dem Wurzelziehen hinweist: *„Quadrat auch ausrechnen. Also ohne Quadrat“* (AB_O 18:18), versteht Oliver nicht. Als Antwortsatz schreibt er: *„Es lohnt sich nicht, die Abkürzung zu nehmen, weil es gar keine ist“* (AB_O 19:13).

Analyse von Olivers Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Lesen und Verstehen der Textaufgabe. Oliver versteht zwar, wie die Wege über die Bundesstraßen und über die Abkürzung verlaufen (AB_O 14:11). Bei der Zuordnung der angegebenen Längen zu einzelnen Straßenabschnitten hat er jedoch Schwierigkeiten. So denkt Oliver, dass sich die 1,5 km auf die Länge der Querallee und nicht auf die Länge einer der Bundesstraßen beziehen (AB_O 14:24). Aus der Aufgabenbearbeitung und aus dem Interview kann man ferner schließen, dass Oliver die Fragestellung verstanden hat. Sein Vorschlag beim Lösen der Aufgabe Abkürzung den Dreisatz anzuwenden, hatte das Ziel, die Fahrzeit über die Bundesstraßen auszurechnen (I 34:05). Somit wollte er am Anfang – wie in der Aufgabe gefordert – Fahrzeiten über die beiden Strecken berechnen und vergleichen.

Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur. Die Identifikation und Zuordnung der mathematisierbaren Strukturen gelingt Oliver nur teilweise. Einen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Fahrzeit und dem zurückgelegten Weg erkennt er schon zu Beginn der Aufgabenbearbeitung (I 34:05). Oliver braucht diesen Zusammenhang später aber nicht mathematisch zu rekonstruieren, weil er einen Fehler beim Berechnen der Länge der Querallee gemacht hat. Die Querallee ist nach Olivers Berechnung länger als der Weg über die Bundesstraßen. In Verbindung mit der deutlich stärkeren Geschwindigkeitsbegrenzung auf der Querallee (Geschwindigkeitsbegrenzung 30 km/h), fällt die Entscheidung zwischen den beiden alternativen Wegen auch ohne Berechnung der exakten Fahrzeiten eindeutig zugunsten der Bundesstraßen (Geschwindigkeitsbegrenzung 70 km/h) aus (AB_O 16:45).
Deutliche Schwierigkeiten hat Oliver mit dem Satz des Pythagoras. Er erkennt weder die dreiecksähnliche Anordnung der Straßen (AB_O 15:08), noch ist er sicher, wie der Satz des Pythagoras genau lautet (AB_O 15:54).

Umformung mathematischer Strukturen und Ausführung der Rechenoperationen. Bei der Berechnung der Länge der Hypotenuse mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck vergisst Oliver, die Wurzel aus dem Zwischenergebnis zu ziehen. Er ist zwar im ersten Moment überrascht, dass die Hypotenuse länger als die Summe der Katheten ist, akzeptiert aber dieses falsche Ergebnis schnell.

Analyse von Olivers Handlungsstrategien im Lösungsprozess

Oliver handelt zu Beginn der Aufgabenbearbeitung anders als Manfred. Statt den ganzen Text komplett vorzulesen, macht er kleine Pausen und schaut sich immer wieder das Bild an. Er bemüht sich schon beim ersten Lesen, die Angaben aus dem Text und die Informationen aus dem Bild miteinander in Zusammenhang zu bringen. Diese Handlungsstrategie ist zwar effektiv in Bezug auf die räumliche Anordnung der Straßen, erlaubt Oliver aber nicht, die Zuordnung der Längen richtig vorzunehmen. Vermutlich wäre in diesem Fall eine Beschriftung des vorhandenen Bildes hilfreich. Das mit den wesentlichen Informationen aus dem Text ergänzte Bild würde eine kompakte Zusammenfassung der Aufgabenstellung darstellten, die einfacher zu analysieren ist.

Bei Schwierigkeiten mit der Identifikation, Zuordnung und Konstruktion des mathematischen Modells fragt Oliver seinen Partner, was in der Aufgabe gemacht werden soll. Diese kooperative Strategie hilft ihm, den Satz des Pythagoras zu konstruieren.

Beim Berechnen der Ergebnisse hat Oliver Schwierigkeiten mit der Bestimmung der Hypotenusenlänge mithilfe des Satzes des Pythagoras. Da Oliver vergisst, die Wurzel aus dem Zwischenergebnis zu ziehen, ist die Hypotenuse bei ihm länger als die Summe der beiden Kathetenlängen. Diesen Widerspruch bemerkt er aber nicht. Oliver aktiviert sein mathematisches Wissen über das Verhältnis der Seitenlängen im Dreieck, das bei diesem Fehler nicht helfen kann: *„Wir haben c ausgerechnet, die längste Seite die es gibt“* (AB_O 18:18). Er weiß somit, dass die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck länger als eine Kathete sein muss. Hingegen ist Oliver vermutlich nicht bekannt, dass eine Seitenlänge im Dreieck immer kürzer als die Summe der anderen Seitenlängen ist. Eine andere Kontrollstrategie von Oliver ist, die Aufgabe am Schluss noch ein Mal zu lesen: *„(Ich habe die Aufgabe gelesen), um herauszufinden, ob ich irgendwas brauche“* (I_O 39:07). Auch diese Strategie zeigt im Fall von Oliver kein positives Ergebnis.

Tabelle 10. Übersicht: Olivers Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung

Handlungsstrategien	**Kommt vor**
Bearbeitungsstrategien	
Wiederholung (z.B. nochmaliges Lesen ausgewählter Textstellen)	ja
Elaboration (z.B. Aktivierung von mathematischem Wissen zu den Themengebieten Satz des Pythagoras und Lineare Funktionen)	ja
Organisation (z.B. Erfassung der Fragestellung mit eigenen Worten und Zeichnen einer Skizze)	ja, verbal nein, ikonisch
Metakognitive Strategien	
Planung des Lösungsprozesses	nein

Kontrolle des Ergebnisses und des Lösungsprozesses (z.B. Kontrolle des Ergebnisses, AB_O 18:18)	ja
Regulation des Lösungsprozesses (Oliver liest zum Schluss die Aufgabe noch ein Mal, um die Lösung zu evaluieren. I_O 39:07)	ja
Ressourcenstrategien	
Strategien für das kooperative Lernen (Partner fragen: *„Und dieser andere Abkürzungsweg, wo steht er?“* (AB_O 14:37)	ja

Auffällig ist, dass Oliver die Aufgabe Abkürzung kognitiv nicht durchdringt. Im Aufgabentext sucht er Zahlen, deren Zuordnung zu den abgebildeten Straßen sowie deren elementare Verbindung durch eine einfache mathematische Operation ihm gleich die Lösung liefern soll. Es fehlt Oliver ein innerer Aufbau der Strukturen. Rechenvorgänge sind stark automatisiert und nicht hinreichend flexibel. Die vorgefundenen Strukturen kann er nicht verinnerlichen.

Analyse der Schlüsselstelle im Lösungsprozess

Der Fehler bei der Berechnung der Länge der Querallee bildet eine Schlüsselstelle im Lösungsprozess von Oliver. Da Oliver das Ergebnis erst unglaubwürdig erscheint, wendet er unterschiedliche Strategien in dieser Situation an: Er liest die Aufgabenstellung am Ende noch ein Mal durch, überlegt sich, was er über die Längen der Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck weiß und fragt den Partner, was er zu diesem Ergebnis denkt. Bei der Überprüfung der Lösung ist Oliver jedoch nicht gründlich genug. Er beachtet z.B. nicht, dass in seiner Lösung c^2=6,25 km steht bzw. fragt nicht nach, was c^2 bedeutet und worin sich c^2 von c unterscheidet. Dies zeigt die Bedeutung des operativen Denkens für den erfolgreichen Lern- und Lösungsprozess. Ferner beachtet Oliver nicht, dass sein Ergebnis unrealistisch ist. Er könnte versuchen, die Querallee und die Bundesstraßen maßstabsgetreu zu zeichnen, um sich klar zu machen, dass solch eine Straßenanordnung nicht möglich ist. Bei der Aufgabenlösung sollte Oliver somit stärker die Organisationsstrategie „Einzeichnen der Skizze“ in seine Bearbeitung einbeziehen und über die Bedeutung mathematischer Symbole wie c^2 nachdenken. Er braucht dazu vermutlich eine Hilfe, die die Differenzen zwischen Realität, ihrer Abbildung und den zugehörigen mathematischen Modellen mit ihm gemeinsam operativ durcharbeitet.

4.4.3 Aufgabe Abkürzung. Fallskizze Bernd, Kompetenzstufe 3

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Nach einem flüchtigen Blick auf das Aufgabenblatt sagt Bernds Partner *„Satz des Pythagoras“* und beginnt mit dem Vorlesen der Aufgabe (AB_B 0:00). Als Bernds Partner die Aufgabe vorgelesen hat, merkt er an, dass diese Aufgabe schon in einer Mathematikarbeit bearbeitet wurde und es sich nicht gelohnt hätte, die Abkürzung zu nehmen. Bernd lächelt und erwidert: *„Okay, jetzt wissen wie schon mal ungefähr, dass es sich nicht lohnt. Jetzt nur noch wieso“* (AB_B 35:27).

Im Bild zur Aufgabe erkennt Bernd die dreiecksähnliche Anordnung der Straßen: *„Ist doch eigentlich hier schon so ein Dreieck aufgebaut, ne“* (AB_B 35:32) und fährt mit einem Finger entlang der Bundesstraßen und der Querallee. Sein Partner stimmt zu: *„Ja, jetzt müssen wir erstmal ausrechnen“* (AB_B 35:32). Bernd zeichnet im Bild das rechtwinklige Dreieck ein und markiert den rechten Winkel (vgl. Abbildung 43).

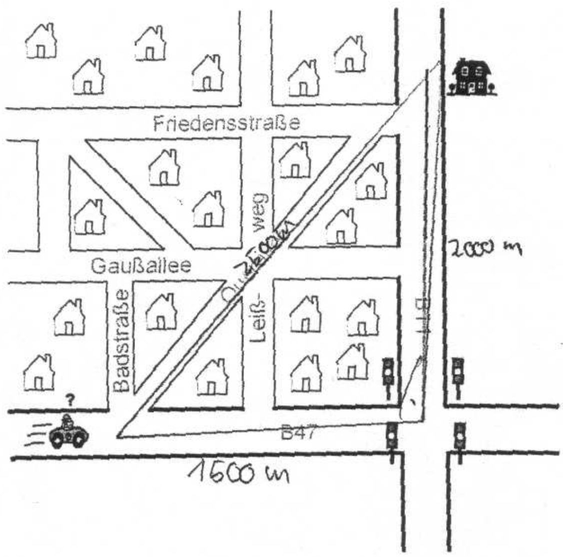


Abbildung 43. Skizze von Bernd zur Aufgabe Abkürzung

Sein Partner findet das Zeichnen der Skizze überflüssig: *„Das müssen wir überhaupt nicht machen“* (AB_B 35:48). Im Interview erklärt Bernd, dass er eine Skizze zu jeder Mathematikaufgabe zeichnet: *„Das mache ich so gut wie bei jeder Aufgabe“* (I_B 70:23). Die eingezeichnete Skizze will Bernd beschriften. Er findet im Text, wie lang die B47 ist, übersetzt diese Angabe von Kilometern in Meter und fordert seinen Partner auf, 1500 m sowie die Angabe 2500 m in die Skizze einzutragen. Dann fragt Bernd, wie lang die Querallee ist, und antwortet selbst, dass es möglich ist, die Länge der Querallee auszurechnen (AB_B 36:37). Bernds Partner stimmt zu und diktiert Bernd Zahlen, die Bernd in den Taschenrechner eingibt. Parallel dazu notiert Bernds Partner die Berechnungen auf dem Aufgabenblatt. Als Ergebnis berechnet

Bernd 2500 m, das sein Partner neben der Querallee in die Skizze schreibt. Bernd sagt: *„Jetzt wird schön in kmh Anzahl (um)gerechnet“* (AB$_B$ 37:30). Der Fahrweg über die Bundesstraßen wird von seinem Partner als 1500m + 2000m = 3500m ausgerechnet und die Länge der Querallee in Kilometer umgerechnet. Beides geschieht in gemeinsamer Arbeit beider Schüler. Auf dem Aufgabenblatt ordnet Bernds Partner die Geschwindigkeiten den Strecken zu: *„3,5 km bei 70 km/h, 2,5 km bei 30 km/h“*. Den nächsten Lösungsschritt kündigt Bernd mit dem Satz an: *„Jetzt einfach ausrechnen, wie viel Zeit er dafür braucht“* (AB$_B$ 38:22). Vergeblich versucht er, die Fahrzeit über die Kovariationsvorstellung auszurechnen: *„Mit dreißig km/h braucht man [..] ne halbe Stunde, für fünfzehn, [..]“* (AB$_B$ 38:47). Wie schon beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut sucht sein Partner eine Formel zur Berechnung der Zeit aus den Geschwindigkeits- und Streckenangaben und findet sie bald. Daraufhin fragt Bernd den Partner, wie er gerechnet hat. Der Partner antwortet: *„Ich habe jetzt die Strecke […] durch die Geschwindigkeit geteilt […] und ähmm dann muss man halt noch mal sechzig rechnen, um Minuten rauszubekommen“* (AB$_B$ 39:18). Bernd bittet seinen Partner, den Rechenweg aufzuschreiben. Die beiden Schüler teilen sich die Arbeit: Bernds Partner diktiert die Zahlen und die mathematischen Operationen und schreibt sie dabei auf. Bernd rechnet mit dem Taschenrechner das Ergebnis aus.

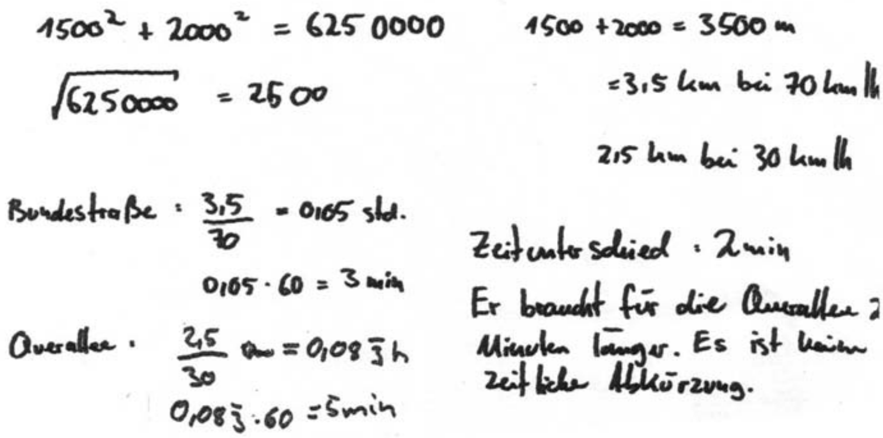

$1500^2 + 2000^2 = 6250000$
$\sqrt{6250000} = 2500$
$1500 + 2000 = 3500$ m
$= 3{,}5$ km bei 70 km/h
$2{,}5$ km bei 30 km/h
Bundestraße: $\frac{3{,}5}{70} = 0{,}05$ std.
$0{,}05 \cdot 60 = 3$ min
Querallee: $\frac{2{,}5}{30}$ km $= 0{,}08\bar{3}$ h
$0{,}08\bar{3} \cdot 60 = 5$ min
Zeitunterschied: 2 min
Er braucht für die Querallee 2 Minuten länger. Es ist keine zeitliche Abkürzung.

Abbildung 44. Lösung der Aufgabe Abkürzung von Bernd und seinem Partner

Die Fahrzeit über die Abkürzung will Bernd selbst berechnen: *„Ich mache jetzt die [..] okay?“* (AB$_B$ 40:53). Im Interview erläutert Bernd, warum er die Fahrzeit über die andere Strecke (die Querallee) selbst ausgerechnet hat: *„Ich habe das dann einfach noch mal selber gemacht, um es mir einzuprägen“* (I$_B$ 81:17). Aus dem Interview ist ferner ersichtlich, dass sich Bernd die Formel zur Berechnung der Zeit aus Geschwindigkeits- und Längenangaben gemerkt hat: *„Also man hat ja die Entfernung, wenn man die (Strecke) durch die Geschwindigkeit teilt“* (I$_B$ 77:24). Die Fahrdauer über die Abkürzung beträgt gemäß Bernds Berechnungen fünf Minuten. Dann sagt Bernd, dass der Zeitunterschied zwischen beiden Fahrtstrecken zwei Minuten beträgt und die Abkürzung sich deswegen nicht lohnt (AB_B 41:52). Der Antwortsatz wird von Bernd diktiert: *„Zeitunterschied gleich 2 min. Er braucht für die Querallee 2 Minuten länger. Es ist keine zeitliche Abkürzung“*. Bernd betont bei der Formulierung: *„Keine zeitliche Abkürzung, vom Weg schon“* (AB_B 42:46).

Analyse von Bernds Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Lesen und Verstehen der Textaufgabe. Mit dem Verstehen der Aufgabe Abkürzung hat Bernd keine Probleme. Obwohl weder er noch sein Partner explizit sagen, was in der Aufgabe gegeben bzw. gesucht ist, zeigen das Zeichnen und Beschriften der Skizze sowie Bernds Kommentare aus dem Interview, dass Bernd die beiden alternativen Wege fehlerfrei rekonstruiert und die Fragestellung richtig identifiziert (I_B 75:05). Nur bei der Zuordnung der Angaben braucht er Zeit, um festzustellen, dass die Länge der Abkürzung nicht vorgegeben ist und deswegen ausgerechnet werden muss. Die Angaben der Längen sowie der Geschwindigkeiten werden den Straßen ohne Schwierigkeiten richtig zugeordnet.

Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur. Das rechtwinklige Dreieck wird von Bernd selbständig identifiziert (AB_B 35:32, 36:12). Nach der Beschriftung der Skizze erkennt Bernd auch den Satz des Pythagoras. Im Interview antwortet Bernd auf die Frage, warum er an den Satz des Pythagoras gedacht hat: *„Es ist ein Dreieck, (es) ist rechtwinklig und zwei Seiten sind gegeben“* (I_B 71:27). Auch die Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur wird von Bernd identifiziert. Er weiß, dass die Fahrzeit aus Geschwindigkeits- und Längenangaben ausgerechnet werden kann. *„Mit dreißig (km/h) braucht man [..] ne halbe Stunde für fünfzehn (Kilometer), [..] das bringt uns gar nicht weiter“* (AB_B 38:47). Welcher Anteil einer Stunde für die 2,5 Kilometer benötigt wird, kann Bernd nicht sagen und bricht seine Überlegungen ab. Somit hat Bernd Schwierigkeiten mit der Konstruktion der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur.

Umformung mathematischer Strukturen und Ausführung der Rechenoperationen. Mit den Berechnungen hat Bernd keine Schwierigkeiten.

Analyse von Bernds Handlungsstrategien im Lösungsprozess

Obwohl Bernd keine Schwierigkeiten mit dem Verstehen der Situation hat, das rechtwinklige Dreieck im Bild identifiziert und direkt mit den Berechnungen hätte anfangen können, zeichnet er erst eine Skizze. Das macht Bernd, um *„(die Aufgabe) noch mal zu verdeutlichen“* (I_B 70:23). Diese Organisationsstrategie findet er offenbar nützlich und wendet sie *„so gut wie bei jeder Aufgabe“* an (I_B 70:23). Auch die dazugehörige Teilstrategie des Beschriftens der Skizze wird von Bernd angeleitet: Er fordert seinen Partner auf, die Angaben in die Skizze einzutragen. Die beschriftete Skizze bietet eine gute Grundlage für die Suche des mathematischen Modells.

Eine Reihe von Handlungen, die Aufschluss über seinen Lösungsprozess geben, wird durch die Schwierigkeit mit der Rekonstruktion der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur ausgelöst. Die erste Lösungsidee von Bernd ist, die Zeit mit Hilfe der proportionalen Zuordnung zu berechnen. Bernd überlegt, dass ein Auto in einer halben Stunde 15 Kilometer zurücklegt, wenn es mit der Geschwindigkeit von 30 km/h fährt. Er weiß jedoch nicht, wie viel Zeit bei der gleichen Geschwindigkeit für die 2,5 Kilometer benötigt wird. Diese Schwierigkeit erinnert an die Schwierigkeit von Oliver beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut. Wie auch im Fall von Oliver könnte Bernd vermutlich das Aufschreiben eigener Gedanken helfen.

Nachdem Bernd den im letzten Abschnitt beschriebenen Lösungsweg aufgegeben hat, wird er auf die Überlegungen seines Partners aufmerksam. Eine elaborierte Handlungsabfolge konnte beobachtet werden, als Bernd überzeugt war, dass eine von seinem Partner rekonstruierte Formel richtig ist. Bernd geht dabei planvoll vor, reguliert sowohl eigene Handlungen als auch die seines Partners und greift immer wieder auf die Selbstkontrolle und Kontrolle des Partners zurück. Als Erstes bittet Bernd seinen Partner zu zeigen, wie die Fahrzeit über die Querallee mit der Formel ausgerechnet wird. Das Ergebnis rechnet er mit dem Taschenrechner nach und schließlich besteht Bernd darauf, die Fahrzeit über eine andere Strecke selbst zu berechnen. Bei diesen Handlungen schaut sich Bernd immer wieder die Zwischenergebnisse genau an und fragt gelegentlich den Partner, ob er auf dem richtigen Weg ist. Im Interview erklärt Bernd zu diesem Vorgehen: *„Habe ich dann das dann einfach noch mal selber gemacht, um es mir auch einzuprägen“* (I_B 81:17). Die beobachtete Handlungsabfolge beinhaltet unterschiedliche Strategien wie z.B. Partner fragen und den Lösungsprozess und die Ergebnisse kontrollieren. Auch wenn die beschriebene Handlungsabfolge mehr auf die Reproduktion (Wie berechne ich die Zeit?) und weniger auf das Verstehen (Warum lautet die Formel so und nicht anders?) orientiert ist, zeigt sie, wie der Wissenserwerb von Bernd gesteuert wird.

Tabelle 11. Übersicht: Bernds Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung

Handlungsstrategien	**Kommt vor**
Bearbeitungsstrategien	
Wiederholung (z.B. nochmaliges Lesen ausgewählter Textstellen)	ja
Elaboration (z.B. sich an ähnliche Aufgaben erinnern)	ja
Organisation (z.B. Erfassen der Angaben mit eigenen Worten. Zeichnen und Beschriften einer Skizze)	ja
Metakognitive Strategien	
Planung des Lösungsprozesses (z.B. obwohl Bernd erkannt hat, dass die Hypotenuse mit Hilfe der Geschwindigkeits- und Zeitangaben ausgerechnet werden kann, plant er erst den nächsten Lösungsschritt. AB_B 05:38)	ja
Kontrolle des Ergebnisses und des Lösungsprozesses (z.B. Kontrolle des Zwischenergebnisses und Kontrolle des Gelesenen.)	ja
Regulation des Lösungsprozesses (z.B. der Lösungsprozess wird von Bernd so gesteuert, dass Bernd die Anwendung einer neuen Formel üben kann).	ja
Ressourcenstrategien	
Strategien für das kooperative Lernen (z.B. Partner fragen)	ja

Obwohl Bernd über eine Vielfalt von Strategien verfügt, die ihm helfen, die Aufgabe Abkürzung zu lösen, werden bei ihm Defizite bei der Bearbeitung von Aufgaben mit divergenten Lösungsstrukturen sichtbar. Ein streng linearer, auf ein elementares mathematisches Modell gerichteter Lösungsweg wird der divergenten Aufgabenstruktur der Aufgabe Abkürzung nicht gerecht. Die Einschränkungen seines Modells, wie z.B. die Ampel auf der Kreuzung von Bundesstraßen, werden von Bernd in die Lösung nicht mit einbezogen.

Analyse der Schlüsselstelle im Lösungsprozess

Eine Schlüsselstelle beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung stellt die Schwierigkeit mit der Berechnung der Fahrzeit aus den Geschwindigkeits- und Zeitangaben dar. Das primäre Ziel der Aufgabenbearbeitung, eine richtige Lösung zu finden, wird von Bernd an diesem Punkt durch ein sekundäres Ziel ergänzt, das eine größere Bedeutung in einer längerfristigen Perspektive hat. Dieses sekundäre Ziel von Bernd ist es, durch die Aufgabenlösung neues Wissen zu erwerben. Auf die Frage, warum er die Aufgabe interessant findet, antwortet Bernd im Interview: „*Weil da auch eine Sache vorkam, die ich überhaupt nicht kannte und so halt in* *der Aufgabe mal wieder was gelernt habe"* (I_B: 84:52). Die Schwierigkeit mit der Berechnung der Fahrzeit nimmt Bernd somit als eine Lerngelegenheit wahr. Ferner gelingt es Bernd, den Lösungsprozess so zu gestalten, dass beide Ziele erreicht werden können. An diesem Fall wird die hohe Bedeutung der Metakognition für die produktive Aufgabenbearbeitung deutlich. Lernprozessbezogenes Setzen eigener Ziele, Planung, Kontrolle und Regulation des Lernens sind wichtige strategische Elemente im Lernprozess, die Bernds Aufgabenbearbeitung auszeichnen.

Dieses im Allgemeinen sehr positive Bild von Bernds Strategiengebrauch ist jedoch durch eine einseitige Lösungsentwicklung gekennzeichnet. Gewünscht wäre neben der stringenten Lösungssuche ein offenerer Blick für die Gegebenheiten der Situation wie etwa die Auswirkungen der Ampel, der Sicherheitsfaktoren etc. auf die Entscheidung für einen Lösungsweg in der Aufgabe Abkürzung.

4.4.4 Aufgabe Abkürzung. Fallskizze Kathrin, Kompetenzstufe 4

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Während Kathrins Partner die Aufgabe Abkürzung vorliest, sucht Kathrin Informationen zu einer anderen Aufgabe im Lexikon. Erst als der Partner die Aufgabe zu Ende vorgelesen hat, beginnt auch Kathrin, den Aufgabentext zu lesen. Dabei liest Kathrin einige Informationen vor und sucht sie im Bild auf. *„B 47, da (zeigt auf die Bundesstraße B47 in der Skizze)"* (AB_K 32:41). Beim Lesen und Betrachten des Bildes identifiziert Kathrin den Abkürzungsweg: *„Der kürzere Weg ist das (zeigt auf die Querallee)"* (AB_K 33:13) und den Weg über die Bundesstraßen. Am Ende der Lesephase formuliert sie wie folgt die Fragestellung: *„Und jetzt muss man ja gucken, ob sich das ausrechnet, weil er überlegt, eine Abkürzung durch das angrenzende Wohngebiet zu nehmen"* (AB_K 33:19). Anschließend merkt sie nachdenklich an, dass die Ampel an der Kreuzung von Bundesstraßen rot sein kann. Kathrins Partner hält diese Überlegung für unbedeutend und nennt andere Faktoren wie z.B. einen möglichen Unfall, welche die Entscheidung für einen Fahrweg beeinflussen könnten, im Rahmen der Lösung der Aufgabe Abkürzung jedoch überflüssig sind. Kathrin konzentriert sich dann auf die Ermittlung und den Vergleich der Fahrzeiten. Der Länge des Weges über die Bundesstraßen ordnet sie die Geschwindigkeit zu:

3,5 km mit 70 km/h

In der nächsten Zeile will Kathrin die gleichen Angaben zur Querallee aufschreiben. Da Kathrin aber die Länge der Abkürzung noch nicht ausgerechnet hat, macht sie an dieser Stelle eine kleine Denkpause. In der Zeit sagt Kathrins Partner: *„A hoch zwei, b hoch zwei gleich c hoch* *zwei“* (AB$_K$ 34:17). Kathrin versteht sofort, dass ihr Partner damit den Satz des Pythagoras meint, und zeichnet ein Dreieck, das sie anschließend beschriftet.

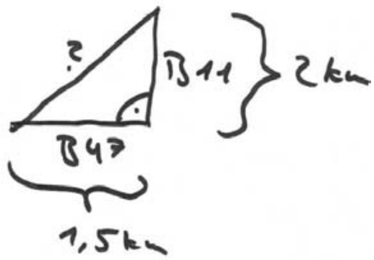


Abbildung 45. Skizze von Kathrin zur Aufgabe Abkürzung

Die Länge der Hypotenuse im Dreieck berechnet Kathrin mit dem Satz des Pythagoras, vergisst jedoch die Wurzel aus dem Zwischenergebnis zu ziehen und notiert deswegen eine falsche Zahl als Lösung. Ihr Partner bemerkt das und weist darauf hin, dass sie noch die Wurzel ziehen soll. Kathrin korrigiert das Ergebnis:

3,5 km mit 70 km/h
od. ~~6,25~~ 2,5 km mit 30 km/h

Nach der Zuordnung der Strecken und Geschwindigkeiten will Kathrin, die Fahrzeiten ausrechnen. Kathrin sagt: *„70 km in einer Stunde sind drei komma fünf in?“* (AB$_K$ 35:52). Ihr Partner erwidert: *„Das kann man mit „T“ ausrechnen“* (AB$_K$ 35:52). Mit dem „T“ bezeichnen die Schüler eine Zuordnungstabelle (vgl. I$_K$ 67:05). Die Äußerung des Partners wird von Kathrin erst nicht beachtet. Sie teilt mit Hilfe des Taschenrechners 70 durch 60 und dann 70 durch 3,5. Vermutlich versucht sie die Zahlen 70, 60 und 3,5 so mit einer arithmetischen Operation zu verbinden, dass ein realistisches Resultat herauskommt. Das Ergebnis scheint ihr aber nicht zu gefallen, deswegen sucht sie nach anderen Lösungsmöglichkeiten und kommt auf den Vorschlag des Partners zurück: *„Jetzt mit „T“. Wie schreibt man das auf?“ (*AB$_K$ 36:25). Da Kathrins Partner auf diese Frage keine Antwort gibt, versucht sie ohne seine Hilfe Geschwindigkeit und Streckenlänge anders aufzuschreiben. Die erste tabellenartige Zuordnung, die die Suche des Rechenweges erleichtern soll, gefällt Kathrin nicht und sie streicht ihre Aufzeichungen durch. Anschließend schreibt Kathrin die Angaben zum Fahrweg über die Bundesstraßen in Form einer Tabelle (siehe Abbildung 46).

Um die fehlende Länge zu berechnen, teilt Kathrin die 70 km und 60 min erst durch 10 und dann durch 2. Als Ergebnis erhält sie 3 Minuten. Die Fahrzeit über die Abkürzung wird von Kathrin ähnlich aufgeschrieben und berechnet. Sie beträgt 5 min.

Nachdem die Fahrzeiten über die zwei alternativen Wege ermittelt wurden, überlegt Kathrin noch ein Mal, in wie weit die rote Ampel an der Kreuzung den zweiminütigen Zeitunterschied verringern kann. Sie nimmt an, dass keine Ampel zwei Minuten lang rot ist (vgl. I_K 72:23), und deswegen dauert der Weg über die Querallee in jedem Fall länger. Aus diesem Grund entscheidet sie sich für den Weg über die Bundesstraßen. Als Antwortsatz schreibt Kathrin auf: *„Er ist auf der Bundesstraße schneller da!!!“* (AB_K 39:41).

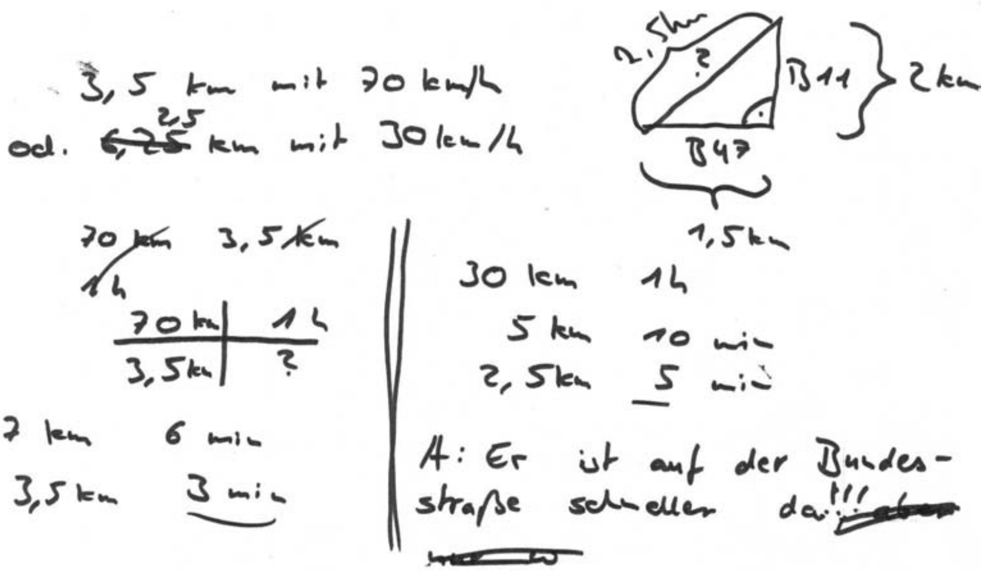


Abbildung 46. Lösung der Aufgabe Abkürzung von Kathrin und ihrem Partner

Analyse von Kathrins Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Lesen und Verstehen der Textaufgabe. Die Aufgabe Abkürzung versteht Kathrin ohne auffallende Schwierigkeiten. Sie weiß, dass es in der Aufgabe um die Entscheidung zwischen zwei alternativen Wegen geht, rekonstruiert diese Wege einwandfrei und ordnet die zugehörigen Zahlenangaben richtig zu (vgl. AB_K 32:40-33:19).

Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur. Die Zuordnung des mathematischen Modells bereitet Kathrin Schwierigkeiten. Sie erkennt nicht das rechtwinklige Dreieck im Bild zur Aufgabe und weiß im ersten Moment nicht, wie lang die Querallee ist (AB_K 34:10). Nachdem Kathrins Partner die Formel $a^2+b^2=c^2$ genannt hat, zeichnet Kathrin eine Skizze (siehe Abbildung 45), beschriftet sie und erkennt das rechtwinklige Dreieck und die Möglichkeit die Länge der Querallee mit dem Satz des Pythagoras auszurechnen. *„Das (rechtwinklige Dreieck) ist mir erst da (beim Zeichnen der Skizze) klar geworden“* (I_K 64:56).

In der Aufgabe Abkürzung hat Kathrin weniger Schwierigkeiten mit der Identifikation und Zuordnung der mathematisierbaren Strukturen als in der Aufgabe Zuckerhut. Diese positiven Veränderungen im Lösungsverhalten entstehen vor allem durch die ausführlichen Erklärungen des Partners zu der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut. Die Identifikation der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur verläuft daher bei Kathrin ohne Probleme. Kathrin weiß, dass die Fahrzeit aus den Geschwindigkeits- und Zeitangaben berechnet werden kann. Sie interpretiert 70 km/h als 70 Kilometer in einer Stunde, weiß aber nicht genau, wie viel Zeit für die 3,5 Kilometer gebraucht wird. Ihre Schwierigkeit liegt somit nicht beim Erkennen sondern bei der Konstruktion des mathematischen Modells, das Zeit und Weg miteinander verbindet.

Umformung mathematischer Strukturen und Ausführung der Rechenoperationen. Bei der Anwendung des Satzes des Pythagoras vergisst Kathrin, die Wurzel zu ziehen. Dieser Fehler wird durch ihren Partner korrigiert.

Analyse von Kathrins Handlungsstrategien im Lösungsprozess

Mit dem Verstehen der Aufgabe hat Kathrin kaum Schwierigkeiten. Um die Informationen aus dem Bild und Text zusammenzubringen, liest sie sukzessiv einzelne Informationen im Text und sucht sie im Bild auf. Da Kathrin aber keine Notizen macht, fehlt ihr aber ein Gesamtblick auf die Situation. Das kann eine Ursache ihrer Schwierigkeit bei der Identifikation des Satzes des Pythagoras sein. Einen Fortschritt im Lösungsprozess macht Kathrin durch das Zeichnen und Beschriften der Skizze, die ihr hilft, das rechtwinklige Dreieck zu rekonstruieren (vgl. I_K 64:56). Wie auch beim Lösen der Aufgabe Zuckerhut ist Kathrins Partner am Lösungsprozess aktiv beteiligt. Kathrin nimmt seine Hilfe bei der eigenen Lösungskonstruktion auf zwei unterschiedliche Weisen in Anspruch: Sie stellt Fragen, wenn der Lösungsprozess stockt. Zudem denkt Kathrin oft laut und der Partner kontrolliert den Gedankengang. Interaktionen mit dem Partner sind somit sowohl für kognitive als auch für metakognitive Handlungen im Lösungsprozess wichtig und bilden ein bedeutendes strategisches Element bei der Lösungsentwicklung.

Eine große Hürde beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung stellt für Kathrin die Berechnung der Fahrzeit aus den Geschwindigkeits- und Streckenlängen-Angaben dar. Dabei erweist sich die Suche nach einer bekannten schriftlichen Repräsentation der Angaben als produktiv. Kathrin strukturiert solange die Angaben um, bis sie auf eine vertraute Art der Repräsentation (Zuordnungstabelle) kommt und den Lösungsalgorithmus aktivieren kann. Somit reicht es für eine Lösung offenbar nicht, die Angaben „irgendwie“ zu verschriftlichen. Der Problemlöser muss sie nach einem bekannten Muster aufschreiben, um ein bekanntes Lösungsschema leichter aus dem Gedächtnis abrufen zu können.

Bei der Berechnung des Ergebnisses vergisst Kathrin die Wurzel zu ziehen. Da ihr Partner die Berechnungen aufmerksam verfolgt, erkennt er sofort den Fehler. Wie auch bei Bernd könnte auch Kathrin vermutlich ein Aufschreiben der Lösung helfen, diesen Fehler selbst zu bemerken.

Tabelle 12. Übersicht: Kathrins Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung

Handlungsstrategien	**Kommt vor**
Bearbeitungsstrategien	
Wiederholung (z.B. nochmaliges Lesen ausgewählter Textstellen)	ja
Elaboration (z.B. Aktivierung von Informationen aus dem Gedächtnis, die helfen können, die Aufgabe zu lösen. Kathrin überlegt, dass keine Ampel 2 min lang rot sein kann)	ja
Organisation (z.B. Erfassen der Angaben mit eigenen Worten. *„Und jetzt muss man ja gucken, ob sich das ausrechnet“* (AB_K 33:19). Zeichnen und Beschriften einer Skizze)	ja
Metakognitive Strategien	
Planung des Lösungsprozesses	nein
Kontrolle des Ergebnisses und des Lösungsprozesses (z.B. durch die Frage an den Partner: „Muss ich jetzt alles aufschreiben hier?“ (AB_K 37:36))	ja
Regulation des Lösungsprozesses (z.B. der Lösungsprozess wird unterbrochen, um eine geignete schriftliche Repräsentation des Lösungswegs zu finden (AB_K 36:19))	ja
Ressourcenstrategien	
Strategien für das kooperative Lernen (z.B. Partner fragen *„Friedenstraße runter, oder da runter?“* (AB_K 33:08))	ja

Analyse der Schlüsselstelle im Lösungsprozess

Eine Schlüsselstelle im Lösungsprozess bildet die Schwierigkeit mit der Konstruktion des mathematischen Modells zur Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur und mit Strategien, die bei der Suche nach einer geeigneten Repräsentation dieser Struktur, angewandt wurden. Die erste von Kathrin schriftlich angefertigte Zuordnung der Geschwindigkeit zur Fahrstrecke wurde auf zwei alternative Fahrwege fokussiert und war für die Identifikation des proportionalen Zusammenhangs zwischen dem zurückgelegten Weg und der Fahrzeit nicht geeignet. Die zweite Repräsentation, die von Kathrin später durchgestrichen wurde, sah für sie ungewohnt aus, weil Längen und Zeiten in dieser Darstellung in Zeilen und nicht wie üblich in Spalten

standen. Erst die dritte Darstellung erscheint Kathrin bekannt und erlaubt ihr im nächsten Schritt, richtige Berechnungen durchzuführen. Im Fall von Kathrin wurde deutlich, wie wichtig die Suche nach einer geeigneten Repräsentation für die Konstruktion des mathematischen Modells ist. Für die Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur war die für sie geeignete Repräsentation eine Zuordnungstabelle. Für die Pythagoras-Struktur war es eine mathematische Skizze mit den zugeordneten Seitenlängen (siehe Abbildung 45).
Kathrin identifiziert bei der Aufgabenlösung mehrere Einzelelemente (z.B. die Ampel), die zu einer vollständigen Lösung der Modellierungsaufgabe beitragen. Sie kann aber diese Elemente nicht systematisch verfolgen. Eine Ursache dieser Probleme ist die Interaktion mit dem Partner, die manchmal durch Rivalität überlagert wird.

Zusammenfassung der Schüler-Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung

Die Schüler-Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung sind im Wesentlichen ähnlich wie die bei der Bearbeitung der Aufgabe Zuckerhut. Da die auf dem Aufgabenblatt abgebildete Zeichnung zur Aufgabe Abkürzung die räumliche Anordnung der Straßen vorgibt, haben Schüler kaum Schwierigkeiten mit dem Lesen und Verstehen der Textaufgabe und mit der Identifikation der Fragestellung. Die Zuordnung der Textangaben zur Zeichung stellt hingegen eine Herausforderung für die in Mathematik leistungsschwächeren Schüler dar.
Die Identifikation, die Zuordnung bzw. die Konstruktion mathematischer Modelle bereitet Schülern mehr Schwierigkeiten als das Lesen und Verstehen der Textaufgabe. Obwohl eine dreiecksähnliche Anordnung der Straßen im Bild zur Aufgabe Abkürzung die Identifikation des Satzes des Pythagoras nahe legen sollte, haben drei von vier beobachteten Schülern damit Schwierigkeiten. Der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Weglänge und Fahrzeit wird von der Mehrheit der Schüler erkannt, jedoch ist für sie nicht sofort ersichtlich, wie dieser Zusammenhang mathematisiert werden kann.
Beim Ausführen der Rechenoperationen ist eine typische Schwierigkeit das Wurzelziehen. Wie auch beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut vergessen Schüler diesen Schritt beim Berechnen der Ergebnisse unter Verwendung der Pythagoras-Gleichung.

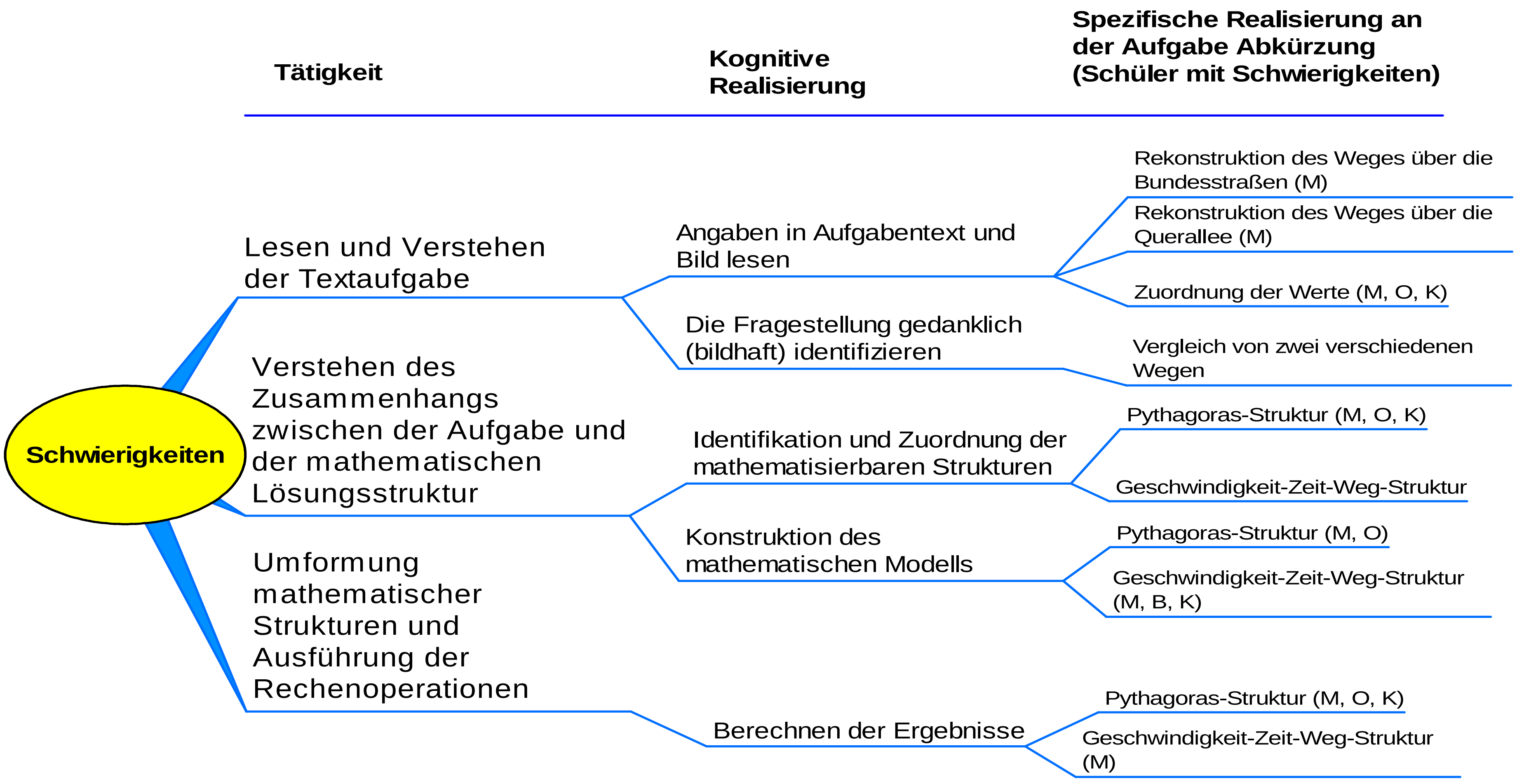


Abbildung 47. Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung

Zusammenfassung der Schüler-Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung

Aufgrund der Analyse von Schüler-Strategien und Schlüsselstellen im Lösungsprozess wurden folgende Strategien, ihre Anwendungsbedingungen sowie die Gefahren der nicht effektiven Strategieanwendung festgestellt:

Die Analyse von Kathrins Schwierigkeiten und Strategien bei der Identifikation der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung zeigt, dass die Repräsentation der Situationsgegebenheiten die Lösungsentwicklung maßgeblich beeinflussen kann. Bei der Bearbeitung von Aufgaben, die mathematische Strukturen sowie die proportionale Zuordnung enthalten, ist es hilfreich, eine Repräsentation zu finden, die dem Problemlöser bekannt ist. Diese Repräsentation ist für Kathrin eine Tabelle mit Streckenlängen und Fahrzeiten in entsprechenden Spalten. Der Ablauf dieser Strategie kann als dreischrittiger Prozess beschrieben werden. Erstens sollen Angaben aufgeschrieben werden, dann werden sie zweitens so geordnet, dass drittens ein bekanntes mathematisches Modell konstruiert und der Lösungsalgorithmus aktiviert werden können.

Tabelle 13. Überblick über die Schüler-Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung

	Strategie	**Anwendungsbedingungen**	**Handlungsabfolge**	**Nicht effektive Strategieanwendung**
1.	Suche nach einer geeigneten Repräsentation der Struktur	- bei Schwierigkeiten mit der Konstruktion des mathematischen Modells (insbesondere Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur)	- Aufschreiben der Angaben - Suche eines geeigneten Zuordnungsschemas (bei der G-W-Z-Struktur ist es für Kathrin eine Tabelle) - Identifikation eines mathematischen Modells	Wahl einer Repräsentation, die das Lösungsschema nicht aktiviert
2.	Regulation des Lern- und Lösungsprozesses	- bei Schwierigkeiten in allen Lösungsphasen - bei der Identifikation von unbekannten Inhalten, bzw. fehlenden Fähigkeiten oder Fertigkeiten	- Bitte an die andere Person (Partner), die Lösung vorzumachen und zu erklären (Kooperationsstrategie) - das Gezeigte nachmachen (Bearbeitungsstrategie) und die andere Person bitten, das zu kontrollieren (Kooperationsstrategie)	Die Erklärungen des Partners vernachlässigen
3.	Selektives Lesen und Notieren von Angaben	- bei Schwierigkeiten in allen Lösungsphasen	- die Aufgabe lesen - die wichtigsten Angaben notieren - Lösungsweg und Aufgabe erneut lesen	- Auswahl irrelevanter Informationen

Eine andere wichtige Strategie ist die Regulation des Lern- und Lösungsprozesses, die bei Bernd beobachtet wird, als er bei seinem Partner einen unbekannten Lösungsschritt – die Anwendung der Formel für die Bestimmung der Zeit aus der Geschwindigkeit und Streckenlänge – erkennt. Bernd steuert bewusst seinen Wissenserwerb, indem er erstens den Partner bittet, diesen Lösungsschritt vorzumachen und zu erklären, und zweitens die gezeigte Handlungsbfolge mit anderen Zahlen nachmacht. Die Regulation des Lern- und Lösungsprozesses aktiviert in diesem Fall kooperative Strategien (Kommunikation mit dem Partner) und Bearbeitungsstrategien.

Die Analyse von Bernds Strategien zeigt, dass die Ausführung von metakognitiven Strategien (wie Regulation oder Planung) in Kombination mit Bearbeitungsstrategien (wie z.B. selektives Lesen) Lernfortschritte bringen kann. Das Strategieskript besteht aus folgenden Elementen: Die Wiederholungsstrategie selektives Lesen beginnt mit dem Lesen der Aufgabe und wird durch das Aufschreiben wichtiger Informationen fortgesetzt. Anschließend werden metakognitive Strategien wie Kontroll- und Regulationsstrategien ausgeführt, um beim erneuten Lesevorgang die Notizen und Aufgabeninhalte abzugleichen. Mögliche Nachteile der beschriebenen Strategieabfolge können durch das Aufschreiben irrelevanter Informationen entstehen.

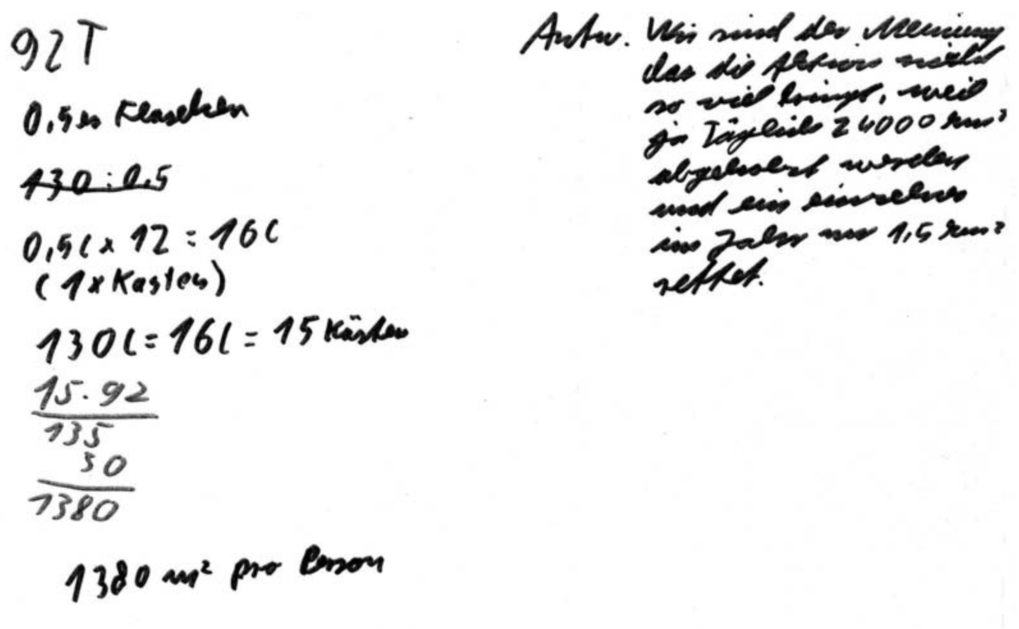
4.5 Analyse von Schwierigkeiten und eingesetzten Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald

4.5.1 Aufgabe Regenwald. Fallskizze Manfred, Kompetenzstufe 1

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Die Aufgabe Regenwald (vgl. Abbildung 26) wie auch die Aufgabe Zuckerhut wird von Manfred stockend vorgelesen. Nach dem Vorlesen liest Manfred die Aufgabe etwa 30 Sekunden lang für sich und überlegt dann laut, wie viele Tage die Regenwaldaktion gedauert hat. Bei der Berechnung der Aktionsdauer erhält er ein richtiges Ergebnis (92 Tage) und schreibt es gleich auf. Anschließend liest Manfred den ersten Satz der Aufgabenstellung *„Täglich, werden 24 000 Quadratkilometer abgeholzt“* (AB_M 11:59) vor und schweigt dann ca. 20 Sekunden. In dieser Zeit liest er die Aufgabe für sich mehrmals. Beim Lesen zeigt Manfred mit dem Stift auf einzelne Sätze im Text. Diese stille Lesephase wird mit Manfreds Frage zum Volumen des Kastens beendet: *„So, und wie viel Liter hat so ein Kasten (schaut seinen Partner fragend an und zeigt mit dem Stift auf den abgebildeten Bierkasten)?“* (AB_M 12:57). Da Manfreds Partner auf diese Frage nicht antwortet, sucht Manfred selbst nach der Antwort. Er nimmt an, dass die Bierflaschen im Kasten das Volumen von 0,5 Liter haben, und schreibt diese Angabe auf dem Lösungsblatt auf (AB_M 11:59). Manfreds Partner meint daraufhin, dass 130 Liter nun durch 0,5 Liter geteilt werden sollen. Mit diesem Vorschlag ist Manfred im ersten Moment einverstanden. Still schaut er sich etwa eine halbe Minute das Aufgabenblatt an und schreibt „130:5“. Den zuletzt aufgeschriebenen Term (130:5) streicht er anschließend durch und sagt: *„Ja, erst mal 0,5 (…) mal zwölf sind sechzehn (schreibt, 0,5L×12=16L, ein Kasten`)“* (AB_M 11:59). Manfreds Überlegung, erst das Biervolumen eines Kastens zu berechnen, und dann das von einem Deutschen in einem Jahr im Durchschnitt getrunkene Bier von Litern in Kästen umzurechnen, ist richtig. Bei der Multiplikation macht er jedoch einen Rechenfehler. Wenn die Zahlen 0,5 und 12 multipliziert werden, erhält man die Zahl 6 und nicht 16 als Ergebnis. Aus den analysierten Materialien ist nicht erschließbar, wie dieser Fehler zustande kommt. Der nächste Rechenschritt (130 L : 16 L) wird von Manfred mit der Aussage eingeleitet: *„Dann haben wir da die Anzahl der Kisten“* (AB_M 16:07). Manfred benötigt etwa 30 Sekunden, um im Kopf 130 durch 16 zu teilen und erhält ein falsches Resultat (15), das er als *„15 Kästen Bier am Tag“* (AB_M 17:01) interpretiert. Sein Partner merkt nur an, dass das ein ungefähres Ergebnis ist. Während der Rechenfehler bei der Division von 130 durch 16 von Manfred bis zum Schluss nicht erkannt wird, fällt ihm ein anderer Fehler beim Interview nach der Aufgabenbearbeitung auf. Dieser Fehler entsteht bei der Interpretation der Zahl 15. Auf die Frage des Interviewleiters, was die Zahl fünfzehn aussagt, antwortet Manfred: *„Wie viel Flaschen er (ein Deutscher)* im Jahr *(und nicht am Tag, wie bei der Aufgabenbearbeitung) kauft“* (I_M33:03). Da Manfred bei der Aufgabenbearbeitung weiter verwendet, dass ein Deutscher 15 Kästen an einem Tag trinkt, multipliziert er 15 Kästen mit 92 Tagen. Mit dieser mathematischen Operation will er die gesamte Anzahl der Kästen ausrechnen, die ein Deutscher im Durchschnitt im Aktionszeitraum getrunken hat. Auch diese relativ komplexe Berechnung versucht Manfred im Kopf durchzuführen. Sein Partner nimmt in der Zeit einen Stift und rechnet schriftlich, dass $15 \cdot 92=1380$ ergibt (vgl. Abbildung 48). Martin interpretiert die Anzahl der verkauften Kästen richtig als die Fläche, welche vor der Abholzung durch die Regenwald-Aktion geschützt wurde, und schreibt das Ergebnis (1380) auf. Beim Aufschreiben ist er unsicher, ob die geschützte Fläche 1380 Quadrat*kilometer* oder Quadrat*meter* beträgt (AB_M 18:14). Sein Partner sagt: *„Quadratmeter“* und Manfred ergänzt die Zahl 1380 mit der Maßeinheit *„1380 m^2“*. Unmittelbar nach der Dokumentation des Ergebnisses sagt Manfred: *„Ja so viel bringt die Aktion nicht. Bringt gerade mal eineinhalb Kilometer retten“* (AB_M 18:25). Erneut macht Manfred einen Fehler. Gemäß seiner Berechnung $1380(m^2)=1{,}380(km^2)\approx 1{,}5(km^2)$ meint er, dass in einem Quadratkilometer 1000 und nicht 1000000 Quadratmeter sind. Ferner berücksichtigt er nicht, dass sich 1380 m^2 nur auf einen

Deutschen beziehen. Manfreds Partner lenkt seine Aufmerksamkeit auf dieses Problem: *„Es würde dann doch pro Person sein“* (AB_M 19:11). Manfred bleibt dennoch bei seiner Entscheidung. *„Das bringt trotzdem nicht viel. Es trinkt nicht jeder Bier. Dann guck mal, das (zeigt auf die Angabe „130 Liter“ im Text) ist ja im Jahr und es werden täglich vierundzwanzigtausend Quadratkilometer abgeholzt“* (AB_M 19:28). Er fragt, ob sein Partner auch so denkt und schreibt im Antwortsatz: *„Wir sind der Meinung das die Aktion nicht so viel bringt, weil ja täglich 24000 km^2 abgeholzt werden und ein einzelner im Jahr nur 1,5 km^2 rettet“* (AB_M 20:18).



92 T
0,5 l Flaschen
~~130 : 0,5~~
0,5 l x 12 = 16 l
(1 x Kasten)
130 l = 16 l = 15 Kästen
15 · 92
135
30
1380
1380 m² pro Person

Antw. Wir sind der Meinung das die Aktion nicht so viel bringt, weil ja Täglich 24000 km² abgeholzt werden und ein einzelner im Jahr nur 1,5 km² rettet.

Abbildung 48. Lösung der Aufgabe Regenwald von Manfred und seinem Partner

Analyse von Manfreds Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Durch die andere Lösungsstruktur der Aufgabe Regenwald werden bei der Aufgabenbearbeitung von Manfred zum Teil neue Schwierigkeitsaspekte festgestellt. Die neuen Befunde zeigen erstens Schwierigkeiten mit dem Treffen von Annahmen. Der zweite Schwierigkeitstyp betrifft die Interpretation von Ergebnissen. Da nach dem Berechnen mathematischer Resultate Schwierigkeiten mit der Interpretation dieser Ergebnisse entstehen, wurde die Kategorie „Umformung mathematischer Strukturen und Ausführung der Rechenoperationen“ um diesen Aspekt erweitert und heißt nun „Umformen mathematischer Strukturen, Ausführung der Rechenoperationen und Interpretation der Ergebnisse“.

Lesen und Verstehen der Textaufgabe. Mögliche Verstehensschwierigkeiten von Manfred beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald können aus indirekten Hinweisen wie stockendem

Vorlesen oder langen stillen Lesephasen abgeleitet werden. Diese Schwierigkeiten wurden von Manfred erfolgreich überwunden. Er versteht alle Angaben und identifiziert die Fragestellung richtig (I_M 43:34). Jedoch zeigt der weitere Lösungsprozess, dass das Verstehen der Situation nicht die notwendige Tiefe erreicht.

Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur. Während Manfred bei den Aufgaben Zuckerhut und Abkürzung viele Schwierigkeiten mit der Identifikation den Pythagoras- und Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Strukturen hat, kann er nun fast alle einzelnen arithmetischen Strukturen der Aufgabe Regenwald ohne Probleme erkennen. Eine solche arithmetische Struktur besteht hier aus drei Elementen: dem Volumen einer Bierflasche, der Anzahl der Bierflaschen und dem aus diesen beiden Angaben resultierenden Biervolumen eines Kastens. In der Aufgabe Regenwald gibt es solche arithmetische Strukturen (siehe Unterabschnitt 3.2.3). Bei der Analyse von Manfreds Schwierigkeiten im Lösungsprozess werden vor allem die arithmetischen Strukturen betrachtet, mit denen Manfred Schwierigkeiten hat. Die einzige arithmetische Struktur, die Manfred und sein Partner nicht erkennen, ist die Relevanz des Marktanteils der Aktionsbrauerei für den gesamten Bierkonsum. Sie denken nicht daran, dass es in Deutschland viele Brauereien gibt, und der aktionsrelevante jährliche Bierverbrauch dementsprechend reduziert werden müsste.
Nachdem Manfred die arithmetischen Struktur identifiziert hat und weiß, dass z.B. das gesamte Biervolumen eines Kastens aus den Angaben zum Volumen einer Flasche und zur Anzahl der Flaschen berechnet werden kann, mathematisiert er diese Strukturen. Dabei hat Manfred keine Schwierigkeiten mit der Rekonstruktion arithmetischer Operationen: Er erkennt u.a., dass das Volumen einer Flasche mit der Anzahl der Flaschen multipliziert werden muss. Schwierigkeiten treten jedoch beim Einsetzen derjenigen Angaben auf, deren Werte in der Aufgabe nicht explizit angegeben sind. Zum Beispiel muss das Volumen einer Bierflasche bekannt sein, um das Biervolumen des Kastens zu bestimmen. Da das Volumen einer Flasche in der Aufgabe nicht angegeben ist, muss es aus eigenen Erfahrungen und mit Hilfe des Bildes eingeschätzt werden. Manfred überwindet diese Schwierigkeit ohne fremde Hilfe, sagt aber im Interview, dass das Einschätzen des Volumens einer Flasche, ihm Schwierigkeiten bereitet habe (I_M 43:48). Eine andere Schwierigkeit hat Manfred bei der Einschätzung des Bierkonsums aller Deutschen. Mit dieser Angabe will Manfreds Partner die gesamte Anzahl von Bierkästen berechnen, die in Deutschland in der Aktionszeit gekauft wurden. Manfred findet, dass das nicht möglich sei. *„Man hätte wissen müssen, wie viele Deutsche Bier trinken“* (I_M 37:30). *„Ich weiß ja auch nicht, wie viel genau, wie viel Bier so jeder trinkt“* (I_M

31:18). Aus diesen Äußerungen wird ersichtlich, dass Manfreds Schwierigkeit mit dem Verständnis des Begriffs „Durchschnitt“ zusammenhängt. Er versteht zwar intuitiv den Begriff „Durchschnitt“ zum Teil richtig: *„manche trinken weniger, manche mehr, aber im Durchschnitt trinkt jeder 130 Liter Bier“* (I_M 31:18) bezieht aber in seine Überlegungen nicht die Deutschen ein, die kein Bier trinken: *„Also mein Vater zum Beispiel trinkt kein Bier“* (I_M 39:05). Er missversteht somit den Satz „jeder Deutsche trinkt im Jahr 130 L Bier“ als „jeder Deutsche, *der Bier trinkt*, trinkt im Jahr 130 Liter Bier“. Mit anderen Worten: Manfred versteht, dass nicht jeder gleich viel Bier trinkt, aber dass der Begriff „Durchschnitt“ auch die „Null-Trinker“ einschließt, weiß er nicht.

Umformung mathematischer Strukturen, Ausführung der Rechenoperationen und Interpretieren der Ergebnisse. Wie auch in den anderen analysierten Aufgaben hat Manfred Probleme mit Berechnungen. Auffällig ist, dass Manfred alle Rechenoperationen im Kopf, ohne schriftliche Dokumentation, durchführt. Sowohl bei der Multiplikation (*„0,5L·12=16L“* (AB_M 16:03), 15L·92Tage (AB_M 17:15)) als auch bei der Division zweier Zahlen (*„130L:16L=15 Kästen“* (AB_M 16:18)) kommt Manfred auf falsche Ergebnisse. Eine andere Schwierigkeit betrifft die Umrechnung von Quadratmetern in Quadratkilometer. Manfred glaubt, dass ein Quadratkilometer 1000 und nicht 1000000 Quadratmeter sind und bezeichnet 1380 Quadratmeter als ca. 1,5 Quadratkilometer. Somit interpretiert er die quadratischen Zusammenhänge linear. Dies deutet auf eindimensionales Denken bei Manfred hin, das bei Manfred schon bei Problemen mit der Geschwindichkeit-Weg-Zeit-Struktur in der Aufgabe Abkürzung beobachtet wurde.

Die vielen Rechenergebnisse der Aufgabe Regenwald sollen richtig interpretiert werden. Die Interpretation der Ergebnisse ist in der Aufgabe Regenwald nicht immer einfach. Je weiter die Lösung entwickelt wird, desto komplexer wird die Interpretation. Als Antwort auf die Frage, was die Zahl 15 in Manfreds Lösung bedeutet, reicht es z.B. nicht aus, 15 Kästen zu sagen. Die vollständige Antwort lautet: Ein Deutscher trinkt im Durchschnitt 15 Kästen Bier im Jahr. Manfred interpretiert die Zahl 15 zwar zum Teil richtig als 15 Kästen (vgl. Abbildung 48), bezieht die 15 Kästen jedoch auf einen Tag und nicht auf ein Jahr (AB_M 17:01). Dieser Interpretationsfehler führt dann zu einem falschen Rechenschritt im Lösungsprozess. Eine ähnliche Schwierigkeit zeigt sich von Manfred bei der Interpretation von 1380 Kästen, die ein Deutscher im Aktionszeitraum getrunken hat, als geschützte Regenwaldfläche. Bei dieser Interpretation ist Manfred nicht sicher, ob die Bierbrauerei durch den Verkauf von 1380 Kästen Bier 1380 Quadrat*meter* oder Quadrat*kilometer* der Regenwaldfläche schützt.

Analyse von Manfreds Handlungsstrategien im Lösungsprozess

Schwierigkeiten mit dem Verstehen der Aufgabe Regenwald versucht Manfred vor allem durch mehrmaliges stilles Lesen und Betrachten des Bildes zu überwinden. Solche stille Lese- und Denkphasen scheinen ein wichtiges Merkmal von Manfreds Lösungsstil zu sein, die ihm helfen, verschiedene Schwierigkeiten im Lösungsprozess zu überwinden. Diese Handlungsstrategie reicht aber nicht aus, um die Komplexität der Aufgabe zu verstehen.

Beim Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur überwindet Manfred die Schwierigkeit beim Treffen der geeigneten Annahme zum Volumen der Bierflasche selbständig. Bei dieser Hürde überlegt er still, dass das Volumen einer Bierflasche 0,5 Liter beträgt. Dann wendet Manfred eine kooperative Strategie an, indem er seinen Partner fragt, wie viel Liter Bier ein Bierkasten enthält. Da sein Partner die Frage nicht beantwortet, bringt diese Strategie kein positives Ergebnis. Die niedrige Wirksamkeit der kooperativen Strategien bei Manfred und seinem Partner kann durch Probleme mit der Verbalisierung ihrer eigenen Gedanken erklärt werden. Manfreds Partner ist z.B. die Einbindung der Frage zum Biervolumen in den Aufgabenkontext nicht klar, deswegen ist es für ihn schwierig, diese Frage zu beantworten. Auch im weiteren Lösungsprozess erklärt keiner der Schüler seinen gesamten Gedankengang. Die andere bei der Konstruktion des mathematischen Modells entstandene Schwierigkeit bezieht sich auf Manfreds Probleme mit dem Begriff Durchschnitt. Manfred ist diese Verstehensschwierigkeit nicht bewusst. Sein Partner kann Manfred nicht überzeugen, dass die Überlegung, den Bierverbrauch aller Deutschen zu berechnen, wichtig ist. Vermutlich weiß Manfreds Partner nicht, wie der Durchschnittsverbrauch jedes Deutschen in den Gesamtverbrauch aller Deutschen umgerechnet werden kann und schlägt deshalb keine weiteren Rechenschritte vor.

Bei der Ausführung von Rechenoperationen macht Manfred mehrere Fehler. Die Rechenfehler und Rechenschwierigkeiten betreffen sowohl Multiplikation als auch Division von zwei Zahlen. Da Manfred und sein Partner den auf dem Tisch liegenden Taschenrechner nicht beachten, müssen sie die Rechnungen entweder im Kopf oder mit Hilfe der schriftlichen (bzw. halbschriftlichen) Verfahren durchführen. Manfred rechnet stets im Kopf und macht dabei Fehler. Warum er beim Lösen relativ komplexer Rechenaufgaben wie 130:16 keine schriftlichen Verfahren anwendet, ist nicht klar. Vermutlich beherrscht Manfred diese Rechenverfahren nicht und bemüht sich das Ergebnis im Kopf einzuschätzen, statt ein genaues mathematisches Resultat auszurechnen. Eine schriftliche Dokumentation seiner Gedanken würde für ihn in diesem Fall eine viel versprechende Lerngelegenheit darstellen. Sein Partner könnte dann die einzelnen Rechenschritte nachvollziehen, kontrollieren und ggf. korrigieren. Aus diesem

Grund wäre diese Strategie sowohl für Manfreds Lernprozess als auch für den gesamten Lösungsweg hilfreich. Eine andere Rechenschwierigkeit bei der Umrechnung der geschützten Regenwaldfläche von Quadratmeter in Quadratkilometer wurde von beiden Schülern nicht wahrgenommen. Dadurch wurde auch keine effektive Strategie bei diesem Problem angewandt. Eine innermathematische Kontrolle des Ergebnisses, z.B. durch einen Überschlagsrechnung, wäre für die Rechenschwierigkeiten von Manfred vom Vorteil. Manfred könnte sich fragen, ob es möglich ist, als Ergebnis der Multiplikation von 12 und 0,5 eine Zahl zu erhalten, die größer als 12 (gemäß Manfreds Berechung 16) ist.

Wie schon im Abschnitt zu den Schüler-Schwierigkeiten erwähnt wurde, erfordert die Lösung der Aufgabe Regenwald wegen ihrer Mehrschrittigkeit und der Mehrdimensionalität der Struktur eine anspruchsvolle Interpretationsleistung. Sie bezieht sich nicht auf die bloße Übersetzung von Zahlen aus der Mathematik in die Realität sondern besteht vielmehr in der Verknüpfung einzelner Lösungsstrukturen der Aufgabe Regenwald. Bei Manfred wurden zwei effektive Kontrollstrategien beim Interpretieren der Ergebnisse beobachtet. Eine ist die kooperative Strategie „den Partner fragen“ (*„Quadratkilometer, oder?“* (AB_M 18:14)). Die andere Strategie bei der Interpretation von z.B. 1380 Kästen Bier ist ein erneutes selektives Lesen der Aufgabenstellung. Bei dieser Leseart werden im Text nur relevante Informationen gesucht und in die Interpretation einbezogen.

Tabelle 14. Übersicht: Manfreds Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald

Handlungsstrategien	**Kommt vor**
Bearbeitungsstrategien	
Wiederholung (z.B. nochmaliges Lesen ausgewählter Textstellen)	ja
Elaboration (z.B. Aktivierung von Informationen aus dem Gedächtnis, die helfen können, die Aufgabe zu lösen. *„Es trinkt nicht jeder Bier“* AB_M 19:28)	ja
Organisation (z.B. Angaben mit eigenen Worten erfassen und Zeichnen einer Skizze)	ja, sprachlich nein, ikonisch
Metakognitive Strategien	
Planung des Lösungsprozesses	nein
Kontrolle des Ergebnisses und des Lösungsprozesses (z.B. Kontrolle des Lösungsprozesses. AB_M 13:57, 16:07)	ja
Regulation des Lösungsprozesses (Wird durch eine Kontrollstrategie ein Problem beim Lösungsverhalten festgestellt, werden kognitive Strategien ggf. geändert. Manfred achtet darauf, dass der Lösungsprozess voran schreitet)	ja

Ressourcenstrategien	
Strategien für das kooperative Lernen (Partner fragen: *„So, und wie viel Liter hat so ein Kasten?“* AB_M 13:57)	ja

Die Vielzahl von Strukturen in der Aufgabe Regenwald führt zu dem Ergebnis, dass die Klarheit über das Situationsmodell nur durch die Klärung von Größenbeziehungen gewonnen werden kann. Im Manfreds Bearbeitungsprozess wurden zwar einzelne Strategien beobachtet, diese reichen aber nicht aus, um die Gesamtstruktur aufzubauen. Ihm gelingt es nur einzelne Strukturelemente zu rekonstruieren. Eine hilfreiche Strategie wäre vermutlich eine Vereinfachung der Zahlen mit denen im Laufe des Lösungsprozesses weiter gerechnet wird.

Analyse der Schlüsselstelle im Lösungsprozess

Als Schlüsselstellen können beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald lange stille Lese- und Denkphasen bezeichnet werden. Manfred wendet diese Phasen bei verschiedenen Schwierigkeiten im Lösungsprozess an. Der Nachteil dieser Phasen ist jedoch eine Beeinträchtigung des inhaltlichen Austauschs zwischen beiden Schülern. Sie sollten deswegen durch die Erklärung eigener Gedanken ergänzt werden. Eine besondere Herausforderung bei der Kooperation zwischen den Schülern ist die Notwendigkeit, abwechselnd eigene Gedanken zurückzustellen und auf die Ideen des Partners einzugehen. Nur in diesem Fall können beide Partner vom kokonstruktiven Austausch profitieren.

Bei der Aufgabenbearbeitung immer wieder auftretende Lesephasen bilden eine weitere Schlüsselstelle im Lösungsprozess. Wiederholungsstrategien, bei denen der Aufgabentext, das Bild oder auch eigene Notizen gelesen werden, sind ein wichtiges Element in Manfreds Lösungsweg. Durch das nochmalige Lesen gelingt es dem Schüler vermutlich, die vorher konstruierten mentalen Modelle aufrechtzuerhalten und zu aktualisieren.

Manfred fehlt es jedoch an Basiswissen, um die Gesamtstruktur aufzubauen. Aus diesem Grund braucht er unbedingt eine Unterstützung seitens der Lehrperson oder leistungsstärkerer Mitschüler.

4.5.2 Aufgabe Regenwald. Fallskizze Oliver, Kompetenzstufe 2

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Die Aufgabe Regenwald wird von Oliver flüssig vorgelesen. Anschließend liest er ausgewählte Sätze aus der Aufgabenstellung noch ein Mal vor und fasst die Fragestellung mit eigenen Worten zusammen: *„Müssen wir doch nur ausrechnen, wie viel Regenwald die dann am Tag* *beschützen"* (AB_O 7:05). Nach dieser Anmerkung schaut sich Oliver das Aufgabenblatt an und sagt: *„Also täglich trinken Deutsche im Durchschnitt 130 Liter Bier"* (AB_O 7:05). Daraufhin merkt Olivers Partner an, dass 130 Liter sich auf ein Jahr und nicht auf einen Tag beziehen. Oliver fragt dann nach, wo das in der Aufgabenstellung beschrieben ist. Mit dem Stift zeigt Olivers Partner auf den entsprechenden Satz in der Aufgabe und Oliver liest diesen Satz still für sich. In der Zeit sagt Olivers Partner, dass die Aktion nur drei Monate dauert. Oliver vervollständigt diesen Kommentar des Partners durch die Erläuterung, dass als Erstes ausgerechnet werden soll, wie viel Bier in drei Monaten im Durchschnitt getrunken wird. Um das auszurechnen, will Oliver den jährlichen Bierverbrauch (130 Liter) durch vier teilen. Einen anderen Rechenweg überlegt sich zeitgleich Olivers Partner. Er möchte das Biervolumen mit dem Dreisatz berechnet und sagt, dass in 12 Monaten 130 Liter Bier getrunken werden. Weiter würde Olivers Partner den Bierkonsum in einem Monat und erst dann in drei Monaten berechnen. Oliver erwidert: *„Ja, aber zwölf durch vier ist drei"* (AB_O 8:32). Damit meint er, dass der Bierverbrauch in drei Monaten ein Viertel des jährlichen Bierverbrauchs darstellt und deswegen können 130 Liter ohne Zwischenrechnungen durch 4 geteilt werden. Olivers Partner versteht nun, was damit gemeint ist, und stimmt Olivers Rechenweg zu. Oliver schreibt die Rechnung (130:4) auf. Mit Hilfe des Taschenrechners teilt sein Partner 130 durch vier und bekommt 32,5. Diese Zahl wird von Oliver als 32,5 Liter im Durchschnitt in drei Monaten interpretiert und als Ergebnis auf dem Lösungsblatt festgehalten (vgl. Abbildung 49).

Bei der Suche des nächsten Lösungsschritts liest Oliver einen Ausschnitt aus der Aufgabenstellung und fragt: *„Wie viel Liter sind in so einem Ding da (zeigt mit dem Stift auf den abgebildeten Bierkasten. Mit dem „Ding" meint er eine Flasche). Liter?"* (AB_O 09:06). Olivers Partner antwortet erst, dass 0,5 Liter in einer Bierflasche sind. Etwas später besteht er auf das Volumen von 0,75 Liter. Obwohl Oliver gerne eine ganze Zahl, wie z.B. einen Liter, für das Volumen einer Flasche annehmen würde, stimmt er der Annahme von 0,75 Liter zu. Er zählt die Flaschen im Bierkasten auf dem Bild ab und schlägt vor, das Volumen einer Flasche (0,75 L) mit der Anzahl von Flaschen in einem Kasten (12 Flaschen) zu multiplizieren. Seinem Partner sagt Oliver, er soll die Rechnung aufschreiben. Der Partner schreibt 0,75·12 und berechnet mit dem Taschenrechner das Ergebnis (9 Liter). Nach dieser Berechnung fragt Olivers Partner, wie sie weiter vorgehen sollen. Oliver antwortet: *„Jetzt musst du wieder 32,5 durch 9. [..] Dann haben wir genau, wie viel Kästen es sind"* (AB_O 10:38). Oliver diktiert diese Rechnung und sein Partner rechnet mit dem Taschenrechner 3,5 Kästen als Ergebnis aus. Über das nicht ganzzahlige Ergebnis ist Oliver erstaunt (vgl. I_O 24:18). Er rundet das Rechenergebnis auf 3 Kästen Bier mit der Begründung: *„Wir können ja keinen halben Kasten verkaufen, die (die Organisatoren der Aktion) wollen ja nur ganze Kästen haben“* (AB_O 11:14).

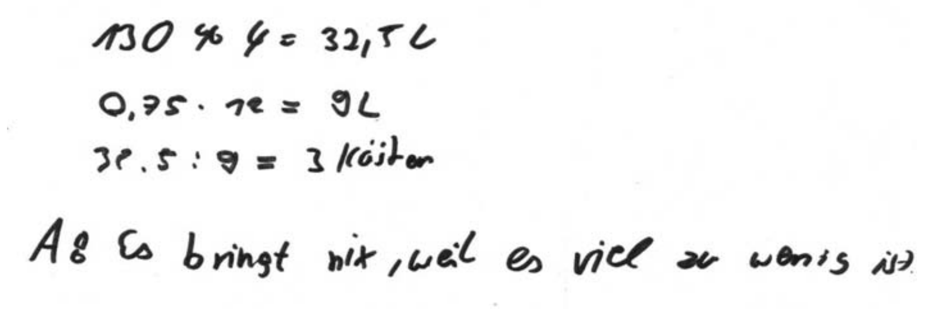


Abbildung 49. Lösung der Aufgabe Regenwald von Oliver und seinem Partner

Drei Kästen werden von Oliver dann als 3 Quadratmeter geschützten Regenwaldes interpretiert. Die Aufgabe ist nach Olivers Meinung gelöst und es bleibt nur den Antwortsatz aufzuschreiben (AB_O 11:14). Oliver überlegt laut, dass die abgeholzte Fläche (24000 km^2) viel größer als die gerettete Fläche (3 m^2) ist und die Regenwald-Aktion deswegen nichts bringt. Sein Partner geht auf Olivers Äußerung indirekt ein, indem er fragt, ob Oliver weiß, wie viele Deutsche es gibt. Beide Schüler lachen und Oliver erklärt, dass sie doch schon die durch alle Deutsche geschützte Fläche ausgerechnet haben. Dann ist er aber nicht mehr sicher, ob das Ergebnis doch nicht nur für einen Deutschen gilt: *„Obwohl, du sagst das ist ja [.] jeder Deutsche“* (AB_O 11:58). Nach einer stillen Phase fragt Oliver seinen Partner, ob er weiß, wie viele Deutsche es gibt. Der Partner gibt darauf keine Antwort. Dann sagt Oliver: *„Ja, aber hat ja nur diese Brauerei gemacht“* (AB_O 12:07). Dieses Argument überzeugt Oliver davon, dass nicht jeder Deutsche in der Aktionszeit drei Kästen von diesem Bier kauft, weil viele eine andere Biermarke kaufen. Da sein Partner keinen Vorschlag zur näheren Abschätzung des Bierverbrauchs macht, bleibt es bei drei Bierkästen bzw. 3 Quadratmetern geschützten Regenwaldes. Olivers Partner schreibt den Antwortsatz: *„Es bringt nix, weil es viel zu wenig ist“* (AB_O 12:49).

Analyse von Olivers Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Lesen und Verstehen der Textaufgabe. Die Aufgabe Regenwald enthält viele unterschiedliche Angaben, die zu einem kohärenten Situationsmodell verbunden werden sollen (siehe Unterabschnitt 3.2.3). Insbesondere die Angaben zur täglichen Regenwaldabholzung und zum jährlichen Bierverbrauch beziehen sich auf unterschiedliche Zeiträume und erschweren dadurch das Bilden des Situationsmodells. Bei Oliver führt das zu folgenden Verstehensschwierigkeiten: Während der Aufgabenbearbeitung sagt Oliver, dass Deutsche täglich und nicht jährlich 130 Liter Bier trinken (AB_O 7:38). Als Olivers Partner ihn auf diesen Fehler aufmerksam macht, will Oliver die Textstelle sehen, an der der Bierverbrauch angegeben ist. Daraus kann man schließen, dass es bei diesem Fehler nicht um eine bloße Verwechselung geht. Alle anderen Angaben werden von Oliver richtig verstanden.

Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur. Die Identifikation von Strukturen, die im nächsten Schritt mathematisiert werden, gelingt Oliver bis auf zwei arithmetische Strukturen ohne Schwierigkeiten. Die erste Schwierigkeit bezieht sich auf die Aktionsdauer. Oliver beachtet nicht, dass die Regenwald-Aktion nur drei Monate gedauert hat. Im Interview sagt er hierzu: *"Ich habe das nicht richtig hier also mit einbezogen, dass es nur drei Monate läuft"* (I_O 16:11). Olivers Partner hilft ihm in dieser Situation mit der Anmerkung: *„Es sind doch so und so lang, also drei Monate geht es"* (AB_O 8:00). Auch die Bedeutung des Marktanteils der Aktionsbrauerei wird für Oliver nicht verständlich. Die entsprechende arithmetische Struktur wird von ihm und seinem Partner nicht identifiziert.
Bei der Konstruktion des mathematischen Modells hat Oliver die gleichen Schwierigkeiten wie Manfred. Es fällt ihm schwer das Volumen einer Bierflasche einzuschätzen. Oliver schätzt das Volumen fälschlicherweise auf einen Liter ein (AB_O 9:06). Ferner hat er Probleme mit der Konstruktion des mathematischen Modells zum Berechnen des Bierkonsums aller Deutschen. Der Satz in der Aufgabenstellung „130 Liter Bier trinkt jeder Deutsche im Durchschnitt im Jahr" versteht er als „alle Deutschen trinken 130 Liter Bier im Jahr". Auch bei dieser Schwierigkeit will Olivers Partner helfen. Da jedoch keiner der Schüler weiß, wie viele Deutsche es gibt, können sie das von allen Deutschen getrunkene Bier nicht berechnen.

Umformung mathematischer Strukturen, Ausführung der Rechenoperationen und Interpretieren der Ergebnisse. Sowohl bei Berechnungen als auch bei der Interpretation der Resultate hat Oliver keine Schwierigkeiten.

Analyse von Olivers Handlungsstrategien im Lösungsprozess

Wie auch beim Bearbeiten der Aufgaben Abkürzung und Zuckerhut konzentriert sich Oliver nach dem Vorlesen der Aufgabe Regenwald auf einzelne Informationen aus dem Aufgabentext, die er laut oder für sich liest. Die Aufgabe erfasst Oliver ferner mit eigenen Worten *„Müssen wir doch nur ausrechnen, wie viel Regenwald die dann am Tag schützen"* (AB_O 7:05). Bei der Verstehensschwierigkeit mit dem Bezug des Bierkonsums eines Deutschen auf einen Tag statt auf ein Jahr, fragt Oliver seinen Partner, wo diese Information zu lesen ist

(AB_O 7:38). Diese Strategie kooperativen Lernens erlaubt es, Oliver die Situation besser zu verstehen.

Auch bei der Identifikation und Zuordnung der mathematischen Lösungsstruktur helfen Oliver seine Nachfragen an den Partner. Der Partner gibt einen Hinweis, dass die Aktion nur drei Monate dauert. Eine andere hilfreiche strategische Handlung ist die Fokussierung auf die gesuchte Größe wie: *„Wir müssen ausrechnen, wie viel Durchschnitt in 3 Monaten Bier trinkt“* (AB_O 8:06).

Die Konstruktion des mathematischen Modells zur Berechnung des Biervolumens eines Bierkastens verursacht Schwierigkeiten, weil Oliver das Volumen einer Bierflasche unbekannt ist. Er und sein Partner diskutieren lange, welches Volumen die Flasche hat. Sie wissen aber beide nicht, wie viel Liter in einer solchen Flasche sind und finden auch keine Möglichkeit es herauszufinden. Ähnliche Schwierigkeiten zeigen sich beim Bestimmen des Bierkonsums aller Deutschen. Oliver weiß nicht, was der Begriff „Durchschnitt“ bedeutet. Sein Partner kann ihm bei dieser Frage nicht helfen. Obwohl Olivers Partner eine ungefähre Vorstellung vom Begriff Durchschnitt hat und deswegen den durchschnittlichen Bierkonsum aller Deutschen einschätzen möchte, kann er dies wegen fehlender Kenntnis der gesamten Einwohnerzahl Deutschlands nicht tun. Die kooperativen Strategien reichen bei den genannten Schwierigkeiten nicht aus. Vermutlich fehlt Manfred Vorwissen, das durch den Einsatz von Strategien in der Laborsituation nicht erworben werden kann.

Beim Interpretieren der Ergebnisse sind bei Oliver Kontrollstrategien zu beobachten. Er überprüft, ob das Endergebnis – die Zahl 3,5 (Kästen Bier) – in der Realität sinnvoll ist und rundet auf die ganze Zahl 3 (Kästen Bier) ab. Dieses Vorgehen begründet er mit dem Aufgabentext, in dem ein Quadratmeter Regenwald nur beim Verkauf eines Kastens geschützt wird. Ferner fragt er zur Kontrolle seinen Partner, ob er auch einverstanden ist, dass die Regenwald-Aktion nichts bringt. Durch diese Frage und die Erläuterung seiner Meinung hierzu wird Olivers Position objektiviert.

Tabelle 15. Übersicht: Olivers Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald

Handlungsstrategien	**Kommt vor**
Bearbeitungsstrategien	
Wiederholung (z.B. nochmaliges Lesen ausgewählter Textstellen)	ja
Elaboration (z.B. Aktivierung vom Alltagswissen zum Volumen einer Bierflasche)	ja
Organisation (z.B. Erfassung der Fragestellung mit eigenen Worten (AB_O 7:05) und Zeichnen einer Skizze)	ja, verbal nein, ikonisch

Metakognitive Strategien	
Planung des Lösungsprozesses	nein
Kontrolle des Ergebnisses und des Lösungsprozesses (z.B. Kontrolle des Ergebnisses *„Wir können ja keinen halben Kasten verkaufen, die (Organisatoren der Aktion) wollen ja nur ganze Kästen haben“* AB_O 11:14)	ja
Regulation des Lösungsprozesses (Oliver fordert seinen Partner auf, den Lösungsweg aufzuschreiben)	ja
Ressourcenstrategien	
Strategien für das kooperative Lernen (Partner fragen: *„Wo steht das im Jahr?“* (AB_O 7:38)	ja

Oliver zeigt ein breites Repertoire von Lernstrategien. Diese reichen jedoch nicht aus, um die Gesamtstruktur zu rekonstruieren. Vor allem fehlendes Verständnis einzelner Begriffe wie z.B. „Durchschnitt“ erschwert den Aufbau der Gesamtstruktur. Strategisch scheint ein verstärkter Einsatz der metakognitiven Handlungsstrategien wie Planung, Kontrolle und Regulation noch ausbaufähig.

Analyse der Schlüsselstelle im Lösungsprozess

Eine Schlüsselstelle im Lösungsprozess bilden Hilfen, die Oliver beim Verstehen der Aufgabe und bei der Identifikation einer arithmetischen Struktur (des Bierkonsums während der Aktionsdauer) in Anspruch nimmt. Auf den ersten Blick ist die Unterstützung des Partners in diesen Situationen hilfreich, weil sie die Lösungsentwicklung ohne Verzögerung voran bringt. Andererseits kann man die Frage stellen, ob vor allem die zweite Hilfe zu früh kommt und ein Teil der Lösung vorwegnimmt. Während Oliver noch die Textstelle zu seinem vorangegangenen Fehler liest, deutet sein Partner schon an, welcher erste Lösungsschritt gemacht werden kann. Diese Schlüsselstelle im Lösungsprozess zeigt, wie wichtig individuelle Denkphasen, wie sie etwa bei Manfred beobachtet wurden, bei der Kooperation sind.

Erfolgsversprechend ist ferner die Kontrolle der Lösung, die bei Oliver an mehreren Stellen während der Aufgabenbearbeitung beobachtet wurde. Diese metakognitive Strategie führt bei Oliver zur Aktivierung anderer Stützstrategien wie z.B. “Partner fragen“ oder den Bearbeitungsstrategien. Das Rechenergebnis (3,5 Kästen) wird z.B. durch das Lesen der Aufgabenstellung und der Notizen zum Lösungsweg auf Plausibilität geprüft und sinnvoll gerundet.

4.5.3 Aufgabe Regenwald. Fallskizze Bernd, Kompetenzstufe 3

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

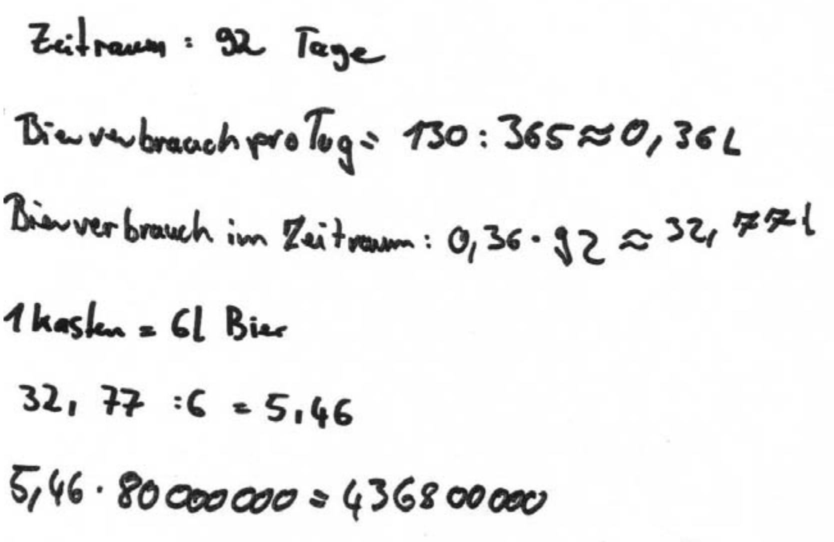
„Ah, Krombacher Regenwaldprojekt. Saufe für den Regewald, das ist doch (toll)“ (AB_B 23:55) sagt Bernd nach dem ersten flüchtigen Blick auf das Aufgabenblatt und die beiden Schüler lachen. Der Aufgabentext wird von Bernds Partner vorgelesen. Anschließend nennt Bernd einzelne Schritte, die sie bei der Aufgabenbearbeitung vollziehen müssen. In diesem Moment erkennt er drei Schritte: Berechnung der Aktionsdauer, Bestimmung des Biervolumens, das ein Deutscher im Aktionszeitraum trinkt und schließlich die Ermittlung des Biervolumens, das von allen Deutschen im Aktionszeitraum getrunken wird. Bernds Partner ergänzt diese Überlegungen mit der Anmerkung, dass sie vor der Bestimmung des Biervolumens, das ein Deutscher im Aktionszeitraum trinkt, noch das täglich konsumierte Bier berechnen sollten. An einer Stelle nennt Bernd auch eine mathematische Operation, die bei der Berechnung des Bierkonsums aller Deutschen angewandt werden soll: *„Und dann halt einfach mal [..] halt die Einwohnerzahl von Deutschland“* (AB_B 25:10). Er beendet die Aufzählung der Lösungsschritte mit der Bemerkung: *„Dann haben wir es“* (AB_B 25:10) und beginnt mit dem ersten Lösungsschritt, der Berechnung des Aktionszeitraums.

Da Bernd und sein Partner die Aktionsdauer in Tagen bestimmen wollen, überlegen sie sich erst, wie viele Tage jeder der drei Aktionsmonate hat, und addieren die Ergebnisse zusammen. Die Regenwald-Aktion dauert nach ihren Berechnungen 92 Tage: *„Also, ja zweiundneunzig Tage sind das schon mal, wie das abläuft“* (AB_B 26:23). Bernd fordert seinen Partner auf, dieses Ergebnis aufzuschreiben, und berechnet in der Zeit, wie viel Liter Bier ein Deutscher pro Tag trinkt. Sein Partner sagt, dass Bernd das mit der Prozentrechnung bestimmen kann. Bernd versteht nicht, was sein Partner damit meint (vgl. I_B 54:04) und sagt: *„Das geht doch so“* (AB_B 27:01). In den Taschenrechner tippt Bernd 130:365 ein und bekommt als mathematisches Ergebnis eine mehrstellige Zahl, die er auf 0,36 rundet. Dieses Ergebnis interpretiert Bernd als 0,36 Liter pro Tag und notiert die Berechnung (vgl. Abbildung 50). Um den Bierkonsum im Aktionszeitraum zu ermitteln, multipliziert Bernd dieses Zwischenergebnis mit der Anzahl der Aktionstage. Das Ergebnis wird von ihm wieder auf zwei Nachkommastellen gerundet und dokumentiert.

Während Bernd die Berechnungen durchführt und „Bierverbrauch im Zeitraum“ aufschreibt, schaut sich sein Partner den Aufgabentext an. Erstaunt sagt er: *„Hää, wir müssen dann erst mal ausrechnen, wie viel Liter Bier ein Kasten hat“* (AB_B 27:57). Bernd unterbricht das Aufschreiben und fragt: *„Ja, wie viel Flaschen sind das im Kasten?“* (AB_B 28:21). Sein Partner erläutert: *„Ja, weil nur für jeden Kasten Quadratmeter (geschützt wird)“* (AB_B 28:21). Mit dieser Überlegung ist Bernd einverstanden und sagt dem Partner, dass er die Flaschen in einem Kasten zählen soll. Bernds Partner beginnt die Flaschen laut zu zählen. In der Zeit fragt Bernd: *„Sind das null Komma fünf Liter (zeigt auf den Bierkasten) oder null Komma drei drei?“* (AB_B 28:32). Sein Partner sagt 0,5 und Bernd stimmt mit der Begründung zu, dass in einem Bierkasten immer 0,5 Liter Flaschen sind. Nun rechnet Bernds Partner das Biervolumen eines Kastens aus und erhält 6 Liter. Bernd setzt die unterbrochene Dokumentation der Berechnung fort und schreibt neben den *„Bierverbrauch im Zeitraum:“* noch „$0{,}36 \cdot 92 \approx 32{,}77$“. Hinter der Ergebniszahl notiert Bernds Partner die Maßeinheit *„L“* für Liter.

Dann fragt Bernd, wie viele Flaschen in einem Kasten sind. Sein Partner antwortet, dass ein Bierkasten sechs Liter enthält. Während Bernd Zahlen in den Taschenrechner schon eintippt, sagt sein Partner, dass sie 32,77 durch sechs teilen sollen. Nachdem Bernd das mathematische Ergebnis ausgerechnet hat, nennt sein Partner laut das aufgerundete Resultat: *„5,46 Liter“* (AB_B 29:20). Nun diktiert Bernd: *„Ja, also erst mal Kasten gleich [..] sechs Liter“* (AB_B 29:30). Sein Partner schreibt *„1 Kasten = 6 l Bier“* auf und notiert gleich *„32,77:6=5,46“*. Anschließend sagt er enttäuscht, dass es zu wenig ist. Darauf antwortet Bernd, dass es pro Person 5,46 Kästen sind, und man dieses Ergebnis mit 80 Millionen multiplizieren soll. Sein Partner versteht diese Erklärung, sagt aber dann, dass nicht alle bei dieser Firma Bier kaufen. Bernd findet diese Anmerkung richtig und fragt, welchen Marktanteil diese Brauerei hat. Daraufhin nimmt er an, dass alle Deutschen dieses Bier kaufen. *„Egal, sagen wir mal alle, das ist die einzige Firma in Deutschland“* (AB_B 30:26). Nachdem Bernd mit dem Taschenrechner 5,46 und 80000000 multipliziert hat, sind beide Schüler erstaunt, dass auf dem Taschenrechner so eine riesige Zahl als Ergebnis angezeigt wird. Bernd sagt: *„Nicht schlecht“*. Sein Partner erwidert: *„Nee, das kann aber nicht sein. Rechne mal aus, wie viel Quadratkilometer das sind“* (AB_B 30:26). Bernd sagt, dass diese Zahl die Kastenanzahl und zugleich den Flächeninhalt bedeutet. Er beachtet dabei nicht, dass durch einen Kasten ein Quadratmeter und nicht ein Quadratkilometer geschützt wird.

Da die Zahl zu groß erscheint, überlegen sich die Schüler, wo sie einen Fehler gemacht haben könnten. Bernd sagt, dass diese Zahl so groß ist, weil man die Kastenanzahl mit 80 Millionen multipliziert hat. Er vermutet weiter, dass Kinder bei der Rechnung nicht berücksichtigt werden sollen, weil sie kein Bier trinken. Sein Partner fragt, ob er weiß, wie viele Erwachsene es in Deutschland gibt. Bernd schlägt vor, diese Information im Lexikon zu suchen. In diesem Moment fällt Bernds Partner ein, dass der Begriff Durchschnitt sich in dieser Aufgabe auf alle Deutschen bezieht. Er erklärt es Bernd, der damit einverstanden ist. Nach Bernds Meinung ist die Aufgabenbearbeitung nun abgeschlossen und die Schüler gehen zu der nächsten Aufgabe über.



Zeitraum: 92 Tage

Bierverbrauch pro Tag: 130 : 365 ≈ 0,36 L

Bierverbrauch im Zeitraum: 0,36 · 92 ≈ 32,77 l

1 kasten = 6 l Bier

32,77 : 6 = 5,46

5,46 · 80000000 = 436800000

Abbildung 50. Lösung der Aufgabe Regenwald von Bernd und seinem Partner

Analyse von Bernds Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Lesen und Verstehen der Textaufgabe. Unmittelbar nach dem Vorlesen der Aufgabe „Regenwald“ werden von Bernd drei wesentliche Lösungsschritte genannt. Dieser Planungsprozess setzt ein tieferes Verständnis der Situation voraus, das bei Bernd zu diesem Zeitpunkt nur an einer Stelle unvollständig ist. Bei der Planung der Lösung hat er nicht berücksichtigt, dass ein Quadratmeter Regenwald durch den Verkauf eines Kastens Bier geschützt wird (I_B 51:22). Aus diesem Grund reicht es nicht auszurechnen, wie viele Liter Bier von der Brauerei während der Regenwald-Aktion verkauft wurden. Das verkaufte Bier muss in Bierkästen umgerechnet werden. Erst später lenkt der Partner Bernds Aufmerksamkeit auf diesen Aspekt der Lösung.

Ein wesentliches Merkmal des Aufgabenverständnisses von Bernd und seinem Partner besteht im Verständnis der Wirkung der Regenwald-Aktion. Die beiden Schüler schätzen die Wirksamkeit der Aktion nicht als Relation zwischen der Regenwaldabholzung und der nachhaltig geschützten Fläche ein. Sie betrachten die geschützte Fläche als eine absolute Zahl, überlegen sich, ob diese Zahl groß oder klein ist, und treffen dann ihre Entscheidung. Dieses Verständnis der Aufgabe ist zwar ungewöhnlich aber nicht falsch und wird deswegen nicht als eine Schwierigkeit im Lösungsprozess interpretiert (vgl. Analyse der Aufgabe Regenwald im Unterabschnitt 3.2.3)

Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur. Mit der Identifikation und Zuordnung der mathematisierbaren Strukturen wurden bei Bernd keine Probleme beobachtet. Er erkennt z.B., dass der Bierkonsum eines Deutschen im Aktionszeitraum mit den Angaben zur Aktionsdauer und zum jährlichen Bierkonsum ausgerechnet werden kann. Bei der Rekonstruktion des mathematischen Modells hat Bernd jedoch einige Schwierigkeiten. Er und sein Partner diskutieren so lange, wie viele Tage drei Aktionsmonate haben (AB_B 25:22), bis Bernd im Aufgabentext die Länge des Monats Juli identifiziert und diese Information als Anhaltspunkt für die Berechnung des Aktionszeitraums benutzt. Wie auch andere Schüler ist Bernd nicht sicher, welches Volumen eine Bierflasche hat und wie der Begriff „jeder Deutsche im Durchschnitt" zu verstehen ist. Auch die Annahme über den Markanteil der Bierbrauerei bereitet Schülern Schwierigkeiten. Zu dieser Angabe trifft Bernd eine nicht realistische Annahme (100% Markanteil), über die im weiteren Lösungsprozess nicht mehr reflektiert wird. Vermutlich ist die Ursache dieser Annahme der Wunsch den Lösungsprozess schnell abzuschließen, was in der Äußerung *„Egal, sagen wir mal alle, das ist die einzige Firma in Deutschland"* (AB_B 30:26) zum Ausdruck kommt.

Umformung mathematischer Strukturen, Ausführung der Rechenoperationen und Interpretieren der Ergebnisse. Die Berechnungen kann Bernd ohne Problem ausführen, er hat aber Schwierigkeiten beim Interpretieren der Resultate. Die Schwierigkeiten beziehen sich auf die Interpretation der Anzahl der verkauften Bierkästen. Bernd denkt, dass ein Kasten einem Quadratkilometer und nicht einem Quadratmeter entspricht. Vermutlich hat er entsprechende Informationen aus dem Aufgabentext vergessen und rechnet deswegen die Fläche nicht in Quadratkilometer um. Auch die Anmerkung des Partners, der sich über die sehr große Anzahl von verkauften Kästen wundert und die Umrechnung in Quadratkilometer vorschlägt, hilft ihm nicht, dieses Problem zu erkennen (AB_B 10:26).

Analyse von Bernds Handlungsstrategien im Lösungsprozess

Beim Bearbeiten der Aufgaben Zuckerhut und Abkürzung hat Bernd zum besseren Situationsverständnis eine Skizze gezeichnet und sie beschriftet. Diese Organisationsstrategie wird von ihm während der Bearbeitung der Aufgabe Regenwald nicht angewandt. Ohne sich Notizen zu den wesentlichen Angaben der Aufgabe Regenwald zu machen, entwickelt Bernd schon nach dem ersten Lesen der Aufgabe einen Lösungsplan. Da die Lösung der Aufgabe Regenwald die Verbindung von mehreren Angaben und Annahmen erfordert, ist es schwierig, alle Einzelheiten bei der Planung der Lösung zu berücksichtigen. Es ist deswegen nachvollziehbar, dass eine Angabe vom Bernd und seinem Partner übersehen und erst später in den Lösungsprozess mit einbezogen wird. Zum vollständigen Verstehen der Aufgabe Regenwald hat es also nicht gereicht, die Angaben mit eigenen Worten zu erfassen (AB_B 24:46) und sich mit dem Partner über die Lösung auszutauschen (AB_B 24:46-25:19). Das Aufschreiben oder zumindest das Hervorheben lösungsrelevanter Angaben in der Aufgabenstellung könnte in dieser Situation eine angemessene Hilfe sein.

Mehrere Schwierigkeiten wurden bei Bernd während der Konstruktion des mathematischen Modells beobachtet. Die Schwierigkeit mit der Bestimmung der Aktionsdauer überwindet Bernd selbst, indem er den Text noch einmal genau liest und eine wichtige Information (Anzahl der Tage im Juli) identifiziert. Das selektive Lesen hilft Bernd somit in dieser Phase des Lösungsprozesses. Beim Einsetzen der Werte in das mathematische Modell bekommt Bernd in zwei Fällen Hilfe vom Partner. Bernd weiß nicht, wie viel Liter in einer Bierflasche sind, und welchen Anteil des Biermarktes die Aktions-Brauerei am Biermarkt hat. Beim Bestimmen des Volumens der Bierflasche kann der Partner Bernd helfen. Den Markanteil der Bierbrauerei, die die Regenwald Aktion durchgeführt hat, kennt der Partner jedoch nicht, deswegen handelt Bernd eigenständig. Er trifft die nicht realistische Annahme, dass es nur eine Brauerei in Deutschland gibt. Im Interview sagt Bernd, sie hätten den Markanteil *„mit 100% genommen“* (I_B 60:16). Eine weitere Schwierigkeit bei der Bearbeitung der Aufgabe Regenwald ist die Unsicherheit beim Verständnis der Bedeutung des Begriffs „jeder Deutsche im Durchschnitt“. Auch hier helfen ihm die Erklärungen des Partners, sich an die richtige Bedeutung dieses Begriffs zu erinnern. Im Interview antwortet er auf die Frage, was er unter Durchschnitt versteht: *„Wenn man jetzt guckt, wie der gesamte Bierverbrauch in Deutschland ist und das dann halt durch achtzig Millionen“* (I_B 55:12). Neben der Planung werden von Manfred andere metakognitive Strategien ausgeführt. Er reguliert den Lösungsprozess (*„Schreib schon mal hin, 92 Tage“ (*AB_B 26:28) und kontrolliert das Ergebnis (AB_B 33:47)

Mit der Interpretation der verkauften Kästen als Quadratmeter hat Bernd Schwierigkeiten, weil er die Maßeinheiten nicht beachtet. Hilfreich wäre es vermutlich in dieser Lösungsphase, die Aufgabe noch einmal zu lesen, um den Lösungsprozess und das Ergebnis zu kontrollieren oder auf die Anmerkung des Partners hierzu eingehen.

Tabelle 16. Übersicht: Bernds Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald

Handlungsstrategien	**Kommt vor**
Bearbeitungsstrategien	
Wiederholung (z.B. nochmaliges Lesen ausgewählter Textstellen)	ja
Elaboration (z.B. Alltagswissen zum Volumen einer Bierflaschen zu aktivieren)	ja

Organisation (z.B. Erfassen der Angaben mit eigenen Worten. (AB_B 24:46). Zeichnen und Beschriften einer Skizze)	ja, sprachlich nein, ikonisch
Metakognitive Strategien	
Planung des Lösungsprozesses (z.B. Bernd nennt schon nach dem ersten Lesen die wesentlichen Lösungsschritte (AB_B 25:10))	ja
Kontrolle des Ergebnisses und des Lösungsprozesses (z.B. Kontrolle des Ergebnisses. AB_B 33:47)	ja
Regulation des Lösungsprozesses (z.B. achtet Bernd auf die Dokumentation des Lösungsweges: *„Schreib schon mal hin, 92 Tage"*. (AB_B 26:28))	ja
Ressourcenstrategien	
Strategien für das kooperative Lernen (z.B. Partner fragen. (AB_B 24:46-25:19))	ja

Wie auch beim Bearbeiten anderer Aufgaben zeigt sich bei Bernd die besonders vielfältige Strategiepalette. Insbesondere wendet er am Anfang des Lösungsprozesses wieder die Planung an. Da aber die Aufgabenstruktur eine hohe Komplexität aufweist, fehlt der Planung die Vollständigkeit. Eine Teilstruktur wird erst während des Lösungsprozesses indentifiziert.

Analyse der Schlüsselstelle im Lösungsprozess

Bei Bernd konnten unterschiedliche metakognitive Strategien wie Planung des Lösungswegs, Regulation des Lösungsprozesses (*„Schreib schon mal hin 92 Tage"* (AB_B 26:28)) sowie Kontrolle des Ergebnisses (*„Das kann nicht stimmen, weil kleine Kinder nicht trinken dürfen"*, (AB_B 30:58)) beobachtet werden. An einigen Stellen sollten von ihm stärker die Bearbeitungsstrategien wie z.B. sorgfältiges Lesen der Aufgabe und Dokumentation und Organisation der Angaben eingesetzt werden. Die metakognitiven Strategien allein helfen Bernd nicht, die Schwierigkeiten zu überwinden.

4.5.4 Aufgabe Regenwald. Fallskizze Kathrin, Kompetenzstufe 4

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Kathrins Partner liest die Aufgabe Regenwald vor. Die Aufgabenbearbeitung beginnt Kathrin mit dem lauten Abzählen der auf dem Foto abgebildeten Flaschen. Als Kathrin alle Flaschen gezählt hat, fragt sie, wie viel Liter Bier in einer Flasche sind. (AB_K 23:42). Ihr Partner sagt: *„halber Liter"* und erklärt auf Kathrins Nachfrage, dass es zwei Bierflaschensorten gibt: 0,33 und 0,5 Liter. Diese Information benutzt Kathrin, um das Biervolumen des abgebildeten Kasten zu berechnen. Sie kommt auf das Ergebnis von 6 Litern (I_K 45:04, AB_K 24:00). Anschließend fragt Kathrin den Partner, wie viele Deutsche es gibt. Der Partner sagt 80 Millionen und Kathrin stimmt ihm zu (AB_K 24:05). Ohne ihre Handlungen zu erklären, teilt Kathrin 130 Liter Bier, die in einem Jahr getrunken werden, durch das Biervolumen eines Kastens (6 Liter). Ihr Partner fragt, ob Kathrin Kästen ausrechnet, die im Jahr pro Person verkauft werden. Kathrin bestätigt das und erklärt, dass sie durch diese Berechnung bestimmen können, wie viel Quadratmeter Regenwald pro Person gerettet wird (AB_K 24:34). Diese Antwort ergänzt Kathrins Partner durch den Hinweis, dass das Ergebnis sich in diesem Fall auf ein Jahr bezieht und zeigt mit dem Stift auf den Aktionszeitraum im Aufgabentext. Kathrin sagt: *„Ja“*, schreibt *„130:6=21,7“* und rundet das Ergebnis auf 22. Ihr Partner besteht darauf, dass sie 21,7 Liter aufschreibt (vgl. Abbildung 51). Warum diese Genauigkeit für ihn so wichtig ist, erklärt er Kathrin nicht. Den Bierverbrauch in Kästen will Kathrin im nächsten Schritt auf den Aktionszeitraum beziehen und sagt: *„Durch zwölf mal“* (AB_K 24:59). Weiter überlegt sie laut, wie viele Monate die Aktion dauert: *„und dann ist ja vom fünften (bis zum siebten) also zwei Monate“* (AB_K 25:13). Kathrins Partner erwidert, dass es drei Monate sind und erklärt es so: *„Es fängt am ersten an und hört am einunddreißigsten auf“* (AB_K 25:24). Kathrin gibt dem Partner Recht und sagt, dass 21,7 durch zwölf geteilt und dann mit 3 multipliziert werden soll. Sie berechnet mit dem Taschenrechner das Ergebnis und sagt: *„Cirka 5 Liter pro Deutschen“* (AB_K 25:58). Als Nächstes schreibt Kathrin 5·80 und bittet den Partner, im Lexikon nachzuschauen, wie viele Deutsche es gibt. Der Partner schlägt das Lexikon auf, kann aber die Angaben zu Deutschland nicht finden. Kathrin hilft ihm und findet die Zahl 78 Millionen. Der Partner sagt, dass es die veralteten Angaben sind. Kathrin will erst 78 Millionen nehmen, aber der Partner überzeugt sie schließlich 80 Millionen anzunehmen. Während der Partner ohne Kathrins Hilfe die Angaben über die Einwohnerzahl von Deutschland suchte, schreibt Kathrin 5·80000=400000 auf. Ihr Partner schaut nun die Rechnung an und sagt, dass Kathrin 80 Tausend und nicht 80 Millionen aufgeschrieben hat. Kathrin lacht und fügt zwei statt drei Nullen der Zahl 80 Tausend hinzu. Es steht dann auf dem Lösungsblatt „5·8000000=40000000“. Obwohl in der Rechnung nun die Zahl 40 Millionen steht, sagt Kathrin: *„Vier Millionen, ja, natürlich“* (AB_K 27:53). Dieses Ergebnis überrascht ihren Partner und er rechnet mit dem Taschenrechner nach. Da bei ihm das richtige Ergebnis (400 Millionen) erscheint, prüft er sorgfältig die Berechnungen von Kathrin. Um große Zahlen besser zu lesen, fügt der Partner Trennpunkte hinzu (80.000.00) und sagt, dass noch eine Null fehlt. Kathrin verbessert die Rechnung. Weiter überlegt sie sich, dass es möglich ist, erst Meter in Kilometer (1km=1000m) umzurechnen und fragt den Partner, wie man dann das Resultat von

Kilometer in Quadratkilometer umrechnet soll. Kathrins Partner versteht ihre Frage nicht und sagt: *„Das sind doch schon Quadratmeter, das sind doch Kästen pro Kasten ein Quadrat“* (AB_K 29:21). Kathrin erklärt, dass in einem Kilometer 1000 Quadratmeter sind. Ihr Partner sagt: *„Drei weg“*. Mit „drei“ meint er drei Nullen bei der Umrechnung von Metern in Kilometer. Kathrin fragt nach, ob auch Quadratmeter in Quadratkilometer genau so umgerechnet werden können. Der Partner bejaht das. Dennoch fragt Kathrin, ob er sich sicher ist, dass es genau so geht. Das wird vom Partner noch ein Mal bestätigt. Kathrin schaut sich die Rechnung an und sagt: *„Wenn das so wäre, dann wären dies vierzigtausend Quadratkilometer. Dann reicht das für zwei Tage. Zwei Tage keinen Regenwald abholzen“* (AB_K 29:47). Der Partner korrigiert sie und sagt, dass es vierhunderttausend und nicht vierzigtausend Quadratmeter sind. Kathrin stimmt ihm zu, schreibt *„400000000 Kästen → Quadratmeter“* und *„400000 Quadratkilometer“* (siehe Abbildung 51). Die Zahl 400000 wird von Kathrins Partner durch 24000 geteilt. Er sagt dann: *„16,5 Tage ungefähr“*. Im Antwortsatz notiert Kathrin: *„Das Regenwaldabholzen wurde für ca. 16 Tage aufgehalten“*.

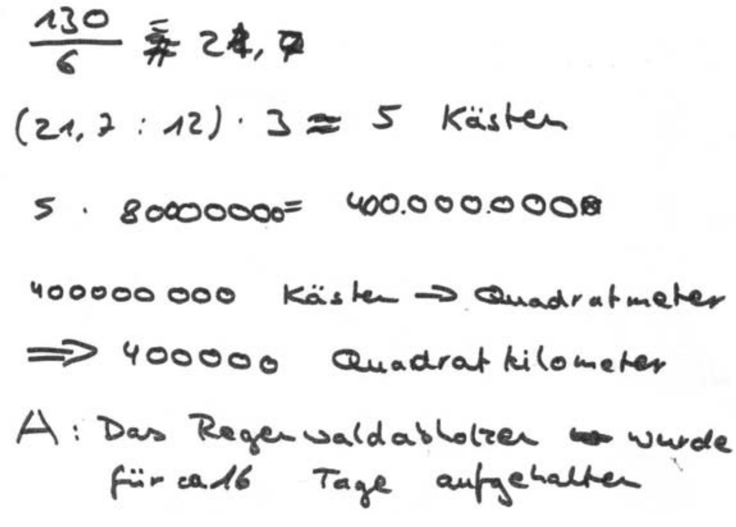


Abbildung 51. Lösung der Aufgabe Regenwald von Kathrin und ihrem Partner

Analyse von Kathrins Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Lesen und Verstehen der Textaufgabe. Das adäquate Situationsmodell bildet Kathrin ohne fremde Hilfe. Nur in einem von vielen lösungsrelevanten Aspekten macht Kathrin einen Fehler: Weder sie noch ihr Partner beachten, dass Deutsche Bier bei unterschiedlichen Brauereien kaufen und deswegen der Markanteil der Aktions-Brauerei bei der Lösung berücksichtigt werden muss.

Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und der mathematischen Lösungsstruktur. Bei der Konstruktion des mathematischen Modells hat Kathrin mehrere Schwierigkeiten. Beim Bestimmen des Aktionszeitraums kommt sie zum Schluss, dass die Aktion zwei und nicht drei Monate dauert (AB_K 25:13). Ferner weiß sie nicht, wie viele Einwohner Deutschland hat und kann deswegen ohne den Partner, den Bierverbrauch aller Deutschen nicht ausrechnen (AB_K 23:42). Schließlich ist Kathrin nicht bekannt, wie viel Bier in die abgebildete Bierflasche passt (AB_K 24:05).

Umformung mathematischer Strukturen, Ausführung der Rechenoperationen und Interpretieren der Ergebnisse. Arithmetische Operationen, die für das Lösen der Aufgabe Regenwald notwendig sind, werden von Kathrin grundsätzlich richtig ausgeführt. Hingegen hat sie Schwierigkeiten mit der Umrechnung des Flächeninhalts von Quadratmetern in Quadratkilometer. Da auch Kathrins Partner an dieser Stelle nicht helfen kann, bleibt das Endergebnis (16 Tagen ohne Regenwaldabholzung) zu hoch. Viele Probleme hat Kathrin beim Umgang mit großen Zahlen. Sie schreibt 80 Tausend statt 80 Millionen (AB_K 26:32), liest statt 400 Tausend 40 Tausend (AB_K 29:47) u.s.w. In diesen Situationen hilft der Partner Kathrin die Schwierigkeiten zu überwinden. Beim Interpretieren der Bierkästen als geschützte Regenwaldfläche, verwechselt Kathrin die Maßeinheiten. Sie denkt, dass 400 Tausend Kästen als 400 Tausend Meter zu interpretieren sind und will sie im nächsten Schritt in Quadratmeter umrechnen (AB_K 29:03, 29:21). Dieser Denkfehler wird durch den Partner korrigiert. Schließlich überlegt sich Kathrin, wie Quadratkilometer in Quadratmeter umgerechnet werden können. Dabei fragt sie zwar mehrmals nach, übernimmt jedoch schließlich unreflektiert einen fehlerhaften Vorschag des Partners (*„drei Nullen weg“*) und lässt in der Lösung ein falsches Ergebnis stehen.

Analyse von Kathrins Handlungsstrategien im Lösungsprozess

Da Kathrin beim Bearbeiten der Aufgabe nicht erklärt, wie sie die Aufgabe versteht, ist es schwierig ihre Verstehensstrategien zu rekonstruieren. Vermutlich bildet sie beim ersten Lesen der Aufgabe das Situationsmodell, das während der Aufgabenbearbeitung weitestgehend unverändert bleibt.

Bei Schwierigkeiten mit der Rekonstruktion des mathematischen Modells wendet Kathrin oft eine Strategie kooperativen Lernens an: Sie fragt ihren Partner (z.B. AB_K 23:42, 24:05). Die Antwort des Partners versucht Kathrin entweder durch die erneute Nachfrage zu überprüfen: *„Sicher?“* (AB_K 23:48), *„Ist es dann genau so?“* (AB_K 29:38). Oder sie sucht andere Kontrollmöglichkeiten, wie z.B. Informationssuche im Lexikon: *„Kannst du nachgucken, ob es auch 80 Millionen sind?“* (AB_K 26:18). Die wiederholenden Nachfragen bewegen Kathrins Partner, seine Antwort ausführlich zu begründen, und erleichtern das Verständnis seiner Gedanken. Mehrere Schwierigkeiten hat Kathrin mit großen Zahlen. Sie fragt jedoch nicht ihren Partner, wie man eine große Zahl (80 Millionen) aufschreibt bzw. liest, und macht dadurch immer wieder Fehler. Eine direkte Frage zu dieser Schwierigkeit könnte für Kathrin in diesem Fall hilfreich sein.

Auch beim Berechnen und Interpretieren der Ergebnisse fragt Kathrin oft ihren Partner. Ein Rechenergebnis (21,7 Kästen Bier pro Person im Jahr) rundet sie einmal sinnvoll auf 22 Kästen. Dies zeigt, dass sie dieses Ergebnis in der Realität validiert. Ihr Vorgehen begründet Kathrin wie folgt: *„Es geht doch um ungefähr, wie sich das auswirkt“* (AB_K 25:10).

Tabelle 17. Übersicht: Kathrins Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald

Handlungsstrategien	**Kommt vor**
Bearbeitungsstrategien	
Wiederholung (z.B. nochmaliges Lesen ausgewählter Textstellen)	ja
Elaboration (z.B. Aktivierung von Informationen aus dem Gedächtnis, die helfen können, die Aufgabe zu lösen. Kathrin überlegt sich, wie viele Monate die Regenwald-Aktion gedauert hat)	ja
Organisation (z.B. Erfassen der Angaben mit eigenen Worten. „Dann muss man erst 21,7 durch 12 mal 3.“ AB_K 25:40. Zeichnen und Beschriften einer Skizze)	ja, sprachlich nein, ikonich
Metakognitive Strategien	
Planung des Lösungsprozesses	nein
Kontrolle des Ergebnisses und des Lösungsprozesses (z.B. durch die Frage an den Partner: *„Ist es dann genau so?“* (AB_K 29:38))	ja
Regulation des Lösungsprozesses (z.B. Bearbeitungsstrategien werden variiert: *„Kannst du nachgucken, ob es auch 80 Millionen sind?“* AB_K 26:18)	ja
Ressourcenstrategien	
Strategien für das kooperative Lernen (z.B. Partner fragen. AB_K 23:42)	ja

Kathrin führt verschiedene Strategien aus, um die kompexe Struktur der Aufgabe Regenwald zu rekonstruieren. Ihr Lösungsprozess wird jedoch durch die Wissenslücken beim Umgang mit großen Zahlen erheblich beeinträchtigt. Zu diesem Thema braucht sie eine fachkundige Unterstützung durch die Lehrperson.

Analyse der Schlüsselstelle im Lösungsprozess

Beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald gibt es mehrere Stellen, an denen Kathrin Hilfe ihres Partners in Anspruch nimmt. Ihre Strategie – Fragen zu stellen – zeigt sich in der Regel als wirksam. Jedoch sind wiederholte Nachfragen von Kathrin nicht immer sachbezogen. So fragt sie zweimal in verschiedenen Situationen, ob ihr Partner sicher ist, dass seine Informationen stimmen. Einerseits führt solch eine Nachfrage zur Begründung der Position des Partners und erlaubt Kathrin seinen Gedankengang besser nachzuvollziehen. Andererseits kann solch eine Nachfrage den Eindruck erwecken, dem Partner nicht zuvertrauen, insbesondere wenn diese mehrmals wiederholt wird. Am Schluss der Aufgabenbearbeitung sagt Kathrins Partner als Reaktion auf ihre wiederholte Nachfrage laut *„Ja"* (AB_K 29:38). Dies zeigt seine Unzufriedenheit mit dem nicht begründeten Zweifel von Kathrin an seiner Position.

Zusammenfassung der Schüler-Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald

Die Auswahl der Aufgabe Regenwald, deren Lösung die Anwendung anderer mathematischer Strukturen als bei den Aufgaben Zuckerhut und Abkürzung erfordert, hatte zum Ziel, die Begründung der Hypothesen zu Schüler-Schwierigkeiten und Schüler-Strategien beim Bearbeiten der Modellierungsaufgaben auf eine breitere empirische Grundlage zu stellen. Neu waren beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald Probleme beim Treffen der Annahmen und bei der Interpretation von Ergebnissen. Diese Schwierigkeiten wurden den Kategorien „Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Aufgabe und mathematischer Lösungsstruktur" sowie „Umformung mathematischer Strukturen, Ausführung der Rechenoperation und Interpretation der Ergebnisse" zugeordnet.

Mit dem Verstehen der in der Aufgabe beschriebenen Situation haben die Schüler wenige Probleme. Nur den Einfluss des Markanteils der Brauerei, die die Regenwald-Aktion durchführt, auf das Endergebnis haben die Schüler beim Aufbau des Situationsmodells nicht bedacht. Dies könnte auf die Ferne dieses Themas zur Lebenswelt der Schüler sowie auf die fehlenden Hinweise darauf im Text zurückgeführt werden.

Während die Identifikation der mathematisierbaren Strukturen den Schülern keine Schwierigkeiten bereitet hat, hatten sie mit der Konstruktion des mathematischen Modells zwei Probleme. Alle Schüler waren nicht sicher, wie der Satz *„Jeder Deutsche trinkt im Durchschnitt 130 Liter Bier"* zu verstehen ist. Diese Schwierigkeit führte zu Problemen bei der Bestimmung des Bierkonsums aller Deutschen. Beim Treffen der Annahmen zum Volumen einer Bierflasche und zur Anzahl der Deutschen brauchten mehrere Schüler Hilfe.

Die Umrechnung von Quadratmetern in Quadratkilometer war für alle Schüler, die diese durchführen wollten, eine unüberwindbare Hürde. Andere Berechnungen beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald waren einfache arithmetische Operationen, die bis auf eine Person von allen beobachteten Schülern fehlerfrei ausgeführt wurden. Auch die Interpretation der Ergebnisse führte zu einer Schwierigkeit. Einige Schüler wussten nach der Berechnung der Anzahl der verkauften Bierkisten nicht, ob ein Quadratkilometer oder ein Quadratmeter durch einen Kasten geschützt wird.

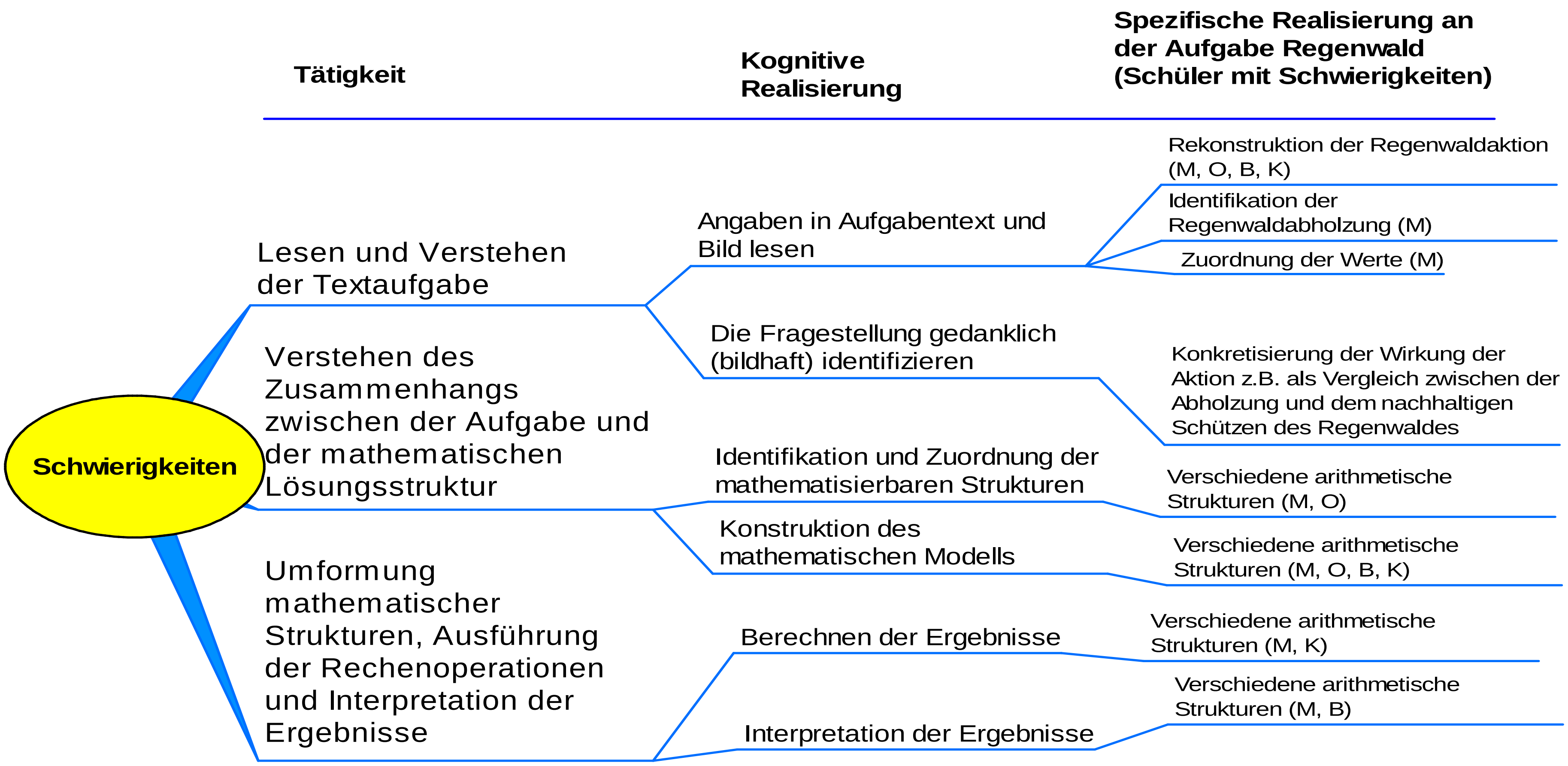


Abbildung 52. Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald

Zusammenfassung der Schüler-Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald

Die Analyse der Bearbeitung der Aufgabe Regenwald führt zur Präzisierung der Strategien, die beim Bearbeiten anderer Aufgaben beobachtet wurden. So tauscht sich Kathrin beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald weiter intensiv über ihre Schwierigkeiten mit dem Partner aus. Ein Schwerpunkt bei diesem Austausch kann auf die Beobachtung der Help-Seeking-Strategien gelegt werden. Als Erstes wird von Kathrin der Bedarf an Hilfe in der individuellen Arbeitsphase identifiziert, dann der Zeitpunkt ausgewählt, an dem die Frage gestellt werden kann, die Frage formuliert und auf die Antwort des Partners eingegangen. Kontraproduktiv erscheinen bei der Ausführung dieser Strategie die unbegründeten Nachfragen wie z.B. *„Bist du sicher?“*. Entsteht Zweifel an der Antwort auf die gestellte Frage, sollte dieser dem Partner sachbezogen mitgeteilt werden. Der mehrmals geäußerte Zweifel an der Position des Partners, der nicht begründet wird, erzeugt Spannungen zwischen Kathrin und ihrem Partner.

Die Bedeutung der Begründung der eigenen Meinung wird auch bei der Kommunikation zwischen Manfred und seinem Partner deutlich. Der ko-konstruktive Austausch zwischen beiden Schülern wird an einigen Stellen durch mangelnde Erklärungen beeinträchtigt. Während individueller Denkphasen entwickelt Manfred Lösungsansätze, die er jedoch seinem Partner nicht ausreichend erklärt. Der ko-konstruktive Austausch setzt die umfassende Begründung eigener Positionen voraus und das Verstehen der Meinung des Partners.

Aus dem Lösungsprozess von Oliver lässt sich die Notwendigkeit eigenständiger Arbeitsphasen für die individuelle Konstruktion schließen. Olivers Partner lässt ihm nicht immer genug Zeit zum Nachdenken über die Schwierigkeiten. Dies stört Oliver nicht, weil er und sein Partner auf diese Weise schneller eine Lösung entwickeln. Für den Lernprozess von Oliver wäre es jedoch von Vorteil, wenn er selbst die Schwierigkeit überwinden würde. Somit lässt sich ein zentrales Problem bei den Strategien des kooperativen Lernens als eine Balance zwischen den individuellen Bedürfnissen in Phasen der Einzelarbeit und dem Austauschprozess formulieren.

Neben der Selbstregulation und Planung sind auch die Kontrollstrategien für den Lösungsprozess hilfreich. Diese werden sowohl unbewusst als auch bewusst von Schülern eingesetzt. Unbewusst werden sie aktiviert, wenn das erwartete und das tatsächliche Ergebnis wesentlich von einander abweichen. Bewusst setzen Schüler sie ein, wenn sie ihre Lösung überprüfen wollen. In beiden Fällen werden für die Überprüfung des Ergebnisses bzw. des Lösungsweges Bearbeitungsstrategien eingesetzt, wie z.B. selektives Lesen des Textes und des Lösungsweges, oder Ressourcenstrategien, wie z.B. Fragen an den Partner zu seiner Meinung. Sowohl metakognitive Strategien als auch Bearbeitungsstrategien und Ressourcenstrategien sind wichtig für den Lösungsprozess. Der Fall von Bernd zeigt u.a., dass metakognitive Strategien allein nicht helfen, Schwierigkeiten zu überwinden. Effiziente Bearbeitungsstrategien sind bei den beobachteten Lösungsprozessen selektives Lesen der Aufgabe, Notieren von Angaben und ihre Umstrukturierung sowie Aktivierung von aufgabenrelevantem Vorwissen. Hinderlich scheint bei Bernd der Wunsch zu sein, die Aufgabenlösung schnell abzuschließen. Dieser Wunsch kann u.a. die nicht realistische Annahme zum Marktanteil der Aktions-Brauerei (100%) mitverursacht haben.

Tabelle 18. Überblick über die Schüler-Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald

	Strategie	**Anwendungsbedingungen**	**Handlungsabfolge**	**Nicht effektive Strategieanwendung**
1.	Help-Seeking-Strategie beim kooperativen Lernen	- bei Schwierigkeiten mit der eigenständigen Konstruktion der Lösung in allen Schwierigkeitsphasen	- Identifikation einer Schwierigkeit, die selbständig nicht überwindbar erscheint - Auswahl eines passenden Moments für die Nachfrage - Formulierung der Frage an den Partner - konstruktives Eingehen auf die Antwort des Partners	- Zweifel an der Position des Partners, der sachlich nicht begründet ist - unzureichende Erläuterungen eigener Gedanken
2.	Kontrolle	- bei Schwierigkeiten in allen Lösungsphasen - Feststellen der Nicht Übereinstimmung zwischen dem erwarteten und tatsächlichen Ergebnis - routinemäßiger Abruf der Strategie am Ende der Aufgabenbearbeitung	- Analyse des Übereinstimmungsgrades zwischen erwartetem und tatsächlichem Ergebnis bzw. bewusste Kontrolle am Schluss - Aktivierung einer Bearbeitungs- oder Stützstrategie	

4.6 Zusammenfassung und Diskussion

In der Arbeit werden drei Forschungsfragen untersucht: (1) Welche Schwierigkeiten haben Schüler bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben, (2) Welche Strategien wenden sie bei der Aufgabenbearbeitung an, und (3) Welche didaktischen Konsequenzen können aufgrund der Antworten auf die erste und zweite Frage für die Didaktik der neuen Aufgabenkultur gezogen werden?

Die Schwierigkeiten und Strategien werden unter Einbezug von Kognitions-, Medien- und Problemlösetheorien sowie theoretischen Ansätzen zum sprachlichen Verstehen analysiert.

Die kognitiven Anforderungen beim Bearbeiten einer mathematischen Textaufgabe lassen sich so beschreiben, dass mathematische Elemente (Größen, Zahlen, Strecken, Figuren etc.) im Hinblick auf eine gegebene Sachstruktur modellartig in Beziehung gesetzt werden. Die gestellte Frage kann auf diese Weise unter Einsatz mathematischer Werkzeuge beantwortet werden. Bei Modellierungsaufgaben sind zur Lösung anspruchsvolle Konstruktionsleistungen notwendig (siehe Abschnitt 2.5). Die Analyse der Bearbeitung von drei Modellierungsaufgaben durch vier Neuntklässler unterschiedlicher Kompetenzstufen (12 Fälle) erlaubt die Formulierung folgender Hypothesen.

4.6.1 Schüler-Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Die Schüler-Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Modellierungsaufgaben lassen sich in drei Tätigkeitsbereiche aufschlüsseln: (1) die Aufgabe lesen und verstehen, (2) den Zusammenhang zwischen Gegebenheiten der Situation und mathematischer Lösungsstruktur verstehen sowie (3) Umformung mathematischer Strukturen, Ausführung der Rechenoperationen und Interpretieren der Ergebnisse.

Die nähere Betrachtung dieser Tätigkeitsbereiche zeigt, dass die verständnisvolle Rezeption der Aufgabe durch das Lesen des Textes (einschließend Bild/ Photo) und die Identifikation der gestellten Frage kognitiv realisiert wird; Der Zusammenhang zwischen Gegebenheiten der Situation und der mathematischen Lösungsstruktur wird durch das Erkennen der mathematisierbaren Strukturen in den Gegebenheiten und die Zuordnung des mathematischen Modells sowie dessen situative Anpassung vollzogen; Die Tätigkeit (3) umfasst Umformung mathematischer Strukturen, Ausführung der Rechenoperationen und Interpretation der Ergebnisse. Da die aufgeführten Tätigkeiten kontext- und aufgabenabhängig sind, wird ihre spezifische Realisierung an den drei untersuchten Aufgaben erläutert und exemplarisch veranschaulicht. Durch die aufgabenspezifische Konkretisieren von Bearbeitungsprozessen wird verdeutlicht, dass sich Schüler-Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben je nach Aufgabe unterscheiden.

Tätigkeit (1). Lesen und Verstehen der Aufgabe

Beim Lesen und Verstehen der Aufgabe wird ein erster Entwurf einer lösungsrelevanten Sachstruktur im Hinblick auf ihre Mathematisierbarkeit aufgebaut (vgl. Kapitel 3). Die Schwierigkeiten treten in dieser Phase beim Lesen der Sachtexte, die einen Teil der Aufgabe bilden, auf, sowie bei der Interpretation von Bildern insbesondere auch beim Verstehen der Fragestellung und der durch sie implizierten strukturellen Zusammenhänge.

Die Aufgabe Zuckerhut. Bei der Aufgabenbearbeitung wird von den Schülern z.B. gefordert, zwei Wege zu identifizieren, auf denen Pelligrini von der Talstation bis zum Gipfel des Berges kommen kann, die mathematischen Angaben den Wegen zuzuordnen und die gesuchte Strecke zu spezifizieren. Die wesentlichen Schwierigkeiten haben die Schüler vor allem mit dem räumlichen Aufbau der Situation. So denken Oliver und sein Partner durch die Perspektivität des Fotos getäuscht, dass die Seilbahn zwischen zwei Bergen fährt. Die anderen Schwierigkeiten sind die Zuordnung von 12 Minuten zu der richtigen Strecke oder auch zu verstehen, dass in der Aufgabe Zuckerhut nur ein Teilweg von der Talstation bis zum Gipfel des Berges gesucht ist: der Weg von der Talstation bis zum Fuß des Berges. Die Ursachen dieser Schwierigkeiten sind u.a. die Verständlichkeit einzelner semanischer Elemente der Texte (z.B. ist der Begriff „ausgedehnte Ebene“ nicht allen Schülern bekannt), die Perspektivität der Seilbahndarstellung und die Notwendigkeit, die Informationen aus den Sachtexten, dem Foto und der Frage zu entnehmen und in Verbindung zu bringen.

Die Aufgabe Abkürzung. Bei der Bearbeitung der Aufgabe sollen die Schüler zwei Möglichkeiten identifizieren, wie Herr Blum nach Hause fahren kann: über die Bundesstraßen oder über die Abkürzung. Schwierigkeiten entstehen hierbei mit der Verbindung von Informationen aus dem Text und der Skizze sowie mit der Zuordnung der Angaben zu den jeweils richtigen Straßen. Diese Schwierigkeiten werden u.a. durch eine Vielzahl von Straßen und Straßennamen im Text und Bild hervorgerufen.

Die Aufgabe Regenwald. Beim Lesen und Verstehen der Aufgabe Regenwald rücken andere charakteristische Merkmale in den Mittelpunkt wie z.B. Angaben zur Regenwald-Aktion und zum Bierkonsum der Deutschen. Bei den leistungsschwächeren Schülern zeigt sich ein oberflächliches Verstehen der Situation, das bei der Tätigkeit (2) massive Schwierigkeiten verursacht. Eine Besonderheit der Aufgabe Regenwald ist ihr Sachtext, der aus zwei Teilen besteht. Im ersten Teil wird über die Regenwaldabholzung und im zweiten über die Regenwaldaktion berichtet. Die Verbindung dieser beiden Textteile mit den Informationen aus dem Foto und der Frage zu einem kohärenten Situationsmodell stellt eine Herausforderung für die Schüler dar.

Tätigkeit (2). Zusammenhang zwischen Gegebenheiten der Situation und mathematischer Lösungsstruktur verstehen

Die zweite Tätigkeit besteht in der Konkretisierung und Präzisierung des ersten Entwurfs einer lösungsrelevanten Sachstruktur. Das Verstehen des Zusammenhangs zwischen Gegebenheiten der Situation und mathematischer Lösungsstruktur verlangt für seine spezifische Realisierung den Wechsel von der realen Situation zu mathematischen Strukturen wie Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur, Pythagoras-Struktur (Aufgaben Abkürzung und Zuckerhut) oder arithmetische Strukturen (Aufgabe Regenwald). Diese Tätigkeit endet mit der Konstruktion eines mathematischen Modells.

Die Aufgabe Zuckerhut. Beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut hatten mehrere Schüler Schwierigkeiten mit der Mathematisierung der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur und wussten nicht, wie die Streckenlänge aus den Geschwindigkeits- und Zeitangaben berechnet werden kann. Auch die Identifikation eines Dreiecks in der vorliegenden Realsituation und die darauffolgende Bestimmung des Satzes des Pythagoras als eine mathematische Operation, bei deren Ausführung Streckenlängen verbunden werden müssen, bereiteten erhebliche Schwierigkeiten. Eine mögliche Ursache dieser Probleme ist die Mehrdimensionalität beider Strukturen. Die Streckenlänge ist z.B. sowohl von der Zeit als auch von der Geschwindigkeit abhängig. Die Konstruktion eines entsprechenden mathematischen Modells fällt mehreren Schülern sehr schwer.

Die Aufgabe Abkürzung. Da die Lösung der Aufgabe Abkürzung die Konstruktion von gleichen mathematischen Strukturen verlangt, zeigen sich bei der Verbindung von Gegebenheiten und mathematischen Strukturen ähnliche Probleme wie bei der Lösung der Aufgabe Zuckerhut. Leistungsschwächere Schüler wissen z.B. nicht, wie der Satz des Pythagoras genau lautet. Auch die Mehrdimensionalität der Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur überfordert sie so, dass eine Dimension bewusst ausblendet wird. Sie nehmen an, dass die Geschwindigkeiten im Wohngebiet und auf den Bundessstraßen gleich sind. Auch andere Schüler hatten ähnliche Schwierigkeiten, konnten diese jedoch gemeinsam überwinden.

Die Aufgabe Regenwald. Die Grundstruktur des Sachzusammenhangs – Biertrinken rettet Regenwald – kann relativ leicht verstanden werden. Viele Probleme bei den meisten Schülern, auch bei den Lernenden der Kompetenzstufen drei und vier, verursacht jedoch das in Beziehung setzen des Bierkonsums und der Regenwaldabholzung. Die Sache wird noch dadurch erschwert, dass bei der Aktion zu Werbezwecken illusionäre Wirkungen vorgetäuscht werden. Kognitiv gesehen, erfordert die Lösung der Aufgabe Regenwald im Unterschied zu anderen Aufgaben die Konstruktion mehrerer einfacher Strukturen, deren Mathematisierung durch ihre Vielzahl und ihre enge Verzahnung erschwert wird. Wegen dieser Komplexität verlieren die Schüler die eine oder andere Struktur aus dem Blick. Sie berücksichtigen z.B. nicht den Markanteil der Aktionsbrauerei. Mehrere Schüler wissen zudem nicht, wie der Begriff Durchschnitt mathematisch zu verstehen ist. Während es den leistungsstärkeren Schülern gelingt, diese Frage im Gespräch zu klären, berücksichtigen die Leistungsschwächeren die entsprechende Struktur in ihrer Lösung nicht. Schließlich haben die Schüler Schwierigkeiten mit dem Treffen geeigneter Annahmen. Sie haben Probleme bei der Einschätzung des Volumens einer Bierflasche oder der Anzahl der Deutschen.

Tätigkeit (3). Umformung mathematischer Strukturen, Ausführung der Rechenoperationen und Interpretieren der Ergebnisse

Bei der Tätigkeit Umformung mathematischer Strukturen, Ausführung der Rechenoperationen und Interpretieren der Ergebnisse formen die Schüler die mathematischen Strukturen um und führen die Berechnungen durch, bis das Ergebnis gefunden und in der Realsituation interpretiert wird.

Die Aufgabe Zuckerhut. Beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut haben mehrere Schüler vergessen, die Wurzel zu ziehen. Dieses Lösungselement ist vermutlich nicht tief genug im Verständnis des Lösungsalgorithmus verankert. Schwierigkeiten mit der Ausführung von anderen mathematischen Rechenoperationen haben nur die leistungsschwächeren Schüler. Ihnen fehlen die elementaren mathematischen Grundlagen für die Lösung der Aufgabe Zuckerhut.

Die Aufgabe Abkürzung. Die Umformung mathematischer Strukturen und die Ausführung von Rechenoperationen beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung bereitet ähnliche Schwierigkeiten wie auch die Bearbeitung der Aufgabe Zuckerhut. Da die Schüler nun mit Dezimalzahlen rechnen müssen, entsteht eine zusätzliche Schwierigkeit bei der Berechnung der in 2,5 Minuten zurückgelegten Strecke. Diese wird meistens mit Hilfe des Partners erfolgreich überwunden.

Die Aufgabe Regenwald. Auch bei der Bearbeitung der Aufgabe Regenwald haben die leistungsschwächeren Schüler besondere Schwierigkeiten mit der Ausführung mathematischer

Operationen. Alle Schüler haben massive Probleme mit der Umrechnung von Quadratmetern in Quadratkilometer und machen dabei Fehler. Eine neue Schwierigkeit entsteht bei der Interpretation der mathematischen Resultate. Durch die Mehrschrittigkeit der Lösung und die Vielzahl von Teilstrukturen, die in den Lösungsprozess einbezogen sind, haben mehrere Schüler Probleme bei diesem Teilschritt. Eine andere Besonderheit der Aufgabe Regenwald ist, dass die komplexe Struktur dieser Aufgabe nur durch die Klärung von Größenbeziehungen verstanden werden kann. Die Konzentration auf die einzelnen Strukturelemente erschwert aber das Behalten des Gesamtüberblicks über die Lösung.
Die Strategien, welche bei den Schülern beim Auftreten der Schwierigkeiten beobachtet werden konnten bzw. hilfreich sein können, werden im nächsten Unterabschnitt dargestellt.

4.6.2 Schüler-Strategien im Lösungsprozess

Wenn die Schüler Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben hatten, wurden von ihnen verschiedene Strategien eingesetzt.
Von den drei oben genannten Typen der Bearbeitungsstrategien wurden vorwiegend die erfolgreichen Strategien aus zwei Strategiegruppen (Wiederholungs- und Organisationsstrategien) im Lösungsprozess identifiziert. Die beobachteten Strategienskripts werden bei ihrer Ausführung mit metakognitiven Strategieelementen (Kontrolle und Regulation) oder mit kooperativen Strategien (Help-Seeking-Strategie und Wechsel zwischen individueller Konstruktion und kooperativer Ko-konstruktion) verknüpft. Ein Beispiel dafür ist die Ausführung der Strategie Zeichnen und Beschriften einer Skizze beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut. Beim Zeichnen und Beschriften einer Skizze kontrollieren Schüler u.a., ob sie alle Angaben aus dem Text in die Skizze aufgenommen haben, regulieren ihren Lösungsprozess, fragen bei Unklarheiten ihren Partner und bearbeiten die Aufgabe im Wechsel individueller Konstruktion und kooperativer Ko-konstruktion.

Methodologischer Exkurs: Grenzen der Studie

An dieser Stelle sollen noch ein Mal die Grenzen der vorgestellten Studie aufgezeigt werden. Die erste Einschränkung betrifft die kleine Anzahl von Aufgaben (drei Modellierungsaufgaben) und Schülern (vier Schüler), deren Lösungsprozesse analysiert wurden. Aufgrund dieser geringen Zahl von untersuchten Fällen sind auch die bei den Schülern beobachteten Lösungsstrategien nur begrenzt. Das spezielle Design der Studie – insbesondere auch der Ausschluss von Lehrpersonen aus dem Lösungsprozess, der im Abschnitt „Methode“ vorgestellt und begründet wurde,– erlaubt zudem nicht, alle Strategienfacetten zu erheben. Vermutlich sind

Strategien unbewusst oder halbbewusst und können nur teilweise verbalisiert werden. Da die Schüler bei der Aufgabenbearbeitung nicht extra aufgefordert wurden, durch lautes Denken ihre Gedanken zu verbalisieren (vgl. Unterabschnitt 4.2.2), wurden die Lösungsstrategien nicht durchgängig für einen externen Beobachter zugänglich. Das betrifft insbesondere die Ausführung von Elaborationsstrategien. Die Elaborationsstrategien, wie z.B. Suche einer Analogie oder Erinnern an ein lösungsrelevantes mathematisches Modell, tragen zwar entscheidend zum Erfolg bei. In dem angewandten Untersuchungsdesign konnten aber keine Strategienskripts beobachtet werden, dessen Elemente die Elaborationsstrategien aktivieren. Das kann u.a. damit zusammenhängen, dass Schüler nicht anstreben, ihren Partnern die Lösungsstrategien beizubringen. Vielmehr geht es ihnen bei der Aufgabenbearbeitung darum, eine richtige Lösung zu finden und ihre Lösungswege zu erklären. Eine Untersuchung von Schwierigkeiten und Strategien von Schüler-Lösungsprozessen unter Einbezug von Lehrpersonen könnte eine aufschlussreiche Weiterführung dieser Arbeit darstellen.

Wiederholungs- und Organisationsstrategien konnten zwar vielfach beobachtet werden, die Zahl möglicher Strategien ist jedoch ungleich größer. Um die Begrenzung in beobachteten Wiederholungs- und Organisationsstrategien sowie das Fehlen von beobachteten Elaborationsstrategien zu kompensieren, werden weitere mögliche Strategien ergänzt und im Fall der Elaborationsstrategien Ideen zur Vermittlung und Aktivierung dieser Strategien entwickelt. Grundlage dafür sind eigene theoretische Überlegungen sowie Anregungen aus dem in der DISUM-Studie beobachteten Best-Practice-Repertoire. Die Aufgabe weiterer empirischer Forschungen wäre es, die Wirkungsweise und den Effekt einzelner Strategien näher zu untersuchen.

In diesem Abschnitt werden empirisch beobachtete sowie mögliche Strategien vorgestellt, die bei den Tätigkeiten 1, 2 und 3 hilfreich sein können, aber hier nicht beobachtet wurden. Da eine Strategie bei unterschiedlichen Tätigkeiten helfen kann, wird diese ggf. mehreren Tätigkeiten zugeordnet. Ein fundiertes fachliches Wissen in allen Bearbeitungsphasen wird dabei vorausgesetzt. Die Strategien sollen an das vorhandene Wissen und die Kompetenzen angeschlossen werden.

Beobachtete Strategien. Tätigkeit (1): Lesen und Verstehen der Aufgabe

Selektives Lesen und Notieren von Angaben. Selektives Lesen und Notieren von Angaben gehört zu der Gruppe Wiederholungsstrategien. Diese Strategie wurde bei der Bearbeitung aller drei analysierten Aufgaben beobachtet. Da Modellierungsaufgaben größere Textabschnitte mit komplexen semantischen Strukturen enthalten, stellt diese Strategie eine wesentliche Hilfe beim Lesen und Verstehen der Aufgabe dar. Insbesondere erscheint das Aufschreiben von Gegebenheiten einer Aufgabe oder von Zwischenergebnissen und anderen Notizen eine nützliche Unterstützung des Arbeitsprozesses zu sein (Aebli, 1980, Bd. 2, S. 359). Dies wurde bis jetzt lediglich in einer empirischen Untersuchung bestätigt (Mourtos, et al., 2004) und erfordert somit weitere Forschungen.

Zeichnen und Beschriften einer Skizze. Die Organisationsstrategie Zeichnen und Beschriften einer Skizze hat sich als sehr wirksam erwiesen beim Lesen und Verstehen der Aufgaben, deren Bearbeitung eine Konstruktion von räumlichen Strukturen (wie bei den Aufgaben Zuckerhut und Abkürzung) erfordert. Das Aufzeichnen räumlicher Strukturen hilft, sich die im Text beschriebenen Handlungen genauer vorzustellen und bereitet eine Grundlage für die Identifikation von mathematischen Strukturen (vgl. Abschnitt 2.3). Medientheoretisch gesprochen: Die ikonische Repräsentation der Sachverhältnisse begünstigt den Aufbau mathematischer Strukturen (Aebli, 1980, Bd. 2, S. 66ff). Näher soll untersucht werden, ob das Wissen über die Strategie oder der Gebrauch der Strategien für die Qualität der Lösungsprozesse entscheidend ist (Artelt, 2006). Die hohe Effektivität dieser Strategie wurde in der vorliegenden Studie bei einem leistungsschwächeren Schüler beobachtet, der durch das Zeichnen einer Skizze wesentliche Elemente eines Situationsmodels der Aufgabe Zuckerhut erfassen konnte.

Planung. Die metakognitive Strategie Planung zeigt ihre Stärken vor allem bei der Tätigkeit (2). Beim Lesen und Verstehen einer Textaufgabe gibt ein vorhandener Plan offenbar eine Abfolge für die Bearbeitung vor, auf die man sich stützen kann, ohne sie neu zu entwickeln. Die Planungsstrategien wurden nur bei den leistungsstärkeren Schülern beobachtet und erscheinen hilfreich sowohl beim Lösen der Aufgaben mit geometrischen Strukturen (Zuckerhut und Abkürzung) als auch beim Bearbeiten der Aufgaben mit arithmetischen Strukturen (Regenwald). Schon beim ersten Lesen der Aufgabe Zuckerhut identifizieren Schüler mathematisierbare Lösungsstrukturen wie die Möglichkeit, den Weg aus der Geschwindigkeit und den Zeitangaben zu berechnen. Sie stellen aber die Konstruktion eines entsprechenden mathematischen Modells zurück und entwickeln einen groben Lösungsplan, der in weiteren Bearbeitungsphasen präzisiert und ausgeführt wird.

Mögliche Strategien. Tätigkeit (1)

Bildhafte Veranschaulichung. Als eine Hilfe beim Lesen und Verstehen der Textaufgabe kann eine bildhafte Veranschaulichung, wie ein Foto oder ein Modell einer Seilbahn (Aufgabe Zuckerhut), eingesetzt werden. Beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung könnte die Situation durch den Einsatz von Spielautos veranschaulicht werden. Da in der Aufgabe Abkürzung eine modellartige Darstellung der Situation neben dem Aufgabentext abgebildet ist, könnte die Bewegung eines Spielautos helfen, sich die Wege über die Abkürzung und die Bundesstraßen besser vorzustellen.

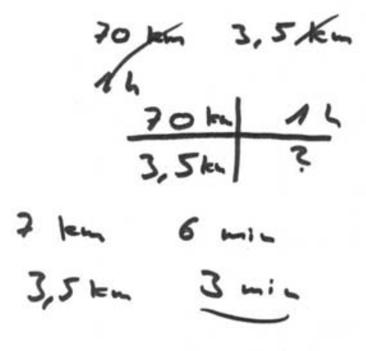
Erinnern an Alltagserfahrungen. Das Verständnis einer Modellierungsaufgabe kann durch das Erinnern an Erfahrungen aus dem Alltag erleichtert werden. So kann nach dem Lesen der Aufgabe Regenwald über die Erfahrungen beim Einkaufen von Bierkästen in einem Getränkemarkt mit den Eltern (Ziel: Feststellung der Anzahl von Flaschen in einem Kasten) gefragt oder beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut an die Reise mit einer Bergbahn, insbesondere an den Höhenunterschied zwischen der Tal- und Bergstation, erinnert werden. Diese Elaborationsstrategie bedarf einer Aktivierung durch die Lehrperson. Es kann vermutet werden, dass auf diese Weise Elaborationsstrategien aktiviert werden können.

Beobachtete Strategien. Tätigkeit (2): Zusammenhang zwischen Gegebenheiten der Situation und mathematischer Lösungsstruktur verstehen

Selektives Lesen und Notieren von Angaben. Bei der Identifikation des Zusammenhangs zwischen Gegebenheiten der Situation und mathematischer Lösungsstruktur konnte beobachtet werden, dass Schüler einzelne Textstellen auswählen und andere als nicht relevant erkennen. Beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut überprüfen die Schüler mit Hilfe des selektives Lesens mehrmals, ob die überflüssige Angabe (12 Minuten) bei der Konstruktion eines mathematischen Modells berücksichtigt werden sollte, oder suchen Hinweise im Text und im Bild, dass eine dreieckartige Anordnung des Seils, des Berges und des Weges über die Ebene idealisiert als rechtwinklig angesehen werden kann.

Zeichnen und Beschriften einer Skizze. Der Zusammenhang zwischen Gegebenheiten der Situation und mathematischer Lösungsstruktur kann nach dem Zeichnen und Beschriften einer Skizze präziser identifiziert werden. Während die Anfertigung einer Skizze bei der Tätigkeit (1) als Verstehenshilfe dient und eine reale Situation abbildet, wird bei der Tätigkeit (2) eine mathematische Skizze angefertigt. In der mathematischen Skizze zur Aufgabe Zuckerhut erscheint z.B. statt des durchhängenden Seils, auf dem sich eine Gondel bewegt, eine Hypotenuse im Dreieck. Die Analyse von Lösungsprozessen hat gezeigt, dass Schüler eine Skizze anfertigen, die i.d.R. sowohl Elemente der realen Situation (z.B. Berg) als auch mathematische Komponenten, wie das rechtwinklige Dreieck, enthält. Zeichnen und Beschriften der Skizze erwies sich – siehe Medienwechsel – als eine effektive Strategie beim Bearbeiten der Aufgaben Zuckerhut und Abkürzung.

Suche einer geeigneten Repräsentation der mathematischen Lösungsstruktur. Beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald wurde bei einer leistungsstarken Schülerin beobachtet, wie sie eine formal-mathematische Repräsentation der Angaben gesucht hat. Diese war bei ihr eine Tabelle, in der die Größen spaltenweise angeordnet wurden. Bei der Suche nach dieser Repräsentation hat die Schülerin unterschiedliche Anordnungen der Angaben ausprobiert, bis sie auf die ihr bekannte tabellarische Anordnung kam und das mathematische Verfahren identifizieren konnte.



Somit erscheint die Suche nach einer geeigneten Repräsentation eine hilfreiche Organisationsstrategie bei der Bearbeitung von Aufgaben mit arithmetisch-algebraischen Lösungsstrukturen (wie Aufgabe Regenwald) zu sein.

Planung. Durch die Planung gelingt es Schülern, einzelne Schritte in ihrem Lösungsprozess vorzuzeichnen und dadurch einen Gesamtüberblick über die Aufgabenlösung zu erlangen. Bei der Ausführung dieser Strategie beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut z.B. sagen Schüler, dass sie die Hypotenuse im Dreieck ausrechnen können. Damit haben sie die Voraussetzungen, um die weiteren Lösungsschritte zu überlegen. Eine ähnliche Strategieausführung wurde auch beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald beobachtet. Die Schüler formulieren, was sie als Erstes, als Zweites und so weiter ausrechnen würden und anschließend beginnen sie mit den Berechnungen. Der Befund zur Wirksamkeit von Planungsstrategien beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben ist konform zu den Ergebnissen, die im Bereich Problemlösen vorliegen(Chinnappan & Lawson, 1996; Pólya, 1948).

Mögliche Strategien. Tätigkeit (2)

Als mögliche Strategie bei der zweiten Tätigkeit könnte z.B. eine Fokussierung auf einzelne mathematische Elemente in der Skizze hilfreich sein. Schüler sollen dabei mathematische Strukturen (wie z.B. ein Dreieck) in der Skizze zeigen und über ihre Lösungsrelevanz diskutieren. Auch die Aufforderung eine Skizze aufzuzeichnen, in der mathematische Elemente, wie Strecken und Zahlen, und nicht reelle Gegebenheiten der Situation im Vordergrund stehen, kann eine Hilfe bei der Identifikation von mathematischen Strukturen darstellen.

Beobachtete Strategien. Tätigkeit (3): Umformung mathematischer Strukturen, Ausführung der Rechenoperationen und Interpretieren der Ergebnisse

Selektives Lesen und Notieren von Angaben. Bei der Ausführung der Rechenoperationen und beim Interpretieren der Ergebnisse werden von den Schülern Modellierungsaufgaben erneut gelesen und im Hinblick auf die lösungsrelevanten Daten abgesucht. Auch eigene Notizen und Zeichnungen werden in diesen Prozess mit einbezogen. Offenbar ist es so, dass die Wiederholungsstrategie mehrfaches Lesen und Notieren von Angaben eine Hilfe beim Transfer vom Kurzzeitgedächtnis in das Langzeitgedächtnis sowie beim Einprägen von Strukturen darstellt.

Mögliche Strategien. Tätigkeit (3)

Eine mögliche Strategie bei der Ausführung von Rechenoperationen ist, sich die Sinnhaftigkeit jedes einzelnen Rechenschrittes bewusst zu machen. Bei den Umformungen der Gleichung zum Satz des Pythagoras würde das bedeuten, zu fragen, wie die Länge ausgerechnet werden kann, wenn a^2 bekannt ist. Dann würden die Schüler vermutlich nicht so oft vergessen, die Wurzel bei der Lösung der Gleichung (Aufgaben Zuckerhut und Abkürzung) zu ziehen. An dieser Stelle im Lösungsprozess wurden die bekannten Schwierigkeiten mit dem Verstehen quadratischer Zusammenhänge beobachtet (De Bock, Verschaffel, & Janssens, 1998; De Bock, Verschaffel, Janssens, Van Dooren, & Claes, 2003). Das Ausführen von Elaborationsstrategien kann bei solchen Schwierigkeiten durch das operative Durcharbeiten begünstigt werden (Aebli, 1983). Dabei sollen die mathematischen Strukturen aus unterschiedlichen Perspektiven betrachtet und an verschiedenen Übungsbeispielen durchgearbeitet werden.

Tätigkeitsübergreifende Strategien

Die tätigkeitsübergreifenden Strategien sind Strategien, die an unterschiedlichen Stellen der Aufgabenbearbeitung hilfreich sein können. Zu dieser Gruppe gehören die metakognitiven

Strategien Kontrolle und Regulation sowie Strategien für das kooperative Lernen Help-Seeking-Strategie und Wechsel zwischen individueller Konstruktion und kooperativer Ko-konstruktion. Alle diese Strategien konnten bei der Bearbeitung der drei analysierten Modellierungsaufgaben helfen, Schwierigkeiten zu überwinden.

Kontrolle und Regulation. Beim Bearbeiten der Modellierungsaufgaben werden die Kontrollstrategien an unterschiedlichen Stellen im Lösungsprozess aktiviert. Als Auslöser dieser Strategie dient in der Regel die Abweichung zwischen dem erwarteten und tatsächlichen Ergebnis. Mögliche Lösungen werden offenbar aus dem Erfahrungswissen antizipiert. Wenn das tatsächliche Ergebnis von dem erwarteten zu sehr abweicht, werden die Kontrollstrategien aktiviert. Das führt zur Ausführung von Bearbeitungsstrategien, durch die das Ergebnis bestätigt oder korrigiert wird. Das Ergebnis kann z.B. eine unerwartet große oder kleine Zahl sein, wie beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald, als auch die Erkenntnis, dass beim Lösen einer Modellierungsaufgabe nicht alle Zahlenangaben in die Rechnung einbezogen werden müssen. Beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut überprüfen einige Schüler mehrmals den Text und den Rechenweg, da sie bei ihrer Lösung die im Text vorgegebenen 12 Minuten nicht berücksichtigt haben. Die empirische Wirksamkeit von Kontrollstrategien wurde im Bereich Problemlösen erforscht und bestätigt (vgl. Unterabschnitt 2.4.3) (siehe insbesondere Chinnappan & Lawson, 1996).

Neben dem genannten automatisierten Gebrauch von Kontroll- und Regulationsstrategien könnte auch ihre bewusste Aktivierung am Ende des Bearbeitungsprozesses von Vorteil sein. Die Validierung des Endergebnisses einer Modellierungsaufgabe mit anschließender Überprüfung des Lösungsweges könnte helfen, Fehler aufzudecken, die in verschiedenen Lösungsphasen unterlaufen sind. Eine nochmalige Bearbeitung der Modellierungsaufgabe würde eine tiefere Auseinandersetzung mit der Lösungsstrukturen der Aufgabe einleiten. So könnte das Prinzip des Durcharbeitens beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben in der Praxis realisiert werden. Durch die mehrfache Auseinandersetzung mit den Lösungsstrukturen wie Pythagoras- oder Geschwindigkeit-Weg-Zeit-Struktur in einer Aufgabe können die Lerninhalte im Gedächtnis besser verankert werden. Dafür sind vielfache Übungseinheiten und eine regelmäßige Wiederholung notwendig.

Eine Regulationsstrategie, die von einem Schüler beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung ausgeführt wurde, besteht in der Auswahl eines Lernelementes und einer zielgerichteten Einübung dieses Elementes im vorgegebenen Aufgabenkontext. Entscheidend für den Lernerfolg erscheint dabei eine selbständige Auswahl eines Lernziels im Lösungsprozess. Der Auswahl eines Lernziels steht ein verbreitetes Phänomen gegenüber, nämlich ein möglichst schnelles Ermitteln einer Lösung. Die Fokussierung der Anstrengungen der Lernenden auf den Lernprozess statt ausschließlich auf das Endergebnis ist eine wichtige didaktische Aufgabe, die bis jetzt in der Forschung und Unterrichtspraxis nur unzureichend beachtet wurde.

Help-Seeking-Strategien und Wechsel zwischen individueller Konstruktion und kooperativer Ko-konstruktion. Wenn ein Schüler allein im Bearbeitungsprozess nicht weiter kommt, kann ihm neben anderen Strategien auch eine Help-Seeking-Strategie helfen. Eine mehrfach beobachtete Strategie dieser Art ist, Fragen an den Partner zu stellen. Die Fragen beziehen sich in der Regel direkt auf die Aufgabenbearbeitung: *„Wie weit kommt man in 30 min, mit den 30 km/h?“* oder *„So, und wie viel Liter hat so ein Kasten?“*. Manchmal zielen die Fragen aber auch auf die Metaebene ab: Eine Schülerin erklärt ihren Lösungsweg zu der Aufgabe Regenwald und fragt anschließend *„Peilst (verstehst) du das?“* oder sie kontrolliert den Lösungsprozess ihres Partners *„Was machst du denn da jetzt?“*. Im vorliegenden Forschungsdesign wurden Schülerpaare im Labor untersucht, deswegen konnten die Help-Seeking-Strategien, die sich auf Schüler-Lehrer-Interaktionen beziehen, nicht beobachtet werden. Forschungsergebnisse anderer Studien zeigen jedoch, dass es Schüler gibt, die diese Strategie zu oft anwenden und schon bei der minimalsten Schwierigkeit die Lehrperson fragen (Boekaerts, 2002). Für die qualitativ höhere Bearbeitung von Aufgaben ist aber individuelle Auseinandersetzung mit den Schwierigkeiten unabdingbar.
Eine kooperative Strategie, die sich mit der Regulation von Arbeitsphasen befasst, besteht im Wechsel zwischen individueller Konstruktion und kooperativer Ko-konstruktion. Diese Strategie wird erfolgreich angewandt, wenn eine optimale Passung der individuellen und kooperativen Phasen erreicht wird. Da sich aber mindestens zwei Individuen am kooperativen Lernen beteiligen, verläuft der Phasenwechsel nicht immer optimal. Bei der Ausführung dieser Strategie sollen individuelle Bedürfnisse und Bedürfnisse anderer Gruppenteilnehmer in eine Balance gebracht werden. Diese Balance kann aber nur dann erreicht werden, wenn die Schüler die Verantwortung für das eigene Lernen übernehmen und hohe soziale Kompetenzen mitbringen.

Bezug der analysierten Strategien zu Lernstrategiegruppen in der Taxonomie von Mandl und Friedrich(Mandl & Friedrich, 2006). In der vorliegenden Arbeit wurden Bearbeitungsstrategien (Wiederholungs-, Organisations- und Elaborationsstrategien), metakognitive Strategien (Planung, Kontrolle und Regulation) sowie Ressourcenstrategien im Bereich kooperativen

Lernens (Help-Seeking-Strategie „Fragen stellen“ und Strategie „Wechsel zwischen individueller Konstruktion und kooperativer Ko-konstruktion“) analysiert. In diesem Abschnitt soll die Zuordnung der genannten Strategien zu den Lernstrategiegruppen erfolgen. Dabei soll beachtet werden, dass Strategien einen „multifunktionalen Charakter“ haben, und die Zuordnung einer Strategie zu der einer oder anderen Gruppe keinesfalls als absolut gesehen werden darf (Friedrich & Mandl, 2006, S. 2).

Da zwischen den Wiederholungs- und Elaborationsstrategien eine enge kognitionstheoretische Verwandtschaft besteht (Friedrich & Mandl, 2006; Steiner, 2006), wurden in der Lernstrategieeinteilung von Mandl und Friedrich diese Strategien zu der Strategiengruppe Elaborationsstrategien zusammengefasst (siehe Unterabschnitt 2.4.3). Die Bearbeitungsstrategie Organisation wird, wie in älteren Strukturierungen dieses Forschungsfeldes (Pintrich & DeGroot, 1990; Weinstein, et al., 2000; Weinstein & Mayer, 1986), in einer eigenen Strategiegruppe behandelt. Die metakognitiven Strategien Planen, Kontrolle und Regulation werden in der Gruppe Selbstkontroll- und Selbstregulationsstrategien behandelt. Die Anwendung von den oben genannten Bearbeitungsstrategien und metakognitiven Strategien wurde in der vorliegenden Arbeit untersucht. Neben den im vorherigen Abschnitt erfassten „klassischen“ Strategiegruppen wurden im Lösungsprozess der Schüler Problemlösestrategien identifiziert, die in der Taxonomie von Mandl und Friedrich Strategien der Wissensnutzung genannt werden (Mandl & Friedrich, 2006). Eine dieser Strategien ist die Suche nach einer geeigneten Repräsentation der Angaben, die beim Verstehen des Zusammenhangs zwischen Gegebenheiten der Situation und mathematischer Lösungsstruktur hilfreich erscheint.

Ressourcenstrategien im Bereich kooperativen Lernens, die bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben beobachtet wurden, sind die Help-Seeking-Strategie, Fragen stellen und Wechsel zwischen individueller Konstruktion und kooperativer Ko-konstruktion. Andere Ressourcenstrategien wie z.B. das Zeitmanagement konnten aufgrund der Einschränkungen durch das angewandte Untersuchungsdesign nicht beobachtet werden. Bei der vorliegenden Untersuchung bearbeiteten die Schüler die Aufgaben im Labor und durften sich die Bearbeitungszeiten nicht flexibel einteilen. Aus demselben Grund war es nicht möglich, Motivations- und Emotionsstrategien zu erheben. Da der Bearbeitungsprozess gefilmt und durch zwei Projektmitarbeiter beobachtet wurde, tauchten keine sichtbaren Probleme mit Aufmerksamkeit oder Ablenkung von Schülern auf. Deswegen wurden keine strategischen Handlungen in diesem Bereich ausgeführt.

5 Perspektiven für die Weiterentwicklung einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur

In diesem Kapitel werden die wichtigsten theoretischen und empirischen Elemente der Arbeit zusammengefasst, aufeinander bezogen und nochmals in komprimierer Form dargestellt. Darauf aufbauend werden einige Folgerungen für die Implementation einer lernprozessorientierten Didaktik in den Mathematikunterricht vorgestellt sowie allgemeindidaktische Konsequenzen aus der vorliegenden Untersuchung gezogen.

5.1 Die Wende zu einer prozessorientierten Didaktik

Ein aktuelles Forschungsproblem der Didaktik ist die Untersuchung von Lernprozessen der Schüler. Dahinter steht eine Wende in der didaktischen Konzeptualisierung von Input zu Output/ Outcome. Ausdruck findet diese Entwicklung in der Etablierung von Leistungsvergleichsuntersuchungen verschiedener Art auf Schul-, Landes- und Bundesebene wie z.B. Lernstandserhebungen, Vergleichsarbeiten und Mathematik-Wettbewerb. Prägend für diese Sichtweise sind bekanntlich die länderübergreifenden Vergleiche wie die Studien TIMSS, PISA, DESI oder IGLU (siehe ausführliche Diskussion hierzu im Abschnitt 2.1). Durch die Fokussierung auf den Output wird jedoch der Input oft vernachlässigt, obwohl er weiterhin eine wichtige Rolle beim Wissens- und Fähigkeitserwerb spielt. Die entscheidende Neuorientierung im didaktischen Kontext ist, dass der Input nun vom Output her in den Blick genommen wird(Messner, 2006). Das neue Verständnis der Funktionsweise von Bildungssystemen wird in einem Input-Prozess-Output-Modell von Oelkers und Reusser (2008) veranschaulicht.

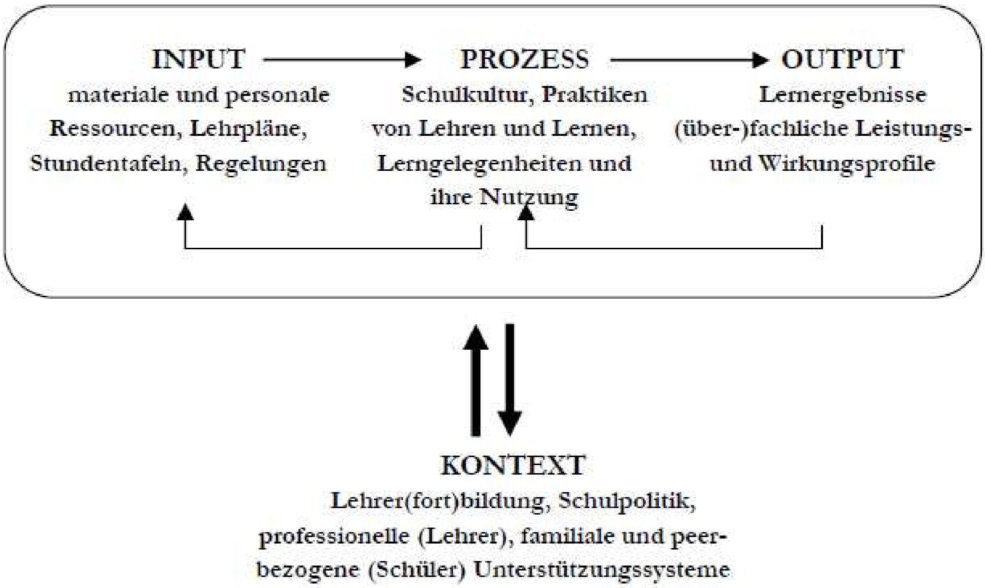


Abbildung 53. Ein Modell der Funktionsweise von Bildungssystemen (Oelkers & Reusser, 2008, S. 17)

Aktuell wird der Bezug des Inputs auf den Output in der Entwicklung von Kerncurricula widergespiegelt, die auf die fachspezifischen Bildungsstandards – und somit auf die antizipierten Outcomes – abgestimmt werden sollen. Der Prozess wird jedoch bei der Entwicklung von Kerncurricula weitgehend ausgeklammert. Die ältere Auffassung von didaktischen Konzeptualisierungen orientierte sich an einem inputorientierten Verständnis des Lernens. Die zu vermittelnden Inhalte, Lehrmethoden und das Lehrverhalten standen dabei im Vordergrund. Der entscheidende Faktor – die Lernprozesse – wurden als vom Input abgeleitetes Ergebnis behandelt. Die neue Sichtweise, die die Lernprozesse in Form von abprüfbarem Wissen und abprüfbaren Kompetenzen in den Vordergrund gestellt hat, fasst „die Wissensproduktion“ als aktiven Prozess auf, der auf der Schülerseite abläuft und in den Mittelpunkt des Lernens gestellt werden soll.

Diese Betrachtungsweise wird von der Hirnforschung bestätigt. Das Wissen kann demnach nicht von Lehrenden auf Lernende übertragen werden. Es muss „im Gehirn eines jeden Lernenden neu geschaffen werden“ (Roth, 2009, S. 59). Die Schüler werden dadurch als das betrachtet, was sie schon immer gewesen sind, nämlich als Mitproduzenten von Wissen, das in ihrem Gehirn konstruiert werden soll. Für die Konstruktion des neuen Wissens sind Kompetenzen und das bereits vorhandene Wissen von entscheidender Bedeutung. Der unterrichtliche Input muss deshalb die Kompetenzen der Lernenden berücksichtigen, d.h. es soll darauf geachtet werden, dass Anknüpfungspunkte für die Konstruktion des neuen Wissens bei den Lernenden vorhanden sind und Situationen geschaffen werden, die einen Aufbau von Wissensstrukturen ermöglichen.

5.2 Aufgaben als Teil einer prozessorientierten Didaktik

Aufgaben sind ein wichtiges Werkzeug der Didaktik. Ein aufgabenzentrierter selbständigkeitsorientierter Unterricht soll von Kompetenzen der Schüler ausgehen und hat das Ziel, die Kompetenzen zu aktivieren und sie zu erweitern. Einen Gegensatz zum aufgabenzentrierten Unterricht bildet ein problembeschreibender Unterricht. In diesem Unterricht beschreibt die Lehrperson ein Problem und zeigt, wie dieses Problem gelöst werden kann. Im problembeschreibenden Unterricht werden zwar Aufgaben benutzt, dennoch steht hier oft die Lehrertätigkeit und nicht die selbständige Aufgabenbearbeitung im Vordergrund.

Lange wurde Unterricht einem von zwei gegensätzlichen didaktischen Szenarien zugeordnet: einem veraltetem und vermeintlich uneffektiven lehrergeleiteten Unterricht einerseits und einem modernen Unterricht, in dem Schülertätigkeit mit Hilfe von motivierenden Aufgaben herausgefordert wurde, andererseits. Diese fundamentale Auseinandersetzung von zwei

Sichtweisen wird jedoch als überholt angesehen (vgl. u.a. Lipowsky, 2007). Die Effektivität des Wissens- und Kompetenzerwerbs kann demnach nicht anhand von Unterrichtsmethoden oder der didaktischen Aufbereitung des Unterrichts vorbestimmt werden. Die genannten Merkmale stellen nur eine Oberfläche des Unterrichts dar. Der Lernprozess findet aber in den Wissensstrukturen eines Schülers statt und kann nicht unmittelbar beobachtet werden. Deshalb sind die Tiefenstrukturen des Unterrichts und letztendlich die Schüleraktivierung, für den Lernerfolg entscheidend und diese kann in unterschiedlichen Lehr-Lern-Arrangements erreicht werden.

Die Revision lehrergeleiteter Unterrichtsformen heißt jedoch nicht, dass ein rezeptiver Unterricht allein ausreicht, um anwendungsbezogene Kompetenzen wie Modellierungskompetenz zu erwerben. Der Grund dafür ist zum einen die Notwendigkeit einer individuellen Auseinandersetzung mit den gestellten Problemen und zum anderen die Besonderheit der Modellierungsaufgaben, die durch ihren deutlich ausgeprägten Anwendungscharakter als Literacy-Aufgaben bezeichnet werden können. Da seit der PISA-Studie ein wichtiges Ziel der Bildung in der modernen Gesellschaft als Anwendung des Fachwissens in Beruf und Alltag definiert werden kann(Baumert & PISA-Konsortium, 2001; Messner, 2003), muss jeder Schüler lernen, selbständig zu agieren und sein im Unterricht erworbenes Wissen auf reale Probleme zu transferieren. Welche problemorientierten Aufgaben neben den mathematischen Modellierungsaufgaben im Unterricht dafür behandelt werden können, wird im allgemeindidaktischen Teil dieses Kapitels diskutiert.

Die Lösung von Aufgaben nimmt vor allem in naturwissenschaftlichen Fächern und in der Mathematik eine zentrale Stellung ein (vgl. Abschnitt 2.2). Sowohl in der Erarbeitungsphase, als auch in der Übungs- und Durcharbeitensphase stellt eine geeignete Aufgabenwahl eine notwendige Voraussetzung für den erfolgreichen Lernprozess in diesen Fächern dar[20]. Die Analyse von Aufgaben ist deshalb in der Allgemein- und Fachdidaktik neuerdings wieder ein aktuelles Thema (vgl. u.a. Blömeke, Risse, Müller, Eichler, & Schulz, 2006; Führer, 1997; Messner, 2004a; Neubrand, et al., 2002).

Die Bearbeitung einer Aufgabe führt Lernende zu einer Konkretisierung der Beziehung zwischen dem „Ich“ und der Welt hin. Bei der neuen Aufgabenkultur kann ein Teil der Welt – die Realität – als Kern der gestellten Aufgaben angesehen werden. In den Mittelpunkt der Aufgabenkultur werden dabei lebensnahe Probleme gestellt, die über eine fachbezogene Tätigkeit

[20] In bestimmten Bereichen wie z.B. im Kunst- oder Deutschunterricht gibt es neben einer problemorientierten Aufgabenkultur auch andere Kulturen. Die Aufforderung ein Bild zu zeichnen oder ein Gedicht zu interpretieren, kann im weiteren Sinn zwar auch als eine Aufgabe bezeichnet werden, sie hat aber keinen so straken problemhaltigen Charakter wie eine Mathematik- oder Physikaufgabe.

von Lernenden gelöst werden. Modellierungsaufgaben sind problemorientierte Aufgaben, die anspruchsvolle Konstruktionsleistungen verlangen. Beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben müssen verschiedene Modelle gebildet werden. Dabei ist der Transfer mathematischer Strukturen auf einen außermathematischen Sachverhalt ein kennzeichnendes Merkmal dieser Aufgaben. Der Lösungsprozess einer *mathematischen* Modellierungsaufgabe verlangt u.a. die Konstruktion *mathematischer* Modelle, die mit Hilfe *mathematischer* Verfahren weiterbearbeitet werden. Durch das fachspezifische Modellieren können Lernende ein lebensweltliches Phänomen und somit auch die Realität besser verstehen.

5.2.1 Lern- und Testaufgaben

Je nach angestrebter Zielsetzung können Aufgaben unterschiedlichen Zwecken dienen und erfüllen verschiedene Funktionen im Unterricht. Eine verbreitete Einteilung der Aufgaben, die im Unterabschnitt 2.2.1 kritisch betrachtet wurde, ist die Unterscheidung von Lern- und Testaufgaben. Während die Testsaufgaben sich an einer fachdidaktische Norm orientieren und diese überprüfen sollen, werden bei der Auswahl und Konstruktion einer Lernaufgabe stärker die individuellen Lernvoraussetzungen und das kognitive Lernpotential der Aufgabe berücksichtigt. Wesentliche Einschränkungen, welche die Testaufgaben von Lernaufgaben unterscheiden, bilden psychometrische Kriterien, denen die Testitems genügen sollen. Ein wichtiges Kriterium dieser Art ist der Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe. Im Unterschied zu Lernaufgaben müssen Testitems unter Ausschluss von jeglichen Hilfen bearbeitet werden und dürfen unter solch strengen Bedingungen weder zu schwer noch zu leicht für die untersuchte Stichprobe sein. Da der empirische Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe von der Untersuchungspopulation abhängt, wird es ersichtlich, dass in unterschiedlich starken Lerngruppen unterschiedliche Aufgaben für die Testzwecke geeignet sind. Ein guter Test enthält sowohl Aufgaben, die kaum jemand lösen kann, als auch Aufgaben, die fast jeder Schüler aus der Testpopulation bearbeiten kann. Auf diese Weise kann man die Leistungen der Schüler genau messen. Die Lernaufgaben hingegen sollen einerseits Hindernisse enthalten, müssen aber zugleich von Schülern in selbständiger Arbeit bearbeitet werden. Durch die Bearbeitung von Lernaufgaben sollen eigene Strukturen eines Lernenden erweitert werden, statt eine Momentaufnahmen über seinen Leistungsstand festzuhalten.

Auch die Modellierungsaufgaben können, wie die Testkonstruktion und Unterrichtsplanung im Rahmen des DISUM-Projektes gezeigt hat, für die Lern- und Testzwecke genutzt werden. In der vorliegenden Untersuchung wurden die Modellierungsaufgaben Zuckerhut, Abkürzung und Regenwald für die Erkundung von Lernprozessen der Schüler eingesetzt und dienten so-

mit ausschließlich als Lernaufgaben für Forschungszwecke. Zu einer möglichen Nutzung dieser drei Aufgaben kann angemerkt werden, dass die Aufgaben Zuckerhut und Regenwald aufgrund ihrer Schwierigkeit für die 9.-klässler als Testaufgaben nicht geeignet erscheinen. Die Aufgabe Abkürzung wurde zum Lernzweck im Unterricht in einer Pilotierungsphase des DISUM-Projektes und als Testitem in der DISUM-Hauptuntersuchung erfolgreich eingesetzt.
Ein wichtiger Aspekt bei der Auswahl einer Aufgabe ist ihr Motivierungspotential. Da ein Test in der Regel benotet wird, sind Schüler durch einen externen Leistungsdruck motiviert, die Testaufgaben zu bearbeiten. Beim Lernen muss die Motivation hingegen durch die ansprechende Gestaltung der Aufgabe und die Einbettung in den Unterricht erst erzeugt werden. Somit spielt die Motivation beim Bearbeiten von Lernaufgaben eine größere Rolle als beim Lösen von Testaufgaben und soll bei der Aufgabenwahl berücksichtigt werden.

5.2.2 Modellierungsaufgaben und Aufgabenkultur

Lernaufgaben sind Auslöser im Lernprozess, die thematisch relevante Kompetenzen der Schüler aktivieren. „Gute fachliche Lernaufgaben materialisieren jede Wissens- und Könnenskomponente, lösen jene Denk- und Arbeitsprozesse aus und aktivieren jene analytischen und synthetischen Figuren des Problemlösens, Argumentierens, Betrachtens und Deutens, um die es in einem bestimmten Fach im Kern geht und die dessen intellektuelle Kultur ausmachen“ (Oelkers & Reusser, 2008, S. 408). Die Modellierungsaufgaben sind Aufgaben mit einem ausgeprägten problemhaltigen Gehalt und können deshalb gemäß dieser Definition als Lernaufgaben betrachtet werden. Beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben werden modellhafte Vorstellungen konstruiert, mit denen Lücken in der kognitiven Struktur geschlossen und die strukturelle Wirklichkeit (re-)konstruiert wird. Beteiligt sind dabei „höhere“ kognitive Prozesse wie Verstehen, Argumentieren, Begründen und Transferieren. Durch anspruchsvolle Argumentationsanforderungen und einen Problemcharakter verkörpern Modellierungsaufgaben eine fachspezifische intellektuelle Kultur.
Modellierungsaufgaben bilden den Kern der neuen Aufgabenkultur. Sie weisen einen Realitätsbezug auf, ohne ihn künstlich auf einige wenige Faktoren, wie etwa bei „eingekleideten“ Aufgaben, zu reduzieren. Dadurch gewinnen Aufgaben an Authentizität und ihre Bearbeitung erscheint für Lernende erstrebenswert. Modellierungsaufgaben können motivierend präsentiert werden und helfen Interesse an Fachinhalten zu wecken und dauerhaft aufrecht zu erhalten.[21] Oft haben Modellierungsaufgaben einen Bezug zur Lebenswelt der Schüler und stimu-

[21] Die Modellierungsaufgaben Schülern einfach zu geben, reicht allein nicht aus, um das Interesse oder die Freude der Schüler wesentlich zu erhöhen (Schukajlow, Leiss, Blum, Messner, & Pekrun, 2009)

lieren das Entstehen kognitiver Konflikte, wie z.B. bei der Bearbeitung der Aufgabe Regenwald (siehe die Aufgabe Regenwald in der Abbildung 26).

Die Lösung von Modellierungsaufgaben erfordert ein schrittweises Überwinden von inneren Widerständen und Schwierigkeiten und kann dadurch die fachlichen Kompetenzen und motivationalen Lernvoraussetzungen verbessern. Das Überwinden von Schwierigkeiten setzt eine „Passung“ der Aufgaben an das individuelle Lernniveau voraus. Die Bestimmung der Passung stellt ein komplexes Problem dar (siehe eine ausführliche Diskussion hierzu im Unterabschnitt 2.4.2). Neben anderen Analysekriterien von Aufgaben nennen Blömeke et al. (2006)die Passung der Anforderungen an das individuelle Vorwissen der Lernenden und das Potential zur Selbstdifferenzierung (unterschiedlich schwierige Lösungswege) als wichtige Voraussetzungen für das Anregen des Lernprozesses. Da Modellierungsaufgaben mit einem unterschieldichen Grad an Präzision, Reflexion und Komplexität mathematischer Modelle bearbeitet werden können, weisen sie einen variablen Schwierigkeitsgrad auf und können bei Schülern unterschiedlicher Kompetenzniveaus erfolgreich eingesetzt werden. Beim Bearbeiten der Aufgabe Riesenschuhe ist es im einfachsten Fall möglich, eine Person zu nehmen, um die Relation zwischen der Schuhlänge und der Höhe eines Menschen zu bestimmen. Alternativ können Relationen bei mehreren Personen berechnet oder auch eine andere Ausgangsgröße – die Breite eines Schuhs – bei der Lösung berücksichtigt werden.

Eine grundlegende Annahme der vorliegenden Untersuchung ist, dass Strategien im Bearbeitungsprozess eine wichtige Rolle spielen. Der Einsatz von Strategien hilft, Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben zu überwinden und begünstigt dadurch den Lern- und Lösungsprozess. Einen entscheidenden Vorteil von Strategien gegenüber anderen theoretischen Konzeptualisierungen bietet ihre Handlungsbezogenheit, welche die praktische Relevanz der Strategien für die Förderung von Lernprozessen erhöht. Zudem wurde die Trainierbarkeit der Strategien in mehreren Studien empirisch nachgewiesen (Weinstein, et al., 2000). Durch die Berücksichtigung der Strategien ist die Transparenz von Lernprozessen gestiegen und bietet nun neue Möglichkeiten im diagnostischen Bereich der Lehr-Lernforschungen an. Diese Argumente zeigen, warum Untersuchungen des strategischen Verhaltens der Schüler seit einigen Jahren eine vielversprechende Forschungsrichtung darstellen. Die Neuentwicklungen in diesem Bereich werden durch eine fachdidaktische Akzentuierung der Lernstrategieforschungen gekennzeichnet, die u.a. durch die Untersuchung von besonders wichtigen Aufgabentypen bzw. Kompetenzen erreicht werden kann.

5.2.3 Aufgaben als Element von Lernumgebungen

Aufgaben sind bedeutende Elemente von Lernumgebungen. Nur in passenden Lernumgebungen kommt ihr kognitiv aktivierendes Potential zur Geltung (vgl. Unterabschnitt 2.5.4 ff., speziell zu Modellierungsaufgaben Unterabschnitt 2.2.2). Wissen über die Aufgaben sowie Strategie- und Inhaltswissen sind wichtige strukturelle Voraussetzungen der kognitiven Komponenten selbstgesteuerten Lernens (Friedrich & Mandl, 1997), das als ein übergeordnetes Bildungsziel angesehen werden kann (siehe Abbildung 54).

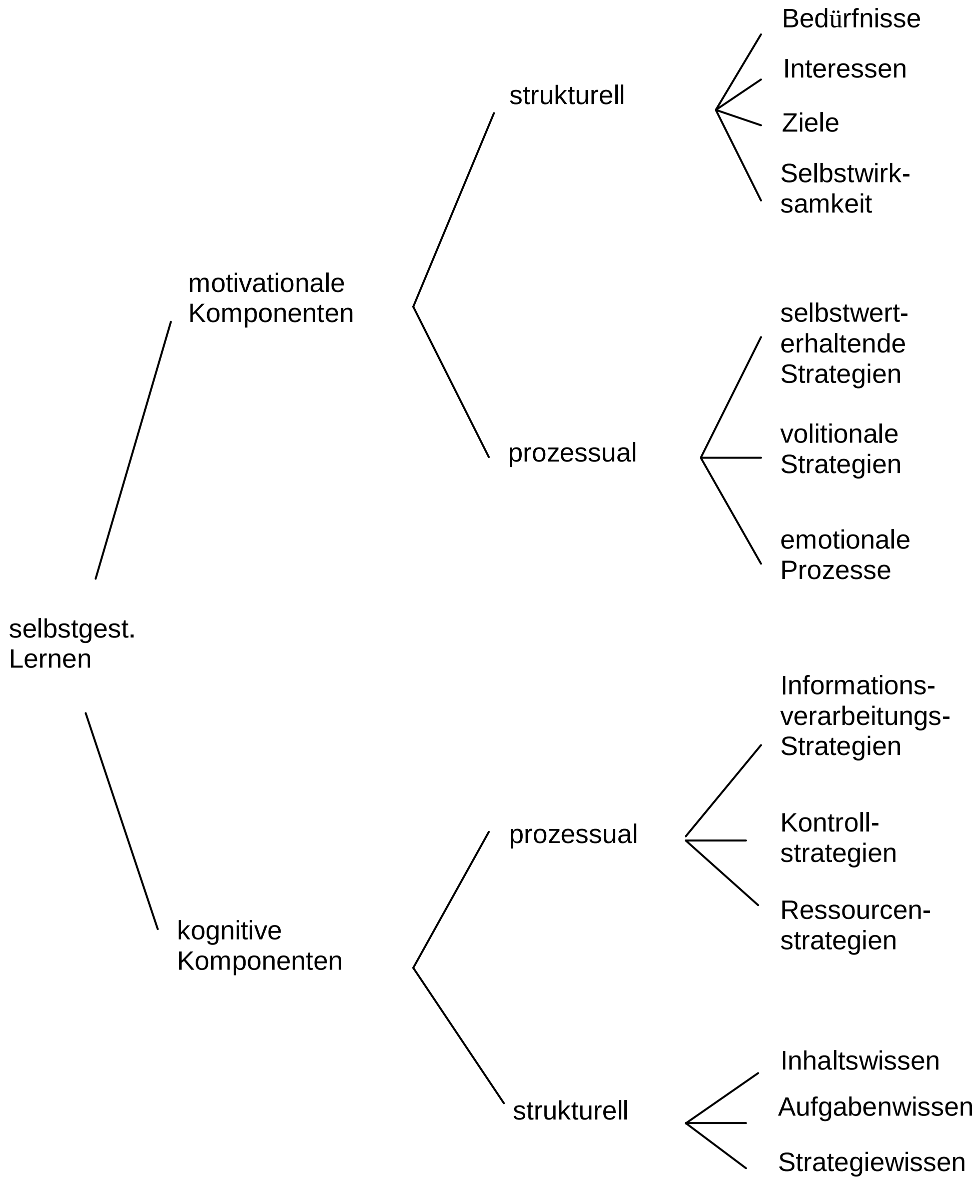


Abbildung 54. Motivationale und kognitive Komponenten selbstgesteuerten Lernens (aus Friedrich & Mandl, 1997, S. 242)

Auch bei den prozessbezogenen kognitiven Komponenten, die das Verhalten in konkreten Situationen repräsentieren, stehen Aufgaben im Hintergrund. Strategien, die unter diesem Punkt aufgeführt sind, werden in einer Auseinandersetzung der Person mit einem in der Aufgabe beschriebenen Problem erworben und werden beim Bearbeiten einer Aufgabe aktiviert und geübt.

In dieser Arbeit wurden die Analysen auf die Strategien im Umgang mit Schwierigkeiten bei der Lösung von Modellierungsaufgaben in 2er Gruppen konzentriert. Die Schwerpunkte der Untersuchung liegen somit im diagnostischen Bereich (Schüler-Schwierigkeiten) und bei den daran angekoppelten möglichen Interventionen (Schüler-Strategien). Da die Untersuchung von verbalen und nonverbalen Äußerung der Schüler beim gegenseitigen Austausch über die Lösung der Aufgabe einen Einblick in die kognitiven Denkprozesse der Lernenden ermöglicht, wurden im Design der Studie einzelne Schüler als Untersuchungseinheit ausgewählt, die die Aufgaben in Lerntandems bearbeiteten. Auf diese Weise konnte zudem ein wichtiges strategisches Element – kooperative Strategien – in die Untersuchung einbezogen werden. Eine Einschränkung bei der Interpretation der Ergebnisse der Studie stellt allerdings der Ausschluss von Lehrpersonen aus dem Untersuchungsdesign dar. Dies ist mit der Intention zu begründen, Lösungsprozesse ohne äußere Einflüsse beobachten zu wollen. Wie im Unterabschnitt zu Schülerstrategien (Unterabschnitt 4.6.2) angedeutet wurde, kann die Untersuchung der Aufgabenbearbeitung von Schülern in Anwesenheit einer Lehrperson eine wichtige Weiterführung dieser Arbeit darstellen.

5.3 Konzeptionelle Vorschläge für die Implementation einer prozessorientierten Didaktik in den Mathematikunterricht

5.3.1 Diagnostisches Wissen

Die Untersuchung von Schüler-Schwierigkeiten und -Strategien beim Lösen von Modellierungsaufgaben unterstreicht, dass diagnostisches Wissen im Lernprozess eine wichtige Rolle spielt. Dieses Wissen erfüllt dabei zwei wichtige Funktionen: Es hilft, Lernprozesse zu verstehen und die Qualität der Lehrerinterventionen zu verbessern. Bei der Genese dieses Wissens kann nicht davon ausgegangen werden, dass das umfassende diagnostische Wissen vor der Aufgabenbearbeitung vorhanden ist. Erst im Prozess der Aufgabenlösung und beim sorgfältigen Beobachten des Lösungsverhaltens einzelner Individuen wird fundiertes diagnostisches Wissen aufgebaut und erweitert.

Für eine effektive Unterstützung des Lernens muss bekannt sein, welches Wissen und welche Kompetenzen bei den Lernenden vorhanden sind und welche Strategien für die Bewältigung der gestellten Anforderungen aktiviert werden müssen. Dies setzt die Analyse des Lösungsraums der Aufgabe voraus, die unter Berücksichtigung individueller Lernvoraussetzungen erfolgen soll. Wenn in der angebotenen Aufgabe z.B. räumliche Strukturen einen Teil des mathematischen Modells bilden, ist das Zeichnen und Beschriften einer Skizze eine effektive Strategie. Allerdings reicht die Aufforderung eine Skizze zu zeichnen allein nicht, um den Lösungsprozess voranzubringen (De Bock, et al., 1998; Leiss & Schukajlow, submitted). Bei bestimmten Aufgabentypen kann eine solche Aufforderung sogar hinderlich für den Lösungsprozess sein (De Bock, et al., 2003). Vertiefende Analysen zeigen, dass von dieser Strategie vor allem Lernende profitieren, die eine Skizze von sich aus, also ohne Aufforderung von außen, zeichnen (De Bock, et al., 1998; Leiss & Schukajlow, submitted). Das verdeutlicht exemplarisch, wie differenziert die Ergebnisse über die Wirksamkeit einer Strategie sind und weisen auf die Notwendigkeit hin, das Zusammenwirken von einzelnen Strategien und Schüler-Schwierigkeiten beim Bearbeiten von unterschiedlichen Aufgabentypen zu untersuchen. In dieser Arbeit wurde eine solche Untersuchung der Strategie Zeichnen und Beschriften der Skizze vorgenommen. Die Analyse ergab, dass das Erstellen der Skizze keine Vorteile bringt, wenn ihre Elemente von einer anderen Person diktiert werden. Stattdessen muss die Skizze in individueller Arbeit beim sukzessiven Lesen der Aufgabe gezeichnet und beschriftet werden. Durch eine individuelle Auseinandersetzung mit der Aufgabe in unterschiedlichen Medien des Denkens (symbolisch und ikonisch), die beim Erstellen der Skizze abläuft, kann vermutlich eine vertiefte Informationsverarbeitung erreicht werden.

5.3.2 Kooperative Strategien

In der vorliegenden Studie wurden die Modellierungsaufgaben von Schülerpaaren bearbeitet, deshalb war es möglich, Strategien für das kooperative Lernen zu untersuchen. Wichtig erscheint hierbei die Strategie Wechsel zwischen der individuellen Konstruktion und der kooperativen Ko-konstruktion. Da diese Strategie nicht inhaltsspezifisch ist, dürfte die Generalisierung der Befunde auf andere Fächer möglich sein. Der allgemeindidaktische Ertrag der Arbeit ist speziell bei dieser Strategie besonders hoch, deswegen werden die Befunde zu dieser Strategie auch im Abschnitt zu den allgemeindidaktischen Perspektiven noch ein Mal aufgegriffen.

Die Beobachtungen der Aufgabenbearbeitung haben gezeigt, dass eine Balance zwischen der individuellen und kooperativen Phase nicht bei allen Schülern vorhanden ist. In einigen Situationen dauern die individuellen Phasen sehr lange (mehr als 5 Min) ohne für einen externen Beobachter sichtbare Handlungen an. Ein Austausch über eigene Ideen oder Dokumentation eigener Gedanken könnte in diesen Situationen hilfreich sein. Andererseits wird eine individuelle Konstruktion manchmal durch das Nachfragen des Partners gestört, sodass das Potential dieser Phase nicht ausgeschöpft wird. Wie die Regulation der gemeinsamen Arbeit der

Schüler verbessert und individuelle Ziele beider Partner in Einklang gebracht werden können, muss weiter erforscht werden.

5.3.3 Lehrerinterventionen

Die Annäherung an die Frage, welche Lehrerinterventionen für den Kompetenzerwerb hilfreich sein können, sollte gemäß der angewandten Forschungsmethode über die Strategien erfolgen, die Schüler bei der Bearbeitung von Aufgaben ausführen. Gemäß den vorliegenden Daten gibt es keine Strategie, die keine Aussicht auf Erfolg bietet, und somit bei den möglichen Lehrerhilfen keinen Platz findet. Fruchtbar erscheint deshalb die Handlungsabfolge bei der Ausführung einer Strategie – das Strategieskript – detailliert zu analysieren. Da einzelne Schüler verschiedene Stärken und Schwächen im Strategiegebrauch haben dürften, sind für die Entscheidung für bzw. gegen eine Intervention eine individuelle Diagnostik sowie das Wissen über den idealtypischen Strategiegebrauch notwendig. Beim Intervenieren muss die Lehrperson vor allem die Denkweise der Schüler nachvollziehen. Dabei reicht es nicht allein den Lösungsweg zu verstehen. Notwendig wäre auch die Entwicklung passender Hilfen für die Lernenden. Die Hilfen sollen so gestaltet werden, dass die Kommunikation zwischen den Schülern angeregt und nicht unterbrochen wird. Dies kann u.a. durch die Methode des lauten Denkens erreicht werden. Wenn Schüler ihre Gedanken verbalisieren, konstruieren sie die Lösung neu und geben zugleich anderen die Möglichkeit, ihre Ideen zu verstehen. Die aufgeführten Überlegungen deuten darauf hin, dass der Vermittlung von lernstrategischem Wissen im Mathematikunterricht mehr Platz eingeräumt werden sollte.

Wie diese Vermittlung erfolgen soll, ist endgültig noch nicht geklärt. Angeknüpft werden kann in dieser Frage an didaktische Konzeptionen wie Didaktik auf psychologischer Grundlage von Aebli (Aebli, et al., 1986), Cognitiv-Apprenticeship-Ansatz (Collins, et al., 1989) oder operativ-strategischer Unterrichtsgestaltung, die in der DISUM-Studie implementiert wurde (Blum, in press; Messner & Blum, 2006a; Schukajlow, Blum, et al., 2009). Die genannten Studien deuten auf die Notwendigkeit hin, Lernumgebungen zu schaffen, in denen Strategien den Gegenstand der Schüler-Schüler- und Lehrer-Schüler-Kommunikation bilden, ihre Ausführung gemeinsam reflektiert und evaluiert wird, sowie eine motivationale Unterstützung und ein prozessbezogenes Feedback gewährleistet werden.

Vielversprechend erscheint zudem eine Kombination von fachspezifischen Strategien mit der Selbstregulation (Leutner, Leopold, & Elzen-Rump, 2007; Perels, Gürtler, & Schmitz, 2005; Souvignier & Mokhlesgerami, 2006) und kooperativen Strategien (Kramarski, Mevarech, & Arami, 2002). Neue Perspektiven in der Strategienvermittlung werden durch die Erkenntnis geleitet, dass lehrerzentrierte und schülerorientierte Methoden sich gegenseitig ergänzen sollen.

5.4 Allgemeindidaktische Perspektiven

Im abschließenden Abschnitt soll der Schwerpunkt auf allgemeindidaktische Perspektiven der Studie gelegt werden. Zunächst werden die zentralen Folgerungen aus den Ergebnissen der vorliegenden Studie – die Prozess-Ergebnis-Orientierung im Unterricht – begründet und die Bedingungen ihrer praktischen Realisierung diskutiert. Unter Rückgriff auf die Konzeption der Wissensformen werden im zweiten Teil dieses Abschnitts auch nicht-mathematische Aufgaben mit Modellierungseigenschaften in einer Art Ausblick einbezogen, exemplarisch vorgestellt und didaktisch interpretiert. Durch die Vorstellung von Aufgaben, die in anderen Unterrichtsfächern ihre Anwendung finden können, soll die Bedeutung von Modellierungsaktivitäten für den Wissenserwerb hervorgehoben werden.

5.4.1 Prozess-Ergebnis-Orientierung und die Bedingungen ihrer Realisierung im Unterricht

Die Untersuchung der Aufgabenbearbeitung der Schüler hat an mathematischen Modellierungsaufgaben stattgefunden, in denen Sachverhältnisse (Selz, 1913) im Vordergrund stehen. Deswegen sind auch die Konsequenzen vor allem auf Aufgaben mit strukturähnlichem Aufbau übertragbar. Solche Aufgaben sind in allen Realienfächern, vor allem im naturwissenschaftlichen Unterricht, weit verbreitet.

Die Analyse von Schwierigkeiten und Strategien bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben gibt Hinweise darauf, welcher Faktor für die Realisierung von prozessorientiertem Lernen die entscheidende Rolle spielt und unter welchen Bedingungen Aufgaben kognitiv aktivierend auf die Schüler wirken können. *Zur erfolgreichen Lernprozessgestaltung bedarf es längerfristig einer Veränderung der Zielperspektive unter der die Schüler Aufgaben bearbeiten. Beim Bearbeiten der Aufgaben sollen Schülerhandlungen, statt sich nur auf die Lösung einer Aufgabe zu beschränken, auf den individuellen Erwerb von Wissen, Kompetenzen und Strategien ausgerichtet werden.* Dieser Perspektivwechsel kann als *Prozess-Ergebnis-Orientierung* im Lern- und Lösungsprozess bezeichnet werden. Aus empirischen Untersuchungen ist bekannt, dass ein solcher Perspektivwechsel nicht einfach zu handhaben ist, weil bei den Schülern Ergebnisorientierung im Vordergrund steht: Sie wollen die angebotenen Aufgaben schnell lösen, statt sie kognitiv zu durchdringen (vgl. u.a. Cohen, 1994; Hogan, Nastasi, & Pressley, 1999). Pauli und Reusser schreiben in diesem Zusammenhang: „Viele Lernende diskutieren vor allem darüber, wie sie die Aufgabe möglichst schnell und einfach erledigen können, ohne sich inhaltlich damit beschäftigen zu müssen“ (Pauli & Reusser, 2000, S. 428). Im Folgenden werden einzelnen Aspekte solcher Neuorientierung konkreter ausgeführt.

Selbstregulation. Soll der Schwerpunkt bei der Zielsetzung der Schüler von der ausschließlichen Ergebnisorientierung – Fokussierung von Aufgabenlösung auf die Prozess-Ergebnis-Orientierung – verlegt werden, gewinnt die Regulation des Lernens an Bedeutung. Insbesondere der Wechsel zwischen beiden Teilzielen (Prozess-Ergebnis) erfordert für die rechtzeitige Akzentuierung des Lernprozesses während der Lösungsentwicklung eine Überwachung und Regulierung eigener Handlungen durch die Lernenden. Denkbar ist die Zuhilfenahme von metakognitiven Strategien, um das Ziel „möglichst schnell ein Ergebnis zu bekommen“ zumindest für eine begrenzte Zeit durch das Ziel „neues Wissen beim Lösen der Aufgabe zu erwerben“ zu ersetzen. Solche Regulierungsaktivitäten werden im Rahmen der Modelle zur Selbstregulation beschrieben und evaluiert (Boekaerts, 1999; Schunk & Zimmerman, 2003; Zimmerman, 2002). Eine effektive Möglichkeit die Selbstregulation der Lernenden zu fördern, ist das Training von metakognitiven und kognitiven Strategien der Lernenden (Kramarski, et al., 2002; Weinstein, et al., 2000). Verschiedene Untersuchungen haben gezeigt, dass die Wirksamkeit der Trainingsmaßnahmen durch die fachspezifischen Elemente gesteigert werden kann (Boekaerts & Cascallar, 2006). Für die Konzeption solcher Trainings können die Befunde dieser Arbeit bei Schwierigkeiten und Strategien der Schüler beim Lösen von Modellierungsaufgaben herangezogen werden, z.B. sollten die einzelnen Schritte der Bearbeitungsprozesse bewusst gemacht werden.

Individualisierung. Da der Aufbau von Wissensstrukturen in Form von individuellen Interiorisierungsprozessen abläuft, ist die Individualisierung bei der Reflexion über die Aufgabenlösung und beim Nachdenken über eigene Lernfortschritte unentbehrlich. Die Rolle der Individualisierung beim Lernen wird zum Beispiel in Zimmermans Charakterisierung des Lernens hervorgehoben: „Learning is viewed as an activity, that students do for themselves in a proactive way rather than as covert event that happens to them in reaction to teaching“ (Zimmerman, 2002, S. 65).

Wie im empirischen Teil dieser Arbeit gezeigt wurde, sind Schwierigkeiten im Lösungsprozess nicht bei allen Schülern identisch bzw. treten in verschiedenen Phasen des Lernprozesses auf. Deswegen brauchen die Schüler während der Aufgabenbearbeitung Handlungssituationen, in denen sie ungestört eigenständig die Lösung entwickeln und sich mit den Schwierigkeiten und Strategien im Lernprozess auseinandersetzen können. Da individuelle Arbeitsphasen eine volle Konzentration der Schüler auf das eigene Lernen ermöglichen, sind sie für die Realisierung der Prozess-Ergebnis-Orientierung besonders wichtig.

Kooperative Ko-konstruktion. Individuelle Auseinandersetzung mit Lernmaterialien ist nur ein Typ der Aufgabenbearbeitung. Im Unterricht spielen aber auch andere kooperative Bearbeitungsformen wie Partner- und Gruppenarbeit eine Rolle. Für die Lernprozessorientierung sollten individuelle Lernphasen durch kooperative Bearbeitungsformen ergänzt werden. Kooperative Lernprozesse fördern die soziale „Spiegelung“ und damit das Bewusstmachen von Lernprozessen. Genau wie individuelle Lernphasen sind Situationen der gemeinsamen ko-konstruktiven Arbeit notwendig, in denen über die erlebten Schwierigkeiten und möglichen Lösungsstrategien diskutiert wird. Kooperative Bearbeitung kann in Form lehrergeleiteter Schülergespräche oder in direkter Interaktion der Schüler geschehen. Vorteile der gemeinsamen sozialen Konstruktion sind vielfach theoretisch begründet (Wygotski, 1988) und empirisch bestätigt worden (Slavin, Hurley, & Chamberlain, 2003). Durch den Austausch über den Lernprozess können unterschiedliche Arten des Lernens gefördert werden. Neben dem Aufbau von Operationen und Begriffen (Aebli, 1980) kann das Lernen am Modell (Bandura, 1976; Steiner, 2008) in diesen Phasen stärker aktiviert werden. Mögliche Modelle bei der Nachahmung des Verhaltens können Mitschüler sein oder auch Lehrpersonen, die als Experten ihre Strategien zeigen und die Entwicklung der Strategien bei Schülern professionell unterstützen können.

Stimulierung der Lernprozessorientierung durch die Lehrperson. Die Lernprozessorientierung bedarf einer gezielten Förderung durch die Lehrperson. Hierfür muss im Unterricht ein entsprechender Rahmen erst geschaffen werden. Von der Lehrperson sollen die Bedeutung der Lernprozessorientierung hervorgehoben und die Unterrichtsziele als Sequenzierung von Prozess und Ergebnis thematisiert werden. Eine empirische Untersuchung gibt Hinweise auf die Effektivität solcher auf die prozessbezogenen Mastery-Ziele (mastery goals) und die Lernergebnisse in Form von Leistungen (performance goals) orientierten Interventionsmaßnahmen für Schülerleistungen, Motivation und Selbstregulation (Linnenbrink, 2005). In der Studie von Linnebrink wurden Fünft- und Sechstklässler fünf Wochen in Mathematik unterrichtet. Sowohl in den lehrerzentrierten Arbeitsphasen als auch während der Gruppenarbeit haben die Lehrpersonen in den Klassen, die am Ende der Untersuchung die besten Ergebnisse erreicht haben, die Lernfortschritte der Schüler diagnostiziert und die Schüler wie folgt positiv verstärkt: „Susi, du hast heute sehr gut gearbeitet. Ich glaube, du hast heute mehr als jeder andere in der Klasse gelernt.“ Diese Aussage wurde aufgrund einer sorgfältigen Diagnose der Arbeitsprozesse der Schüler gemacht. Es zeigte sich, dass es möglich ist, durch die Kombination von Mastery- und Leistungszielen, die Lernfortschritte der Lernenden besser als bei der alleinigen Mastery- oder Leistungsorientierung zu verbessern. Zudem wurde von Linnebrink die hohe Bedeutung der Mastery-Orientierung im Unterricht nachgewiesen. Schüler, die ihre mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten verbessern wollen, sind zufriedener und motivierter im Unterricht und lernen mehr als andere Lernende.

Im nächsten Abschnitt werden die vorherrschenden Unterrichtsbedingungen, didaktische Unterrichtskonzeptionen und Instruktionstheorien im Hinblick auf die Lernprozessorientierung analysiert und eine Möglichkeit der Anleitung der Lernprozessorientierung im Unterricht vorgeschlagen.

Lernprozessorientierung im Unterricht. Wie im Rahmen der TIMSS-Videostudie festgestellt wurde, läuft der Unterricht in Deutschland mehrheitlich fragend-entwickelnd, kleinschrittig ab und fordert die Schüler kognitiv unzureichend heraus (siehe Abschnitt 2.1). Trotz der hohen Bedeutung kognitiv aktivierender Aufgaben für den Kompetenzerwerb werden sie selten im Unterricht, in Klassenarbeiten oder als Hausaufgaben eingesetzt (ebd). Im traditionellen fragend-entwickelnden Unterricht sind Individualisierung, Selbstregulation und Ko-konstruktion kaum möglich. Die in der TIMSS-Videostudie beobachtete Kleinschrittigkeit bei der Aufgabenbearbeitung deutet indirekt darauf hin, dass von Lehrern oft nur das Ergebnis – eine schnelle, richtige Antwort auf die gestellte Frage und das Abschreiben einer gemeinsam entwickelten Lösung von der Tafel – honoriert wird. Individuelle Schwierigkeiten werden häufig übergangen, weil es im fragend-entwickelnden Unterricht nicht möglich ist, auf die Bedürfnisse einzelner Schüler einzugehen. Die Lehrperson kommuniziert zwar mit einzelnen Schülern, sodass für sie der Eindruck entsteht, die Klasse hätte die Aufgabe gelöst. Tatsächlich tragen aber verschiedene einzelne Schüler zum Ergebnis bei. Die Lehrperson kommuniziert mit einem „imaginären Durchschnittsschüler“ (Gudjons, 2007, S. 33)und im Plenum wird eine „kollektive“ Lösung entwickelt (Winnefeld, 1978). Nach einem gelungenen Beitrag lehnen sich Schüler zudem oft zurück und verfolgen die weitere Bearbeitung der Fragestellung mit unzureichender Aufmerksamkeit (Winnefeld, 1978). Folglich verstehen nur wenige Lernende die Erklärung.

Im Unterricht arbeiten Schüler und Lehrer vorwiegend produktorientiert (Breidenstein, 2006, S.215ff). Die erstellten Produkte sind Notizen im Heft, bearbeitete Arbeitsblätter, Tafelbilder und schließlich die Noten der Schüler. Zu betonen ist, dass viele dieser Produkte das Ergebnis der gemeinsamen Anstrengungen der Lehrperson und einzelner Schüler darstellen und nur selten einen für jeden Schüler individuellen Charakter besitzen. In Anbetracht der geschilderten Unterrichtspraxis ist eine von den Lehr-Lernbedingungen losgelöste Implementation der Prozess-Ergebnis-Orientierung in die gängigen Unterrichtformen nicht möglich. Aus diesem Grund wäre es notwendig, andere Lernumgebungen stärker als bisher in den Unterricht zu integrieren.

Theoretisch und empirisch fundierte konstruktivistische Unterrichtsmethoden bieten viel mehr Möglichkeiten für die Entfaltung der Lernprozessorientierung im Unterricht als traditioneller fragend-entwickelnder Unterricht. Zwei solcher Ansätze, die im theoretischen Teil der Arbeit analysiert und im vorherigen Abschnitt aufgegriffen wurden, sind der Cognitive-Apprenticeship-Ansatz von Collins, Brown und Newman und die Unterrichtskonzeption von Aebli et al (Aebli, et al., 1986; Collins, et al., 1989). In diesen Unterrichtskonzeptionen nehmen Beobachtung, Reflexion und Austausch über den eigenen Lernprozess einen wichtigen Platz ein, stehen jedoch nicht im Mittelpunkt der Unterrichtsinszenierung. Dies wäre aber von Vorteil. Die Aktivitäten der Schüler im Unterricht sollen auf Schwierigkeiten und Strategien und somit auf das Lernen selbst konzentriert werden.

Ausgehend von den Bedingungen des individuellen Lernens können an dieser Stelle einige für die Prozess-Ergebnis-Orientierung förderliche didaktisch-methodische Elemente vorgeschlagen werden:

- *Problemorientierung in Form der neuen Aufgabenkultur (vgl. Abschnitt 2.2).* Eine Aktivierung von Lernprozessen, die für die Prozessorientierung die entscheidende Rolle spielt, muss mit Hilfe von anregenden Problemen erfolgen. Wenn die Probleme in einem motivierenden Kontext präsentiert werden und in die lebensnahen Situationen eingebettet sind, bringen sie einen doppelten Nutzen. Sie stimulieren die Lernprozesse im Unterricht und erhöhen zugleich die Wahrscheinlichkeit, dass in realen Lebenssituationen auf das im Fachunterricht erlernte Wissen zurückgegriffen werden kann.
- *Wechsel der Sozialformen.* Ergänzung der Plenumsarbeit durch individuelle Aufgabenbearbeitung und kooperative Lernformen in Tandems und Schülergruppen – z. B. mit einem ko-konstruktiven Austausch in der Gruppe –(Blum, Messner, & Pekrun, 2006; Leiss, Blum, & Messner, 2007; Schukajlow, Blum, et al., 2009), sind ein wichtiges Element der Prozess-Ergebnis-Orientierung. Durch die Variation von Sozialformen wird der Rahmen für unterschiedliche Formen der Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand geschaffen.

- *Schwierigkeiten.* Bei der Aufgabenbearbeitung sollen den Lernenden Schwierigkeiten bewusst werden. Schwierigkeiten bilden einen Ausgangspunkt für die Lernprozesse, die während der Aufgabenlösung vollzogen werden. Über die Schwierigkeiten können zudem erfolgreiche Bewältigungsstrategien im Gedächtnis besser verankert werden. Der Austausch über die Schwierigkeiten ist ein weiterer Aspekt, der die Prozessorientierung verstärken kann. Durch den Austausch ist es möglich zu verdeutlichen, dass Probleme zum Lösen einer Aufgabe gehören und man davor keine Angst haben muss.
- *Strategien.* Beim individuellen Arbeiten, beim Austausch in einer Gruppe oder bei der Reflexion im Plenum soll das besondere Augenmerk auf die Strategien, wie z.B. Zeichnen und Beschriften der Skizze, gelegt werden. Durch die Kopplung von Schwierigkeiten und Strategien bekommen Schüler eine Handlungsgrundlage, mit der ihre Lösungsfähigkeit verbessert werden kann. Die Auswahl der problemorientierten Aufgaben soll aber nicht nur die Einführung der Strategien ermöglichen. Die erlernten Strategien müssen selbständig erprobt und eingeübt werden.
- *Üben als Durcharbeiten*. Die Grundlage lernprozessorientierter Übungen bietet die Konzeption des Durcharbeitens, das von Aebli (1983) vorgeschlagen wurde. Den Kern des Durcharbeitens bildet die Idee einer kontextübergreifenden Beschäftigung mit strukturähnlichen Aufgaben. Durch die vielfältige Betrachtung eines Begriffs oder eines Themas aus unterschiedlichen Perspektiven und durch die Problematisierung des Lerngegenstandes in verschiedenen fachlichen Kontexten wird seine Transferfähigkeit verbessert (Messner, 2008; Reusser, 2001b) und somit werden auch die Flexibilisierung des Wissens und der Fähigkeiten erhöht.
- *Reflexion über den Lernprozess* muss in allen Schulfächern ein fester Bestandteil des Unterrichts sein. Bei der Anleitung der Reflexion durch den Lehrer scheint es weniger fruchtbar, eine allgemeine Frage wie etwa: „Was hast du heute beim Lösen der Aufgabe gelernt?“ zu stellen. Produktiver wäre es vermutlich, die Fragen zum Lernprozess auf die Schwierigkeiten und Strategien zu fokussieren. Mögliche Fragen an Schülern wären dann: „Beschreibe deine Schwierigkeiten beim Lösen der Aufgabe. Wie hast du diese Schwierigkeiten überwunden? Wenn du wieder die gleichen Schwierigkeiten zu bewältigen hast, wie würdest du bei der Aufgabenlösung vorgehen?“

Die Wirksamkeit der vorgeschlagenen Elemente für den Lernprozess muss in weiteren Studien untersucht werden. Einschränkende Faktoren für die erfolgreiche Prozess-Ergebnis-Orientierung können Vorwissen, Alter, kognitive Grundfähigkeiten, Motivation der Schüler und andere Bedingungen sein.

Lernprozessorientierung auf der Schulebene. In die Schulentwicklung sollen nicht nur die Lehrer und die Schulleitung einbezogen werden. Da Schüler die Mitproduzenten von Wissen sind, sollen auch sie an der Weiterentwicklung der Schule beteiligt sein. Eine Möglichkeit die Schüler in diesen Prozess einzubinden ist, Lernverträge mit jedem Einzelnen zu schließen (Häcker, 2003; Spindler, 2002). Durch eine Art Kontrakt zwischen Schüler und Lehrer wird die Selbstbestimmung und somit auch die Verantwortung für das eigene Lernen verstärkt. Die Übernahme der Verantwortung erlaubt eine stärkere Konzentration auf die Lernprozesse im Unterricht und trägt auf diese Weise zur Lernprozessorientierung bei.

Der entscheidende Einflussfaktor bei der Integration der Lernprozessorientierung im Unterricht ist eine kontinuierliche Weiterentwicklung der Lehr-Lernmittel. Diese kann durch eine Kooperation der Lehrer ähnlich wie im SINUS-Projekt gefördert werden (Prenzel & Baptist, 2001). Sowohl unter den Fachkollegen als auch unter den Lehrern einer Klasse erscheint der Austausch zur Lernprozessorientierung sinnvoll. Die Fachlehrer haben die Möglichkeit im Rahmen des Austauschs u.a. über die fachspezifischen Schwierigkeiten und Strategien zu diskutieren. Lehrer, die in einer Klasse unterrichten, können sich untereinander über das Verhalten einzelner Schüler und allgemeine Methoden der Lernprozessorientierung austauschen.

5.4.2 Wissensarten und Aufgaben mit Modellierungseigenschaften

In diesem Unterabschnitt wird gezeigt, dass Modellierungsaufgaben nicht nur in Mathematik eine wichtige Rolle spielen. Angesichts einer Vielzahl von schulischen Einzelfächern mit ihren spezifischen fachdidaktischen Zielen und Instrumenten einerseits und einem problemorientierten Gehalt einer Modellierungsaufgabe andererseits, kann nicht davon ausgegangen werden, dass Modellierungsaufgaben immer einem Fach eindeutig zugeordnet werden können. Bevor dieser Standpunkt konkretisiert wird, soll diskutiert werden, welches Wissen in der Schule vermittelt bzw. erworben werden soll.

Im pädagogisch-psychologischen Bereich wird seit einigen Jahrzehnten intensiv über die Wissensarten in Zusammenhang mit dem Lehrerprofessionswissen diskutiert. Im Wesentlichen werden demnach drei Wissensfacetten unterschieden: pädagogisches, fachliches und fachdidaktisches Wissen (Shulman, 1986). Eine empirische Studie konnte den Einfluss von fachdidaktischem und fachlichem Wissen der Lehrkräfte auf die Leistungsfortschritte ihrer Schüler belegen (Baumert, et al., 2009). Wissensarten, die Schüler erwerben sollen, werden hier implizit, über das Lehrerwissen, bestimmt. Shulman (1986) beschreibt z.B. als eine Teilkomponente des fachdidaktischen Wissens das Wissen über die unterschiedlichen Repräsentation der Inhalte, die im Unterricht behandelt werden. Systematisch wird aber die Frage von Wissensarten, die Schüler erwerben sollen, in dieser Debatte nicht thematisiert.

Ein eigener Ansatz wurde im Rahmen der PISA-Studie ausgearbeitet. Gemäß PISA-Konzeption sind für einen mündigen Bürger Wissen und Kompetenzen notwendig, die im Alltag und Beruf gebraucht werden (vgl. u.a. Baumert & PISA-Konsortium, 2001; Messner, 2003). Mehrere Wissensarten wie z.B. literarisches oder ästhetisches Wissen werden dabei bewusst außer Acht gelassen. Auch, wenn es gemäß den Autoren heißt: „PISA (ist) […] keine Studie, die generelle Aussagen über das Allgemeinbildungsniveau von Schülerinnen und Schüler erlaubt“ (Baumert, Stanat, & Demmrich, 2001, S. 25), beeinflusst sie das Verständnis der Bildung in unserer Gesellschaft und führt zur grundsätzlichen Neuorientierung in den Debatten über die Grundbildung (Messner, 2003).

Wie in dieser Arbeit erläutert wurde, ist es möglich, die Aufgaben Zuckerhut oder Abkürzung auch im Physikunterricht zu behandeln. Die Arten der Bewegung einer Gondel oder eines Autos, sowie die Begriffe Durchschnittsgeschwindigkeit und Beschleunigung würden dabei stärker als im Mathematikunterricht in den Vordergrund treten. Aufgrund des fächerübergreifenden Charakters von Modellierungsaufgaben wird bei der Vorstellung von Beispielen für Modellierungsaufgaben auf den Ansatz von Messner, Rumpf und Buck (1997) über die unterschiedlichen Wissensarten zurückgegriffen (siehe die Weiterentwicklung dieser Konzeption bei Messner, 2009). Den Hintergrund dieses Ansatzes bildet die Idee, dass für eine umfassende Bildung alle fünf Wissensarten notwendig sind. Als gebildet kann also nicht jemand gelten, dem ein Wissenstyp vollständig fehlt.

Die Autoren unterscheiden folgende fünf Wissensarten:

1. das logisch-mathematische Strukturwissen,
2. das erklärende Wissen der modernen Natur- und Sozialwissenschaften,
3. das verstehend-hermeneutische Wissen der Geisteswissenschaften,
4. das lebenspraktische Umgangswissen sowie
5. das ästhetische Wahrnehmungs- und symbolhafte Gestaltungswissen.

Die Aufgaben Zuckerhut, Abkürzung und Regenwald gehören zu dem ersten Wissenstyp. Ihre Bearbeitung erfordert die Benutzung von logisch-mathematischem Strukturwissen, das bei der Lösung von gestellten Problemen herangezogen werden muss. Dieses Wissen repräsentiert z.B. der Satz des Pythagoras oder der Zusammenhang zwischen der Zeit und dem zurückgelegten Weg bei der konstanten Geschwindigkeit.

Eine zweite Art des Wissens beschreibt und erklärt Phänomene der Naturwissenschaften und des Sozialwesens. Die Phänomene werden an einzelnen Fällen untersucht, mit dem Ziel eine Gesetzmäßigkeit zu entdecken und sie mit den bestehenden Theorien in Verbindung zu bringen. Als Ergebnis stehen z.B. das Newtonsche Gravitationsgesetz in den Naturwissenschaften oder die Effektivität der Methode des „reziprokes Lehren“ („reziprocal teaching“) in den Sozialwissenschaften (Palincsar & Brown, 1984). Die Phänomene werden Schülern im Unterricht vorgeführt oder man lässt sie die Erscheinungen der Natur in eigenständiger Arbeit entdecken. Anschließend werden die Wege, die die Wissenschaft seinerzeit gegangen ist, – Hand in Hand mit der Lehrperson – in einer didaktisch-methodisch vereinfachten Variante nachgezeichnet. Eine Aufgabe mit Modellierungseigenschaften, deren Lösung das Wissen über die Phänomene der Naturwissenschaften erfordert, ist unten abgebildet:

Drei Tassen

Maritas Vater beschwert sich gelegentlich, dass sein Tee sehr schnell kalt wird. Deswegen möchte Marita ihm zum Geburtstag eine neue Teetasse schenken. In einem Laden findet sie eine Tasse und zwei Teebecher, in die alle etwa gleich viel Tee passt.

Sie kauft den Becher rechts in der oberen Reihe. Warum hat sie ihn ausgewählt? Begründe deine Wahl!

Abbildung 55. Aufgabe Drei Tassen

Bei der Lösung der Aufgabe Drei Tassen muss zuerst das Situationsmodell konstruiert werden. Vereinfacht dargestellt, besteht das Situationsmodell aus der Handlung des Akteurs (Marita), die in einem Laden eine von drei Teetassen kaufen möchte. Die Frage lautet, warum sie den Becher rechts in der oberen Reihe ausgewählt hat. Im nächsten Schritt wird das Situationsmodell präzisiert und vereinfacht. Dabei werden die Einflussfaktoren identifiziert, die die Entscheidung von Marita beeinflusst haben können. Da die Temperatur des Tees in der Aufgabe als Kaufgrund erwähnt wurde, kann angenommen werden, dass diese Bedingung die entscheidende Rolle bei der Wahl des Teebechers gespielt hat. Durch den Vorgriff auf das physikalische Wissen, kann daran erinnert werden, dass die Geschwindigkeit der Wärmeabgabe vor allem durch die Form der Tasse und die Wärmeeigenschaften des Tassenmaterials bestimmt wird. Das Foto gibt Hinweise darauf, dass der untere Becher aus Edelstahl und die anderen aus Keramik sind und dass die beiden Becher und die Tasse etwa die gleiche Wandstärke haben. Aus dem Realmodell kann nun das physikalische Modell gebildet werden. Im Mittelpunkt dieses Modells stehen die Eigenschaften, die die Wärmeabgabe beeinflussen. Die Anhaltspunkte für die Bestimmung dieser Eigenschaften liefert zum einen das Wissen über das Modell zum Zusammenhang zwischen der Wassertemperatur und der Bewegung von Wassermolekülen. Dieses Erklärungswissen hilft die linke Tasse in der oberen Reihe aufgrund ihrer Form auszuschließen. Die „warmen“, energiereichen Wassermoleküle entweichen aus dieser Tasse besonders schnell und der Tee wird hier kalt. Zum anderen sind es Wissen zur Wärmübertragung von unterschiedlichen Materialien. Da der Stahl schneller als die Keramik die Wärme transportiert, wird der Tee im unteren Becher durch die Wärmeabgabe schneller als im oberen Becher kalt. Dieses Ergebnis kann jetzt anhand der Gegebenheiten der Situation validiert werden. Sind die Annahmen über die gleiche Wandstärke von abgebildeten Bechern realistisch? Wird in allen Edelstahlbechern der Tee schnell kalt? Welche weiteren Faktoren können bei der Wahl einer Tasse eine Rolle spielen? Diese und andere Fragen können empirisch durch einen Versuch überprüft werden. Die Überlegungen zu einer „optimalen“ Tasse für die kalte Jahreszeit können die Diskussion zu der Aufgabe anreichern und die mehrfache Auseinandersetzung mit dem erworbenen Erklärungswissen bewirken. Oft hat das erklärende Wissen der Natur- und Sozialwissenschaften die „wenn …, dann …“ Form: Wenn der Tee in einer Tasse wärmer als die umgebende Luft ist, dann wird er die Wärme abgeben.

Das erklärende Wissen ist oft ein dominierender Baustein in der Schule, der aber nur einen Teil des Gesamtwissens abbildet. Im Mittelpunkt des dritten Wissenstyps steht der Erwerb von Kenntnissen über die persönlichen und sozialen Kontexte der Realität.

In der Wissensart verstehend-hermeneutisches Wissen der Geisteswissenschaften, werden persönliche und gesellschaftliche Gegebenheiten gedeutet und im Zusammenhang mit ihrer kulturellen Eingebundenheit in die Realität interpretiert. Anstelle der Gesetzmäßigkeiten werden dabei die Erfahrungen einzelner Menschen, ihr Zusammensein oder auch die Sinnhaftigkeit des Lebens zum Gegenstand der Analyse.

Ein Beispiel einer Aufgabe mit Modellierungseigenschaften kann die Frage darstellen: Warum ist 1989 die Berliner Mauer gefallen? Für die Bearbeitung dieser aus dem geschichtlichen Kontext stammender Frage ist es notwendig, unterschiedliche Aspekte der damaligen Situation wie schwierige Wirtschaftslage in der DDR, Veränderungen in anderen sozialistischen Ländern, anhaltende Proteste der DDR-Bürger und viele andere Faktoren in ihrer Interdependenz zu betrachten. Die Wechselwirkung relevanter Faktoren soll die Umbruchzeit in vereinfachter Weise modellieren und so die gesellschaftlichen Zusammenhänge nachbilden. Die

Vielzahl von Einflussfaktoren und ihre gegenseitige Abhängigkeit erfordert die Konstruktion anspruchsvoller Modelle, die für die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben charakteristisch sind.

In dem vierten Wissenstyp wird das lebenspraktische Umgangswissen erworben. Dieses Wissen begleitet uns im Alltag und Beruf vom Erwachen bis zum Einschlafen und steht manchmal sogar im Widerspruch zu den anderen Wissensarten. So erscheint uns ein Metallgegenstand kälter als ein Stoffgegenstand auch wenn die beiden im gleichen Raum stehen und somit auch die gleiche Temperatur haben. In der Umgangssprache wird gesagt, dass der Metallgegenstand kälter sei. Tatsächlich handelt es sich dabei um unterschiedlich starke Wärmeflüsse, wodurch die Gegenstände sich kälter oder wärmer anfühlen. In diesem Fall steht das erklärende Wissen aus dem naturwissenschaftlichen Bereich im Widerspruch zu dem lebenspraktischen Umgangswissen. Solches Wissen hilft uns aber im Alltag zurechtzukommen. So wissen wir z.B., dass bei in der Kälte Metallgegenstände gar nicht oder äußerst vorsichtig berührt werden sollten. Dieses Wissen kann uns z.B. helfen, Verletzungen zu vermeiden und bildet dadurch einen wichtigen Teil des Wissens eines Menschen. Das Umgangswissen erfasst unterschiedliche Aspekte unseres Lebens wie die Eigenschaften der Stoffe oder Flüssigkeiten, denen wir im Alltag begegnen, Wirkungen von Heilmitteln auf die eigene Gesundheit, Wettervorhersage oder Kälteschutz. Insbesondere der Umgang mit Technik und die bewusste Ernährung sind seit Jahrzehnten Wissensbereiche mit einem kontinuierlichen Zuwachs am lebenspraktischen Umgangswissen.

Eine fünfte Wissensart ist das ästhetische Wahrnehmungs- und symbolhafte Gestaltungswissen, das an einem folgenden Bespiel veranschaulicht werden kann (siehe Bosse, 1992; Messner, 2009). Die Schüler eines Oberstufenkurses haben sich die Aufgabe ausgewählt, die Beuyssche Rauminstallation „Das Rudel“ in der Aula ihres Gymnasiums in Originalgröße nachzubauen. Dabei mussten die ästhetischen Wirkungen des bekannten Kunstwerks in einem neuen Raum untersucht und das Kunstwerk selbst mit anderen Mitteln rekonstruiert werden. Die Bewältigung einer solchen Aufgabe erfordert wie auch die Lösung einer mathematischen Modellierungsaufgabe anspruchsvolle Konstruktionsleistungen. Der Modellierungsprozess, der sich bei der Bearbeitung einer künstlerischen Aufgabe vollzieht, besteht in der Konstruktion von verschiedenen Modellen. Wie auch das Realmodell beim Bearbeiten von mathematischen Modellierungsaufgaben beinhalten die künstlerisch-ästhetischen Modelle Annahmen. Solche Annahmen beziehen sich auf den Einfluss einzelner Elemente der Installation und des Gesamtkunstwerks auf einen Beobachter. Die Schüler haben u.a. versucht die im klassischen Kunstwerk benutzten Schlitten durch Fahrräder und die Taschenlampen durch Kerzen zu ersetzen. Solch ein Modell des Kunstwerks hat aber nicht ähnlich auf die Beobachter gewirkt. Dies zeigte, dass die Annahme über die Austauschbarkeit von Schlitten durch Fahrräder nicht aufgegangen ist. Weitere Modelle mussten ausprobiert werden. Für die Konstruktion der Rauminstallation wird zudem künstlerisches Wissen wie z.B. die Kenntnisse über die Wirkung verschiedener Farbenkombinationen auf die Wahrnehmung gebraucht. Zugleich wird dieses Wissen während der praktischen Arbeit erworben und weiter ausgebaut.

Die aufgeführten Beispiele zeigen die Bedeutung der Modellierungsprozesse für die allgemein-didaktische Diskussion. Eine aktive Konstruktion von Modellen stellt eine Aktivität dar, die in verschiedenen Wissensbereichen mit unterschiedlichen Mitteln vollzogen wird. Es zeigt sich, dass Modellieren im Mathematikunterricht erst einen Einstieg in das Thema Modellierungsaufgaben darstellt. Die Modellierungsaktivitäten sind in allen Wissensformen möglich und sogar notwendig. Ein bewusster Umgang mit diesem Aufgabentyp wäre im Unterricht wünschenswert.

In einzelnen Fächern müssen unterschiedliche Schwerpunkte beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben gesetzt werden. Gemeinsam ist der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben in *allen* Wissensformen die Anforderung, lebenspraktisches Umgangswissen zu aktivieren. Diese Wissensform erlangt durch die neue Aufgabenkultur und ihren Lebensbezug eine Sonderstellung beim Lösen von Modellierungsaufgaben. Bei der Bearbeitung der mathematischen Modellierungsaufgabe Tanken (Leiss, 2007), in der es um zwei alternative Möglichkeiten zu tanken geht: teurer an einer Tankstelle um die Ecke oder günstiger an einer 20 km entfernten Tankstelle in Luxemburg, ist z.B. das notwendige lebensweltbezogene Umgangswissen über den Kraftstoffverbrauch und das Tankvolumen eines Autos notwendig.

Soll die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben in verschiedenen Fächern implementiert werden, müssen unterschiedliche Fachkulturen berücksichtigt werden. Diese sind durch fachbezogene theoretische, sprachliche und ästhetisch-symbolische Mittel gekennzeichnet. Eine Didaktik, die sich mit der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben in mehreren Bereichen befasst, soll sich auf die vielfältigen Didaktikformen einlassen und fachspezifische Aspekte (z.B. literarische Sprache, Interpretationen etc.) aufnehmen. Eine Beispielaufgabe, die symbolische Mittel völlig anders als die Mathematik nutzt, ist die Aufforderung, einen bekannten Ausdruck von Goethe (1825) zu verstehen: „Was man schwarz auf weiß besitzt, kann man getrost nach Hause tragen“. Umgangssprachlich wird dieser Satz oft mit dem Teilausdruck „schwarz auf weiß“ in Verbindung gebracht, der als „gedruckt“ schon lange bekannt und in dieser Bedeutung weiterhin verwendet wird. Ein anderes Verständnis dieses Satzes erschließt sich durch die Analyse des Kontextes, in dem Goethe ihn verwendet, und durch die Beachtung der autobiographischen Bezüge des Autors. Gemeint ist der Kaufvorgang, der mit einer Unterschrift von beiden Seiten besiegelt werden muss. Die letztgenannte Interpretation des Ausdrucks von Goethe erscheint unter dem Einbezug dieser Gegebenheiten wahrscheinlicher. Aber auch die andere Deutung ist sinnvoll und diskussionswürdig. An diesem Beispiel wird deutlich, dass die Bandbreite der richtigen Antworten in den nichtmathematischen Fächern viel breiter ist, und dass auch solche Aspekte bei der Implementation von Modellierungsaufgaben beachtet werden sollen.

Weitere Studien der Bearbeitung von Aufgaben mit Modellierungseigenschaften im Kontext der neuen Aufgabenkultur erscheinen deshalb als eine wichtige Weiterführung der vorliegenden Arbeit.

6 Zusammenfassung der Arbeit unter allgemeindidaktischer Perspektive

Der vorliegenden Arbeit liegt die Konzeption einer lernprozessorientierten Didaktik zugrunde. Damit wird beim Umgang mit Schwierigkeiten, die Schüler beim Bearbeiten von anspruchsvollen Modellierungsaufgaben haben, sowie zur Aktivierung ihres selbständigen Problemlöseverhaltens im Anschluss an den aktuellen Stand der Lehr-Lernforschung eine didaktische Strategie eingeschlagen. Diese Strategie verspricht nicht nur für den Bereich der Mathematik, sondern auch für sachstrukturell ähnliche Unterrichtsinhalte Vorteile für die Lernförderung und damit für die Effektivität des Unterrichts. Erreicht werden soll dies durch eine bessere strategische Durcharbeitung des Unterrichts, der gleichermaßen das Ausschöpfen des Potentials für die Selbststeuerung des Lernens bei den Schülern sowie die dafür notwendige Weiterentwicklung des diagnostischen und unterstützenden Handelns von Lehrerinnen und Lehrern betont. Im Folgenden wird eine solche allgemeindidaktisch relevante Perspektive – als Ertrag der vorangegangenen Untersuchungen – in 12 einzelnen Elementen skizziert. Der Schwerpunkt der Arbeit liegt im Bereich der Mikrodidaktik, wie er durch die unmittelbare Begegnung der Schüler mit unterrichtlichen Aufgaben und deren inhaltlichen Anforderungen konstituiert wird sowie durch die bei ihrer Bearbeitung erfolgenden Interaktionen mit Mitschülern und Lehrpersonen. Damit kann diese Arbeit vor allem für situative Aspekte von größeren methodischen Organisationsformen Geltung beanspruchen, wie Projekt- und Planarbeit, Freies Lernen, Werkstattarbeit u.a. Um solche didaktischen Großformen mit ihren komplexen Lehr- und Lernverläufen im Sinne einer lernprozessorientierten Didaktik zu entwickeln, sind weitere Forschungen notwendig.

Element 1: Outputorientierung des Unterrichts

In der Konzeption der Outputorientierung (Klieme, et al., 2003) werden die Lernprozesse der Schüler in den Mittelpunkt des Unterrichts gestellt. Dahinter steht das Verständnis der Schüler als Mitproduzenten des schulischen Lernens, eine Sichtweise, die zuletzt insbesondere Fend betont hat (1998) und die über ihn in das „Angebot-Nutzungs-Modell der Wirkungsweise des Unterrichts“ von Helmke (2003, S. 41 ff.) Eingang gefunden hat. Mit der Outputorientierung konzentriert sich der didaktisch-methodische Prozess nicht nur auf die Ergebnisse des Lernens der Schüler, sondern auch auf die Lernprozesse selbst. Dementsprechend wird den Schwierigkeiten, die Schüler unterschiedlicher Kompetenzstufen bei der Bearbeitung und Lösung von Modellierungsaufgaben haben, in der vorliegenden Arbeit eine vorrangige Aufmerksamkeit eingeräumt. Sie werden als Schlüsselstellen betrachtet, an denen sich entscheidet, ob Schüler ein tieferes Verständnis für die kognitiven Anforderungen anspruchsvoller Aufgaben entwickeln und damit aus eigener Einsicht die Schwierigkeiten überwinden können oder den Lösungsprozess abbrechen bzw. unverstandene Aufgabenlösungen übernehmen. Outputorientierung in einer lernprozessorientierten Didaktik bedeutet also, den Schüler zum Mitakteur eines vollständigen Denkweges von der Problemstellung bis zur Problemlösung werden zu lassen.

Die moderne Gehirnforschung bestätigt die Notwendigkeit der Eigenproduktion des „Lösungsoutputs“ durch die Schüler. „Wissen“, so Roth (2009, S. 58), „kann nicht übertragen werden, es muss im Gehirn eines jeden Lernenden neu geschaffen werden“. Die Schüler produzieren auf Grund ihres Vorwissens neues Wissen im Lernprozess und erzeugen, stimuliert durch Lehraktivitäten, so den angestrebten Output.

Element 2: Neuorganisation des „didaktischen Inputs“: Konsequenzen für die Aufgaben der Lehrperson

Seit Shulman (1986) hat es sich eingebürgert, die professionellen Kompetenzen von Lehrpersonen in den drei Wissensformen des fachlichen, fachdidaktischen und pädagogischen Wissens zu beschreiben. Im inhaltlichen Lernen hat dabei meist die fachdidaktische Kompetenz von Lehrern die Leitfunktion. In jeder Lernsituation realisieren sich aber zugleich fachliche und pädagogische Kompetenzen. Wenn von Outputorientierung des Unterrichts gesprochen wird, bedeutet dies keineswegs, dass „Input“ in Form des Lehrerhandels überflüssig wäre. Es gilt jedoch, alle Input-Maßnahmen von den Lernprozessen der Schüler her zu denken. Alle Interventionen, die Lehrpersonen aufgrund ihres fachdidaktisch-fachlich-pädagogischen Wissens ergreifen – vom Vortragen über das „modeling“, bei dem die Lehrperson die erlernende Tätigkeit vormacht bis zur Organisation der Eigentätigkeit der Schüler – sollen von der Logik des Schülerlernens her bestimmt werden. Dies bedeutet u.a., dass neben den nach wie vor relevanten direkten Interventionsformen der Darbietung und Erarbeitung sich wesentliche Aufgaben auf den indirekten Bereich der lernprozessbegleitenden Arbeit der Lernbeobachtung und Lerndiagnose sowie der Lernberatung und -evaluation verlagern.

Element 3: Schaffung von Lernumgebungen als Organisationsform didaktischen Handelns

In einer lernprozessorientierten Didaktik konzentrieren sich die didaktischen Strategien nicht – wie in den Konzeptionen eines vorwiegend methodenorientierten Vorgehens – auf das direktive Lehrerverhalten. Kompetenzorientierte Lehrerprofessionalität umfasst vielmehr die

Gesamtheit aller dem Unterrichtsziel dienenden direkten und indirekten Maßnahmen. Die Aufgaben von Lehrpersonen werden demgemäß in der Schaffung von „Lernumgebungen“ gesehen (Collins, et al., 1989; Friedrich & Mandl, 1997), in denen die Lernprozesse der Schüler – u.a. auch ihre Schwierigkeiten und Strategien – in den Mittelpunkt gestellt werden (siehe die schematische Darstellung aus Friedrich & Mandl, 1997 im Unterabschnitt 5.2.3).

Element 4. Neue Aufgaben als Vehikel für die Realisierung der Schülerselbständigkeit

Aufgaben sind ein wichtiges Mittel des Unterrichts. Sie regen Lernprozesse an und stimulieren dadurch den Wissens- und Fähigkeitserwerb. Durch die Wahl geeigneter Aufgabenstellungen können Aktivität und Verantwortung von der Seite der Lehrintentionen auf die Seite der Schüler verlagert werden. Die Auswahl solcher Aufgaben für verschiedene Unterrichtsphasen stellt eine anspruchsvolle Tätigkeit dar, die im Hinblick auf die angestrebten Kompetenzen erfolgen soll. Eine besondere Bedeutung gewinnt dabei die neue Aufgabenkultur (vgl. Abschnitt 2.2). Die neue Aufgabenkultur spiegelt die Bestrebungen wider, die Lebenswelt in den praktischen Unterricht stärker einzubeziehen (vgl. den Begriff „Literacy“ bei PISA Baumert, et al., 2001; OECD, 2004). Diese Tendenz kann als Gegenpol zur fachlichen Engführung verstanden werden, in der das Wissen ohne praktischen Bezug erworben wird und dadurch oft für die überwiegende Mehrheit der Schüler „träge“ (Renkl, 2001) bleibt. Aus Sicht einer lernprozessorientierten Didaktik schaffen neue Aufgaben auch den Spielraum, Ansprüche der Selbstregulation einzulösen. Die Selbständigkeit der Schüler wird dabei weiterhin fachbezogen realisiert. Innerhalb des Fachs werden aber die Spielräume durch die neuen Aufgaben erheblich erweitert. Individuelle Lösungswege und -strategien sind nun nicht nur erlaubt, sondern sogar ausdrücklich erwünscht. Weitere Merkmale der neuen Aufgaben wie Offenheit, ihr Lebens- und Lebensweltbezug (siehe weitere Merkmale bei Messner, 2004a) können die Motivation von Schülern positiv beeinflussen und so die Lernprozesse im Sinne kognitiver Aktivierung voranbringen.

Element 5. Modellierungsaufgaben: zentrales Element der neuen Aufgabenkultur

Eine besondere Rolle im Rahmen der neuen Aufgabenkultur kommt den Modellierungsaufgaben zu. Ihre Bearbeitung fördert die Entwicklung anspruchsvoller Fachkompetenzen wie z.B. Argumentieren und Begründen (Blum, Drüke-Noe, et al., 2006). Modellierungsaufgaben haben ihren Namen aufgrund des Sachverhalts, dass zu ihrer Lösung konstruktive Aktivitäten, in der Regel Modellbildungsprozesse, notwendig sind (vgl. Abschnitt 3.1 und Unterabschnitt 5.2.2). Durch die unterschiedliche Komplexität verschiedener Lösungswege ist es Schülern mit unterschiedlichem Vorwissen möglich, sich mit Modellierungsaufgaben produktiv auseinanderzusetzen. Sie gewähren zudem Handlungsräume bei der Aufgabenbearbeitung, die für Verstehensprozesse notwendig sind, und schaffen so neue Kristallisationspunkte für die Selbständigkeit der Schüler. Die empirischen Analysen der Lösungsprozesse von Schülern zeigen, dass fachlich anspruchsvolle Modellierungsaufgaben die kognitive Aktivität von Lernenden in hohem Maße stimulieren können. Deshalb sollen Modellierungsaufgaben im lernprozessorientierten Unterricht häufiger eingesetzt werden. Eine schülergerechte Passung weisen die Modellierungsaufgaben jedoch nur dann auf, wenn sie an das Vorwissen der Schüler anknüpfen. Bei guten Schülern ist die Passung der Aufgaben oft gegeben. Schwächere Schüler werden ohne Lehrerunterstützung bei der Bearbeitung der Modellierungsaufgaben manchmal überfordert.

Element 6. Stimulierung von anspruchsvollen Austauschprozessen in kooperativen Lehr-Lern-Arrangements

Man kann verschiedene Modi unterscheiden, Aufgaben zu stellen. Auch im Vortrag können kognitiv anregende Aufgaben für die individuelle Bearbeitung angeboten werden und die Lernprozesse stimulieren. Für eine kooperative Bearbeitung sollten Aufgaben gestellt werden, welche die Interdependenz von Gruppenteilnehmern erhöhen. Wenn die Gruppe bei der Lösung einer Aufgabe auf die Arbeit jedes Einzelnen angewiesen ist, kooperieren die Schüler stärker und setzen sich intensiver mit den Lerninhalten auseinander (Slavin, et al., 2003). Die Interdependenz bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben kann über den Realitätsbezug gefördert werden. Da bei der Lösung von Modellierungsaufgaben unterschiedliche Wissensarten gebraucht werden, können Schüler verschiedener fachlicher Leistungsniveaus durch ihre Alltagserfahrungen zur Lösung einer Modellierungsaufgabe beitragen (z.B. Einschätzung des Volumens einer Flasche bei der Bearbeitung der Aufgabe Regenwald). Zugleich können bei der kooperativen Bearbeitung von Modellierungsaufgaben intensive fachbezogene Diskussionen entstehen, die eine tiefe Auseinandersetzung mit dem Lerninhalt ermöglichen. Empirische Untersuchungen bestätigen die höhere Wirksamkeit der kooperativen Lernformen mit anschließenden Reflexionsphasen im Plenum im Vergleich zum traditionellen fragend-entwickelnden Unterricht mit Phasen individueller Arbeit der Schüler (vgl. Leiss, et al., 2008; Schukajlow, Blum, et al., 2009).

Element 7. Lernprozessorientierte kooperative Gruppenarbeit – Einzelarbeit und Ko-konstruktion im Wechsel

Die Ko-konstruktion wird lehr-lerntheoretisch als Basis einer persönlichen und kulturellen Entwicklung eines Individuums angesehen: „The basis of personal development and enculturation […] is not the socially isolated construction of knowledge, but its co-construction in a social and cultural space“ (Reusser, 2001a, S. 2058). Charakteristische Merkmale der ko-konstruktiven Gruppenarbeit sind neben der individuellen Verantwortung jedes Einzelnen für den Lernprozess auch das Verstehen der Interaktionsphasen primär als gegenseitiger Austausch und erst sekundär als Hilfen eines Stärkeren für einen Schwächeren. Durch kooperative, ko-konstruktive Zusammenarbeit wird der Lernprozess eines Schülers „zurückgespiegelt“ und dadurch bewusst gemacht. Inhaltliche Schwerpunkte des Austauschs unter Interaktionspartnern bilden Schwierigkeiten und Strategien, die in den Einzelarbeitsphasen durch jeden Gruppenteilnehmer individuell erlebt werden. Zum eigenständigen Aufbau vom Wissen ist deshalb aus Sicht einer lernprozessorientierten Didaktik ein selbstgesteuerter Wechsel von ko-konstruktiven und individuellen Arbeitsphasen notwendig. Auf diese Weise werden Wissensstrukturen sukzessiv erweitert, deren „Lücken“ (Aebli, 1983, S. 285 ff.)geschlossen und dadurch Problemlöseprozesse vorangetrieben. Für leistungsschwächere Schüler erscheint die Heterogenität innerhalb einer Schülergruppe beim ko-konstruktiven Austausch von Vorteil, da Verhaltensmodelle, welche die leistungsstärkeren Lernenden im gegenseitigen Austausch offen legen, unmittelbar beobachtet und nachgeahmt werden können.

Element 8. Kenntnis der Schüler-Schwierigkeiten und -Strategien als Grundlage von lerndiagnostischen Aktivitäten im Unterricht

Bei der Bearbeitung von kognitiv anspruchsvollen Aufgaben brauchen Lernende seitens der Lehrperson eine Unterstützung auf der Inhaltsebene beim Erwerb elementarer arithmetischer Operationen und auf einer lernstrategischen Ebene zur Aktivierung von Lernstrategien. Da Schwierigkeiten im Lernprozess von den vorhandenen Wissensstrukturen der Schüler abhängen (siehe Stern, 2004), verläuft der Wissenserwerb hochgradig individuell und bedarf einer personifizierten Unterstützung. Die Basis für adaptive Lehrerinterventionen bilden lerndiagnostische Aktivitäten, die sich auf der Grundlage des Wissens über die Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden entfalten. Vertiefte Kenntnisse über die Schüler-Schwierigkeiten und -Strategien können aber nicht einfach vorausgesetzt werden. Sie müssen durch fachdidaktische Analysen des Problemraums einer Aufgabe sowie durch die Beobachtung von Bearbeitungsprozessen der Schüler mit einer anschließenden Reflexion erworben werden. Hierzu sollten Lehrpersonen theoretische Analyseinstrumente, wie z.B. das Modell der sequentiellen Bearbeitung von Modellierungsaufgaben (vgl. Unterabschnitt 3.1.5), bekannt sein und praktische Erfahrungen im Umgang mit Schülerschwierigkeiten und Strategien im Unterricht gesammelt werden. Eine zusätzliche Herausforderung bei der Einschätzung von Schwierigkeiten und Strategien stellt die Heterogenität von Lerngruppen dar. Die Ergebnisse der Arbeit deuten darauf hin, dass Schwierigkeiten und Strategien der Schüler von ihrem Leistungsniveau abhängig sind. Bei ihrer Diagnose sollen Lehrpersonen Gemeinsamkeiten und Unterschiede in Lernprozessen der Schüler erkennen und Interventionen auf dieser Grundlage planen. Wie die lerndiagnostischen Aktivitäten und prozessbezogenen Interventionen in der Praxis realisiert werden können, muss weiter erforscht werden.

Element 9. Prozessbezogenes Feedback

Das Feedback kann sich im lernprozessorientierten Unterricht nicht nur auf das Ergebnis beschränken. Die Rückmeldungen zum Lösungsweg und allgemein zum Lernprozess sind für den Aufbau von Wissensstrukturen unbedingt notwendig. Durch unterstützende Rückmeldungen zu eigenen Schwächen können Lernprozesse effektiver gestaltet werden (siehe hierzu Ergebnisse der Expertiseforschung bei Ericsson, Krampe, & Tesch-Römer, 1993; vgl. auch Hattie & Timperley, 2007). Lehrer wie auch leistungsstärkere Schüler verfügen gemäß dieser Konzeption über eine Expertise in einem bestimmten Fachgebiet, die sie in Form von Feedback an die anderen Lernenden weitertragen können. Weitere Voraussetzungen eines effektiven Feedbacks sind u.a. (1) das Zurückhalten eigenen Wissens, (2) Verfolgen der Lösungswege der Schüler, statt eigene Lösungen aufzuoktroyieren (Leiss, et al., 2006), (3) Begleitung der Schüler auf dem Weg in die Selbständigkeit im Sinne des „fadings“ (Collins, et al., 1989). Die vorliegende Untersuchung deutet darauf hin, dass Schüler nur eingeschränkt ein prozessbezogenes Feedback an ihre Mitschüler geben können. Dies hängt vermutlich mit dem Mangel an fachdidaktischem und fachlichem Wissen von Schülern zusammen. Die Interventionen von Lehrpersonen müssen an dieser Stelle einen Ausgleich leisten.

Element 10. Einübung von Strategien an strukturähnlichen Aufgaben und in variierten Kontexten

Effektive Strategien sollen nicht nur eingeführt, sondern an variierten Kontexten eingeübt werden. Dadurch können die Vor- und Nachteile einer Strategie kennengelernt und ihre Abrufbarkeit, Flexibilität und Adaptivität gesteigert werden. Wie die vorliegende Untersuchung von Lösungsprozessen der Schüler gezeigt hat, sind Schülern wirksame Strategien zwar oft bekannt, werden aber während der Bearbeitung nicht immer aktiviert. Zentral für die Flexibilisierung strategischer Vorgänge erscheint neben den erprobten Strategietrainings (vgl. u.a. Kramarski, et al., 2002; Leutner & Leopold, 2003; Perels, Schmitz, & Bruder, 2003) die Konzeption des Durcharbeitens (Aebli, 1983), die auch unter dem Stichwort „intelligentes Üben" bekannt ist. Ein neuer Begriff oder eine neue Operation soll demnach an strukturähnlichen Aufgaben und in variierten Kontexten durchgearbeitet werden (Messner, 2008; Reusser, 2001b). Dabei „Sollen Begriffe und Operationen von den Lernenden unter leicht veränderten situativen Bedingungen mehrfach rekonstruiert werden, sodass – unter den variierenden Bedingungen – die allgemeine Struktur eines Inhalts – sein kognitives Gerüst – immer klarer hervortreten kann" (Messner, 2008).

Element 11. Verschiedene Wissensformen in der neuen Aufgabenkultur

Die Analyse von Modellierungsaktivitäten unter allgemeindidaktischer Perspektive führt zu einer erweiterten Sichtweise auf die neue Aufgabenkultur. Die Herausforderung an die neue Aufgabenkultur wird durch die Konzeption der Wissensformen deutlich (Messner, 2009; Messner, et al., 1997). Über die neuen Aufgaben findet das lebensbezogene Alltagswissen einen Weg in den Unterricht in Form von Lernvoraussetzungen, die die Schüler besitzen müssen. Zugleich wird aber dieses Wissen bei der Bearbeitung der Modellierungsaufgaben im Fachunterricht mittransportiert. Durch den stärkeren Einbezug des Alltagswissens in den Unterricht gewinnt die schulische Bildung für die Lernenden an Attraktivität. Deswegen ist diese Entwicklung insgesamt als positiv einzuschätzen. Bei den Modellierungsaufgaben, die im Rahmen dieser Arbeit betrachtet wurden, steht das mathematisch-logische Wissen im Vordergrund. Es sind aber auch Modellierungsaufgaben denkbar, die andere Wissensformen stärker betonen (siehe Beispiel im Unterabschnitt 5.4.2). Die Implementation der neuen Aufgabenkultur in den Unterricht erfordert jedoch ein Umdenken bei der Konzeptualisierung und Evaluation von fachspezifischem Wissen. Da die Gewichtung des Alltagswissens im Fachunterricht durch die Implementation der neuen Aufgaben ansteigt, wird die Überprüfung der erzielten Lernfortschritte schwieriger. Dies kann folgendes Beispiel veranschaulichen. Bei der Bearbeitung der Aufgabe Zuckerhut haben zwei Schüler ausführlich diskutiert, wie der Ausdruck „ausgedehnte Ebene" verstanden werden kann. Solches Wissen trägt zur fachübergreifenden Schulbildung bei, hilft aber weder in der nächsten Klassenarbeit noch bei einer fachkompetenzorientierten Leistungsmessung in Mathematik bessere Testergebnisse zu erreichen.

Element 12. Künftige Forschungsfelder einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur

Abschließend werden Themenkomplexe genannt, die im Rahmen einer lernprozessorientierten Didaktik und im Kontext der neuen Aufgabenkultur weiter erforscht werden sollten:

(1) Notwendig ist die Untersuchung von Schüler-Schwierigkeiten und -Strategien bei der Bearbeitung von mathematischen Modellierungsaufgaben unter Einbezug von Lehrpersonen im Labor und im Unterricht.

(2) Erforderlich erscheint auch eine Ausweitung von Studien auf nicht-mathematische Modellierungsaufgaben mit dem Ziel, eine Didaktik der neuen Aufgabenkultur auf eine breitere fachliche Basis zu stellen.

(3) Es gilt, Lernumgebungen zu entwickeln und empirisch zu evaluieren, die eine Prozess-Ergebnis-Orientierung auf direktem und indirektem Weg im Klassenraum realisieren.

(4) Eine weitere Forschungsaufgabe ist die Entwicklung und Evaluation von Unterrichtsdesigns – angefangen mit der Untersuchung von Kompetenzen der Lehrpersonen bis hin zur Lehrerprofessionalisierung–, in denen die neue Aufgabenkultur in den Mittelpunkt des fachlichen Lernens gestellt wird.

(5) Für die Lehrerprofessionalisierung ist es auch notwendig, ein fundiertes Wissen darüber zu entwickeln, wie Lehrpersonen motiviert werden können, innovative Unterrichtselemente in ihr methodisch-didaktisches Repertoire zu übernehmen und sie in den Alltagsunterricht zu integrieren. Die Lehrpersonen dürfen dabei nicht allen gelassen werden. Sie müssen bei der Entwicklung einer lernprozessbezogenen Unterrichtskultur sowie bei ihren diagnostischen, unterstützenden und evaluierenden Maßnahmen wissenschaftlich begleitet werden.

7 Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1980). *Denken: das Ordnen des Tuns*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1983). *Zwölf Grundformen des Lehrens. Eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H., Ruthemann, U., & Staub, F. C. (1986). Sind Regeln des Problemlosens lehrbar? *Zeitschrift für Pädagogik, 32*, 617-638.

Anderson, J. R. (1978). Arguments concerning representations for mental imagery. *Psychological Review, 85*, 249-277.

Anderson, J. R. (1983). A Spreading Activation Theory of Memeory. *Journal of verbal learning and verbal Behavior, 22*, 261-295.

Anderson, J. R. (1989). *Kognitive Psychologie. Eine Einführung* (2. ed.). Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft.

Anderson, J. R., Bothell, D., Byrne, M., Douglass, S., Lebiere, C., & Qin, Y. (2004). An Integrated Theory of the Mind. *Psychological Review, 111*(4), 1036-1060.

Aronson, E. (2004). *Sozialpsychologie* (4. ed.). München: Pearson.

Artelt, C. (2006). Lernstrategien in der Schule. In H. Mandl & H. Friedrich (Eds.), *Handbuch Lernstrategien* (pp. 337-351). Göttingen: Hogrefe.

Artelt, C., Stanat, P., Schneider, W., & Schiefele, U. (2001). Leskompetenz: Testkonzeption und Ergebnisse. In J. Baumert, E. Klieme, M. Neubrand, M. Prenzel, U. Schiefele, W. Schneider, P. Stanat, K.-J. Tillmann & M. Weiß (Eds.), *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schüler im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich.

Astleitner, H. (2008). Die lernrelevante Ordnung von Aufgaben nach der Aufgabenschwierigkeit. In J. Thonhauser (Ed.), *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen* (pp. 65-80). Münster: Waxmann.

Ausubel, D. P. (1974). *Psychologie des Unterrichts*. Weinheim: Beltz.

Bandura, A. (1976). *Lernen am Modell. Ansätze zu einer sozial-kognitiven Lerntheorie*. Stuttgart: Klett.

Bartlett, F. C. (1932/1967). *Remembering a study in experimental and social psychology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Dubberke, T., Jordan, A., et al. (2009). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal, 47*, 133-180.

Baumert, J., & Lehmann, R. (1997). *TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich.

Baumert, J., & PISA-Konsortium, D. (2001). *PISA 2000 Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich.

Baumert, J., Stanat, P., & Demmrich, A. (2001). PISA 2000: Untersuchungsgegenstand, theoretische Grundlagen und Durchführung der Studie. In J. Baumert, E. Klieme, M. Neubrand, M. Prenzel, U. Schiefele, W. Schneider, P. Stanat, K.-J. Tillmann & M. Weiß (Eds.), *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schüler im internationalen Vergleich* (pp. 15-68). Opladen: Leske + Budrich.

Bleichroth, W. (1991). *Fachdidaktik Physik*. Köln: Aulis Verlag Deubner.

BLK. (1997). *Gutachten zur Vorbereitung des Programms "Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts"* (Vol. 60). Bonn: BLK.

Blömeke, S., Risse, J., Müller, C., Eichler, D., & Schulz, W. (2006). Analyse der Qualität von Aufgaben aus didaktischer und fachlicher Sicht. Ein allgemeines Modell und seine exemplarische Umsetzung im Unterrichtsfach Mathematik. *Unterrichtswissenschaft, 34*(4), 330-357.

Bloom, B. S. (1976). *Human characteristics and school learning*. New York: McGraw-Hill Book Co.

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven -. In G. Kadunz, H. Kautschitsch, G. Ossimitz & E. Schneider (Eds.), *Trends und Perspektiven* (Vol. 23, pp. 15-38). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Blum, W. (2000). Qualitätsentwicklung im Mathematikunterricht. Eine Folge von TIMSS? *Pädagogik, 12*, 23-26.

Blum, W. (2006). Die Bildungsstandards Mathematik. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Eds.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (pp. 14-32). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R., & Köller, O. (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Blum, W., & Leiss, D. (2005a). *“Filling Up” – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks.* Paper presented at the CERME-4 – Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.

Blum, W., & Leiss, D. (2005b). Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren*(128), 18-22.

Blum, W., & Leiss, D. (2006). Investigating Quality Mathematics Teaching - The DISUM Projekt. In C. Bergsten & B. Grevholm (Eds.), *Developing and Researching Quality in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 3-16). Linköping: SMDF.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do Students and Teachers deal with mathematical Modelling Problems? The example Sugaloaf und the DISUM Project. In C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA12) - Education, Engineering and Economics*. Chichester: Horwood.

Blum, W., Messner, R., & Pekrun, R. (2004). *Antrag auf Gewährung einer Sachbeihilfe – im Rahmen des gemeinsamen Antrags der Forschergruppe Empirische Bildungsforschung der Universität Kassel*. Universität Kassel.

Blum, W., Messner, R., & Pekrun, R. (2006). *Arbeitsbericht zum Forschungsprojekt "DISUM"*. Kassel.

Blum, W., & Neubrand, M. (1998). *TIMSS und der Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends, and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 37-68.

Boekaerts, M. (1999). Self-regulated learning: where we are today. *International Journal of Educational Research, 31*, 445-557.

Boekaerts, M. (2002). Bringing about change in the classroom: strengths and weaknesses of the self-regulated learning approach - EARLI Presidential Address, 2001. *Learning and Instruction, 12,* 589-604.

Boekaerts, M., & Cascallar, E. (2006). How Far Have We Moved Toward the Integration of Theory and Practice in Self-Regulation? *Educational Psychology Review, 19*, 199-210.

Boekaerts, M., & Corno, L. (2005). Self-Regulation in the Classroom: A Perspective on Assessment and Intervention. *Applied Psychology, 54*(2), 199-231.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of the phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 1-8.

Borromeo Ferri, R. (2007). Individual modelling routes of pupils – Analysis of modelling problems in mathematical lessons from a cognitive perspective. In C. Haines (Ed.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 260-270). Chichester: Horwood Publishing.

Bosse, D. (1992). Das Rudel in Bewegung setzen. *Kunst + Unterricht,* (159), S. 53-55.

Bower, G. H., & Hilgard, E. R. (1983). *Theorien des Lernens* (5. ed.). Stuttgart: Klett-Cotta.

Breidenstein, G. (2006). *Teilnahme am Unterricht. Ethnographische Studien zum Schülerjob*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Brown, A. L. (1984). Metakognition, Handlungskontrolle, Selbsteuerung und andere, noch geheimnisvollere Mechanismen. In F. E. Weinert & R. H. Kluwe (Eds.), *Metakognition, Motivation und Lernen* (pp. 60-109). Stuttgart: Kohlhammer.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational researcher, 32*, 32-42.

Bruder, R. (2002). Lernen, geeignete Fragen zu stellen. *mathematik lehren*(115), 4-8.

Bruder, R. (2003). *Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. Material im Rahmen des BLK-Programms „SINUS" zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts"*. Kiel: IPN.

Bruner, J. S. (1971). Über kognitive Entwicklung. In J. S. Bruner, R. R. Olver & P. M. Greenfield (Eds.), *Studien zur kognitiven Entwicklung* (pp. 21-54). Stuttgart: Klett.

Bruner, J. S., Olver, R. R., & Greenfield, P. M. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung eine kooperative Untersuchung am "Center for cognitive studies" der Harvard-Universität*. Stuttgart: Klett.

Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: an emergent Multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics, 58*, 45-75.

Cazden, C. B. (1972). Children's questions: Their forms, functions, and roles in education. In W. W. Hartup (Ed.), *The Young Child* (Vol. 2). Washington: National Association for the Education of Young Children.

Chinnappan, M., & Lawson, M. J. (1996). The Effects of Training in the use of executive Strategies in Geometrie Problem Solving. *Learning and Instruction, 6*, 1-17.

Chott, P. O. (2006). Fehlerkultur und das Lernen lernen. *Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften, 28*(1), 131-136.

Christmann, U., & Groeben, N. (1999). Psychologie des Lesens. In B. Franzmann (Ed.), *Handbuch Lesen* (pp. 145-223). München: Saur Verlag.

Clausen, M., Reusser, K., & Klieme, E. (2003). Unterrichtsqualitat auf der Basis hoch-inferenter Unterrichtsbeurteilungen/ Ein Vergleich zwischen Deutschland und der deutschsprachigen Schweiz. *Unterrichtswissenschaft, 31*(2), 122-141.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt. (1991). The Jasper series as an example of anchored instructions: Theory, program, description, and assessment date. *Educational Psychologist, 27*, 291-315.

Cohen, E. G. (1994). Restructuring the classroom: Conditions for productive small groups. *Review of Educational Research, 64*(1), 1-35.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive Apprenticeship: Teaching the Crafts of Reading, Wrighting and Mathematics. In L. B. Resnik (Ed.), *Knowing, learning and instruction: essay in honor of Robert Glaser* (pp. 453-492). Hilldsdale, NJ: Erlbaum.

Daumenlang, K. (1969). *Physikalische Konzepte junger Erwachsener. Ihre Abhaengigkeit von Schule und Familienkonstellation*. Nuernberg: Universitaet Nuernberg.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The Predominance of the Linear Model in Secondary School Students' Solutions of Word Problems Involving Length and Area of Similar Plane Figures. *Educational Studies in Mathematics, 35*(1), 65-83.

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W., & Claes, K. (2003). Do Realistic Contexts and Graphical Representations Always Have a Beneficial Impact on Students' Performance? Negative Evidence from a Study on Modeling Non-Linear Geometry Problems. *Learning and Instruction, 13*(4), 441-463

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (1996). Mathematics teaching and learning. In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 491-549). New York.

De Corte, E., Verschaffel, L., & De Win, L. (1985). Influence of Rewording Verbal Problems on Children´s Problem Representations and Solutions. *Journal of Educational Psychology, 77*(4), 460-470.

De Corte, E., Verschaffel, L., & O'pt Eynde, P. (2000). Self-Regulation: A Characteristic and a Goal of Mathematics Education. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of Self-Regulation* (pp. 681-726). San Diego: Academic Press.

Dewey, J. (1910/2001). *Wie wir denken*. Zürich: Pestalozzianum.

Doise, W., & Mugny, G. (1984). *The social development of the intellect* (1st ed.). Oxford [Oxfordshire] New York: Pergamon Press.

Dörner, D. (1980). Heuristics and cognition in complex systems. In R. Groner, M. Groner & W. F. Bischof (Eds.), *Methods of heuristics* (pp. 98-108). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dörner, D. (1995). Problemlösen und Gedächtnis. In D. Dörner (Ed.), *Das Gedächtnis Probleme, Trends, Perspektiven* (pp. 295-320). Göttingen: Hogrefe.

Drüke-Noe, C., & Leiß, D. (2005). *Standard-Mathematik von der Basis bis zur Spitze, Sekundarstufe I - Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Institut für Qualitätsentwicklung.

Duncker, K. (1935/1974). *Zur Psychologie des produktiven Denkens* (3. ed.). Berlin: Springer-Verlag.

Eikenbusch, G. (2007). Lesen und Lesen lassen. Zur Förderung von Leseverständnis in allen Fächern. *Pädagogik, 59*(6), 6-10.

Entwistle, N. J., & Ramsden, P. (1983). *Understanding student learning*. London: Croom Helm.

Ericsson, K. A., Krampe, R. T., & Tesch-Römer, C. (1993). The role of deliberate practice in the acquisition of expert performance. *Psychological Review, 100*, 366-406.

Ertl, B., & Mandl, H. (2006). Kooperationsskripts. In H. Mandl & H. Friedrich (Eds.), *Handbuch Lernstrategien* (pp. 273-281). Göttingen: Hogrefe.

Fend, H. (1998). *Qualität im Bildungswesen. Schulforschung zu Systembedingungen, Schulprofilen und Lehrerleistung*. Weinheim: Juventa.

Fischer, H. E., & Draxler, D. (2002). Konstruktion und Bewertung von Physikaufgaben. In E. Kircher & W. B. Schneider (Eds.), *Physikdidaktik in der Praxis*. Berlin Heidelberg: Springer.

Flaherty, E. G. (1974). The thinking and aloud technique and problem solving ability. *Journal of Educational Research, 68*, 223-225.

Freudenthal, H. (1966). Bemerkungen zur axiomatischen Methode im Unterricht. *Der Mathematikunterricht, 12*(3), 61--65.

Freudenthal, H. (1977). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett.

Friedrich, H. F., & Mandl, H. (1992). Lern- und Denkstrategien - ein Problemaufriß. In H. Mandl & H. Friedrich (Eds.), *Lern- und Denkstrategien - Analyse und Intervention* (pp. 3-54). Göttingen: Hogrefe.

Friedrich, H. F., & Mandl, H. (1997). Analyse und Förderung selbstgesteuerten Lernens. In Weinert & H. Mandl (Eds.), *Psychologie der Erwachsenenbildung. Enzyklopädie der Psychologie* (pp. 237-293). Göttingen: Hogrefe.

Friedrich, H. F., & Mandl, H. (2006). Lernstrategien: Zur Strukturierung des Forschungsfeldes. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Eds.), *Handbuch Lernstrategien* (pp. 414). Göttingen: Hogrefe.

Führer, L. (1997). *Pädagogik des Mathematikunterrichts. Eine Einführung für die Fachdidaktik der Sekundarstufen.* Braunschweig: Vieweg.

Funke, J. (2006a). *Denken und Problemlösen*. Göttingen: Hogrefe.

Funke, J. (2006b). Vorwort. In J. Funke (Ed.), *Denken und Problemlösen* (Vol. 8, pp. XIV-XXVIII). Göttingen: Hogrefe.

Funke, J., & Zumbach, J. (2006). Problemlösen. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Eds.), *Handbuch Lernstrategien* (pp. 206-220). Göttingen: Hogrefe.

Galperin, P., & Leontjew, A. (1974). *Probleme der Lerntheorie*. Berlin: Volk u. Wissen.

Garlichs, A., Heipke, Messner, R., & Rumpf, H. (1974). *Didaktik offener Curricula*. Weinheim und Basel: Beltz.

Goethe, J. W. v. (1825). *Faust : eine Tragödie*. Stuttgart: Cotta.

Grau, S., & Mauch, M. (2009, date accessed: 01.03.2010). Von der Forschung ins Schuhgeschäft. Auf dem Weg zu einem neuen Kinderschuh-System. Retrieved from http://www.kinderfuesse.com/symposium/pdf/grau.pdf

Greeno, J. G. (1989). Situations, mental models und generative knowledge. In D. Klahr & K. Kotovsky (Eds.), *Complex information prozessing: The impact of Herbert A. Simon* (pp. 285-318). Hillsdale, NJ: Ablex.

Gudjons, H. (1986). *Handlungsorientiert lehren und lernen Projektunterricht und Schüleraktivität*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Gudjons, H. (2007). *Frontalunterricht - neu entdeckt. Integration in offene Unterrichtsformen*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Häcker, T. H. (2003). Selbstbestimmte Lernverträge als konstitutiver Teil von Portfolioarbeit: Lern-Lehr-Vorhaben jenseits von Belehrung und Angebot. In T. Rihm (Ed.), *Schulentwicklung durch Lerngruppen. Vom Subjektstandpunkt ausgehen...* (pp. 283-295). Opladen: Leske + Budrich.

Hascher, T., & Hofmann, F. (2008). Aufgaben - noch unentdeckte Potenziale im Unterricht. In J. Thonhauser (Ed.), *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen* (pp. 47-64). Münster: Waxmann.

Hattie, J. (2007). *Developing potentials for learning: evidence, assessment, and progress.* Paper presented at the EARLI Biennial Conference, Budapest, Hungary.

Hattie, J., Biggs, J. B., & Purdie, N. (1996). Effects of learning skills interventions on student learning: A metaanalysis. *Review of Educational Research, 66*, 99-136.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research, 77*(1), 88-112.

Heimann, P., Otto, G., & Schulz, W. (1972). *Unterricht Analyse und Planung* (6. bearb. Aufl. ed.). Hannover: Schroedel.

Heinze, A. (2004). Umgang mit Fehlern im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I - Methode und Ergebnisse einer Videostudie. *Journal für Mathematikdidaktik, 25*(3/4), 221-245.

Helmke, A. (2003). *Unterrichtsqualität erfassen, bewerten, verbessern [im Rahmen des Modellversuchs "Qualitätsverbesserung in Schulen und Schulsystemen" (QuiSS) der Bund-Länder-Kommission erstellt]*. Seelze: Kallmeyer'sche Verlagsbuchhandlung.

Helmke, A. (2008). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts* (2. ed.). Seelze: Kallmeyer.

Helmke, A., & Schrader, F.-W. (2006). Determinanten der Schulleistungen. In D. H. Rost (Ed.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (pp. 83-94). Göttingen: Hogrefe.

Helmke, A., & Weinert, F. E. (1997). Bedingungsfaktoren schulischer Leistungen. In F. E. Weinert (Ed.), *Enzyklopädie der Psychologie. Themenbereich D. Psychologie des Unterrichts und der Schule* (pp. 71-176). Göttingen: Hogrefe.

Hentig, H. v. (2003). *Die Schule neu denken eine Übung in pädagogischer Vernunft*. Weinheim: Beltz Taschenbuch.

Hermanns, H. (2004). Interview als Tätigkeit. In U. Flick (Ed.), *Qualitative Forschung/ ein Handbuch*. Hamburg: Rowohlt Taschnbuch Verlag.

Hessisches Kultusministerium. (2002). *Lehrpläne für die Bildungsgänge Hauptschule, Realschule, Gymnasium [Elektronische Ressource] : IGS-Handreichungen zu den Lehrplänen* (1. ed.). Wiesbaden: Hessisches Landesinst. für Pädagogik (HeLP).

Hogan, K., Nastasi, B. K., & Pressley, M. (1999). Discourse patterns and collaborative scientific reasoning in peer and teacher-guided discussions. *Cognition and Instruction, 17*(4), 379-432.

Holyoak, K. J. (1984). Analogical Thinking And Human Intelligence. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol. 2, pp. 199-230). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Holzkamp, K. (1993). *Lernen subjektwissenschaftliche Grundlegung*. Frankfurt, Main: Campus-Verlag.

Hothersall, D. (1995). *History of psychology* (3. ed.). New York: McGraw-Hill.

Hugener, I., Pauli, C., Reusser, K., Lipowsky, F., Rakoczy, K., & Klieme, E. (2009). Teaching patterns and learning quality in Swiss and German mathematics lessons. *Learning and Instruction, 19*(1), 66-78.

Jacobs, B. (2008). Was wissen wir über die Lernwirksamkeit von Aufgabenstellungen und Feedback. In J. Thonhauser (Ed.), *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen*. Münster: Waxmann.

Jank, W., & Meyer, H. (2000). *Didaktische Modelle*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1994). *Learning together and alone cooperative, competitive, and individualistic learning* (4th ed.). Boston, Mass: Allyn and Bacon.

Jonassen, D. H. (2000). Toward a design theory of problem solving. *Educational Technology: Research & Development, 48*(4), 63-85.

Jordan, A. (2006). *Mathematische Bildung von Schülern am Ende der Sekundarstufe I. Analysen und empirische Untersuchungen*. Hildesheim: Franzbecker.

Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M., Brunner, M., et al. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik, 29*, 83-107.

Kagan, N., Krathwohl, D. R., & Miller, R. (1963). Stimulated recall in therapy using video tape: A case study. *Journal of Counseling Psychology, 10*(3), 237-243.

Kahl, R. (1995). *Lob des Fehlers. Eine Sendereihe*. Hamburg: Pädagogische Beiträge Verlag.

Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Underständing and Solving Word Arithmetic Prolblems. *Psychological Review, 92*(1), 109-129.

Kirby, J. (1988). Style, strategy and skill in reading. In R. R. Schmeck (Ed.), *Learning strategies and learning styles* (pp. 230-274). NY: Plenum.

Kircher, E., Girwidz, R., & Häussler, P. (2000). *Physikdidaktik eine Einführung in Theorie und Praxis*. Braunschweig: Vieweg.

Kirsch, A. (1991). Formalismen oder Inhalte? Schwierigkeiten mit linearen Gleichungssystemen im 9. Schuljahr. *Didaktik der Mathematik, 19*(4), 294-308.

Kirsch, A. (2002). Proportionalität und „Schlussrechnung“ verstehen. *mathematik lehren, 114*, 6-9.

Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching. *Educational Psychologist, 41*(2), 75 - 86.

Klafki, W. (1963/1975). *Studien zur Bildungstheorie und Didaktik*. Weinheim: Beltz.

Klafki, W. (1970). Der Begriff der Didaktik und der Satz vom Primat der Didaktik (im engeren Sinne) im Verhältnis zur Methodik. *Funk-Kolleg Erziehungswissenschaft* (Vol. 2, pp. 55-73). Frankfurt/M.: Fischer.

Klafki, W. (1991). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik*. Weinheim: Beltz.

Klauer, K. J., & Leutner, D. (2007). *Lehren und Lernen Einführung in die Instruktionspsychologie*. Weinheim: Beltz.

Kleine, M., Jordan, A., & Harvey, E. (2005). With a focus on 'Grundvorstellungen' Part 1: a theoretical integration into current concepts. *ZDM, 37*(3), 226-223.

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., et al. (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards eine Expertise* (3. ed.). Bonn: BMBF.

Klieme, E., & Leutner, D. (2006). Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen. Beschreibung eines neu eingerichteten Schwerpunktprogramms der DFG. *Zeitschrift für Pädagogik, 57*, 876-903.

Klieme, E., Schümer, G., & Knoll, S. (2001). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: Aufgabenkultur und Unterrichtsgestaltung. In Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) (Ed.), *TIMSS - Impulse für Schule und Unterricht. Forschungsbefunde, Reforminitiativen, Praxisberichte und Video-Dokumente* (pp. 43-57). München: Medienhaus Biering.

Kluger, A. N., & DeNisi, A. (1996). The effects of feedback interventions on performance: A historical review, a meta-analysis, and a preliminary feedback intervention theory. *Psychological Bulletin, 119*(2), 254–284.

KMK. (2004). *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung*. München: Wolters Kluwer.

Köhler, W. (1921/1963). *Intelligenzprüfungen an Menschenaffen* (2. ed.). Berlin: Springer.

Köhler, W. (1926). *The Mentality of Apes*. New York Harcourt, Brace & Company, Inc.

Köller, O. (2005). Die deutsche Schule im Lichte internationaler Schulleistungsuntersuchungen (TIMSS, PISA, IGLU). In H. J. Apel & W. Sacher (Eds.), *Studienbuch Schulpädagogik* (pp. 133-147). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Kramarski, B., Mevarech, Z. R., & Arami, M. (2002). The effects of matacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 225-250.

Krapp, A. (1993). Lernstrategien: Konzepten, Methoden und Befunde. *Unterrichtswissenschaft, 21*(4), 291-311.

Kunter, M., Dubberke, T., Baumert, J., Blum, W., Brunner, M., Jordan, A., et al. (2006). Mathematikunterricht in den PISA-Klassen 2004: Rahmenbedingungen, Formen und Lehr-Lernprozesse. In P.-K. Deutschland (Ed.), *PISA 2003. Untersuchungen im Verlauf eines Schuljahres* (pp. 161-194). Münster: Waxmann.

Kunter, M., Klusmann, U., Dubberke, T., Baumert, J., Blum, W., Brunner, M., et al. (2007). Linking aspects of teacher competence to their instruction. Results from the COACTIV project. *Studies on the educational quality of schools.* (pp. S. 39-59). Münster: Waxmann.

Kunter, M., Tsai, Y.-M., Klusmann, U., Brunner, M., Krauss, S., & Baumert, J. (2008). Students' and mathematics teachers' perceptions of teacher enthusiasm and instruction. *Learning and Instruction, 18*, 468-482.

Kuzel, A. J. (1992). Sampling in qualitative inquiry. In B. F. Crabtree (Ed.), *Doing qualitative research* (Vol. 3, pp. 31-44). Newbury Park, CA: Sage.

Ladd, G. W., & Oden, S. (1979). The Relationship between Peer Acceptance and Children's Ideas about Helpfulness. *Child Development, 50*(2), 402-408.

Larkin, J. (1981). Enriching Formal Knowledge: A Model for Learning to Solve Textbook Physics Problems. In J. R. Anderson (Ed.), *Cognitive Skills and Their Acquisition*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Leiss, D. (2007). *"Hilf mir es selbst zu tun". Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren*. Hildesheim: Franzbecker.

Leiss, D., Blum, W., & Messner, R. (2007). Die Förderung selbstständigen Lernens im Mathematikunterricht – Problemfelder bei ko-konstruktiven Lösungsprozessen. *Journal für Mathematikdidaktik, 28*(3/4), 224-248.

Leiss, D., Blum, W., Messner, R., Müller, M., Schukajlow, S., & Pekrun, R. (2008). Modellieren lehren und lernen in der Realschule. *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 370-373). Münster: WTM Verlag.

Leiss, D., Möller, V., & Schukajlow, S. (2006). Bier für den Regenwald. Diagnostizieren und fördern mit Modellierungsaufgaben. *Friedrich Jahresheft XXIV*, 89-91.

Leiss, D., & Schukajlow, S. (submitted). The role of the graphic Repräsentation for the solution of realistic modelling tasks. *Educational Studies in Mathematics*.

Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., & Pekrun, R. (2010). The role of the situation model in mathematical modelling – task analyses, student competencies, and teacher interventions. *Journal für Mathematikdidaktik, 31*(1), 119-141.

Lenné, H. (1969). *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Leutner, D., Fischer, H. E., Kauertz, A., Schabram, N., & Fleischer, J. (2008). Instruktionspsychologische und fachdidaktische Aspekte der Qualität von Lernaufgaben und Testaufgaben. In J. Thonhauser (Ed.), *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen* (pp. 169-181). Münster: Waxmann.

Leutner, D., Klieme, E., Meyer, K., & Wirth, J. (2004). Problemlösen. In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, H.-G. Rolff, J. Rost & U. Schiefele (Eds.), *PISA 2003 Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (pp. 147-176). München: Waxmann.

Leutner, D., & Leopold, C. (2003). Selbstreguliertes Lernen als Selbstregulation von Lernstrategien. Ein Trainingsexperiment mit Berufstatigen zum Lernen aus Sachtexten. *Unterrichtswissenschaft, 31*(1), 38-56.

Leutner, D., Leopold, C., & Elzen-Rump, V. d. (2007). Self-Regulated Learning with a Text-Highlighting Strategy. *Zeitschrift für Psychologie, 215*(3), 174-182.

Linnenbrink, E. A. (2005). The Dilemma of Performance-Approach Goals: The Use of Multiple Goal Contexts to Promote Students' Motivation and Learning. *Journal of Educational Psychology, 97*(2), 197-213.

Lipowsky, F. (2007). Was wissen wir über guten Unterricht? Im Fokus: die fachliche Lernentwicklung. *Friedrich Jahresheft, XXV*, 26-30.

Lipowsky, F., Rakoczy, K., Pauli, C., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E., & Reusser, K. (2009). Quality of geometry instruction and its short-term impact on students' understanding of the Pythagorean Theorem. *Learning and Instruction, 19*(6), 527-537.

Lüer, G., Werner, S., & Lass, U. (1995). Repräsentation analogen Wissens im Gedächtnis. In D. Dörner (Ed.), *Das Gedächtnis Probleme, Trends, Perspektiven* (pp. 75-125). Göttingen: Hogrefe.

Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht. Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim: Franzbecker.

Mähler, C., & Hasselhorn, M. (2001). Transfer. In D. H. Rost (Ed.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (pp. 721-730). Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra: mit vielen Beispielaufgaben*. Braunschweig Vieweg.

Mandl, H., & Friedrich, H. F. (2006). *Handbuch Lernstrategien*. Göttingen: Hogrefe.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed.). New York: Freeman.

Mayer, R. E., & Heagarty, M. (1996). The Process of Understanding Mathematical Problems. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The Nauture of Mathematical Thinking* (Vol. 6, pp. 29-54): Lawrens Erlbaum Associates.

Mayring, P. (2003). *Qualitative Inhaltsanalyse Grundlagen und Techniken* (8. ed.). Weinheim: Beltz Verlag.

Merrill, D. M. (1992). Constructivism and Instructional Design. In T. M. Duffy & D. H. Jonasson (Eds.), *Constructivism and the technology of instruction* (pp. 99-114). Hillsdale: Erlbaum.

Messner, R. (1975). Didaktik. Eine Übersicht über ihre Grundprobleme. In H. Aebli (Ed.), *Kind, Schule, Unterricht: zum aktuellen Stand der Didaktik, der Curriculumtheorie und der Theorie der Schule* (pp. 34-84). Stuttgart: Klett.

Messner, R. (1983/1995). Neuordnung des Unterichts. In E.-G. Skiba, C. Wulf & K. Wünsche (Eds.), *Erziehungs im Jugendalter - Sekundarstufe I. Enzyklopädie Erziehungswissenschaft* (pp. 303-318). Weinheim: Klett-Cotta.

Messner, R. (2003). PISA und Allgemeinbildung. *Zeitschrift für Pädagogik, 49*(3), 401-411.

Messner, R. (2004a). Selbständiges Lernen und PISA - Formen einer neuen Aufgabenkultur. In D. Bosse (Ed.), *Unterricht, der Schülerinnen und Schüler herausfordert* (pp. 29-47). Bad Heilbrunn: Klinkhard.

Messner, R. (2004b). Was Bildung von Produktion unterscheidet - oder die Spannung von Freiheit und Objektivierung und das Projekt der Bildungsstandards. *Erziehung und Unterricht*, (7-8), 693-716.

Messner, R. (2006). Bildungsstandards und Schulentwicklung - ein vernachlässigter Zusammenhang. *Seminar -Lehrerbildung und Schule*, (2), 21-36.

Messner, R. (2007). Aeblis Grundformen im Kontext der zeitgenossischen Didaktik. *Erziehung und Unterricht*, (1/2), 99-114.

Messner, R. (2008). Bausteine eines kognitiv aktivierenden Fachunterrichts. In D. Bosse (Ed.), *Gymnasiale Bildung zwischen Kompetenzorientierung und Kulturarbeit* (pp. 137-160). Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

Messner, R. (2009). Forschendes Lernen: Impulse zur Klärung fachlicher Schwerpunkte. In R. Messner (Ed.), *Schule forscht* (pp. 131-142). Hamburg: Körber-Stiftung.

Messner, R., & Blum, W. (2006). Selbstständiges Lernen im Fachunterricht – sieben Projekte zur empirischen Unterrichtsforschung. In I. Mammes, S. Rahm & M. Schratz (Eds.), *Schulpädagogische Forschung - Unterrichtsforschung - Perspektiven Innovativer Ansätze* (pp. 107-123). Innsbruck: Studien Verlag.

Messner, R., & Reusser, K. (2006). Aebli im Kontext der zeitgenossischen Didaktik. In M. Baer, M. Fuchs, P. Füglister, K. Reusser & H. Wyss (Eds.), *Didaktik auf psychologischer Grundlage. Von Hans Aeblis kognitionspsychologischer Didaktik zur modernen Lehr- und Lernforschung* (pp. 52-73). Bern: H.E.P. verlag ag.

Messner, R., Rumpf, H., & Buck, P. (1997). Natur und Bildung. *chimica didactica, 23*(1), 5-31.

Meyer, H. (1987). *Unterrichtsmethoden*. Frankfurt, Main: Cornelsen Scriptor.

Meyer, L., Seidel, T., & Prenzel, M. (2006). Wenn Lernsituationen zu Leistungssituationen werden: Untersuchung zur Fehlerkultur in einer Videostudie. *Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften, 28*(1), 21-39.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis an expanded sourcebook* (2nd. ed.). Beverly Hills, Calif.: Sage.

Miller, G. A., Galanter, E., & Pribram, K. H. (1973). *Strategien des Handelns. Pläne und Strukturen des Verhaltens*. Stuttgart: Klett.

Mourtos, N. J., DeJong Okamoto, N., & Rhee, J. (2004). *Defining, teaching, and assessing problem solving skills*. Paper presented at the Annual Conference on Engeneering Education, Mumbai, India.

Müller, A., & Helmke, A. (2008). Qualität von Aufgaben als Merkmale der Unterrichtsqualität verdeutlicht am Fach Physik. In H. Heckhausen (Ed.), *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen* (pp. 31-46). Münster: Waxmann.

Nathan, M. J., Kintsch, W., & Young, E. (1992). A Theorie of Algebra-Word-Problem Comprehension and Its Implications for the Design of Learning Environments. *Cognition and Instruction, 9*(4), 329-389.

Nelson-Le Gall, S. (1981). An Understudied Problem Solving Skill in Children. *Developmental Review, 1*, 224-246.

Neubrand, M. (2006). Multiple Lösungswege für Aufgaben: Bedeutung für Fach, Lernen, Unterricht und Leistungserfassung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Eds.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (pp. 162-177). Berlin: Cornelsen.

Neubrand, M., Klieme, E., Lüdtke, O., & Neubrand, J. (2002). Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung. *Unterrichtswissenschaft, 30*, 100-117.

Newell, A., & Simon, H. A. (1963). GPS, a Program that Simulate Human Thoughts. In E. Feigenbaum & J. Feldman (Eds.), *Computrers and Thoughts* (pp. 279-293). New York: McGraw Hill.

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Newman, R. S. (2000). Social Influences on the Development of Children's Adaptive Help Seeking: The Role of Parents, Teachers, and Peers. *Developmental Review, 20*, 350-404.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: the 14th ICMI Study* (pp. 1-32). New York: Springer.

Nußbaum, A., & Leutner, D. (1986). Die Auswirkung der Schwierigkeit textbegleitender Fragen auf die Lernleistung. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 18*, 230-244.

OECD. (2004). Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003.

Oehl, W. (1962). *Der Rechenunterricht in der Grundschule zweites bis viertes Schuljahr didaktisch-methodische Überlegungen und Hinweise für die tägliche Unterrichtsarbeit* (2. ed.). Hannover: Schroedel.

Oelkers, J., & Reusser, K. (2008). *Qualität entwickeln - Standards sichern - mit Differenz umgehen* (Vol. 27). Berlin: BMBF.

Oeter, R. (2001). Der Weg des Konstruktivismus in der Entwicklungspsychologie und Pädagogischen Psychologie. *Zeitschrift für Psychologie, 209*(1), 69-91.

Olson, D. R. (1971). Über begriffliche Strategien. In J. S. Bruner, R. R. Olver & P. M. Greenfield (Eds.), *Studien zur kognitiven Entwicklung*. Stuttgart: Klett.

Oser, F. (2007). Aus Fehlern lernen. In M. Göhlich, C. Wulf & J. Zirfas (Eds.), *Pädagogische Theorien des Lernens* (pp. 203-212). Weinheim und Basel: Beltz.

Oser, F., Hascher, T., & Spychiger, M. (1999). Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des "negativen" Wissens. In W. Althof (Ed.), *Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern. Beiträge und Nachträge zu einem interdisziplinären Symposium aus Anlaß des 60. Geburtstags von Fritz Oser* (pp. 11-41). Opladen: Leseke + Budrich.

Oser, F., & Spychiger, M. (2005). *Lernen ist schmerzhaft zur Theorie des Negativen Wissens und zur Praxis der Fehlerkultur*. Weinheim: Beltz.

Oser, F., Spychiger, M., Hascher, T., & Mahler, F. (1997). Die Fehlerkulturschule. Entwicklung der Fehlerkultur als Projekt im Rahmen von Schulentwicklung. *Schriftenreihe zum Projekt "Lernen Menschen aus Fehlern?" Zur Entwicklung einer Fehlerkultur in der Schule, Nr. 3*. Freiburg/Schweiz: Pädagogisches Institut der Universität Freiburg.

Palincsar, A. S., & Brown, A., L. (1984). Reciprocal teaching of comprehension-fostering and comprehension-monitoring activities. *Cognition and Instruction, 1*, 117-175.

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods* (2nd. ed.). Newbury Park, Calif.: Sage.

Pauli, C., & Reusser, K. (2000). Zur Rolle von Lehrperson beim kooperativen Lernen. *Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften, 21*(3), 421-441.

Pauli, C., & Reusser, K. (2006). Von international vergleichenden Video Surveys zur videobasierten Unterrichtsforschung und -entwicklung. *Zeitschrift für Pädagogik, 52*(6), 774-798.

Pekrun, R. (2002). Vergleichende Evaluationsstudien zu Schülerleistungen: Konsequenzen für die Bildungsforschung. *Zeitschrift für Pädagogik, 48*, 111-128.

Perels, F., Gürtler, T., & Schmitz, B. (2005). Training of self-regulatory and problem-solving competence. *Learning and Instruction, 15*, 123-139.

Perels, F., Otto, B., Schmitz, B., & Bruder, R. (2007). Evaluation of a training programme to improve mathematical as well as self-regulatory competences. In M. Prenzel & PISA-Konsortium Deutschland (Eds.), *Studies on the educational quality of schools* (pp. 197-219). Münster: Waxmann.

Perels, F., Schmitz, B., & Bruder, R. (2003). Trainigsprogramm zur Förderung der Selbstregulationskompetenz von Schülern der achten Gymnasialklasse. *Unterrichtswissenschaft, 31*(1), 23-37.

Piaget, J. (1936/1991). *Das Erwachen der Intelligenz beim Kinde* (3. ed.). Stuttgart: Klett-Cotta.

Piaget, J. (1937/1991). *Der Aufbau der Wirklichkeit beim Kinde* (3. ed.). Stuttgart: Klett-Cotta.

Piaget, J. (1947). *Psychologie der Intelligenz* (2. ed.). Zürich: Rascher.

Piaget, J. (1950/1975). *Die Entwicklung des Erkennens*. Stuttgart: Klett.

Pintrich, P. R. (1989). The dynamic interplay of student motivation and cognition in the college classroom. *Advances in Motivation and Achievement, 6*, 117-160.

Pintrich, P. R. (1999). The role of motivation in promoting and sustaining self-regulated learning. *International Journal of Educational Research, 31*, 459-470.

Pintrich, P. R., & DeGroot, E. V. (1990). Motivational and self-regulated learning components of classroom academic performance. *Journal of Educational Psychology, 82*(1), 33-40.

Pintrich, P. R., & Garcia, T. (1994). Self-regulated learning in college students: Knowledge, strategies and motivation. In P. R. Pintrich, D. Brown & C. E. Weinstein (Eds.), *Student motivation, cognition and learning* (pp. 113-133). Hilsdale: Erlbaum.

PISA-Konsortium Deutschland. (2004). *PISA 2003 Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland - Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs*. Münster: Waxmann.

PISA-Konsortium Deutschland, & Prenzel, M. (2005). *PISA 2003 der zweite Vergleich der Länder in Deutschland - Was wissen und können Jugendliche?* Münster, Westf: Waxmann.

Pólya, G. (1948). *How to solve it a new aspect of mathematical method*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Prenzel, M., & Allolio-Näcke, L. (2006). *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms*. Münster: Waxmann.

Prenzel, M., & Baptist, P. (2001). Das BLK-Modellversuchsprogramm “Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". In BMBF (Ed.), *TIMSS – Impulse für Schule und Unterricht* (pp. 59-63). Bonn.

Prenzel, M., Rost, J., Senkbeil, M., Häusler, P., & Klopp, A. (2001). Naturwissenschaftliche Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In J. Baumert, E. Klieme, M. Neubrand, M. Prenzel, U. Schiefele, W. Schneider, P. Stanat, K.-J. Tillmann & M. Weiß (Eds.), *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schüler im internationalen Vergleich* (pp. 191-248). Opladen: Leske + Budrich.

Putz-Osterloch, W. (1981). Über die Beziehung zwischen Testintelligenz und Problemlöseerfolg. *Zeitschrift für Psychologie, 189*, 79-100.

Pylyshyn, Z. W. (1981). The imagery debate: Analigue media vs. tacit knowledge. *Psychological Review, 88*, 16-45.

Rakoczy, K., & Klieme, E. (2008). The interplay between student evaluation and instruction. Grading and feedback in mathematics classrooms. *Zeitschrift für Psychologie, 216*(2), 111-124.

Reed, S. K. (1999). *Word Problems Research and Curriculum Reform*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Reiff, R. (2006). Selbst- und Partnerdiagnose im Mathematikunterricht. *Friedrich Jahresheft, XXIV*, 68-72.

Reinmann-Rothmeier, G., & Mandl, H. (2001). Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In A. Krapp & B. Weidenmann (Eds.), *Pädagogische Psychologie. Lehrbuch* (pp. 601-646). Weinheim: Beltz.

Renkl, A. (2001). Träges Wissen. In D. H. Rost (Ed.), *Handbuch Pädagogische Psychologie* (pp. 717 - 721). Weinheim: Hogrefe.

Renkl, A., & Nückles, M. (2006). Lernstrategien der externen Visualisierung. In H. Mandl & H. Friedrich (Eds.), *Handbuch Lernstrategien* (pp. 135-147). Göttingen: Hogrefe.

Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science, 17*, 309-338.

Reusser, K. (1989). *Vom Text zur Situation zur Gleichung. Kognitive Simulation von Sprachverständnis und Mathematisierung beim Lösen von Textaufgaben*. Bern: Universität Bern.

Reusser, K. (1997). Erwerb mathematischer Kompetenzen: Literaturüberblick. In F. E. Weinert & A. Helmke (Eds.), *Entwicklung im Grundschulalter* (pp. 141-155). Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Reusser, K. (1999). Schülerfehler - die Rückseite des Spiegels. In W. Althof (Ed.), *Fehlerwelten*. Opladen: Leske + Budrich.

Reusser, K. (2001a). Co-constructivism in Educational Theory and Practice. In N. J. Smelser, P. Baltes & F. E. Weinert (Eds.), *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences*. Oxford: Pergamon/Elsevier Science.

Reusser, K. (2001b). Unterricht zwischen Wissensvermittlung und Lernen lernen./ Alte Sackgassen und neue Wege in der Bearbeitung eines pädagogischen Jahrhundertsproblems. In C. Finkbeiner & G. W. Schnaitmann (Eds.), (pp. 106-140). Donauwörth: Auer Verlag GmbH.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution. The social rationality of mathematical modelling at school. *Learning and Instruction, 7*(4), 309-327.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. N. (1983). Development of children´s problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). NY: Academic Press.

Rosenschein, B., Meister, C., & Chapman, S. (1996). Teaching Students to generate questions; A review of intervention studies. *Review of Educational Research, 66*, 181-221.

Roth, G. (2009). Die Bedeutung von Motivationen und Emotionen für den Lernerfolg. In R. Messner (Ed.), *Schule forscht* (pp. 57-74).

Sabatier, P. A. (1986). Top-Down and Bottom-Up Approaches to Implementation Research. *Journal of Public Policy, 6*, 21-48.

Schabram, K. (2007). *Lernaufgaben im Unterricht: Instruktionspsychologische Analysen am Beispiel der Physik (Phil. Dissertation).* Essen: Fachbereich Bildungswissenschaften der Univ. Duisburg-Essen.

Schaefer, K.-H., & Schaller, K. (1976). *Kritische Erziehungswissenschaft und kommunikative Didaktik* (3., durchges. Aufl. ed.). Heidelberg: Quelle und Meyer.

Schaub, H. (2006). Störungen und Fehler beim Denken und Problemlösen. In J. Funke (Ed.), *Denken und Problemlösen* (Vol. 8, pp. 447-482). Göttingen: Hogrefe.

Schiefele, U., & Pekrun, R. (1996). Psychologische Modelle des fremdgesteuerten und selbstgesteuerten Lernens. In F. E. Weinert (Ed.), *Enzyklopädie der Psychologie* (Vol. 2, pp. 249-278). Göttingen: Hogrefe.

Schnotz, W. (1994). *Aufbau von Wissensstrukturen Untersuchungen zur Kohärenzbildung beim Wissenserwerb mit Texten*. Weinheim: Beltz.

Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and inference in learning from multiple representations. *Learning and Instruction, 13*, 141-156.

Schnotz, W., & Dutke, S. (2004). Kognitionspsychologische Grundlagen der Lesekompetenz: Mehrebenenverarbeitung anhand multipler Informationsquellen. In U. Schiefele, C. Artelt, W. Schneider & P. Stanat (Eds.), *Struktur, Entwicklung und Förderung von Lesekompetenz* (pp. 61-100). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Schoenfeld, A. H. (1982). Some Thoughts on Problem-solving Research and Mathematics Education. In F. K. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematikal Problem Solving: Issues in Research* (pp. 25-35). Philadelphia: The Franklin Institute.

Schukajlow, S. (2006). Schüler-Schwierigkeiten beim Lösen von Modellierungsaufgaben – Ergebnisse aus dem DISUM-Projekt. *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 493-496). Hildesheim: Franzbecker.

Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., Pekrun, R., Leiss, D., & Müller, M. (2009). Unterrichtsformen, Emotionen und Anstrengung als Prädiktoren von Schüler-Leistungen bei anspruchsvollen mathematischen Modellierungsaufgaben. *Unterrichtswissenschaft, 37*(2), 164-186.

Schukajlow, S., Leiss, D., Blum, W., Messner, R., & Pekrun, R. (2009). Hurra, endlich das wahre Leben! - Einstellungen und Beliefs der Lernenden zu Aufgaben mit und ohne Realitätsbezug *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*. Münster: WTM Verlag.

Schunk, D. B., & Zimmerman, B. J. (2003). Self-Regulation and Learning. In W. M. Reynolds & G. E. Miller (Eds.), (Vol. 7, pp. 59-78): John Wiley & Sons, Inc.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

Schworm, S., & Fischer, F. (2006). Academic Help Seeking. In H. Mandl & H. Friedrich (Eds.), *Handbuch Lernstrategien* (pp. 282-296). Göttingen: Hogrefe.

Seidel, T., & Prenzel, M. (2006). Stability of teaching patterns in physics instruction: Findings from a video study. *Learning and Instruction, 16*(3), 228-240.

Selting, M., Auer, P., Barden, B., Bergmann, J., Couper-Kuhlen, E., Günthner, S., et al. (1998). Gesprächsanalytisches Transkriptionssystem (GAT). *Linguistische Berichte, 173*, 91-122.

Selz, O. (1913). *Ueber die Gesetze des geordneten Denkverlaufs eine experimentelle Untersuchung*. Stuttgart: W. Spemann.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*, 4-14.

Skinner, B. F. (1971a). *Analyse des Verhaltens*. München: Urban und Schwarzenberg.

Skinner, B. F. (1971b). *Erziehung als Verhaltensformung Grundlagen einer Technologie des Lehrens*. München: Keimer.

Slavin, R. E. (1996). *Cooperative learning theory, research, and practice* (2nd ed.). Boston, Mass.: Allyn and Bacon.

Slavin, R. E., Hurley, E. A., & Chamberlain, A. (2003). Cooperative learning and achievement: Theory and research. In W. M. Reynolds & G. E. Miller (Eds.), *Handbook of psychology: Educational psychology* (Vol. 7, pp. 177-198). New York: Wiley.

Souvignier, E., & Mokhlesgerami, J. (2006). Using self-regulation as a framework for implementing strategy instruction to foster reading comprehension. *Learning and Instruction, 16*, 57-71.

Specht, W., & Freudenthaler, H. H. (2008). Die Beurteielung der Qualität von Beispielaufgaben durch Lehrkräfte und ihre Bedeutung für die Akzeptanz von Bildungsstandards. In J. Thonhauser (Ed.), *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen*. Münster: Waxmann.

Spindler, M. (2002). Der Kontrakt als Basis für die gemeinsame Arbeit. In K. Becker, A. v. Groeben, K.-D. Lenzen & F. Winter (Eds.), *Leistung sehen, fördern, werten* (pp. 107-113). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Spychiger, M. (2006). Fehlerkultur - Indiz für eine konstruktivistische Auffassung des Lernens. *Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften, 28*(1), 5-12.

Staub, F. C., & Reusser, K. (1995). The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems. In C. A. Weaver III, S. Mannes & C. R. Fletcher (Eds.), *Discourse Comprehension: Essays in honor of Walter Kintsch* (pp. 285-305). Hillsdale, NJ: Lawrens Erlbaum.

Steiner, G. (2001). Lernen und Wissenserwerb. In D. H. Rost (Ed.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (pp. 139-204).

Steiner, G. (2006). Wiederholungsstrategien. In H. Mandl & H. Friedrich (Eds.), *Handbuch Lernstrategien* (pp. 101-116). Göttingen: Hogrefe.

Steiner, G. (2008). *Lernen: 20 Szenarien aus dem Alltag* (4. ed.). Bern: Huber.

Stern, E. (2004). Schubladendenken, Intelligenz und Lerntypen. Zum Umgang mit unterschiedlichen Lernvoraussetzungen. In G. Becker, K.-D. Lenzen, L. Stäudel, K.-J. Tillmann, R. Werning & F. Winter (Eds.), *Heterogenität. Unterschiede nutzen - Gemeinsamkeiten stärken* (pp. 36-39). Seelze: Friedrich Jahresheft XXII.

Strauss, A. L., & Corbin, J. M. (1990). *Basics of qualitative research grounded theory procedures and techniques*. Newbury Park, Calif.: Sage.

Sydow, H. (1968). Versuche zur strukturellen und metrischen Darstellung von Problemzuständen in Lösungsprozessen. In F. Klix (Ed.), *Kybernetische Analysen geistiger Prozesse* (pp. 159-183). Berlin: DVW.

Thompson, T. (1998). Metamemory accuracy: Effects of feedback and the stability of individual differences. *American Journal of Psychology, 111*(1), 33–42.

Thonhauser, J. (2008). *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen eine zentrale Komponente organisierten Lehrens und Lernens aus der Sicht von Lernforschung, Allgemeiner Didaktik und Fachdidaktik*. Münster: Waxmann.

Thorndike, E. L. (1922). *Psychologie der Erziehung*. Jena: Gustav Fischer.

Tiefel, S. (2005). Kodierung nach der Grounded Theory lern- und bildungstheoretisch modifiziert: Kodierungsleitlinien für die Analyse biographischen Lernens. *ZBBS*, *6*(1), 65-84.

Tolman, E. C. (1932/1967). *Purposive behavior in animals and men*. New York, NY: Appleton-Century-Crofts.

Treilibs, V., Burkhardt, H., & Low, B. (1980). *Formulation processes in mathematical modelling*. Nottingham: Schell Center for mathematical education.

Turner R. et al. (in press). Using Mathematical Competencies to Predict Item Difficulty in PISA: A MEG Study 2003-2009. *Appear in PISA Research Conference 2009*. Kiel.

van Dijk, T. A., & Kintsch, W. (1983). *Strategies of Discourse Comprehension*. NY: Academic Press.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets and Zeitlinger.

Vidacovic, D., & Martin, W., O. (2004). Small-group searches for mathematical proofs and individual reconstructions of mathematical concepts. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 465-492.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

Vygotskij, L. S. (1969). *Denken und Sprechen*. Stuttgart: Fischer.

Wagenschein, M. (1965). *Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken*. Stuttgart: Klett.

Weidle, R., & Wagner, A. C. (1994). Die Methode des lauten Denkens. In G. L. Huber & H. Mandl (Eds.), *Verbale Daten: eine Einführung in die Grundlagen und Methoden der Erhebung und Methoden der Auswertung* (pp. 81-103). Basel: Beltz.

Weinert, F. E. (2001a). *Leistungsmessungen in Schulen*. Weinheim: Beltz.

Weinert, F. E. (2001b). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen - eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Ed.), *Leistungsmessungen in Schulen* (pp. 17-31). Weinheim und Basel: Beltz.

Weinstein, C. E., Husman, J., & Dierking, D. R. (2000). Self-Regulation Interventions with a Focus on Learning Strategies. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich & M. Zeidner (Eds.), *Handbook Self-Regulation* (pp. 728-747). San Diego: Academic press.

Weinstein, C. E., & Mayer, R. E. (1986). The Teaching of Learning Strategies. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (3 ed., pp. 315-327).

Wertheimer, M. (1945/1964). *Produktives Denken* (2 ed.). Frankfurt, Main: Kramer.

Wild, E., Hofer, M., & Pekrun, R. (2001). Psychologie des Lerners. In A. Krapp & B. Weidemann (Eds.), *Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch*: Belz.

Wild, K. P. (2001). Lernstrategien und Lernstile. In D. H. Rost (Ed.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (pp. 424-428).

Willer, J. (2003). *Didaktik des Physikunterrichts*. Frankfurt a. M.: Harri Deutsch.

Winnefeld, F. (1978). *Pädagogischer Kontakt und pädagogisches Feld. Beiträge zur Pädagogischen Psychologie*. München: Reinhardt.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, (61), 37-46.

Wittenberg, A. I. (1963). *Bildung und Mathematik*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C. (1978). *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (5 ed.). Braunschweig: Vieweg.

Wygotski, L. S. (1988). *Denken und Sprechen*. Frankfurt a.M.: Fischer Taschenbuch.

Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a Self-Regulated Learner: An Overview. *Theory into Practice*, *41*(2), 61-70.

8 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1. Interpolationsprobleme 25
Abbildung 2. Gestaltungsprobleme 26
Abbildung 3. Aufgabe Riesenschuhe (aus Drüke-Noe & Leiß, 2005) 27
Abbildung 4. Aufgabe Weltgrößte Schuhe 28
Abbildung 5. Versuch mit Menschenaffen (Köhler, 1926) 33
Abbildung 6. Analyse des Lösungsprozesses bei Wertheimer (Wertheimer, 1945/1964, S. 60) 33
Abbildung 7. Versuchsaufbau von Tolman (Abbildung aus Hothersall, 1995, S. 498) 34
Abbildung 8. TOTE-Einheit 36
Abbildung 9. Skizze zur Aufgabe Riesenschuhe 37
Abbildung 11. Schwierigkeiten und Fehler im Problemraum 41
Abbildung 12. Vier Dimensionen einer Lernumgebung (Collins, et al., 1989) 65
Abbildung 13. Eine Darstellung des Modellierungsprozesses nach Maaß, 2004 68
Abbildung 14. Aufgabe Murmeln 74
Abbildung 15. Aufgabe Tanken (aus Blum & Leiss, 2005b) 74
Abbildung 16. Modellierungskreislauf (Blum & Leiss, 2007) 76
Abbildung 17. Kognitive und metakognitive Prozesse bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben 84
Abbildung 18. Aufgabe Zuckerhut (aus Blum & Leiss, 2007) 88
Abbildung 19. Ein Situationsmodell zur Aufgabe Zuckerhut 89
Abbildung 20. Ein Realmodell zur Aufgabe Zuckerhut 90
Abbildung 21. Ein mathematisches Modell zur Aufgabe Zuckerhut 91
Abbildung 22. Aufgabe Abkürzung 93
Abbildung 23. Ein Situationsmodell zur Aufgabe Abkürzung 94
Abbildung 24. Ein Realmodell zur Aufgabe Abkürzung 95
Abbildung 25. Ein mathematisches Modell zur Aufgabe Abkürzung 95
Abbildung 26. Aufgabe Regenwald 98
Abbildung 27. Situationsmodell zur Aufgabe Regenwald 99
Abbildung 28. Vergleich zweier Zahlen (90 und 24 000) im mathematischen Modell zur Aufgabe Regenwald 102
Abbildung 29. Eine Lösung der Aufgabe Regenwald 103
Abbildung 30. Skizze von Videoaufnahmen der Aufgabenbearbeitung (links) und des Interviews (rechts). S ist die Abkürzung für Schüler und I für Interviewleiter 108
Abbildung 32. Lösung der Aufgabe Zuckerhut von Manfred und seinem Partner 115
Abbildung 34. Lösung der Aufgabe Zuckerhut von Oliver und seinem Partner 120

Abbildung 35. Skizze von Bernd zur Aufgabe Zuckerhut 124
Abbildung 36. Lösung der Aufgabe Zuckerhut von Bernd und seinem Partner 126
Abbildung 37. Skizze von Kathrin zur Aufgabe Zuckerhut.. 131
Abbildung 38. Lösung der Aufgabe Zuckerhut von Kathrin und ihrem Partner 132
Abbildung 39. Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut 136
Abbildung 40. Skizze von Manfred zur Aufgabe Abkürzung 140
Abbildung 41. Lösung der Aufgabe Abkürzung von Manfred und seinem Partner 141
Abbildung 42. Lösung der Aufgabe Abkürzung von Oliver und seinem Partner.................. 146
Abbildung 43. Skizze von Bernd zur Aufgabe Abkürzung 150
Abbildung 44. Lösung der Aufgabe Abkürzung von Bernd und seinem Partner 151
Abbildung 45. Skizze von Kathrin zur Aufgabe Abkürzung 156
Abbildung 46. Lösung der Aufgabe Abkürzung von Kathrin und ihrem Partner.................. 157
Abbildung 47. Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung........................... 161
Abbildung 48. Lösung der Aufgabe Regenwald von Manfred und seinem Partner 165
Abbildung 49. Lösung der Aufgabe Regenwald von Oliver und seinem Partner.................. 172
Abbildung 50. Lösung der Aufgabe Regenwald von Bernd und seinem Partner 178
Abbildung 51. Lösung der Aufgabe Regenwald von Kathrin und ihrem Partner.................. 183
Abbildung 52. Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald........................... 188
Abbildung 53. Ein Modell der Funktionsweise von Bildungssystemen (Oelkers & Reusser, 2008, S. 17) 204
Abbildung 54. Motivationale und kognitive Komponenten selbstgesteuerten Lernens (aus Friedrich & Mandl, 1997, S. 242) 210
Abbildung 55. Aufgabe Drei Tassen 222

9 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1. Modellierungsaufgaben und Schüler, die die Aufgaben bearbeitet haben 106

Tabelle 2. Ein Ausschnitt aus dem Transkript zur Bearbeitung der Aufgabe Zuckerhut durch Manfred und seinen Partner 110

Tabelle 3. Ein Ausschnitt aus dem Tranksript zum Interview von Manfred nach der Bearbeitung der Aufgabe Zuckerhut 111

Tabelle 4. Übersicht: Manfreds Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut 118

Tabelle 5. Übersicht: Olivers Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut 123

Tabelle 6. Übersicht: Bernds Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut 129

Tabelle 7. Übersicht: Kathrins Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut 134

Tabelle 8. Überblick über die Schüler-Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Zuckerhut 139

Tabelle 9. Übersicht: Manfreds Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung 143

Tabelle 10. Übersicht: Olivers Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung 148

Tabelle 11. Übersicht: Bernds Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung 154

Tabelle 12. Übersicht: Kathrins Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung 159

Tabelle 13. Überblick über die Schüler-Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Abkürzung 162

Tabelle 14. Übersicht: Manfreds Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald 169

Tabelle 15. Übersicht: Olivers Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald 174

Tabelle 16. Übersicht: Bernds Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald 180

Tabelle 17. Übersicht: Kathrins Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald 185

Tabelle 18. Überblick über die Schüler-Handlungsstrategien beim Bearbeiten der Aufgabe Regenwald 190