

Quasi-Interpolation von Funktionen  
und  
Anwendungen auf Potentialprobleme

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
Dr. rer. nat.  
am Fachbereich Mathematik/Informatik  
der Universität Kassel

vorgelegt von

Frank Müller

Kassel, den 2. Februar 2005

Erster Gutachter: Prof. Dr. Werner Varnhorn  
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Rainer Picard  
Tag der Disputation: 22.04.2005

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>Bezeichnungen</b>	<b>8</b>
<b>1 Quasi-Interpolation von Funktionen</b>	<b>11</b>
1.1 Quasi-Interpolation von Funktionen aus $C_0^2(\mathbb{R})$ . . . . .	11
1.2 Beispiele . . . . .	16
1.3 Quasi-Interpolation von Funktionen aus $C^2([-1, 1])$ . . . . .	20
1.3.1 Quasi-Interpolation durch Fortsetzung . . . . .	20
1.3.2 Direkte Quasi-Interpolation . . . . .	21
1.4 Beispiele . . . . .	27
<b>2 Approximation harmonischer Funktionen</b>	<b>33</b>
2.1 Das Dirichlet-Problem . . . . .	33
2.2 Das Approximationsverfahren . . . . .	34
2.2.1 Der erste Approximationsschritt . . . . .	34
2.2.2 Der zweite Approximationsschritt . . . . .	35
2.2.3 Der dritte Approximationsschritt . . . . .	35
2.3 Konvergenzuntersuchung . . . . .	37
2.3.1 Konvergenz im ersten Approximationsschritt . . . . .	37
2.3.2 Konvergenz im zweiten Approximationsschritt . . . . .	38
2.3.3 Konvergenz im dritten Approximationsschritt . . . . .	39
2.4 Vergleich mit linearen Splines . . . . .	48
2.5 Beispiele am Einheitskreis . . . . .	52
2.6 Beispiele an einer Ellipse . . . . .	57
<b>3 Approximation von Stokes-Funktionen</b>	<b>61</b>
3.1 Das Dirichlet-Problem . . . . .	61
3.2 Das Approximationsverfahren . . . . .	63
3.2.1 Der erste Approximationsschritt . . . . .	63
3.2.2 Der zweite Approximationsschritt . . . . .	64
3.2.3 Der dritte Approximationsschritt . . . . .	65
3.3 Konvergenzuntersuchung . . . . .	66
3.3.1 Konvergenz im ersten Approximationsschritt . . . . .	67
3.3.2 Konvergenz im zweiten Approximationsschritt . . . . .	68
3.3.3 Konvergenz im dritten Approximationsschritt . . . . .	70
3.4 Beispiele am Einheitskreis . . . . .	71
3.5 Beispiele an einer Ellipse . . . . .	77
<b>Bemerkungen und Ausblick</b>	<b>83</b>
<b>Literatur</b>	<b>85</b>



# Einleitung

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist ein von Maz'ya entwickeltes Verfahren [25], eine gegebene Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  durch eine Linearkombination  $f_h$  radialer glatter exponentiell fallender Basisfunktionen zu approximieren, die im Gegensatz zu den Splines lediglich eine näherungsweise Zerlegung der Eins bilden und somit ein für  $h \rightarrow 0$  nicht konvergentes Verfahren definieren (Approximate Approximations).

Es zeigt sich jedoch, dass diese fehlende Konvergenz für die Praxis nicht relevant ist, da der Fehler zwischen  $f$  und der Approximation  $f_h$  über gewisse Parameter unterhalb der Maschinengenauigkeit heutiger Rechner eingestellt werden kann.

Darüber hinaus besitzt das Verfahren große Vorteile bei der numerischen Lösung von Cauchy-Problemen der Form

$$Lu = f$$

mit einem geeigneten linearen partiellen Differentialoperator  $L$  im  $\mathbb{R}^n$ . Approximiert man die rechte Seite  $f$  durch  $f_h$ , so lassen sich in vielen Fällen explizite Formeln für die entsprechenden approximativen Volumenpotentiale  $u_h$  angeben, die nur noch eine eindimensionale Integration (z.B. die Errorfunktion) enthalten.

Zur numerischen Lösung von Randwertproblemen ist das von Maz'ya entwickelte Verfahren bisher noch nicht genutzt worden, mit Ausnahme heuristischer bzw. experimenteller Betrachtungen zur sogenannten Randpunktmethode [21], [26]. Hier setzt die vorliegende Arbeit ein.

Wir entwickeln auf der Grundlage radialer Basisfunktionen ein neues Approximationsverfahren, welches die Vorzüge der von Maz'ya für Cauchy-Probleme entwickelten Methode auf die numerische Lösung von Randwertproblemen überträgt. Dabei werden stellvertretend das innere Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung und für die Stokes-Gleichungen im  $\mathbb{R}^2$  behandelt, wobei für jeden der einzelnen Approximationsschritte Konvergenzuntersuchungen durchgeführt und Fehlerabschätzungen angegeben werden.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Das erste Kapitel beschäftigt sich mit der Quasi-Interpolation von Funktionen, da diese bei der Entwicklung des Verfahrens eine zentrale Rolle spielt. Zunächst betrachten wir für  $d > 0$  und  $m \in \mathbb{Z}$  den Gauß-Kern

$$g_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_m(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi d}} e^{-\frac{1}{d}(x-m)^2}.$$

Dann gilt für jedes  $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(x) \approx 1,$$

wenn  $d$  genügend groß ist. Das System der Gauß-Kerne bildet also auf ganz  $\mathbb{R}$  eine näherungsweise Zerlegung der Eins. Für eine Funktion  $u \in C_0^2(\mathbb{R})$  definieren wir nun die Quasi-Interpolierende

$$u_{d,h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_{d,h}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(mh) e^{-\frac{1}{d}(\frac{x}{h}-m)^2}.$$

Dabei heißt  $u_{d,h}$  Quasi-Interpolierende von  $u$ , weil  $u_{d,h}$  an den Stellen  $mh$  nur näherungsweise mit  $u$  übereinstimmt. Die Quasi-Interpolierende hat jedoch eine schöne Approximationseigenschaft, sie ist pseudokonvergent gegen  $u$  für  $h \rightarrow 0$  von der Pseudokonvergenzordnung zwei. Dies bedeutet, dass der Parameter  $d$  so gewählt werden kann, dass bei der Fehlerabschätzung neben dem Term mit  $h^2$  nur Terme auftreten, die in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit liegen und somit für praktische Berechnungen vernachlässigt werden können.

Möchte man für eine Funktion  $u \in C^2([-1, 1])$  die Quasi-Interpolierende  $u_{d,h}$  wie oben definieren, so ist zu beachten, dass  $u(mh)$  nur für  $mh \in [-1, 1]$  definiert ist. Wir werden zum Einen die Funktion  $u$  zu einer Funktion  $\tilde{u} \in C_0^2(\mathbb{R})$  fortsetzen. Dann können wir  $\tilde{u}_{d,h}$  wie oben definieren. Zum Anderen werden wir die direkte Quasi-Interpolierende  $u_{d,h}$  von  $u$  definieren, indem wir die Summation nur über die  $m$  erstrecken, für die  $u(mh)$  definiert ist. Für  $N \in \mathbb{N}$  und  $h = 1/N$  definieren wir somit die direkte Quasi-Interpolierende

$$u_{d,h} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_{d,h}(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N u(mh) e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}}.$$

Der Zusatz direkt drückt aus, dass  $u$  nicht fortgesetzt wird. Für den durch das Abschneiden entstandenen Fehler werden wir Abschätzungen angeben.

Im zweiten Kapitel wird auf der Grundlage von Kapitel 1 ein Approximationsverfahren für das folgende innere Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung im  $\mathbb{R}^2$  entwickelt. Gegeben ist ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  mit einem  $C^2$ -Rand  $\Gamma$ . Weiterhin ist eine Funktion  $b \in C(\Gamma)$  gegeben. Gesucht ist eine Funktion  $v \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$  mit

$$\Delta v = 0 \quad \text{in } G, \quad v = b \quad \text{auf } \Gamma.$$

Dabei bezeichnet  $\Delta$  den Laplace-Operator. Dieses innere Dirichlet-Problem besitzt eine eindeutige Lösung  $v$ , welche in  $G$  dargestellt werden kann durch

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k(x, t) u(t) dt.$$

Hier ist  $k$  eine bekannte stetige Kernfunktion, und die unbekannte Funktion  $u$  ist die eindeutige Lösung einer Integralgleichung. Wir wollen nun, ausgehend von der Integraldarstellung,  $v$  in  $G$  näherungsweise durch einen expliziten analytischen Ausdruck darstellen.

Das Approximationsverfahren besteht aus drei Schritten. Im ersten Approximationsschritt ersetzen wir die unbekannte Funktion  $u$  in der Integraldarstellung durch ihre direkte Quasi-Interpolierende  $u_{d,h}$  und erhalten

$$\begin{aligned} v(x) &\approx -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k(x, t) u_{d,h}(t) dt \\ &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N u(mh) \int_{-1}^1 k(x, t) e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt. \end{aligned}$$

Im zweiten Approximationsschritt ersetzen wir bei der Integration den Integral-kern  $k(x, t)$  durch  $k(x, mh)$  und erhalten

$$\begin{aligned} v(x) &\approx -\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N u(mh) k(x, mh) \int_{-1}^1 e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt \\ &= -\frac{1}{4\pi N} \sum_{m=-N}^N u(mh) k(x, mh) \operatorname{erf} \left( \frac{m-N}{\sqrt{d}}, \frac{m+N}{\sqrt{d}} \right) \end{aligned}$$

mit der Errorfunktion  $\operatorname{erf}$  (vgl. Definition 1.9).

Da wir die Funktion  $u$  nicht kennen, kennen wir auch die Werte  $u(mh)$  nicht. Daher bestimmen wir im dritten Approximationsschritt Näherungswerte  $u_m$  für die Funktionswerte  $u(mh)$ . Dies geschieht mit dem Nyström-Verfahren. Ausgangspunkt ist die Integralgleichung, deren eindeutige Lösung  $u$  ist. Diese wird an den Punkten  $mh$  für  $m = -N, \dots, N$  ausgewertet. Die auftretenden Integrale werden dabei mit der summierten Trapezregel approximiert. So erhalten wir ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von Näherungswerten  $u_m$  für die Funktionswerte  $u(mh)$ . Schließlich setzen wir

$$v_{d,h}(x) := -\frac{1}{4\pi N} \sum_{m=-N}^N u_m k(x, mh) \operatorname{erf} \left( \frac{m-N}{\sqrt{d}}, \frac{m+N}{\sqrt{d}} \right)$$

und werden sehen, dass  $v_{d,h}$  eine gute Approximation für die Lösung  $v$  des Dirichlet-Problems liefert, wenn die Funktion  $b$  genügend glatt ist.

Wir definieren weiterhin  $v_h^{sp}$ , indem wir dieselbe Prozedur wie eben durchführen, nur dass wir jetzt  $u$  nicht durch  $u_{d,h}$  sondern durch die Spline-Interpolierende  $u_h^{sp}$  ersetzen. Dabei erhalten wir  $u_h^{sp}$ , indem wir  $u$  durch lineare Splines interpolieren. Es wird sich herausstellen, dass für alle  $x \in G$  gilt

$$\lim_{d \rightarrow 0} v_{d,h}(x) = v_h^{sp}(x).$$

Anschließend werden wir verschiedene Beispiele am Einheitskreis und an einer Ellipse betrachten.

Im dritten Kapitel wird das Approximationsverfahren auf ein inneres Dirichlet-Problem für die Stokes-Gleichungen im  $\mathbb{R}^2$  angewendet. Dabei ist  $G \subset \mathbb{R}^2$  wieder ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet mit einem  $C^2$ -Rand  $\Gamma$ , und  $b \in C(\Gamma, \mathbb{R}^2)$  ist ein vorgegebener Randwert. Gesucht sind ein Geschwindigkeitsfeld  $v \in C^2(G, \mathbb{R}^2) \cap C(\overline{G}, \mathbb{R}^2)$  und eine Druckfunktion  $p \in C^1(G)$  als Lösung von

$$-\Delta v + \nabla p = 0 \quad \text{in } G, \quad \nabla \cdot v = 0 \quad \text{in } G, \quad v = b \quad \text{auf } \Gamma.$$

Genügt der Randwert  $b$  einer sogenannten Verträglichkeitsbedingung, so besitzt dieses innere Dirichlet-Problem eine Lösung  $(v, p)$ . Dabei ist das Geschwindigkeitsfeld  $v$  eindeutig bestimmt, und die Druckfunktion  $p$  ist eindeutig bis auf eine additive Konstante. Das Geschwindigkeitsfeld  $v$  kann in  $G$  dargestellt werden durch

$$v(x) = \int_{-1}^1 K(x, t) u(t) dt.$$

Dabei ist  $K$  ein bekannter stetiger (matrixwertiger) Integralkern, und die unbekannte (vektorwertige) Funktion  $u$  ist die eindeutige Lösung einer Integralgleichung.

Wir werden, ausgehend von der Integraldarstellung, das Geschwindigkeitsfeld  $v$  in  $G$  näherungsweise durch einen analytischen Ausdruck darstellen. Das Vorgehen hier orientiert sich am zweiten Kapitel, wobei in diesem Fall das Geschwindigkeitsfeld vektorwertig ist. Dazu ersetzen wir die Komponenten  $u_i$  von  $u$  durch die direkten Quasi-Interpolierenden  $(u_i)_{d,h}$  und gehen analog zum zweiten Kapitel vor. Das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung von Näherungswerten  $(u_i)_m$  von  $u_i(mh)$  erhalten wir wieder mit dem Nyström-Verfahren. Abschließend werden auch hier verschiedene Beispiele am Einheitskreis und an einer Ellipse betrachtet.



## Bezeichnungen

Mit  $\mathbb{N}$  bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen, mit  $\mathbb{Z}$  die Menge der ganzen Zahlen und mit  $\mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen. Für  $x \in \mathbb{R}$  ist  $|x|$  der Absolutbetrag von  $x$ , und für  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $|x|$  die euklidische Norm von  $x$ . Weiterhin bezeichnet  $x \cdot y$  das euklidische Skalarprodukt für  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Ist  $D \subset \mathbb{R}$  und  $f$  eine beschränkte (skalare oder vektorwertige) Funktion auf  $D$ , so definieren wir die Supremumsnorm von  $f$  durch

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in D} |f(t)|.$$

Die Menge  $C_0(\mathbb{R})$  besteht aus allen stetigen Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger. Dabei hat eine Funktion einen kompakten Träger, wenn sie außerhalb einer kompakten Menge verschwindet. Für  $k \in \mathbb{N}$  ist  $C_0^k(\mathbb{R})$  die Menge aller  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger, und die Menge  $C^k([-1, 1])$  besteht aus allen stetigen Funktionen  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , die im offenen Intervall  $(-1, 1)$   $k$ -mal stetig differenzierbar sind, und deren Ableitungen sich stetig in die Randpunkte fortsetzen lassen.

Für eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  bezeichnet  $C(D)$  die Menge der stetigen Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , und  $\bar{D}$  ist der topologische Abschluss von  $D$ . Ist  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $k \in \mathbb{N}$ , so bezeichnet  $C^k(D)$  die Menge der  $k$ -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Für  $f \in C^1(D)$  ist der Gradient von  $f$  definiert durch

$$\nabla f : D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \nabla f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}.$$

Dabei ist  $\partial_i f(x)$  die partielle Ableitung von  $f$  nach der  $i$ -ten Koordinate im Punkt  $x \in D$ . Weiterhin ist für  $f \in C^2(D)$  die Funktion  $\Delta f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\Delta f(x) := \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f(x).$$

wobei  $\partial_i^2 f(x)$  die zweite partielle Ableitung von  $f$  nach der  $i$ -ten Koordinate bezeichnet. Der Operator  $\Delta : C^2(D) \rightarrow C(D)$ ,  $f \mapsto \Delta f$  heißt Laplace-Operator.

Die Menge  $C(D, \mathbb{R}^m)$  besteht aus allen stetigen Vektorfunktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Ist speziell  $n = m$ , so sprechen wir von Vektorfeldern. Analog zum skalaren Fall ist  $C^k(D, \mathbb{R}^m)$  für  $k \in \mathbb{N}$  die Menge der  $k$ -mal stetig partiell differenzierbaren Vektorfunktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Für ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld  $f = (f_1, \dots, f_n)^T \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$  ist die Divergenz von  $f$  definiert durch

$$\nabla \cdot f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nabla \cdot f(x) := \sum_{i=1}^n \partial_i f_i(x).$$

Bei Vektorfunktionen wird der Laplace-Operator komponentenweise angewendet, d.h. für  $f \in C^2(D, \mathbb{R}^m)$  definieren wir

$$\Delta f : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \Delta f(x) := \begin{pmatrix} \Delta f_1(x) \\ \vdots \\ \Delta f_m(x) \end{pmatrix}.$$

# 1 Quasi-Interpolation von Funktionen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Approximation von Funktionen durch ihre Quasi-Interpolierenden. Zuerst betrachten wir Funktionen aus  $C_0^2(\mathbb{R})$  und anschließend Funktionen aus  $C^2([-1, 1])$ .

## 1.1 Quasi-Interpolation von Funktionen aus $C_0^2(\mathbb{R})$

Hier untersuchen wir die Quasi-Interpolierende von Funktionen aus  $C_0^2(\mathbb{R})$ . Dazu konstruieren wir zunächst mit Hilfe von Gauß-Kernen eine näherungsweise Zerlegung der Eins auf  $\mathbb{R}$ .

Sei  $d > 0$ . Für  $m \in \mathbb{Z}$  definieren wir den Gauß-Kern

$$g_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_m(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi d}} e^{-\frac{1}{d}(t-m)^2}$$

und betrachten die Funktion

$$\vartheta_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vartheta_d(t) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(t).$$

Die Funktion  $\vartheta_d$  ist glatt, periodisch mit der Periode  $p = 1$  und stimmt mit ihrer Fourierreihe überein. Nach Bestimmung der Fourierkoeffizienten erhält man somit auf ganz  $\mathbb{R}$  die beiden Darstellungen [19]

$$\begin{aligned} \vartheta_d(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{d}} \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 k^2 d} \cos(2\pi kt). \end{aligned}$$

Mit der zweiten Darstellung folgt

$$|\vartheta_d(t) - 1| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 k^2 d} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 kd} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\pi^2 d}\right)^k = \frac{2e^{-\pi^2 d}}{1 - e^{-\pi^2 d}}.$$

Also ist

$$\|\vartheta_d - 1\|_{\infty} \leq \frac{2e^{-\pi^2 d}}{1 - e^{-\pi^2 d}} =: \varepsilon_0(d).$$

Für wachsendes  $d$  fällt  $\varepsilon_0(d)$  streng monoton gegen Null. Dies bedeutet: Je größer  $d$  gewählt wird, umso kleiner wird die Abweichung von  $\vartheta_d$  zur Eins. Man kann also sagen: Das System der Gauß-Kerne  $\{g_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  liefert für genügend großes  $d$  eine näherungsweise Zerlegung der Eins auf  $\mathbb{R}$ .

In der folgenden Tabelle sind  $\vartheta_d(0) - 1$  und  $\varepsilon_0(d)$  für verschiedene  $d$  angegeben.

$d$	$\vartheta_d(0) - 1$	$\varepsilon_0(d)$
0.01	4.6419	19.2807
0.1	0.784286	1.18831
1	$1.03446 \cdot 10^{-4}$	$1.03452 \cdot 10^{-4}$
2	$5.35058 \cdot 10^{-9}$	$5.35058 \cdot 10^{-9}$
3	$2.76668 \cdot 10^{-13}$	$2.76749 \cdot 10^{-13}$

Die Tabelle zeigt: Die Abschätzung von  $\|\vartheta_d - 1\|_\infty$  durch  $\varepsilon_0(d)$  ist nicht zu grob.

Aus den beiden Darstellungen von  $\vartheta_d$  erhalten wir für die Ableitungen erster und zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}\vartheta'_d(t) &= -\frac{2}{d} \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (t-m) e^{-\frac{(t-m)^2}{d}} \\ &= -4\pi \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\pi^2 k^2 d} \sin(2\pi kt)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\vartheta''_d(t) &= -\frac{2}{d} \vartheta_d(t) + \left(\frac{2}{d}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (t-m)^2 e^{-\frac{(t-m)^2}{d}} \\ &= -8\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\pi^2 k^2 d} \cos(2\pi kt).\end{aligned}$$

Durch Ableiten der geometrischen Reihe im Inneren ihres Konvergenzkreises folgen für  $|q| < 1$  die Identitäten

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^k = \frac{q}{(1-q)^2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k = \frac{q^2 + q}{(1-q)^3}.$$

Mit den Fourierreihen der Ableitungen erhält man hieraus die Abschätzungen

$$\|\vartheta'_d\|_\infty \leq \frac{4\pi e^{-\pi^2 d}}{(1 - e^{-\pi^2 d})^2} =: \varepsilon_1(d)$$

und

$$\|\vartheta''_d\|_\infty \leq \frac{8\pi^2 e^{-\pi^2 d} (1 + e^{-\pi^2 d})}{(1 - e^{-\pi^2 d})^3} =: \varepsilon_2(d).$$

Für wachsendes  $d$  fallen  $\varepsilon_1(d)$  und  $\varepsilon_2(d)$  streng monoton gegen Null. Die folgende Tabelle zeigt  $\varepsilon_1(d)$  und  $\varepsilon_2(d)$  für verschiedene  $d$ .

$d$	$\varepsilon_1(d)$	$\varepsilon_2(d)$
0.01	1289.01	164256
0.1	11.9025	163.654
1	$6.5004 \cdot 10^{-4}$	$4.08474 \cdot 10^{-3}$
2	$3.36187 \cdot 10^{-8}$	$2.11232 \cdot 10^{-7}$
3	$1.73886 \cdot 10^{-12}$	$1.09256 \cdot 10^{-11}$

Für  $u \in C_0^2(\mathbb{R})$  und  $h > 0$  definieren wir nun

$$u_{d,h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_{d,h}(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(mh) e^{-\frac{1}{d} \left(\frac{t}{h} - m\right)^2}.$$

Die Funktion  $u_{d,h}$  heißt Quasi-Interpolierende von  $u$ , da sie in den Punkten  $mh$  näherungsweise, jedoch nicht exakt, mit  $u$  übereinstimmt.

Für  $t \in \mathbb{R}$  und  $m \in \mathbb{Z}$  erhalten wir mit der Taylorformel im Punkt  $mh$  die Darstellung

$$u(mh) = u(t) + u'(t)(mh - t) + \frac{u''(t_m)}{2}(mh - t)^2$$

mit einem  $t_m$  zwischen  $t$  und  $mh$ . Setzen wir diesen Ausdruck für  $u(mh)$  in  $u_{d,h}$  ein, so erhalten wir für die Differenz  $u_{d,h} - u$  im Punkt  $t$

$$\begin{aligned} u_{d,h}(t) - u(t) &= \frac{u(t)}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{d} \left(\frac{t}{h} - m\right)^2} - \frac{h u'(t)}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{t}{h} - m\right) e^{-\frac{1}{d} \left(\frac{t}{h} - m\right)^2} \\ &\quad + \frac{h^2}{2\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u''(t_m) \left(\frac{t}{h} - m\right)^2 e^{-\frac{1}{d} \left(\frac{t}{h} - m\right)^2} - u(t). \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{d} \left(\frac{t}{h} - m\right)^2} = \vartheta_d \left(\frac{t}{h}\right)$$

und

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{t}{h} - m\right) e^{-\frac{1}{d} \left(\frac{t}{h} - m\right)^2} = \frac{d}{2} \vartheta'_d \left(\frac{t}{h}\right)$$

folgt

$$u_{d,h}(t) - u(t) = \left( \vartheta_d \left( \frac{t}{h} \right) - 1 \right) u(t) + \frac{dh}{2} \vartheta'_d \left( \frac{t}{h} \right) u'(t) + \frac{h^2}{2\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u''(t_m) \left( \frac{t}{h} - m \right)^2 e^{-\frac{1}{d} \left( \frac{t}{h} - m \right)^2}.$$

Da  $u \in C_0^2(\mathbb{R})$  ist, sind  $u$ ,  $u'$  und  $u''$  beschränkt. Man erhält

$$|u_{d,h}(t) - u(t)| \leq \|\vartheta_d - 1\|_{\infty} \|u\|_{\infty} + \frac{dh}{2} \|\vartheta'_d\|_{\infty} \|u'\|_{\infty} + \frac{h^2 \|u''\|_{\infty}}{2\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{t}{h} - m \right)^2 e^{-\frac{1}{d} \left( \frac{t}{h} - m \right)^2}.$$

Wegen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{t}{h} - m \right)^2 e^{-\frac{1}{d} \left( \frac{t}{h} - m \right)^2} = \frac{d}{2} \left( \vartheta_d \left( \frac{t}{h} \right) + \frac{d}{2} \vartheta''_d \left( \frac{t}{h} \right) \right)$$

folgt

$$|u_{d,h}(t) - u(t)| \leq \|\vartheta_d - 1\|_{\infty} \|u\|_{\infty} + \frac{dh}{2} \|\vartheta'_d\|_{\infty} \|u'\|_{\infty} + \frac{dh^2}{4} \left( \vartheta_d \left( \frac{t}{h} \right) + \frac{d}{2} \vartheta''_d \left( \frac{t}{h} \right) \right) \|u''\|_{\infty}.$$

Wir setzen

$$\|u\|_{2,\infty} := \max\{\|u\|_{\infty}, \|u'\|_{\infty}, \|u''\|_{\infty}\}$$

und

$$c(d) := \frac{d}{4} \left( 1 + \varepsilon_0(d) + \frac{d}{2} \varepsilon_2(d) \right).$$

Mit den bereits bekannten Abschätzungen

$$\|\vartheta_d - 1\|_{\infty} \leq \varepsilon_0(d), \quad \|\vartheta'_d\|_{\infty} \leq \varepsilon_1(d), \quad \|\vartheta''_d\|_{\infty} \leq \varepsilon_2(d)$$

erhalten wir schließlich die Fehlerabschätzung

$$\|u_{d,h} - u\|_{\infty} \leq \|u\|_{2,\infty} \left( \varepsilon_0(d) + \frac{d}{2} \varepsilon_1(d) h + c(d) h^2 \right).$$

Wir formulieren die eben erhaltene Fehlerabschätzung als Satz.

**1.1 Satz.** Für  $u \in C_0^2(\mathbb{R})$  und  $d, h > 0$  definieren wir die Quasi-Interpolierende

$$u_{d,h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_{d,h}(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(mh) e^{-\frac{1}{d}(\frac{t}{h}-m)^2}$$

und erhalten die Fehlerabschätzung

$$\|u_{d,h} - u\|_{\infty} \leq \|u\|_{2,\infty} \left( \varepsilon_0(d) + \frac{d}{2} \varepsilon_1(d) h + c(d) h^2 \right)$$

mit

$$\varepsilon_0(d) = \frac{2e^{-\pi^2 d}}{1 - e^{-\pi^2 d}}, \quad \varepsilon_1(d) = \frac{4\pi e^{-\pi^2 d}}{(1 - e^{-\pi^2 d})^2}, \quad \varepsilon_2(d) = \frac{8\pi^2 e^{-\pi^2 d}(1 + e^{-\pi^2 d})}{(1 - e^{-\pi^2 d})^3}$$

und

$$c(d) = \frac{d}{4} \left( 1 + \varepsilon_0(d) + \frac{d}{2} \varepsilon_2(d) \right).$$

Für genügend großes  $d$  sind die ersten beiden Terme in der Fehlerabschätzung klein, und  $c(d)$  liegt in der Größenordnung von  $d$ . Somit liefert  $u_{d,h}$  eine Approximation von der Pseudokonvergenzordnung 2. Wir sprechen von Pseudokonvergenz, da zwar keine Konvergenz  $u_{d,h} \rightarrow u$  für  $h \rightarrow 0$  vorliegt, jedoch die ersten beiden Terme in der Fehlerabschätzung so klein gewählt werden können, dass sie in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit heutiger Rechner liegen, und somit für die numerische Berechnung vernachlässigt werden können. Bei nicht zu kleinem  $h$  ist somit der quadratische Term der dominierende. Daher sprechen wir von Pseudokonvergenz der Ordnung 2.

Wir haben die Eigenschaft, dass  $u$  kompakten Träger hat, bisher nur verwendet, um sicher zu stellen, dass  $u$  und die beiden Ableitungen beschränkt sind. Die Fehlerabschätzung würde genauso funktionieren, wenn wir fordern, dass  $u$  zweimal stetig differenzierbar ist und  $u, u', u''$  beschränkt sind. Dann könnten wir auch periodische Funktionen wie Sinus und Cosinus betrachten. Der wesentliche Vorteil bei Funktionen mit kompaktem Träger ist jedoch, dass  $u(mh)$  nur für endlich viele  $m$  von Null verschieden ist und somit die Summation numerisch realisiert werden kann. Bei unbeschränktem Träger müsste die Summation irgendwo abgebrochen werden, und der dadurch entstandene Fehler müsste untersucht werden.

## 1.2 Beispiele

Anhand einiger Beispiele wollen wir das Verhalten von  $u_{d,h}$  und  $u - u_{d,h}$  für verschiedene  $d$  und  $h$  untersuchen. Sei dazu  $N \in \mathbb{N}$  und  $h = 1/N$ .

**1.2 Beispiel.** Wir betrachten die Funktion

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(t) := \begin{cases} \cos^4\left(\frac{\pi t}{2}\right) & , \quad t \in [-1, 1], \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Man überprüft schnell, dass  $u \in C_0^2(\mathbb{R})$  ist. Es gilt

$$u_{d,h}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N u(mh) e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2},$$

denn für  $|m| > N$  ist  $mh \notin [-1, 1]$  und somit  $u(mh) = 0$ . Durch elementare Kurvendiskussion erhält man

$$\|u\|_{2,\infty} = \pi^2.$$

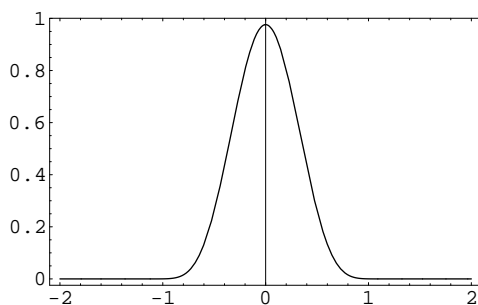
Also lautet die Fehlerabschätzung

$$\|u_{d,h} - u\|_{\infty} \leq \pi^2 \left( \varepsilon_0(d) + \frac{d}{2} \varepsilon_1(d) h + c(d) h^2 \right).$$

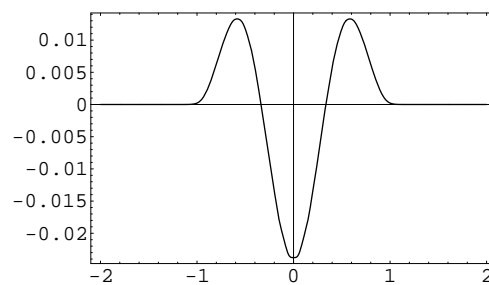
Wir wählen  $d = 1$ . Die Fehlerabschätzung liefert hier

$$\|u_{1,h} - u\|_{\infty} \leq 1.1 \cdot 10^{-3} + 3.3 \cdot 10^{-3} h + 2.5 h^2.$$

Wir betrachten nun  $u_{1,h}(t)$  und den Fehler  $u_{1,h}(t) - u(t)$  im Intervall  $[-2, 2]$  für  $N = 10$ , d.h.  $h = 0.1$ .



$u_{1,h}(t)$  für  $h = 0.1$

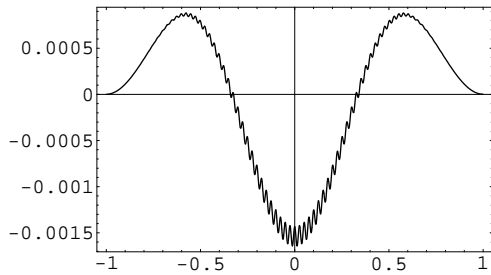


$u_{1,h}(t) - u(t)$  für  $h = 0.1$

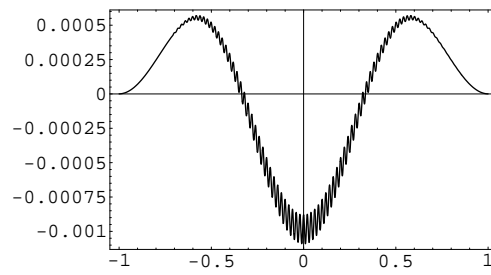
Für  $h = 0.1$  ist in der Fehlerabschätzung der quadratische Term  $2.5 h^2 = 0.025$  dominant. Im rechten Bild erkennt man, dass im Nullpunkt etwa dieser Fehler erreicht wird.



Wir betrachten nun den Fall, dass der quadratische Term nicht mehr der dominierende in der Fehlerabschätzung ist. Der absolute Term und der quadratische sind gleich, wenn gilt  $1.1 \cdot 10^{-3} = 2.5 h^2$ , also wenn gilt  $h^{-1} \approx 47.67$ . In den folgenden Bildern ist der Fehler  $u_{1,h}(t) - u(t)$  für  $N = 40$  und  $N = 50$  im Intervall  $[-1, 1]$  zu sehen.



$u_{1,h}(t) - u(t)$  für  $N = 40$



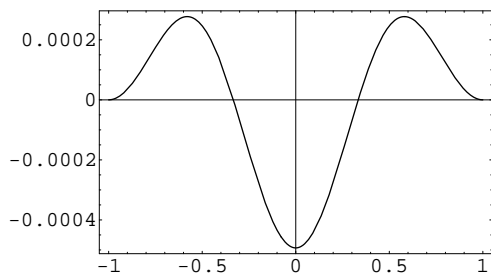
$u_{1,h}(t) - u(t)$  für  $N = 50$

Man kann beobachten, dass die Oszillationen, die durch den absoluten Term in  $u_{1,h}(t) - u(t)$  verursacht werden, bereits einen großen Einfluss haben. Für größere  $N$  dominiert der oszillierende Anteil.

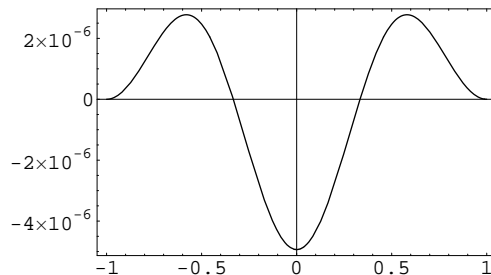
Nun wählen wir  $d = 2$ . Die Fehlerabschätzung liefert hier

$$\|u_{2,h} - u\|_{\infty} \leq 5.3 \cdot 10^{-8} + 3.4 \cdot 10^{-7} h + 5 h^2.$$

In den folgenden Bildern ist der Fehler  $u_{2,h}(t) - u(t)$  für  $N = 100$  und  $N = 1000$  im Intervall  $[-1, 1]$  zu sehen.



$u_{2,h}(t) - u(t)$  für  $N = 100$



$u_{2,h}(t) - u(t)$  für  $N = 1000$

Der quadratische Term  $5h^2$  ist für  $h \geq 10^{-3}$  dominant. In beiden Bildern erkennt man, dass dieser Fehler im Nullpunkt etwa erreicht wird.

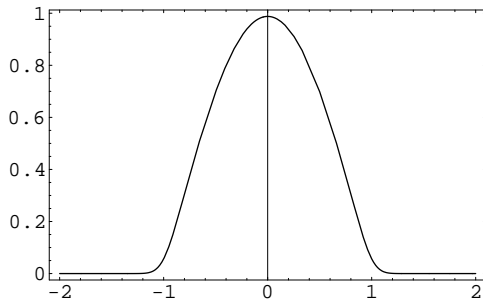
**1.3 Beispiel.** Wir betrachten die Funktion

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(t) := \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) & , \quad t \in [-1, 1], \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

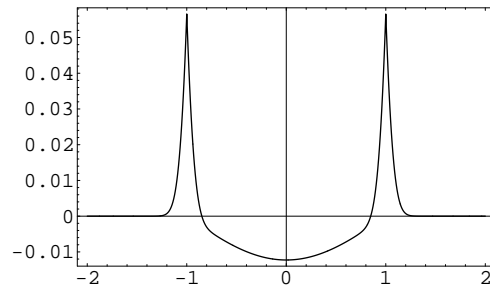
Hier gilt zwar  $u \in C_0(\mathbb{R})$ , jedoch  $u \notin C_0^2(\mathbb{R})$ . Die Fehlerabschätzung ist nun nicht mehr gültig. Wir betrachten trotzdem  $u_{d,h}$  und wählen  $d = 2$ . Es ist

$$u_{2,h}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-N}^N u(mh) e^{-\frac{1}{2}(tN-m)^2}.$$

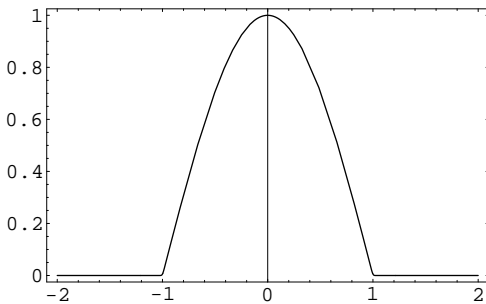
In den folgenden Bildern ist links  $u_{2,h}(t)$  und rechts der Fehler  $u_{2,h}(t) - u(t)$  im Intervall  $[-2, 2]$  für  $N = 10$  und  $N = 100$  zu sehen.



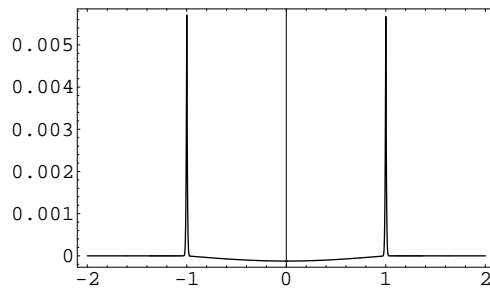
$u_{2,h}(t)$  für  $N = 10$



$u_{2,h}(t) - u(t)$  für  $N = 10$



$u_{2,h}(t)$  für  $N = 100$



$u_{2,h}(t) - u(t)$  für  $N = 100$

Man erkennt, dass in Punkten  $\pm 1$ , wo die Ableitung unstetig ist, der Fehler am größten ist. Für wachsendes  $N$  scheint jedoch auch dieser klein zu werden.

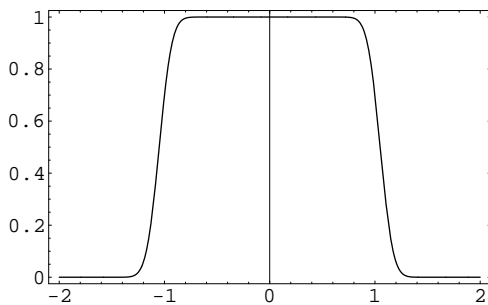
**1.4 Beispiel.** Wir betrachten die Funktion

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(t) := \begin{cases} 1 & , \quad t \in [-1, 1], \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

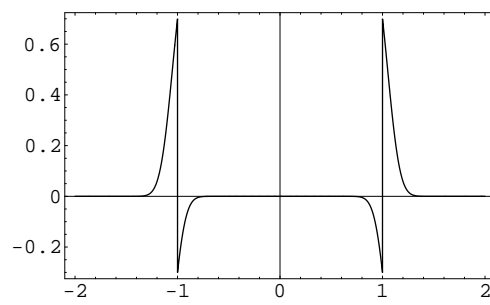
Hier hat  $u$  zwar kompakten Träger, ist jedoch unstetig. Die Fehlerabschätzung ist auch hier ungültig. Wir betrachten trotzdem  $u_{2,h}$ . Es ist

$$u_{2,h}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-N}^N e^{-\frac{1}{2}(tN-m)^2}.$$

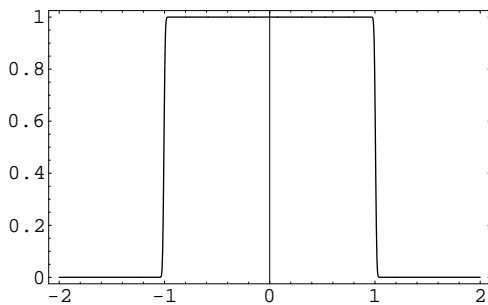
In den folgenden Bildern ist links  $u_{2,h}(t)$  und rechts der Fehler  $u_{2,h}(t) - u(t)$  im Intervall  $[-2, 2]$  für  $N = 10$  und  $N = 100$  zu sehen.



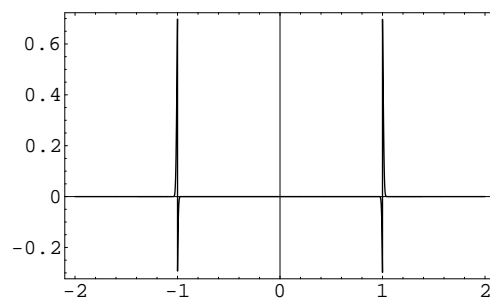
$u_{2,h}(t)$  für  $N = 10$



$u_{2,h}(t) - u(t)$  für  $N = 10$



$u_{2,h}(t)$  für  $N = 100$



$u_{2,h}(t) - u(t)$  für  $N = 100$

Man erkennt, dass in den Unstetigkeitsstellen  $\pm 1$  der maximale Fehler erreicht wird. Auch für wachsendes  $N$  wird dieser nicht klein, jedoch wird der extrem fehlerbehaftete Bereich schmaler.

### 1.3 Quasi-Interpolation von Funktionen aus $C^2([-1, 1])$

Wollen wir mit dem eben vorgestellten Verfahren auch Funktionen  $u \in C^2([-1, 1])$  approximieren, so ist zu beachten, dass  $u(mh)$  nur für  $mh \in [-1, 1]$  definiert ist. Wir werden daher im Folgenden zwei Varianten betrachten. Zum Einen werden wir  $u$  zu einer  $C_0^2(\mathbb{R})$ -Funktion fortsetzen, um die bereits gewonnene Fehlerabschätzung anwenden zu können. Zum Anderen werden wir die Summation in  $u_{d,h}$  nur über die  $m$  erstrecken, für die  $mh \in [-1, 1]$  ist. Den dadurch entstandenen Fehler werden wir abschätzen.

Im Folgenden sei also  $u \in C^2([-1, 1])$ . Weiter sei  $N \in \mathbb{N}$  und  $h = 1/N$ .

#### 1.3.1 Quasi-Interpolation durch Fortsetzung

Wir wollen  $u$  zu einer Funktion aus  $C_0^2(\mathbb{R})$  fortsetzen. Dazu machen wir den Ansatz

$$\tilde{u}(t) := \begin{cases} 0 & , \quad t < -2, \\ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 & , \quad t \in [-2, -1], \\ u(t) & , \quad t \in [-1, 1], \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5 & , \quad t \in (1, 2], \\ 0 & , \quad t > 2. \end{cases}$$

Nach Definition hat  $\tilde{u}$  bereits kompakten Träger. Durch die Forderung, dass  $\tilde{u}$  zweimal stetig differenzierbar sein soll, erhalten wir an jeder der vier Übergangsstellen drei Bestimmungsgleichungen. Das sind also jeweils 6 Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$ . Als Lösung erhalten wir

$$\begin{aligned} a_0 &= 4(8u(-1) - 4u'(-1) + u''(-1)) \\ a_1 &= 2(60u(-1) - 32u'(-1) + 7u''(-1)) \\ a_2 &= 180u(-1) - 96u'(-1) + 19u''(-1) \\ a_3 &= \frac{1}{2}(260u(-1) - 136u'(-1) + 25u''(-1)) \\ a_4 &= 45u(-1) - 23u'(-1) + 4u''(-1) \\ a_5 &= \frac{1}{2}(12u(-1) - 6u'(-1) + u''(-1)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
b_0 &= 4(8u(1) + 4u'(1) + u''(1)) \\
b_1 &= -2(60u(1) + 32u'(1) + 7u''(1)) \\
b_2 &= 180u(1) + 96u'(1) + 19u''(1) \\
b_3 &= -\frac{1}{2}(260u(1) + 136u'(1) + 25u''(1)) \\
b_4 &= 45u(1) + 23u'(1) + 4u''(1) \\
b_5 &= -\frac{1}{2}(12u(1) + 6u'(1) + u''(1))
\end{aligned}$$

Bilden wir nun  $\tilde{u}_{d,h}$ , so erstreckt sich die Summation nur von  $-2N$  bis  $2N$ , denn für  $|mh| > 2$  ist  $\tilde{u}(mh) = 0$ . Es ist also

$$\tilde{u}_{d,h}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-2N}^{2N} \tilde{u}(mh) e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2}.$$

Da  $\tilde{u} \in C_0^2(\mathbb{R})$  ist, ist  $\tilde{u}_{d,h}$  eine Approximation von  $\tilde{u}$  der Pseudokonvergenzordnung 2, und somit ist die Einschränkung von  $\tilde{u}_{d,h}$  auf  $[-1, 1]$  eine Approximation der Pseudokonvergenzordnung 2 von  $u$ .

### 1.3.2 Direkte Quasi-Interpolation

Wir betrachten nun in der Summation nur die  $m$ , für die  $mh \in [-1, 1]$  ist, d.h. wir definieren die direkte Quasi-Interpolierende

$$u_{d,h} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_{d,h}(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N u(mh) e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2}.$$

Um den Fehler  $|u - u_{d,h}|$  abschätzen zu können, benötigen wir die folgenden beiden Hilfsfunktionen.

**1.5 Definition.** Für  $t \in [-1, 1]$  definieren wir

$$\vartheta_{d,N}(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2}$$

und

$$r_{d,N}(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \left( \frac{e^{-\frac{1}{d}((1+t)N+1)^2}}{1 - e^{-\frac{2}{d}((1+t)N+1)}} + \frac{e^{-\frac{1}{d}((1-t)N+1)^2}}{1 - e^{-\frac{2}{d}((1-t)N+1)}} \right).$$

**1.6 Lemma.** Sei  $\varepsilon_0(d)$  wie in Satz 1.1. Für alle  $t \in [-1, 1]$  gilt dann

$$|\vartheta_{d,N}(t) - 1| \leq r_{d,N}(t) + \varepsilon_0(d).$$

**Beweis.** Mit

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{d}((1\pm t)N+1+m)^2} &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{d}((1\pm t)N+1)^2} e^{-\frac{2}{d}m(1\pm t)N+1} e^{-\frac{1}{d}m^2} \\ &\leq e^{-\frac{1}{d}((1\pm t)N+1)^2} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2}{d}((1\pm t)N+1)m} \\ &= e^{-\frac{1}{d}((1\pm t)N+1)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left( e^{-\frac{2}{d}((1\pm t)N+1)} \right)^m \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{d}((1\pm t)N+1)^2}}{1 - e^{-\frac{2}{d}((1\pm t)N+1)}} \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} |\vartheta_{d,N}(t) - \vartheta_d(tN)| &= \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \left| \sum_{m=-N}^N e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \left| \sum_{m=-\infty}^{-N-1} e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2} + \sum_{m=N+1}^{\infty} e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=N+1}^{\infty} \left( e^{-\frac{1}{d}(tN+m)^2} + e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=0}^{\infty} \left( e^{-\frac{1}{d}((1+t)N+1+m)^2} + e^{-\frac{1}{d}((1-t)N+1+m)^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \left( \frac{e^{-\frac{1}{d}((1+t)N+1)^2}}{1 - e^{-\frac{2}{d}((1+t)N+1)}} + \frac{e^{-\frac{1}{d}((1-t)N+1)^2}}{1 - e^{-\frac{2}{d}((1-t)N+1)}} \right) \\ &= r_{d,N}(t). \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun

$$\begin{aligned} |\vartheta_{d,N}(t) - 1| &\leq |\vartheta_{d,N}(t) - \vartheta_d(tN)| + |\vartheta_d(tN) - 1| \\ &\leq r_{d,N}(t) + \varepsilon_0(d), \end{aligned}$$

wie behauptet. □

**1.7 Lemma.** Sei  $\varepsilon_1(d)$  wie in Satz 1.1. Für  $d \leq 2$  und alle  $t \in [-1, 1]$  gilt dann

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N (tN - m) e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2} \right| \leq \frac{d}{2} \varepsilon_1(d) + \frac{2e^{-\frac{1}{d}}}{\sqrt{\pi d}} \left(1 + \frac{d}{2}\right).$$

**Beweis.** Zunächst ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N (tN - m) e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2} &= -\frac{d}{2} \vartheta'_d(tN) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=N+1}^{\infty} (tN - m) e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=N+1}^{\infty} (tN + m) e^{-\frac{1}{d}(tN+m)^2}. \end{aligned}$$

Für  $m \geq N + 1$  ist  $m \pm tN \geq m - N \geq 1$ . Da die Funktion  $s \mapsto se^{-\frac{1}{d}s^2}$  für  $d \leq 2$  auf  $[1, \infty)$  streng monoton fällt, ist

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} (m \pm tN) e^{-\frac{1}{d}(m \pm tN)^2} \leq \sum_{m=N+1}^{\infty} (m - N) e^{-\frac{1}{d}(m-N)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-\frac{1}{d}m^2}.$$

Mit

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-\frac{1}{d}m^2} &= e^{-\frac{1}{d}} + \sum_{m=2}^{\infty} \int_{m-1}^m m e^{-\frac{1}{d}m^2} dy \\ &\leq e^{-\frac{1}{d}} + \sum_{m=2}^{\infty} \int_{m-1}^m y e^{-\frac{1}{d}y^2} dy \\ &= e^{-\frac{1}{d}} + \int_1^{\infty} y e^{-\frac{1}{d}y^2} dy \\ &= e^{-\frac{1}{d}} \left(1 + \frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N (tN - m) e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2} \right| \leq \frac{d}{2} \varepsilon_1(d) + \frac{2e^{-\frac{1}{d}}}{\sqrt{\pi d}} \left(1 + \frac{d}{2}\right),$$

wie behauptet. □

**1.8 Satz.** Für  $u \in C^2([-1, 1])$  definieren wir die direkte Quasi-Interpolierende

$$u_{d,h} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_{d,h}(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N u(mh) e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2}.$$

Für  $d \leq 2$  und alle  $t \in [-1, 1]$  gilt dann

$$\begin{aligned} |u(t) - u_{d,h}(t)| &\leq \|u\|_\infty (r_{d,N}(t) + \varepsilon_0(d)) \\ &\quad + \|u'\|_\infty h \left( \frac{d}{2} \varepsilon_1(d) + \frac{2e^{-\frac{1}{d}}}{\sqrt{\pi d}} \left( 1 + \frac{d}{2} \right) \right) \\ &\quad + \|u''\|_\infty c(d) h^2 \end{aligned}$$

mit den Konstanten  $\varepsilon_i(d)$  und  $c(d)$  aus Satz 1.1, sowie  $r_{d,N}$  aus Definition 1.5.

**Beweis.** Für  $m \in \{-N, \dots, N\}$  und  $t \in [-1, 1]$  erhalten wir mit der Taylorformel im Punkt  $mh$  die Darstellung

$$u(mh) = u(t) + u'(t)(mh - t) + \frac{u''(t_m)}{2}(mh - t)^2$$

mit einem  $t_m$  zwischen  $t$  und  $mh$ . Setzen wir diesen Ausdruck für  $u(mh)$  in  $u_{d,h}$  ein, so erhalten wir für die Differenz  $u_{d,h} - u$  im Punkt  $t$

$$\begin{aligned} u_{d,h}(t) - u(t) &= (\vartheta_{d,N}(t) - 1) u(t) \\ &\quad - \frac{h u'(t)}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N (tN - m) e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2} \\ &\quad + \frac{h^2}{2\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N u''(t_m) (tN - m)^2 e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2}. \end{aligned}$$

Mit den Lemmata 1.6 und 1.7 sowie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N (tN - m)^2 e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2} &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (tN - m)^2 e^{-\frac{1}{d}(tN-m)^2} \\ &= \frac{d}{4} \left( \vartheta_d(tN) + \frac{d}{2} \vartheta_d''(tN) \right) \\ &\leq \frac{d}{4} \left( 1 + \varepsilon_0(d) + \frac{d}{2} \varepsilon_2(d) \right) \\ &= c(d) \end{aligned}$$

folgt die Behauptung. □



Im Vergleich zur Fehlerabschätzung in Satz 1.1 kommen hier in der Abschätzung zusätzliche Terme hinzu. Außerdem ist es hier nicht sinnvoll zur Supremumsnorm überzugehen, da in den Randpunkten stets ein Fehler bleibt, der auch für wachsendes  $N$  nicht kleiner wird, wenn  $u$  am Rand nicht verschwindet. Wir werden dies in den Beispielen sehen.

Für spätere Zwecke benötigen wir noch eine Abschätzung des Integrals

$$\int_{-1}^1 |u(t) - u_{d,h}(t)| dt.$$

Wir werden sehen, dass dieses Integral trotz des Fehlers in den Randpunkten für genügend große  $d$  und  $N$  klein wird. Hierzu definieren wir die Errorfunktion.

**1.9 Definition.** Für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b$  ist die Errorfunktion definiert durch

$$\operatorname{erf}(a, b) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-t^2} dt.$$

**1.10 Lemma.** Seien  $\vartheta_{d,N}$  wie in Definition 1.5 und  $\varepsilon_0(d)$  wie in Satz 1.1. Dann gilt

$$\int_{-1}^1 |1 - \vartheta_{d,N}(t)| dt \leq \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}, \frac{2N+1}{\sqrt{d}}\right)}{N \left(1 - e^{-\frac{2}{d}}\right)} + 2\varepsilon_0(d).$$

**Beweis.** Wegen

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{2}{d}((1\pm t)N+1)}} \leq \frac{1}{1 - e^{-\frac{2}{d}}}$$

für  $t \in [-1, 1]$ , erhalten wir für die Funktion  $r_{d,N}$  aus Definition 1.5 die Abschätzung

$$\begin{aligned} r_{d,N}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \left( \frac{e^{-\frac{1}{d}((1+t)N+1)^2}}{1 - e^{-\frac{2}{d}((1+t)N+1)}} + \frac{e^{-\frac{1}{d}((1-t)N+1)^2}}{1 - e^{-\frac{2}{d}((1-t)N+1)}} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \frac{e^{-\frac{1}{d}((1+t)N+1)^2} + e^{-\frac{1}{d}((1-t)N+1)^2}}{1 - e^{-\frac{2}{d}}}. \end{aligned}$$

Mit

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{d}((1\pm t)N+1)^2} dt = \frac{\sqrt{d}}{N} \int_{\frac{1}{\sqrt{d}}}^{\frac{2N+1}{\sqrt{d}}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi d}}{2N} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}, \frac{2N+1}{\sqrt{d}}\right)$$

folgt nun

$$\int_{-1}^1 r_{d,N}(t) dt \leq \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}, \frac{2N+1}{\sqrt{d}}\right)}{N\left(1 - e^{-\frac{2}{d}}\right)}.$$

Die aus Lemma 1.6 bekannte Abschätzung

$$|1 - \vartheta_{d,N}(t)| \leq r_{d,N}(t) + \varepsilon_0(d)$$

liefert dann

$$\int_{-1}^1 |1 - \vartheta_{d,N}(t)| dt \leq \int_{-1}^1 (r_{d,N}(t) + \varepsilon_0(d)) dt \leq \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}, \frac{2N+1}{\sqrt{d}}\right)}{N\left(1 - e^{-\frac{2}{d}}\right)} + 2\varepsilon_0(d),$$

wie behauptet. □

Nun können wir das Integral über den Fehler abschätzen.

**1.11 Satz.** Sei  $u \in C^2([-1, 1])$ . Wir definieren die direkte Quasi-Interpolierende wie in Satz 1.8. Für  $d \leq 2$  gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |u(t) - u_{d,h}(t)| dt &\leq \|u\|_\infty \left( \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}, \frac{2N+1}{\sqrt{d}}\right)}{1 - e^{-\frac{2}{d}}} h + 2\varepsilon_0(d) \right) \\ &\quad + 2\|u'\|_\infty h \left( \frac{d}{2} \varepsilon_1(d) + \frac{2e^{-\frac{1}{d}}}{\sqrt{\pi d}} \left(1 + \frac{d}{2}\right) \right) \\ &\quad + 2\|u''\|_\infty c(d) h^2. \end{aligned}$$

mit den Konstanten  $\varepsilon_i(d)$  und  $c(d)$  aus Satz 1.1.

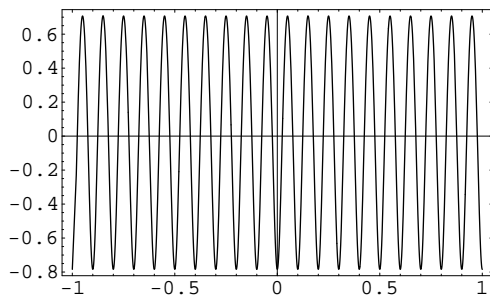
**Beweis.** Dieser folgt aus Satz 1.8 und Lemma 1.10. □

## 1.4 Beispiele

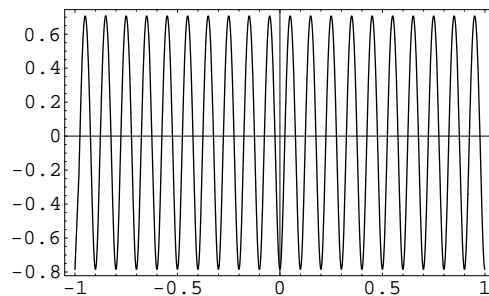
**1.12 Beispiel.** Sei  $u = 1$ . Dann ist die Fortsetzung  $\tilde{u}$  gegeben durch

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < -2, \\ 32 + 120t + 180t^2 + 130t^3 + 45t^4 + 6t^5 & , \quad t \in [-2, -1), \\ 1 & , \quad t \in [-1, 1], \\ 32 - 120t + 180t^2 - 130t^3 + 45t^4 - 6t^5 & , \quad t \in (1, 2], \\ 0 & , \quad t > 2. \end{cases}$$

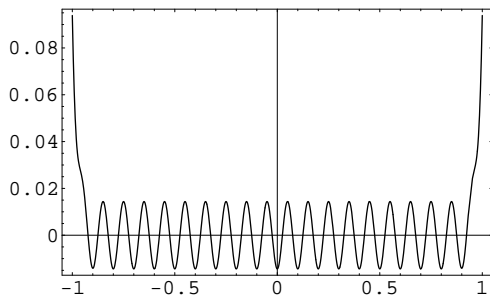
In den folgenden Bildern sind  $1 - u_{d,h}$  und  $1 - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 10$  und verschiedene  $d$  im Intervall  $[-1, 1]$  zu sehen.



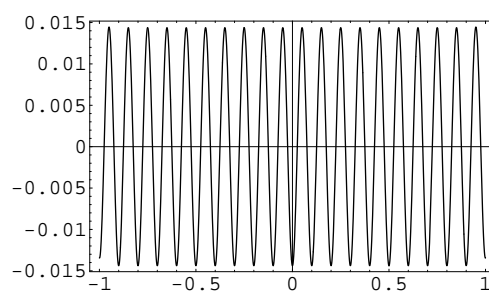
$1 - u_{d,h}$  für  $N = 10, d = 0.1$



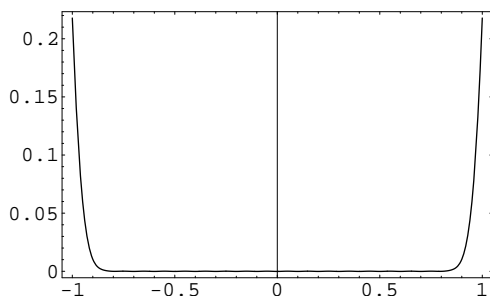
$1 - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 10, d = 0.1$



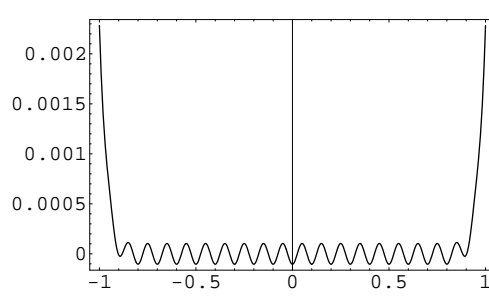
$1 - u_{d,h}$  für  $N = 10, d = 0.5$



$1 - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 10, d = 0.5$



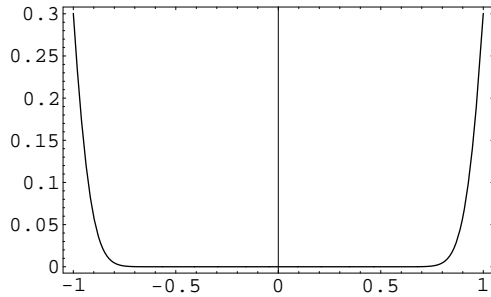
$1 - u_{d,h}$  für  $N = 10, d = 1$



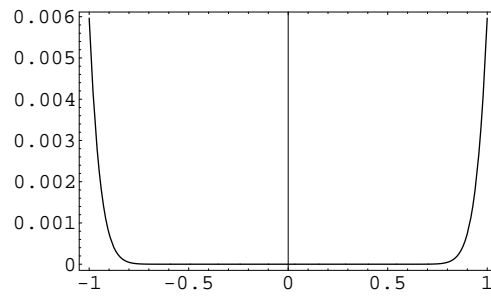
$1 - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 10, d = 1$

Man erkennt: Für kleine  $d$  dominieren in beiden Fällen die Oszillationen. Für größere  $d$  ist der Fehler in beiden Fällen am Rand größer, die Approximation durch  $\tilde{u}_{d,h}$  ist jedoch besser. Erhöht man  $N$ , so ändert sich für kleine  $d$  nicht viel an der Höhe der Amplituden, es erhöht sich aber die Anzahl der Oszillationen.

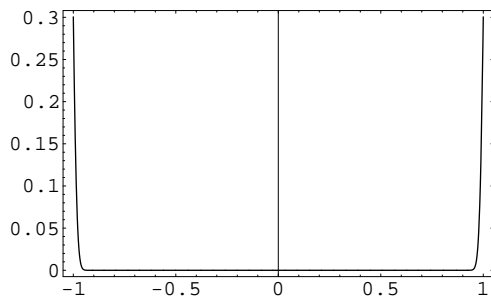
Nun betrachten wir  $1 - u_{d,h}$  und  $1 - \tilde{u}_{d,h}$  für  $d = 2$  und verschiedene  $N$ .



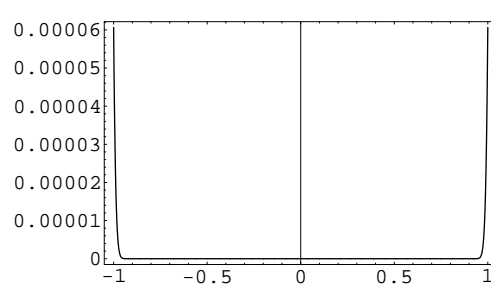
$1 - u_{d,h}$  für  $N = 10, d = 2$



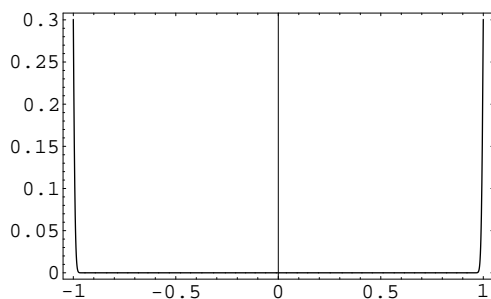
$1 - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 10, d = 2$



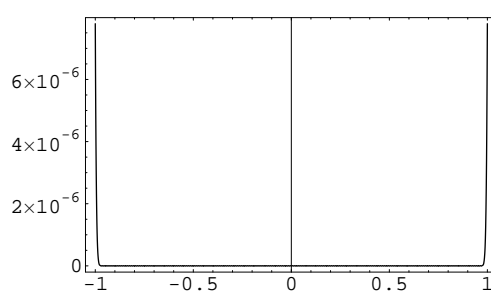
$1 - u_{d,h}$  für  $N = 50, d = 2$



$1 - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 50, d = 2$



$1 - u_{d,h}$  für  $N = 100, d = 2$



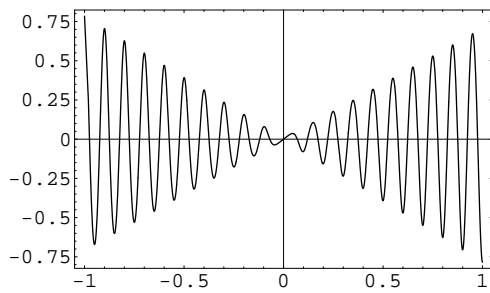
$1 - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 100, d = 2$

Hier sieht man, dass in beiden Fällen der stark fehlerbehaftete Bereich am Rand schmaler wird. Bei der Approximation durch  $u_{d,h}$  bleibt in den Randpunkten ein Fehler von etwa 0.3, während bei der Approximation durch  $\tilde{u}_{d,h}$  der Fehler auch in den Randpunkten klein wird.

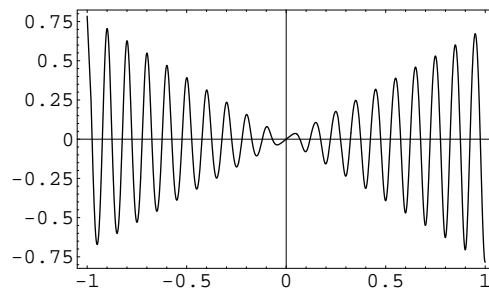
**1.13 Beispiel.** Sei  $u(t) = t$ . Dann ist die Fortsetzung  $\tilde{u}$  gegeben durch

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < -2, \\ -48 - 184t - 276t^2 - 198t^3 - 68t^4 - 9t^5 & , \quad t \in [-2, -1), \\ t & , \quad t \in [-1, 1], \\ 48 - 184t + 276t^2 - 198t^3 + 68t^4 - 9t^5 & , \quad t \in (1, 2], \\ 0 & , \quad t > 2. \end{cases}$$

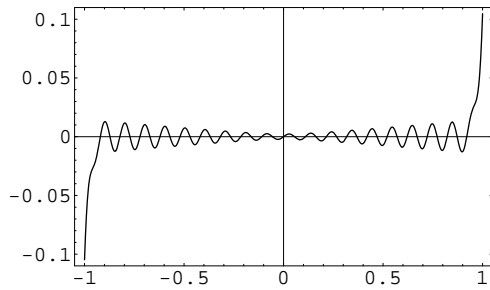
In den folgenden Bildern sind  $u - u_{d,h}$  und  $u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 10$  und verschiedene  $d$  im Intervall  $[-1, 1]$  zu sehen.



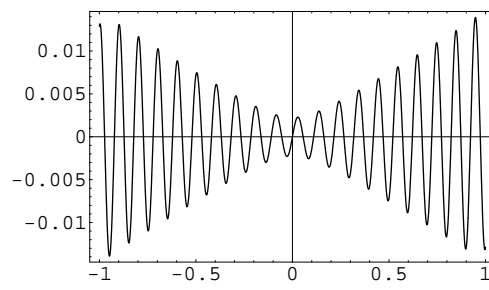
$u - u_{d,h}$  für  $N = 10, d = 0.1$



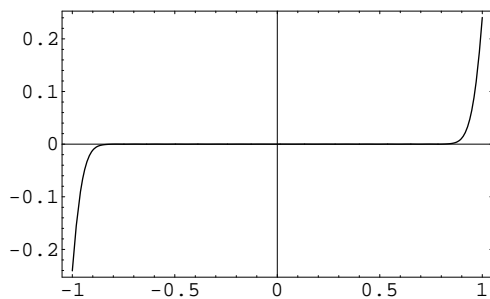
$u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 10, d = 0.1$



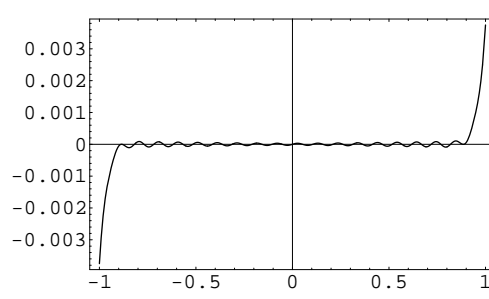
$u - u_{d,h}$  für  $N = 10, d = 0.5$



$u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 10, d = 0.5$



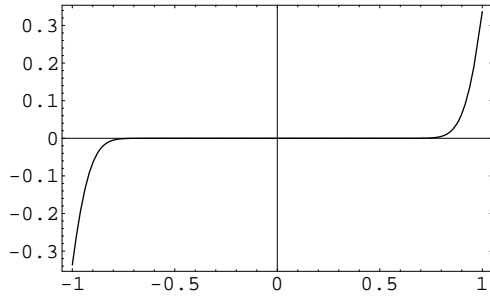
$u - u_{d,h}$  für  $N = 10, d = 1$



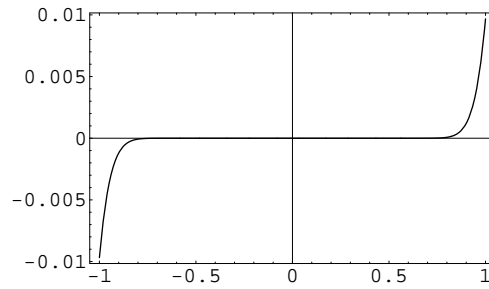
$u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 10, d = 1$

Auch hier dominieren die Oszillationen für kleine  $d$ . Im Nullpunkt wird der Fehler klein, da  $u$  dort Null ist. Für große  $d$  ist wieder der Randbereich stärker fehlerbehaftet, wobei die Approximation durch  $\tilde{u}_{d,h}$  wieder besser ist.

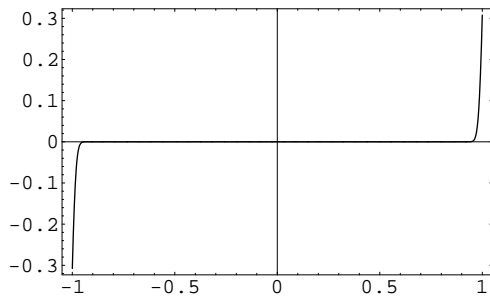
Nun betrachten wir  $u - u_{d,h}$  und  $u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $d = 2$  und verschiedene  $N$ .



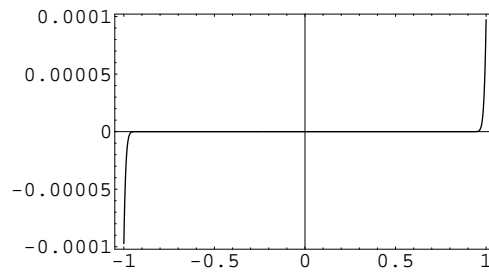
$u - u_{d,h}$  für  $N = 10, d = 2$



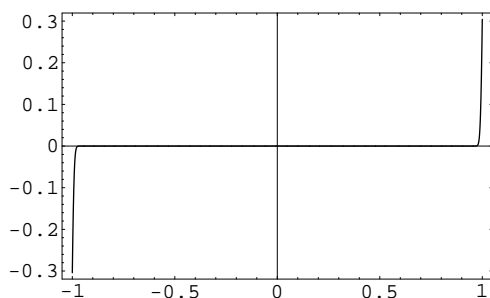
$u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 10, d = 2$



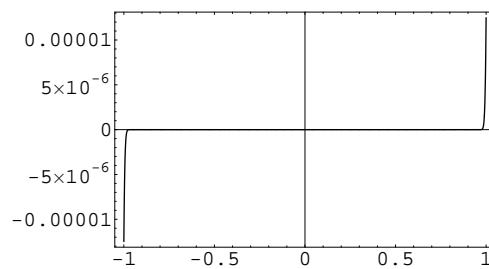
$u - u_{d,h}$  für  $N = 50, d = 2$



$u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 50, d = 2$



$u - u_{d,h}$  für  $N = 100, d = 2$



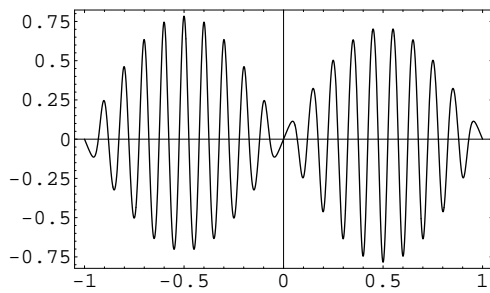
$u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 100, d = 2$

Wie bereits im letzten Beispiel wird auch hier für wachsendes  $N$  der stark fehlerbehaftete Bereich schmaler. Während links in den Randpunkten wieder ein Fehler von etwa 0.3 bleibt, wird rechts der Fehler auch in den Randpunkten wieder klein.

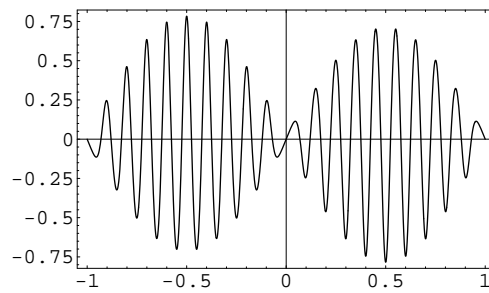
**1.14 Beispiel.** Sei  $u(t) = \sin(\pi t)$ . Für die Fortsetzung  $\tilde{u}$  erhalten wir

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < -2, \\ \pi(16 + 64t + 96t^2 + 68t^3 + 23t^4 + 3t^5) & , \quad t \in [-2, -1), \\ \sin(\pi t) & , \quad t \in [-1, 1], \\ \pi(-16 + 64t - 96t^2 + 68t^3 - 23t^4 + 3t^5) & , \quad t \in (1, 2], \\ 0 & , \quad t > 2. \end{cases}$$

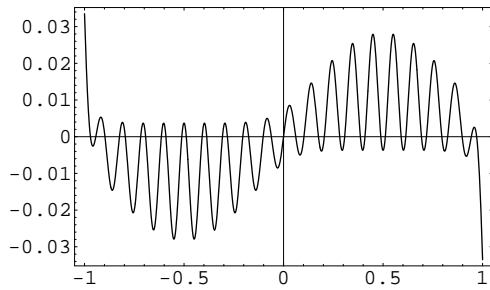
In den folgenden Bildern sind wieder  $u - u_{d,h}$  und  $u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 10$  und verschiedene  $d$  im Intervall  $[-1, 1]$  zu sehen.



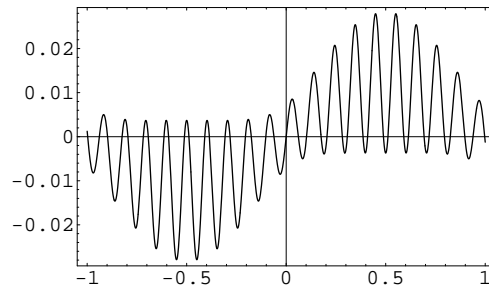
$u - u_{d,h}$  für  $N = 10, d = 0.1$



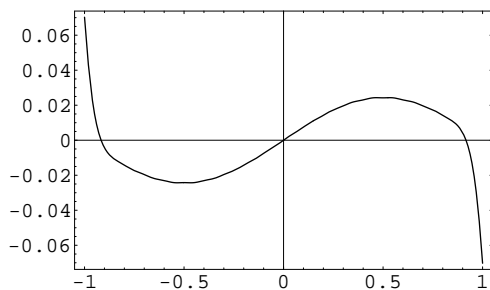
$u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 10, d = 0.1$



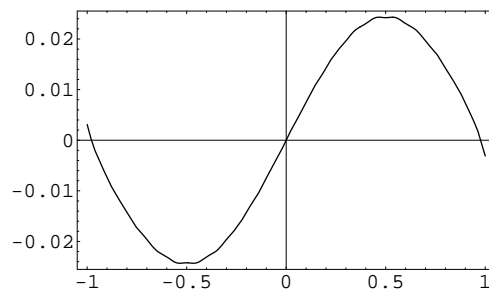
$u - u_{d,h}$  für  $N = 10, d = 0.5$



$u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 10, d = 0.5$

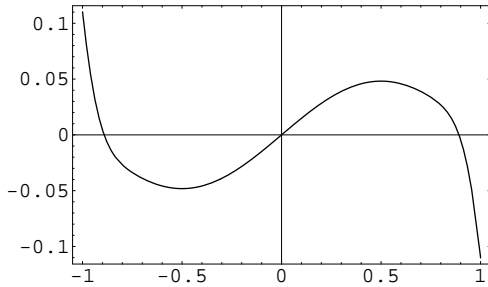


$u - u_{d,h}$  für  $N = 10, d = 1$

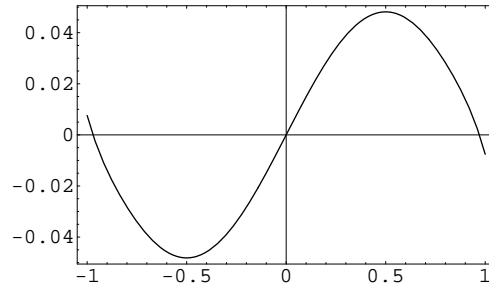


$u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 10, d = 1$

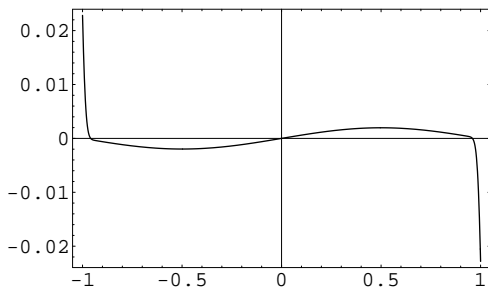
Nun betrachten wir wieder  $u - u_{d,h}$  und  $u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $d = 2$  und verschiedene  $N$ .



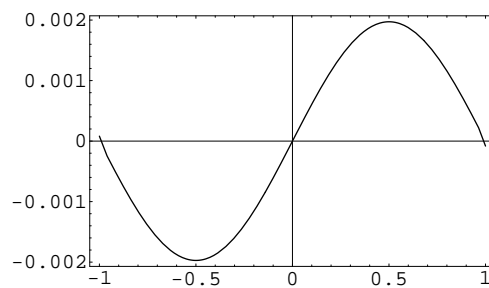
$u - u_{d,h}$  für  $N = 10, d = 2$



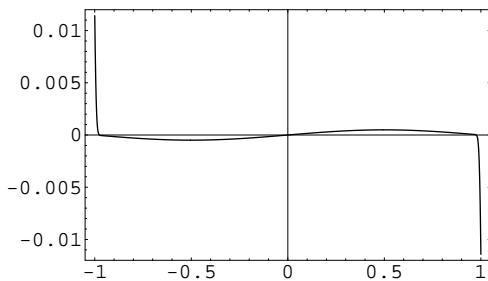
$u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 10, d = 2$



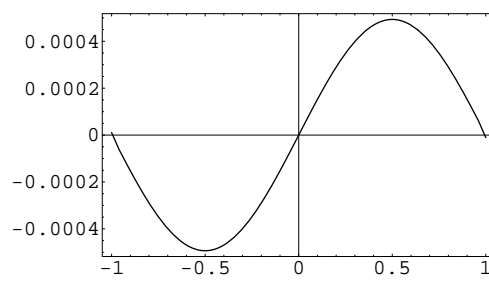
$u - u_{d,h}$  für  $N = 50, d = 2$



$u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 50, d = 2$



$u - u_{d,h}$  für  $N = 100, d = 2$



$u - \tilde{u}_{d,h}$  für  $N = 100, d = 2$

Wie bisher dominieren für kleine  $d$  die Oszillationen. Für große  $d$  und wachsendes  $N$  wird hier auch links der Fehler in den Randpunkten klein. Dies liegt daran, dass  $u$  in den Randpunkten verschwindet.



## 2 Approximation harmonischer Funktionen

In diesem Kapitel entwickeln wir ein Approximationsverfahren zur Lösung des inneren Dirichlet-Problems der Laplace-Gleichung im  $\mathbb{R}^2$ . Lösungen der Laplace-Gleichung heißen harmonische Funktionen.

### 2.1 Das Dirichlet-Problem

Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet mit  $C^2$ -Rand  $\Gamma$ . Weiter sei  $b \in C(\Gamma)$  ein vorgegebener Randwert. Wir betrachten das folgende Dirichlet-Problem: Gesucht ist eine Funktion  $v \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$  als Lösung von

$$\Delta v = 0 \quad \text{in } G, \quad v = b \quad \text{auf } \Gamma.$$

Dabei ist  $\Delta$  der Laplace-Operator im  $\mathbb{R}^2$ . Aus der klassischen Potentialtheorie ist bekannt [11]: Das Dirichlet-Problem besitzt eine eindeutige Lösung  $v$ . Diese kann in  $G$  dargestellt werden durch das Doppelschichtpotential

$$(d\varphi)(x) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in G.$$

Hier ist die Funktion  $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  eine noch unbekannte stetige Dichte, und der Kern  $d(x, y)$  des Doppelschichtpotentials ist für  $x \in \mathbb{R}^2$  und  $y \in \Gamma$  mit  $x \neq y$  definiert durch

$$d(x, y) := \frac{x - y}{|x - y|^2} \cdot n(y),$$

wobei  $n(y)$  die ins Äußere von  $G$  zeigende Einheitsnormale im Punkt  $y \in \Gamma$  bezeichnet. Unter der geforderten Regularitätsvoraussetzung  $\Gamma \in C^2$  folgt, dass sich der Kern des Doppelschichtpotentials stetig auf  $\Gamma \times \Gamma$  definieren lässt [11]. Also existiert für jedes  $x \in \Gamma$  der sogenannte direkte Wert

$$(d\varphi)(x) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma.$$

Mit Hilfe der Sprungrelationen für das Doppelschichtpotential [11] erhält man, dass die gesuchte Dichte  $\varphi$  die eindeutige Lösung der Fredholmschen Randintegralgleichung zweiter Art

$$\frac{1}{2} \varphi(x) + (d\varphi)(x) = b(x), \quad x \in \Gamma$$

ist, wobei  $(d\varphi)(x)$  hier den direkten Wert bezeichnet.

Ist  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \Gamma$  eine Parametrisierung des Randes  $\Gamma$ , so erhalten wir für das Doppelschichtpotential, sowohl in  $G$  als auch für den direkten Wert auf dem Rand  $\Gamma$ , die Darstellung

$$\begin{aligned}
(d\varphi)(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 d(x, \gamma(t)) \varphi(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{x - \gamma(t)}{|x - \gamma(t)|^2} \cdot n(\gamma(t)) \varphi(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$u := \varphi \circ \gamma$$

und

$$k(x, t) := \frac{x - \gamma(t)}{|x - \gamma(t)|^2} \cdot n(\gamma(t)) |\gamma'(t)|,$$

so folgt für das Doppelschichtpotential bzw. für den direkten Wert die Darstellung

$$(d\varphi)(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k(x, t) u(t) dt, \quad x \in G \text{ bzw. } x \in \Gamma.$$

## 2.2 Das Approximationsverfahren

Wir wissen nun, die eindeutige Lösung  $v$  des Dirichlet-Problems lässt sich in  $G$  darstellen durch das Doppelschichtpotential, d.h. es gilt

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k(x, t) u(t) dt, \quad x \in G.$$

Wir werden im Folgenden  $v$  in  $G$  durch einen expliziten analytischen Ausdruck approximieren, der keine Integrale enthält. Dies geschieht in drei Schritten. Sei dazu  $N \in \mathbb{N}$ ,  $h := 1/N$  und  $d > 0$ .

### 2.2.1 Der erste Approximationsschritt

Wir ersetzen im ersten Approximationsschritt die gesuchte Funktion  $u$  in der obigen Integraldarstellung von  $v$  durch die direkte Quasi-Interpolierende

$$u_{d,h} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_{d,h}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N u(mh) e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}}$$

und definieren für  $x \in G$

$$\begin{aligned}
\Psi_{d,h}(x) &:= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k(x,t) u_{d,h}(t) dt \\
&= -\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N u(mh) \int_{-1}^1 k(x,t) e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt
\end{aligned}$$

als Näherung für  $v(x)$ .

### 2.2.2 Der zweite Approximationsschritt

Da die Funktion

$$t \mapsto e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}}$$

außerhalb von  $mh$  sehr schnell gegen Null geht, wenn  $dh^2$  klein ist, ersetzen wir beim zweiten Approximationsschritt den Integralkern  $k(x,t)$  durch  $k(x,mh)$  und definieren für  $x \in G$

$$\begin{aligned}
\Phi_{d,h}(x) &:= -\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N u(mh) \int_{-1}^1 k(x,mh) e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt \\
&= -\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N u(mh) k(x,mh) \int_{-1}^1 e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt.
\end{aligned}$$

als Näherung für  $\Psi_{d,h}(x)$ . Mit der aus Definition 1.9 bekannten Errorfunktion folgt

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt = \frac{\sqrt{d}}{N} \int_{\frac{m-N}{\sqrt{d}}}^{\frac{m+N}{\sqrt{d}}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi d}}{2N} \operatorname{erf}\left(\frac{m-N}{\sqrt{d}}, \frac{m+N}{\sqrt{d}}\right).$$

Hiermit erhalten wir die Darstellung

$$\Phi_{d,h}(x) = -\frac{1}{4\pi N} \sum_{m=-N}^N u(mh) k(x,mh) \operatorname{erf}\left(\frac{m-N}{\sqrt{d}}, \frac{m+N}{\sqrt{d}}\right).$$

### 2.2.3 Der dritte Approximationsschritt

Da wir die Dichte  $\varphi$  nicht kennen, kennen wir auch die Werte  $u(mh)$  nicht. Wir werden daher im dritten Approximationsschritt Näherungswerte  $u_m$  für  $u(mh)$  mit dem Nyström-Verfahren [22] bestimmen. Dazu verwenden wir die Randintegralgleichung. Für alle  $x \in \Gamma$  gilt

$$\varphi(x) + 2(D\varphi)(x) = 2b(x),$$

d.h.  $u$  löst die Integralgleichung

$$u(s) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(\gamma(s), t) u(t) dt = 2b(\gamma(s)), \quad s \in [-1, 1].$$

Insbesondere ist diese Gleichung erfüllt in den Punkten  $s = jh$ . Wir erhalten dann

$$u(jh) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(\gamma(jh), t) u(t) dt = 2b(\gamma(jh)), \quad j = -N, \dots, N.$$

Wir wissen, dass hier der Kern des Doppelschichtpotentials auf dem Rand stetig ist. Daraus folgt, dass die Funktion  $t \mapsto k(\gamma(jh), t)$  auf  $[-1, 1]$  stetig ist für jedes  $j \in \{-N, \dots, N\}$ . Fordern wir nun Gleichheit, wenn wir das Integral mit der summierten Trapezregel approximieren (Nyström-Verfahren), so erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{m=-N}^N \left( \frac{\delta_{|m|N} - 2}{2\pi N} k(\gamma(jh), mh) + \delta_{jm} \right) u_m = 2b(\gamma(jh)), \quad j = -N, \dots, N$$

zur Bestimmung von Näherungswerten  $u_m$  für  $u(mh)$ . Hier bezeichnet  $\delta$  das Kronecker-Symbol. Mit

$$a_{jm} := \frac{\delta_{|m|N} - 2}{2\pi N} k(\gamma(jh), mh) + \delta_{jm}$$

und

$$A := (a_{jm})$$

schreibt sich das lineare Gleichungssystem

$$A \begin{pmatrix} u_{-N} \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} b(\gamma(-1)) \\ \vdots \\ b(\gamma(1)) \end{pmatrix}.$$

Wir setzen nun für  $x \in G$

$$v_{d,h}(x) := -\frac{1}{4\pi N} \sum_{m=-N}^N u_m k(x, mh) \operatorname{erf} \left( \frac{m-N}{\sqrt{d}}, \frac{m+N}{\sqrt{d}} \right)$$

als Näherung für  $\Phi_{d,h}(x)$  und somit als Näherung für  $v(x)$ , der exakten Lösung des Dirichlet-Problems im Punkt  $x \in G$ .

## 2.3 Konvergenzuntersuchung

Wir untersuchen nun, wie gut  $v_{d,h}$  die Lösung  $v$  des Dirichlet-Problems approximiert. Für den Fehler

$$F(d, h, x) := |v(x) - v_{d,h}(x)|$$

im Punkte  $x \in G$  gilt

$$\begin{aligned} F(d, h, x) &= |v(x) - \Psi_{d,h}(x) + \Psi_{d,h}(x) - \Phi_{d,h}(x) + \Phi_{d,h}(x) - v_{d,h}(x)| \\ &\leq \underbrace{|v(x) - \Psi_{d,h}(x)|}_{=:F_1(d,h,x)} + \underbrace{|\Psi_{d,h}(x) - \Phi_{d,h}(x)|}_{=:F_2(d,h,x)} + \underbrace{|\Phi_{d,h}(x) - v_{d,h}(x)|}_{=:F_3(d,h,x)}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $F_i(d, h, x)$  der Fehler, der im  $i$ -ten Approximationsschritt gemacht wird.

### 2.3.1 Konvergenz im ersten Approximationsschritt

Zunächst untersuchen wir  $F_1(d, h, x)$ . Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt

$$|k(x, t)| = \left| \frac{x - \gamma(t)}{|x - \gamma(t)|^2} \cdot n(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \right| \leq \frac{|\gamma'(t)|}{|x - \gamma(t)|} \leq \frac{\|\gamma'\|_\infty}{\text{dist}(x, \Gamma)}.$$

Dabei bezeichnet

$$\text{dist}(x, \Gamma) := \inf_{y \in \Gamma} |x - y|$$

den Abstand von  $x$  zum Rand  $\Gamma$ . Hieraus folgt zunächst

$$\begin{aligned} F_1(d, h, x) &= |v(x) - \Psi_{d,h}(x)| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-1}^1 k(x, t)(u(t) - u_{d,h}(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 |k(x, t)| |u(t) - u_{d,h}(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\|\gamma'\|_\infty}{\text{dist}(x, \Gamma)} \int_{-1}^1 |u(t) - u_{d,h}(t)| dt. \end{aligned}$$

Fordern wir nun  $b \in C^2(\Gamma)$  für den Randwert des Dirichlet-Problems, so folgt, dass auch die eindeutige Lösung  $\varphi$  der Randintegralgleichung aus  $C^2(\Gamma)$  ist. Da  $\Gamma$  ein  $C^2$ -Rand ist, ist  $\gamma \in C^2([-1, 1], \mathbb{R}^2)$ , also ist  $u \in C^2([-1, 1])$ .

**2.1 Satz.** Für  $x \in G$  und  $d \leq 2$  gilt die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} F_1(d, h, x) &\leq \frac{\|\gamma'\|_\infty \|u\|_\infty}{2\pi \operatorname{dist}(x, \Gamma)} \left( \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}, \frac{2N+1}{\sqrt{d}}\right)}{1 - e^{-\frac{2}{d}}} h + 2\varepsilon_0(d) \right) \\ &\quad + \frac{\|\gamma'\|_\infty \|u'\|_\infty}{2\pi \operatorname{dist}(x, \Gamma)} \left( d\varepsilon_1(d) + \frac{e^{-\frac{1}{d}}(4+2d)}{\sqrt{\pi d}} \right) h \\ &\quad + \frac{\|\gamma'\|_\infty \|u''\|_\infty}{2\pi \operatorname{dist}(x, \Gamma)} 2c(d)h^2. \end{aligned}$$

**Beweis.** Dieser folgt mit der obigen Abschätzung und Satz 1.11. □

### 2.3.2 Konvergenz im zweiten Approximationsschritt

Jetzt untersuchen wir  $F_2(d, h, x)$ . Zunächst ist

$$\begin{aligned} F_2(d, h, x) &= |\Psi_{d,h}(x) - \Phi_{d,h}(x)| \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi d}} \left| \sum_{m=-N}^N u(mh) \int_{-1}^1 (k(x, t) - k(x, mh)) e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt \right| \\ &\leq \frac{\|u\|_\infty}{2\pi\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N \int_{-1}^1 |k(x, t) - k(x, mh)| e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt. \end{aligned}$$

Für  $x \in G$  ist die Funktion  $t \mapsto k(x, t)$  auf  $[-1, 1]$  stetig differenzierbar. Setzen wir

$$L(x) := \max_{t \in [-1, 1]} |\partial_t k(x, t)|,$$

so folgt für  $t, mh \in [-1, 1]$  mit dem Mittelwertsatz

$$|k(x, t) - k(x, mh)| \leq L(x) |t - mh|.$$

Mit

$$\int_{-1}^1 |t - mh| e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt = \frac{d}{N^2} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{d}(m-N)^2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{d}(m+N)^2} \right) \leq \frac{d}{N^2}$$

erhalten wir

$$\int_{-1}^1 |k(x, t) - k(x, mh)| e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt \leq L(x) \int_{-1}^1 |t - mh| e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt \leq \frac{dL(x)}{N^2}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} F_2(d, h, x) &\leq \frac{\|u\|_\infty}{2\pi\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N \frac{dL(x)}{N^2} \\ &= \frac{\|u\|_\infty}{2\pi\sqrt{\pi d}} \frac{dL(x)(2N+1)}{N^2} \\ &\leq \frac{\|u\|_\infty}{2\pi\sqrt{\pi d}} \frac{dL(x)(2N+N)}{N^2} \\ &= \frac{3\|u\|_\infty L(x)}{2\pi^{3/2}} \sqrt{d} h. \end{aligned}$$

Wir formulieren auch diese Abschätzung als Satz.

**2.2 Satz.** Für  $x \in G$  setzen wir

$$L(x) := \max_{t \in [-1, 1]} |\partial_t k(x, t)|$$

und erhalten die Fehlerabschätzung

$$F_2(d, h, x) \leq \frac{3\|u\|_\infty L(x)}{2\pi^{3/2}} \sqrt{d} h.$$

Der Fehler  $F_2$  wird klein, wenn  $\sqrt{d}h$  klein ist. Dies erscheint vernünftig, denn die Maßnahme,  $k(x, t)$  durch  $k(x, mh)$  bei der Integration zu ersetzen, ist besonders gerechtfertigt, wenn der Gauß-Kern

$$t \mapsto e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}}$$

eine schmale Glocke besitzt. Dies ist aber gerade der Fall, wenn  $\sqrt{d}h$  klein ist.

### 2.3.3 Konvergenz im dritten Approximationsschritt

Ausgangspunkt im dritten Approximationsschritt ist die Integralgleichung (IGL)

$$\varphi(s) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(\gamma(s), t) \varphi(t) dt = 2b(\gamma(s)), \quad s \in [-1, 1].$$

Wir definieren die Operatoren

$$T, T_N : C([-1, 1]) \rightarrow C([-1, 1])$$

durch

$$(T\varphi)(s) := \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(\gamma(s), t) \varphi(t) dt$$

und

$$(T_N\varphi)(s) := \sum_{m=-N}^N \frac{2 - \delta_{|m|N}}{2\pi N} k(\gamma(s), mh) \varphi(mh).$$

Weiterhin setzen wir

$$B := 2b \circ \gamma.$$

Nun schreibt sich die IGL einfach

$$\varphi - T\varphi = B.$$

Die IGL besitzt eine eindeutige Lösung  $u$ . Um Näherungswerte  $u_m$  für  $u(mh)$  zu erhalten, haben wir das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\sum_{m=-N}^N \left( \frac{\delta_{|m|N} - 2}{2\pi N} k(\gamma(jh), mh) + \delta_{jm} \right) u_m = B(jh), \quad j = -N, \dots, N$$

aufgestellt. Wir werden nun Folgendes zeigen: Für genügend große  $N$  ist die Näherungsgleichung

$$\varphi_N - T_N\varphi_N = B$$

eindeutig lösbar, und die Folge der Näherungslösungen  $(\varphi_N)$  konvergiert gegen die Lösung  $u$  der IGL (Satz 2.8). Daraus werden wir schließen, dass das LGS für genügend große  $N$  eindeutig lösbar ist (Satz 2.10), und dass der Fehler  $F_3(d, h, x)$  für  $N \rightarrow \infty$  gegen Null geht (Satz 2.11). Dazu benötigen wir den Begriff der kollektiven Kompaktheit.

**2.3 Definition.** Eine Menge  $\mathcal{F} = \{F : X \rightarrow Y\}$  von linearen Operatoren  $F$  aus einem normierten Raum  $X$  in einen normierten Raum  $Y$  heißt kollektiv kompakt, falls für jede beschränkte Menge  $U \subset X$  die Bildmenge

$$\{F\varphi : \varphi \in U, F \in \mathcal{F}\}$$

relativ kompakt ist, d.h. ihr Abschluss kompakt ist. Eine Folge  $(F_n)$  heißt kollektiv kompakt, wenn die korrespondierende Menge kollektiv kompakt ist.



**2.4 Satz.** Die Folge  $(T_N)$  ist kollektiv kompakt.

**Beweis.** Sei  $U \subset C([-1, 1])$  beschränkt, d.h. es gibt ein  $C > 0$  mit  $\|\varphi\|_\infty \leq C$  für alle  $\varphi \in U$ . Wir zeigen zunächst: Die Menge

$$\mathcal{U} := \{T_N \varphi : \varphi \in U, N \in \mathbb{N}\}$$

ist beschränkt: Da die Funktion  $(s, t) \mapsto k(\gamma(s), t)$  gleichmäßig stetig ist auf  $[-1, 1]^2$ , existiert

$$S := \sup_{(s,t) \in [-1,1]^2} |k(\gamma(s), t)|.$$

Wegen

$$\sum_{m=-N}^N \frac{|2 - \delta_{|m|N}|}{2\pi N} \leq \sum_{m=-N}^N \frac{2}{2\pi N} = \frac{2N+1}{\pi N} \leq \frac{3}{\pi}$$

folgt für  $\varphi \in U$ ,  $N \in \mathbb{N}$  und  $s \in [-1, 1]$

$$|(T_N \varphi)(s)| = \left| \sum_{m=-N}^N \frac{2 - \delta_{|m|N}}{2\pi N} k(\gamma(s), mh) \varphi(mh) \right| \leq \frac{3}{\pi} S \|\varphi\|_\infty \leq \frac{3SC}{\pi}.$$

Also gilt für alle  $\varphi \in U$  und  $N \in \mathbb{N}$

$$\|T_N \varphi\|_\infty \leq \frac{3SC}{\pi}.$$

Dies bedeutet, die Menge  $\mathcal{U}$  ist beschränkt. Nun zeigen wir: Die Menge  $\mathcal{U}$  ist gleichgradig stetig, d.h. für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $\varphi \in U$  und  $N \in \mathbb{N}$  gilt

$$|s - t| \leq \delta \Rightarrow |(T_N \varphi)(s) - (T_N \varphi)(t)| \leq \varepsilon.$$

Sei dazu  $\varepsilon > 0$ . Da  $(s, t) \mapsto k(\gamma(s), t)$  gleichmäßig stetig ist, gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$|k(\gamma(s), \xi) - k(\gamma(t), \xi)| \leq \frac{\varepsilon \pi}{3C}$$

für alle  $(s, \xi), (t, \xi) \in [-1, 1]^2$  mit  $|s - t| \leq \delta$ . Dann gilt für alle  $\varphi \in U$ ,  $N \in \mathbb{N}$  und  $s, t \in [-1, 1]$  mit  $|s - t| \leq \delta$

$$\begin{aligned} |(T_N \varphi)(s) - (T_N \varphi)(t)| &= \left| \sum_{m=-N}^N \frac{2 - \delta_{|m|N}}{2\pi N} (k(\gamma(s), mh) - k(\gamma(t), mh)) \varphi(mh) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon \pi}{3C} \|\varphi\|_\infty \sum_{m=-N}^N \frac{|2 - \delta_{|m|N}|}{2\pi N} \leq \frac{\varepsilon \pi}{3C} C \frac{3}{\pi} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{U}$  gleichgradig stetig. Wir haben somit gezeigt, dass die Menge  $\mathcal{U}$  beschränkt und gleichgradig stetig ist. Der Satz von Arzelà-Ascoli sagt nun, dass diese Menge relativ kompakt ist. Nach Definition ist somit  $(T_N)$  kollektiv kompakt, wie behauptet.  $\square$

**2.5 Satz.** Die Folge  $(T_N)$  konvergiert punktweise gegen  $T$ .

**Beweis.** Da die summierte Trapezregel ein konvergentes Quadraturverfahren ist, gilt  $(T_N\varphi)(s) \rightarrow (T\varphi)(s)$  für jedes  $\varphi \in C([-1, 1])$  und jedes  $s \in [-1, 1]$ . Sei  $\varphi \in C([-1, 1])$  und  $\varepsilon > 0$ . Aus dem Beweis des letzten Satzes folgt mit  $U = \{\varphi\}$ :  $(T_N\varphi)$  ist gleichgradig stetig. Also gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $N \in \mathbb{N}$  und alle  $s, t \in [-1, 1]$  mit  $|s - t| \leq \delta$  gilt

$$|(T_N\varphi)(s) - (T_N\varphi)(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sei nun

$$\{B_\delta(t_1), \dots, B_\delta(t_m)\}$$

eine offene Überdeckung von  $[-1, 1]$ . Für jedes  $j \in \{1, \dots, m\}$  gibt es dann ein  $N_0(j) \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $N, M \geq N_0(j)$  gilt

$$|(T_N\varphi)(t_j) - (T_M\varphi)(t_j)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wir setzen

$$N_0 := \max_{j \in \{1, \dots, m\}} N_0(j).$$

Dann gilt

$$|(T_N\varphi)(t_j) - (T_M\varphi)(t_j)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle  $N, M \geq N_0$  und alle  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Sei nun  $s \in [-1, 1]$ . Dann ist  $s \in B_\delta(t_j)$  für ein  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Für alle  $N, M \geq N_0$  gilt dann

$$\begin{aligned} |(T_N\varphi)(s) - (T_M\varphi)(s)| &\leq |(T_N\varphi)(s) - (T_N\varphi)(t_j)| + |(T_N\varphi)(t_j) - (T_M\varphi)(t_j)| \\ &\quad + |(T_M\varphi)(t_j) - (T_M\varphi)(s)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also gilt für alle  $N, M \geq N_0$

$$\|T_N\varphi - T_M\varphi\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Somit ist  $(T_N\varphi)$  eine Cauchy-Folge und konvergiert daher gegen ein  $\psi \in C([-1, 1])$ . Da wir bereits punktweise Konvergenz  $T_N\varphi \rightarrow T\varphi$  haben, folgt hieraus  $\psi = T\varphi$ , d.h.  $T_N\varphi$  konvergiert in der Supremumsnorm gegen  $T\varphi$ . Da  $\varphi$  beliebig war, folgt hieraus die punktweise Konvergenz von  $(T_N)$  gegen  $T$ .  $\square$

**2.6 Satz.** Die Konvergenz  $T_N \rightarrow T$  erfolgt gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $C([-1, 1])$ .

**Beweis.** Nach dem Satz von Banach Steinhaus gibt es ein  $C > 0$  mit

$$\|T_N\| \leq C$$

für alle  $N \in \mathbb{N}$  und  $\|T\| \leq C$ . Sei  $U \subset C([-1, 1])$  kompakt und  $\varepsilon > 0$ . Dann ist

$$\bigcup_{\varphi \in U} B_{\frac{\varepsilon}{3C}}(\varphi)$$

eine offene Überdeckung von  $U$ . Da  $U$  kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$U \subset \bigcup_{j=1}^m B_{\frac{\varepsilon}{3C}}(\varphi_j).$$

Da  $(T_N)$  punktweise gegen  $T$  konvergiert, gibt es ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\|T_N\varphi_j - T\varphi_j\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle  $N \geq N_0$  und alle  $j = 1, \dots, m$ . Sei nun  $\varphi \in U$ . Dann gibt es ein  $j \in \{1, \dots, m\}$  mit  $\varphi \in B_{\frac{\varepsilon}{3C}}(\varphi_j)$ . Für  $N \geq N_0$  gilt dann

$$\begin{aligned} \|T_N\varphi - T\varphi\|_\infty &\leq \|T_N\varphi - T_N\varphi_j\|_\infty + \|T_N\varphi_j - T\varphi_j\|_\infty + \|T\varphi_j - T\varphi\|_\infty \\ &\leq \|T_N\| \|\varphi - \varphi_j\|_\infty + \frac{\varepsilon}{3} + \|T\| \|\varphi_j - \varphi\|_\infty \\ &\leq C \frac{\varepsilon}{3C} + \frac{\varepsilon}{3} + C \frac{\varepsilon}{3C} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist

$$\|T_N - T\|_U = \sup_{\varphi \in U, \|\varphi\|_\infty=1} \|T_N\varphi - T\varphi\|_\infty \leq \varepsilon$$

für alle  $N \geq N_0$ . Somit konvergiert  $(T_N)$  gleichmäßig auf  $U$  gegen  $T$ .  $\square$

**2.7 Satz.** Es gilt

$$\|(T_N - T)T_N\| \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \|(T_N - T)T\| \rightarrow 0.$$

**Beweis.** Da  $(T_N)$  kollektiv kompakt ist, ist die Menge

$$U := \{T_N\varphi : \|\varphi\|_\infty = 1, N \in \mathbb{N}\}$$

relativ kompakt. Also gilt  $T_N \rightarrow T$  gleichmäßig auf  $U$ , d.h. zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $N \geq N_0$ , alle  $M \in \mathbb{N}$  und alle  $\varphi \in C([-1, 1])$  mit  $\|\varphi\|_\infty = 1$  gilt

$$\|T_N(T_M\varphi) - T(T_M\varphi)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Insbesondere gilt dies für  $M = N$ , d.h. für alle  $N \geq N_0$  und alle  $\varphi \in C([-1, 1])$  mit  $\|\varphi\|_\infty = 1$  gilt

$$\|T_N(T_N\varphi) - T(T_N\varphi)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Also gilt für alle  $N \geq N_0$

$$\|(T_N - T)T_N\| = \sup_{\|\varphi\|_\infty=1} \|T_N(T_N\varphi) - T(T_N\varphi)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Dies bedeutet

$$\|(T_N - T)T_N\| \rightarrow 0.$$

Da  $T$  kompakt ist, ist die Menge

$$V := \{T\varphi : \|\varphi\|_\infty = 1\}$$

relativ kompakt. Also gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $N_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $N \geq N_0$  und alle  $\varphi \in C([-1, 1])$  mit  $\|\varphi\|_\infty = 1$  gilt

$$\|T_N(T\varphi) - T(T\varphi)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Also gilt für alle  $N \geq N_0$

$$\|(T_N - T)T\| = \sup_{\|\varphi\|_\infty=1} \|T_N(T\varphi) - T(T\varphi)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Dies bedeutet

$$\|(T_N - T)T\| \rightarrow 0.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

**2.8 Satz.** Für alle  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$\|(I - T)^{-1}(T_N - T)T_N\| < 1$$

existiert der inverse Operator  $(I - T_N)^{-1}$ . Für die Folge der eindeutigen Lösungen  $(\varphi_N)$  der Näherungsgleichungen

$$\varphi_N - T_N \varphi_N = B$$

gilt dann

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\varphi_N - u\|_\infty = 0.$$

**Beweis.** Da  $T$  kompakt ist und  $I - T$  bijektiv, folgt mit der Theorie von Riesz:  $(I - T)^{-1}$  ist beschränkt. Wir setzen

$$A_N := I + (I - T)^{-1}T_N \quad \text{und} \quad S_N := (I - T)^{-1}(T_N - T)T_N.$$

Wegen

$$\|S_N\| \leq \|(I - T)^{-1}\| \|(T_N - T)T_N\|$$

folgt  $\|S_N\| \rightarrow 0$ . Also gibt es ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\|S_N\| < 1$  für  $N \geq N_0$ . Für diese  $N$  folgt der Neumannschen Reihe:  $(I - S_N)^{-1}$  existiert mit

$$\|(I - S_N)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|S_N\|}.$$

Da  $(I - S_N)^{-1}$  existiert, folgt aus

$$A_N(I - T_N) = I - S_N,$$

dass  $I - T_N$  injektiv ist. Da  $T_N$  kompakt ist, folgt nun mit der Theorie von Riesz, dass  $(I - T_N)^{-1}$  existiert und beschränkt ist. Mit

$$(I - T_N)^{-1} = (I - S_N)^{-1}A_N$$

erhalten wir

$$\|(I - T_N)^{-1}\| \leq \frac{\|A_N\|}{1 - \|S_N\|} \leq \frac{1 + \|(I - T)^{-1}T_N\|}{1 - \|(I - T)^{-1}(T_N - T)T_N\|}.$$

Aus

$$(I - T_N)(\varphi_N - u) = (T_N - T)u$$

folgt

$$(\varphi_N - u) = (I - T_N)^{-1}(T_N - T)u.$$

Also

$$\|\varphi_N - u\|_\infty \leq \frac{1 + \|(I - T)^{-1}T_N\|}{1 - \|(I - T)^{-1}(T_N - T)T_N\|} \|(T_N - T)u\|_\infty.$$

Da  $(T_N)$  punktweise gegen  $T$  konvergiert, geht der letzte Term gegen Null. Der Satz von Banach Steinhaus liefert: Es gibt ein  $C > 0$  mit  $\|T_N\| \leq C$ . Der Nenner konvergiert gegen 1. Also bleibt der Bruch beschränkt, und somit geht die rechte Seite gegen Null. Dies liefert die Behauptung.  $\square$

**2.9 Satz.** Ist  $U = (u_{-N}, \dots, u_N)^T$  eine Lösung des LGS

$$\sum_{m=-N}^N \left( \frac{\delta_{|m|N} - 2}{2\pi N} k(\gamma(jh), mh) + \delta_{jm} \right) u_m = B(jh), \quad j = -N, \dots, N,$$

so ist

$$\varphi_N(s) := B(s) + \sum_{m=-N}^N \frac{2 - \delta_{|m|N}}{2\pi N} k(\gamma(s), mh) u_m$$

eine Lösung der Näherungsgleichung

$$\varphi_N - T_N \varphi_N = B.$$

**Beweis.** Da  $U$  eine Lösung des LGS ist, gilt für jedes  $j \in \{-N, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} \varphi_N(jh) &= B(jh) + \sum_{m=-N}^N \frac{2 - \delta_{|m|N}}{2\pi N} k(\gamma(jh), mh) u_m \\ &= \sum_{m=-N}^N \left( \frac{\delta_{|m|N} - 2}{2\pi N} k(\gamma(jh), mh) + \delta_{jm} \right) u_m \\ &\quad + \sum_{m=-N}^N \frac{2 - \delta_{|m|N}}{2\pi N} k(\gamma(jh), mh) u_m \\ &= u_j. \end{aligned}$$

Also gilt für  $s \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} \varphi_N(s) - (T_N \varphi_N)(s) &= B(s) + \sum_{m=-N}^N \frac{2 - \delta_{|m|N}}{2\pi N} k(\gamma(s), mh) (u_m - \varphi_N(mh)) \\ &= B(s). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.  $\square$

**2.10 Satz.** Für alle  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$\|(I - T)^{-1}(T_N - T)T_N\| < 1$$

ist das LGS eindeutig lösbar.

**Beweis.** Wir wissen, für diese  $N$  ist die Näherungsgleichung

$$\varphi_N - T_N \varphi_N = B$$

eindeutig lösbar. Dann ist  $(\varphi_N(-1), \dots, \varphi_N(1))^T$  eine Lösung des LGS. Sind nun  $\xi = (\xi_{-N}, \dots, \xi_N)^T$  und  $\eta = (\eta_{-N}, \dots, \eta_N)^T$  zwei verschiedene Lösungen des LGS, so gibt es ein  $j$  mit  $\xi_j \neq \eta_j$ . Dann sind

$$\varphi_N(s) := B(s) + \sum_{m=-N}^N \frac{2 - \delta_{|m|N}}{2\pi N} k(\gamma(s), mh) \xi_m$$

und

$$\psi_N(s) := B(s) + \sum_{m=-N}^N \frac{2 - \delta_{|m|N}}{2\pi N} k(\gamma(s), mh) \eta_m$$

zwei Lösungen der Näherungsgleichung mit

$$\varphi_N(jh) = \xi_j \neq \eta_j = \psi_N(jh).$$

Dies ist ein Widerspruch zur eindeutigen Lösbarkeit der Näherungsgleichung. Also ist  $\xi = \eta$ , und somit ist das LGS eindeutig lösbar.  $\square$

**2.11 Satz.** Für  $N \rightarrow \infty$  konvergiert  $F_3(d, h, x)$  gegen Null.

**Beweis.** Beim Lösen des LGS bestimmen wir die Lösung

$$U = (u_{-N}, \dots, u_N)^T.$$

Wir wissen: Für die Lösung  $\varphi_N$  der Näherungsgleichung

$$\varphi_N - T_N \varphi_N = B$$

gilt  $\varphi_N(mh) = u_m$ . Wir erhalten nun

$$|u_m - u(mh)| = |\varphi_N(mh) - u(mh)| \leq \|\varphi_N - u\|_\infty \rightarrow 0.$$

Also gilt

$$F_3(d, h, x) = |\Phi_{d,h}(x) - v_{d,h}(x)| \leq \frac{2(2N+1)}{4\pi N} \max_{t \in [-1,1]} |k(x, t)| \|\varphi_N - u\|_\infty \rightarrow 0,$$

wie behauptet.  $\square$

## 2.4 Vergleich mit linearen Splines

Für  $m \in \{-N, \dots, N\}$  betrachten wir den linearen Spline

$$s_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad s_m(t) := \begin{cases} 1 - N|t - mh| & , \quad t \in [mh - h, mh + h], \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

**2.12 Satz.** Für alle  $t \in [-1, 1]$  gilt

$$\sum_{m=-N}^N s_m(t) = 1.$$

**Beweis.** Sei  $t \in [-1, 1]$ . Dann ist  $t \in [jh, jh + h]$  mit einem  $j \in \{-N, \dots, N-1\}$ . Wegen  $s_m(t) = 0$  für alle  $m \neq j, j+1$  erhalten wir

$$\sum_{m=-N}^N s_m(t) = \varphi_j(t) + \varphi_{j+1}(t) = 1 - N(t - jh) + 1 - N((j+1)h - t) = 1.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Für  $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir die Spline-Interpolierende

$$u_h^{sp} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_h^{sp}(t) := \sum_{m=-N}^N u(mh) s_m(t).$$

Für  $j = -N, \dots, N$  gilt dann

$$u_h^{sp}(jh) = \sum_{m=-N}^N u(mh) s_m(jh) = \sum_{m=-N}^N u(mh) \delta_{jm} = u(jh).$$

**2.13 Satz.** Für  $u \in C^1([-1, 1])$  gilt

$$\|u - u_h^{sp}\|_{\infty} \leq \|u'\|_{\infty} h.$$

**Beweis.** Sei  $t \in [-1, 1]$  und  $m \in \{-N, \dots, N\}$ . Mit der Taylorformel (oder dem Mittelwertsatz) erhalten wir

$$u(mh) = u(t) + u'(\xi_m)(mh - t)$$



mit einem  $\xi_m$  zwischen  $t$  und  $mh$ . Setzen wir diese Darstellung in  $u_h^{sp}$  ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} u_h^{sp}(t) &= \sum_{m=-N}^N (u(t) + u'(\xi_m)(mh - t)) s_m(t) \\ &= u(t) \sum_{m=-N}^N s_m(t) + \sum_{m=-N}^N u'(\xi_m)(mh - t) s_m(t) \\ &= u(t) + \sum_{m=-N}^N u'(\xi_m)(mh - t) s_m(t). \end{aligned}$$

Wegen  $t \in [jh, jh + h]$  mit einem  $j \in \{-N, \dots, N - 1\}$ , ist  $s_m(t) = 0$  für  $m \neq j, j + 1$ . Also ist

$$\begin{aligned} |u_h^{sp}(t) - u(t)| &= \left| \sum_{m=j}^{j+1} u'(\xi_m)(mh - t) s_m(t) \right| \\ &\leq \|u'\|_\infty \sum_{m=j}^{j+1} |mh - t| s_m(t) \\ &\leq \|u'\|_\infty h \sum_{m=j}^{j+1} s_m(t) \\ &= \|u'\|_\infty h. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Wir ersetzen nun in der Darstellung

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k(x, t) u(t) dt$$

$u$  durch die Spline-Interpolierende  $u_h^{sp}$  und definieren

$$\begin{aligned} \Psi_h^{sp}(x) &:= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k(x, t) u_h^{sp}(t) dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=-N}^N u(mh) \int_{-1}^1 k(x, t) s_m(t) dt. \end{aligned}$$

Mit der eben bewiesenen Abschätzung

$$\|u - u_h^{sp}\|_\infty \leq \|u'\|_\infty h$$

erhalten wir für den Fehler  $F_1^{sp}(h, x) := |v(x) - \Psi_h^{sp}(x)|$

$$\begin{aligned}
F_1^{sp}(h, x) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 |k(x, t)| |u(t) - u_h^{sp}(t)| dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\|\dot{\gamma}\|_\infty}{\text{dist}(x, \Gamma)} \int_{-1}^1 |u(t) - u_h^{sp}(t)| dt \\
&\leq \frac{\|\dot{\gamma}\|_\infty \|u'\|_\infty}{\pi \text{dist}(x, \Gamma)} h.
\end{aligned}$$

Wir approximieren auch hier  $\Psi_h^{sp}(x)$  durch  $\Phi_h^{sp}(x)$ , indem wir bei der Integration  $k(x, t)$  durch  $k(x, mh)$  ersetzen, d.h. wir setzen

$$\begin{aligned}
\Phi_h^{sp}(x) &:= -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=-N}^N u(mh) \int_{-1}^1 k(x, mh) s_m(t) dt \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=-N}^N u(mh) k(x, mh) \int_{-1}^1 s_m(t) dt \\
&= -\frac{1}{4\pi N} \sum_{m=-N}^N u(mh) k(x, mh) (2 - \delta_{|m|N}).
\end{aligned}$$

und erhalten für den Fehler  $F_2^{sp}(h, x) := |\Psi_h^{sp}(x) - \Phi_h^{sp}(x)|$

$$\begin{aligned}
F_2^{sp}(h, x) &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-N}^N |u(mh)| \int_{-1}^1 |k(x, t) - k(x, mh)| s_m(t) dt \\
&\leq \frac{\|u\|_\infty L(x)}{2\pi} \sum_{m=-N}^N \int_{-1}^1 |t - mh| s_m(t) dt \\
&\leq \frac{\|u\|_\infty L(x)}{2\pi} \sum_{m=-N}^N \frac{h^2}{3} \\
&\leq \frac{\|u\|_\infty L(x)}{2\pi} h.
\end{aligned}$$

Im dritten Schritt bestimmen wir wieder mit dem Nyström-Verfahren Näherungswerte  $u_m$  für  $u(mh)$  und definieren

$$v_h^{sp}(x) := -\frac{1}{4\pi N} \sum_{m=-N}^N u_m k(x, mh) (2 - \delta_{|m|N}).$$

Vergleichen wir nun  $v_h^{sp}(x)$  mit  $v_{d,h}(x)$ , so sehen wir, dass hier nur die Errorfunktion ersetzt ist durch  $(2 - \delta_{|m|N})$ . Es gilt sogar:

**2.14 Satz.** Für alle  $x \in G$  ist

$$\lim_{d \rightarrow 0} v_{d,h}(x) = v_h^{sp}(x).$$

**Beweis.** Mit

$$\lim_{d \rightarrow 0} \operatorname{erf} \left( \frac{m-N}{\sqrt{d}}, \frac{m+N}{\sqrt{d}} \right) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m-N}{\sqrt{d}}}^{\frac{m+N}{\sqrt{d}}} e^{-t^2} dt$$

und

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = 1$$

folgt

$$\lim_{d \rightarrow 0} \operatorname{erf} \left( \frac{m-N}{\sqrt{d}}, \frac{m+N}{\sqrt{d}} \right) = \begin{cases} 1 & , \quad m = -N, \\ 2 & , \quad |m| \neq N, \\ 1 & , \quad m = N, \end{cases}$$

d.h.

$$\lim_{d \rightarrow 0} \operatorname{erf} \left( \frac{m-N}{\sqrt{d}}, \frac{m+N}{\sqrt{d}} \right) = 2 - \delta_{|m|N}.$$

Hieraus folgt nun

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow 0} v_{d,h}(x) &= \lim_{d \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{4\pi N} \sum_{m=-N}^N u_m k(x, mh) \operatorname{erf} \left( \frac{m-N}{\sqrt{d}}, \frac{m+N}{\sqrt{d}} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi N} \sum_{m=-N}^N u_m k(x, mh) \lim_{d \rightarrow 0} \operatorname{erf} \left( \frac{m-N}{\sqrt{d}}, \frac{m+N}{\sqrt{d}} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi N} \sum_{m=-N}^N u_m k(x, mh) (2 - \delta_{|m|N}) \\ &= v_h^{sp}(x), \end{aligned}$$

wie behauptet. □

## 2.5 Beispiele am Einheitskreis

Sei  $G$  der Einheitskreis. Dann ist  $\Gamma$  die Einheitskreislinie und wird parametrisiert durch

$$\gamma : [-1, 1] \rightarrow \Gamma, \quad \gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}.$$

Mit

$$n(\gamma(t)) = \gamma(t)$$

und

$$|\gamma'(t)| = \pi$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} k(x, t) &= \frac{x - \gamma(t)}{|x - \gamma(t)|^2} \cdot n(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \\ &= \frac{\pi(x \cdot \gamma(t) - 1)}{|x - \gamma(t)|^2} \\ &= \frac{\pi(x_1 \cos(\pi t) + x_2 \sin(\pi t) - 1)}{1 + |x|^2 - 2x_1 \cos(\pi t) - 2x_2 \sin(\pi t)} \end{aligned}$$

für  $x \in G$  und

$$\begin{aligned} k(\gamma(jh), t) &= \frac{\pi(\gamma(jh) \cdot \gamma(t) - 1)}{|\gamma(jh) - \gamma(t)|^2} \\ &= -\frac{\pi(1 - \gamma(jh) \cdot \gamma(t))}{2 - 2\gamma(jh) \cdot \gamma(t)} \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

für  $j \in \{-N, \dots, N\}$ .

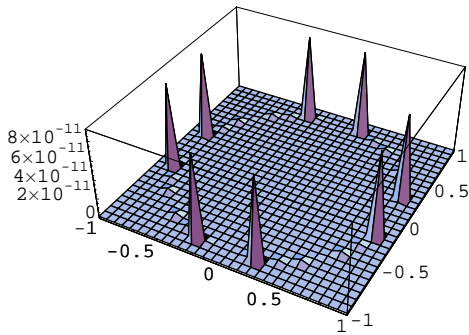
Für die Koeffizienten der Matrix  $A$  folgt somit

$$a_{jm} = \frac{2 - \delta_{|m|N}}{4N} + \delta_{jm}.$$

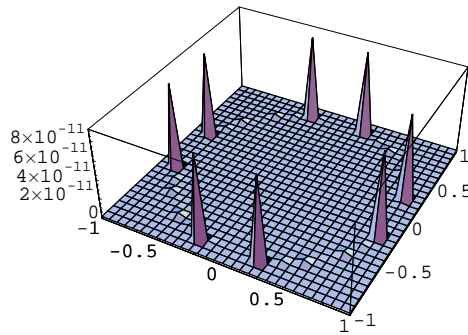
**2.15 Beispiel.** Sei  $b = 1$ . Dann löst  $v = 1$  das Dirichlet-Problem, denn es gilt  $\Delta v = 0$  in  $G$  und  $v = b$  auf  $\Gamma$ . Da das Dirichlet-Problem eindeutig lösbar ist, folgt, dass  $v = 1$  die eindeutige Lösung ist.

In den folgenden Bildern ist der Plotbereich stets der Kreis mit dem Radius 0.9.

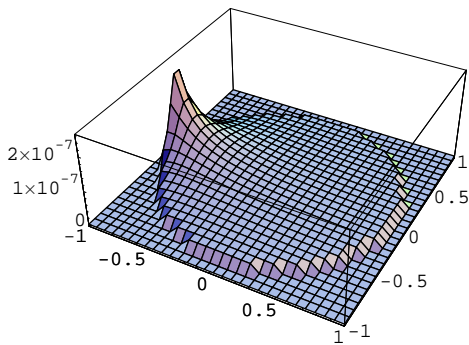
Wir betrachten für  $N = 100$  den Fehler  $|1 - v_h^{sp}|$  sowie die Fehler  $|1 - v_{d,h}|$  für verschiedene  $d$ .



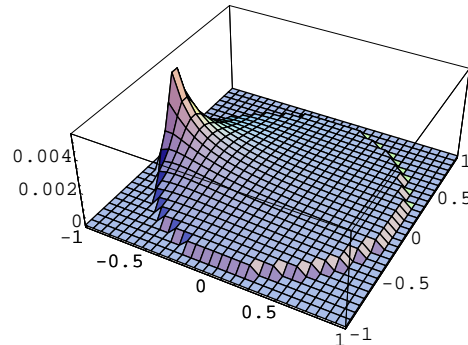
$|1 - v_h^{sp}|$  für  $N = 100$



$|1 - v_{d,h}|$  für  $N = 100, d = 0.01$



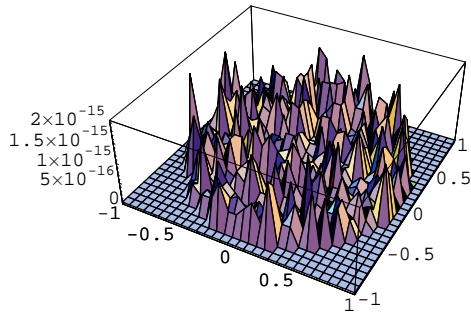
$|1 - v_{d,h}|$  für  $N = 100, d = 0.1$



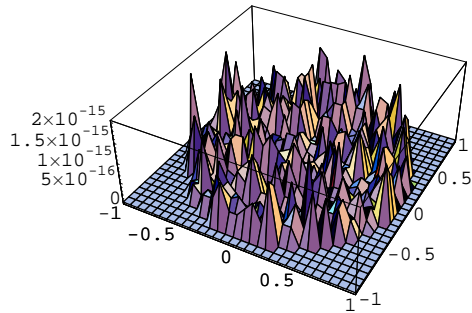
$|1 - v_{d,h}|$  für  $N = 100, d = 1$

Man erkennt: Für kleine  $d$  ist die Approximation durch  $v_{d,h}$  genauer, als für große  $d$ . Im Fall  $d = 0.01$  sind  $v_{d,h}$  und  $v_h^{sp}$  bereits praktisch gleich. Dies verwundert nicht, denn wir wissen ja, dass  $v_{d,h}(x)$  für  $d \rightarrow 0$  gegen  $v_h^{sp}(x)$  konvergiert. Bei  $d = 0.1$  und  $d = 1$  wird das Maximum des Fehlers  $|1 - v_{d,h}|$  im Punkt  $(-0.9, 0)$  angenommen. Dies liegt daran, dass die Parametrisierung  $\gamma$  im Punkt  $(-1, 0)$  beginnt und endet, und für große  $d$  das Maximum von  $|1 - u_{d,h}|$  in den Randpunkten erreicht wird (siehe Beispiel 1.12).

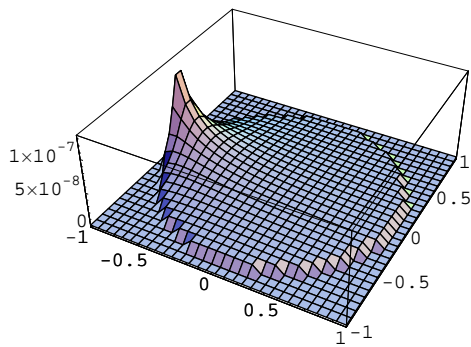
Für  $N = 200$  erhalten wir



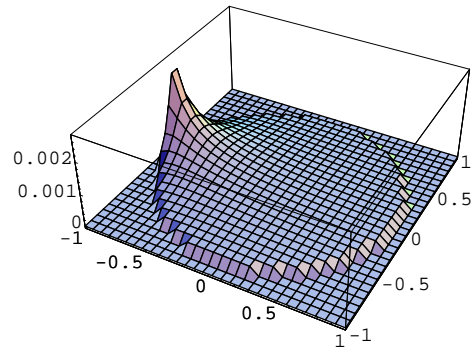
$|1 - v_h^{sp}|$  für  $N = 200$



$|1 - v_{d,h}|$  für  $N = 200, d = 0.01$



$|1 - v_{d,h}|$  für  $N = 200, d = 0.1$



$|1 - v_{d,h}|$  für  $N = 200, d = 1$

Man sieht: Die Fehler  $|1 - v_h^{sp}|$  und  $|1 - v_{0.01,h}|$  sind praktisch Null. Für  $d = 0.1$  und  $d = 1$  ändert sich das prinzipielle Aussehen nicht. Der Fehler fällt jedoch linear mit  $h$ .

Wir betrachten nun die Fehlerabschätzungen. Die Integralgleichung lautet hier

$$u(s) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(t) dt = 2.$$

Ableiten liefert  $u'(s) = 0$ , also  $u(s) = C$ . Dies in die Integralgleichung eingesetzt ergibt  $C = 1$ . Also ist  $u = 1$  die eindeutig bestimmte Dichte.

Bereits für  $N = 100$  liegt der Fehler  $|1 - u_m|$  für alle  $m$  in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit. Den Fehler  $F_3$  können wir daher vernachlässigen.

Mit

$$\|u\|_\infty = 1, \quad \|u'\|_\infty = 0, \quad \|u''\|_\infty = 0$$

erhalten wir

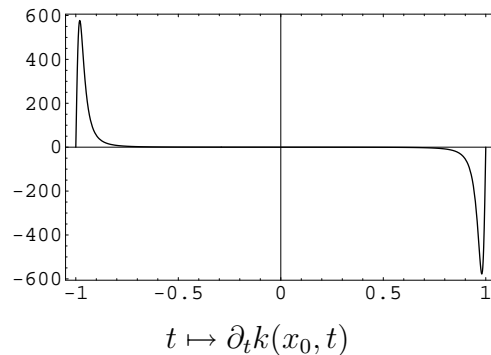
$$F_1^{sp}(h, x) = 0$$

und

$$F_1(d, h, x) \leq \frac{1}{2 \operatorname{dist}(x, \Gamma)} \left( \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}, \frac{2N+1}{\sqrt{d}}\right)}{1 - e^{-\frac{2}{d}}} h + 2\varepsilon_0(d) \right).$$

Der Fehler  $F_1^{sp}(h, x)$  ist natürlich Null, da die Konstante  $u = 1$  durch die linearen Splines exakt dargestellt wird. Für  $d = 1$  liegt die Abschätzung des Fehlers  $F_1(d, h, x)$  in der richtigen Größenordnung, für kleine  $d$  ist die Abschätzung viel zu grob. Dies liegt daran, dass der zweite Term, d.h. das  $\varepsilon_0(d)$ , blind ist für die Oszillationen, die sich unter den Integral abspielen, es berücksichtigt nur den maximalen Fehler im Intervall, und dieser ist nun mal groß für kleine  $d$ .

Nun zu  $F_2$ . Wir betrachten den Punkt  $x_0 = (-0.9, 0)$ . Um  $L(x_0)$  zu bestimmen, benötigen wir  $\partial_t k(x_0, t)$ . Im folgenden Bild ist  $\partial_t k(x_0, t)$  im Intervall  $[-1, 1]$  zu sehen.



Mit  $L(x_0) = 577.478$  erhalten wir

$$F_2(d, h, x_0) \leq \frac{3\|u\|_\infty L(x_0)}{2\pi^{3/2}} \sqrt{d} h \leq 156 \sqrt{d} h$$

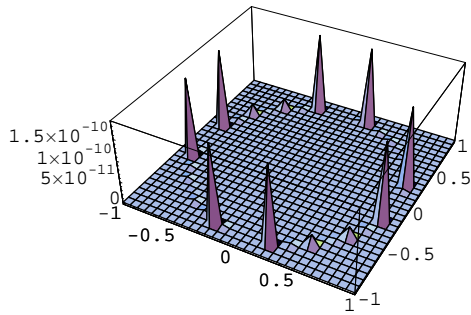
und

$$F_2^{sp}(h, x_0) \leq \frac{\|u\|_\infty L(x_0)}{2\pi} h \leq 92 h.$$

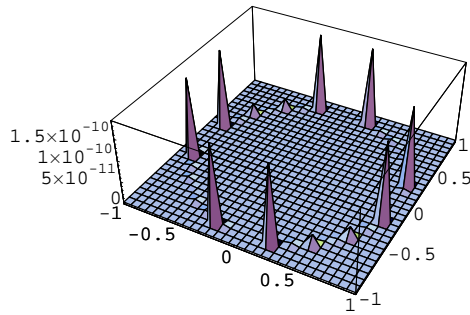
In beiden Fällen ist die Fehlerabschätzung sehr grob. Dies liegt daran, dass die Abschätzung von  $|k(x, t) - k(x, mh)|$  durch  $|t - mh| L(x)$  für alle  $m$  und alle  $t$  zu grob ist. Tatsächlich wird  $L(x_0)$  in diesem Beispiel nur an zwei Stellen angenommen, ansonsten ist  $\partial_t k(x_0, t)$  sehr klein.

**2.16 Beispiel.** Sei  $b(x) = x_1 + x_2$ . Dann ist  $v(x) = x_1 + x_2$ .

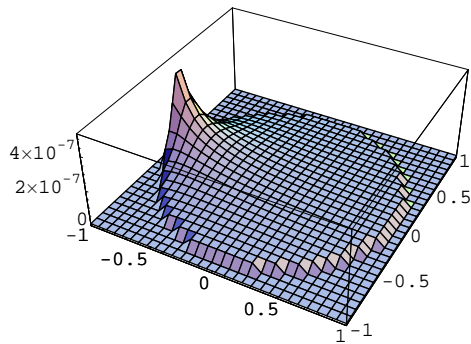
In den folgenden Bildern sind für  $N = 100$  der Fehler  $|v - v_h^{sp}|$  sowie die Fehler  $|v - v_{d,h}|$  für verschiedene  $d$  zu sehen. Der Plotbereich ist wieder der Kreis mit Radius 0.9.



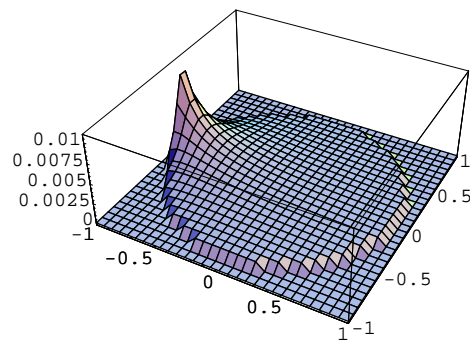
$|v - v_h^{sp}|$  für  $N = 100$



$|v - v_{d,h}|$  für  $N = 100, d = 0.01$



$|v - v_{d,h}|$  für  $N = 100, d = 0.1$



$|v - v_{d,h}|$  für  $N = 100, d = 1$

Man beobachtet hier im Wesentlichen das gleiche Fehlerverhalten, wie in Beispiel 2.15. Der Fehler ist jedoch etwa doppelt so groß.

Für  $N = 200$  sind  $|v - v_h^{sp}|$  und  $|v - v_{0.01,h}|$  wieder praktisch Null, und die Fehler für  $d = 0.1$  bzw.  $d = 1$  sind halb so groß wie für  $N = 100$ . Also erhalten wir auch hier das gleiche Verhalten wie in Beispiel 2.15.



## 2.6 Beispiele an einer Ellipse

Sei nun  $G$  das Innere der Ellipse, die beschrieben wird durch die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1.$$

Der Rand  $\Gamma$  wird parametrisiert durch

$$\gamma : [-1, 1] \rightarrow \Gamma, \quad \gamma(t) := \begin{pmatrix} 2 \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für  $t \in [-1, 1]$

$$|\gamma'(t)| = \pi \sqrt{1 + 3 \sin^2(\pi t)}$$

und

$$\begin{aligned} n(\gamma(t)) &= \frac{1}{|\gamma'(t)|} \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 3 \sin^2(\pi t)}} \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ 2 \sin(\pi t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir

$$\begin{aligned} k(x, t) &= \frac{x - \gamma(t)}{|x - \gamma(t)|^2} \cdot n(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \\ &= \frac{\pi (x_1 \cos(\pi t) + 2x_2 \sin(\pi t) - 2)}{1 + |x|^2 + 3 \cos^2(\pi t) - 4x_1 \cos(\pi t) - 2x_2 \sin(\pi t)} \end{aligned}$$

für  $x \in G$  und

$$k(\gamma(jh), t) = \frac{2\pi}{3 \cos(\pi(jh + t)) - 5}$$

für  $j \in \{-N, \dots, N\}$ . Die Koeffizienten der Matrix  $A$  lauten somit

$$a_{jm} = \frac{\delta_{|m|N} - 2}{N(3 \cos(\pi(j + m)h) - 5)} + \delta_{jm}.$$

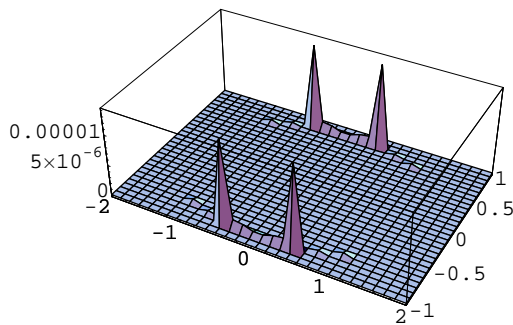
**2.17 Beispiel.** Sei  $b = 1$ . Dann ist  $v = 1$ .

In den folgenden Bildern ist der Plotbereich stets das Innere der Ellipse, die durch die Gleichung

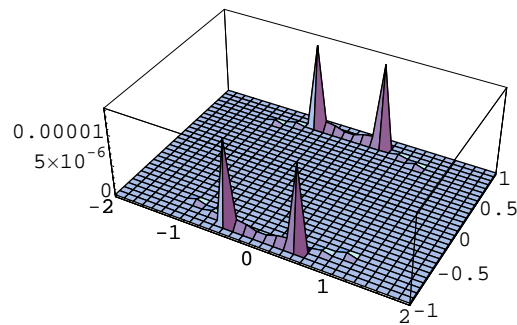
$$\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 0.81$$

beschrieben wird.

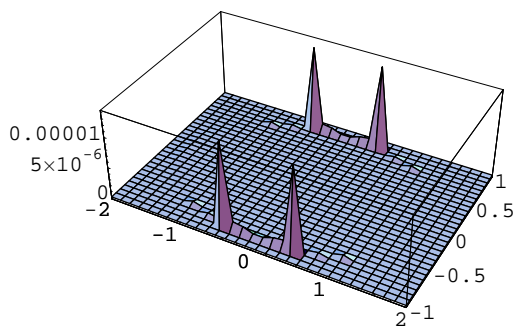
Wir betrachten für  $N = 100$  den Fehler  $|1 - v_h^{sp}|$  sowie die Fehler  $|1 - v_{d,h}|$  für verschiedene  $d$ .



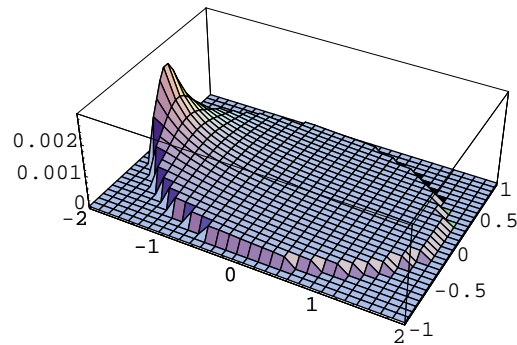
$|1 - v_h^{sp}|$  für  $N = 100$



$|1 - v_{d,h}|$  für  $N = 100, d = 0.01$



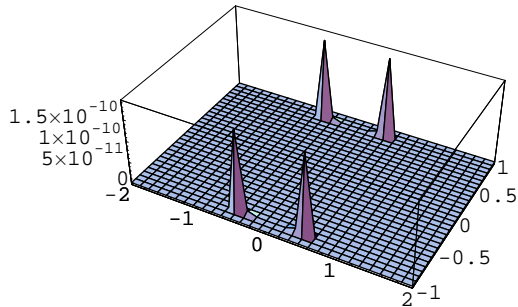
$|1 - v_{d,h}|$  für  $N = 100, d = 0.1$



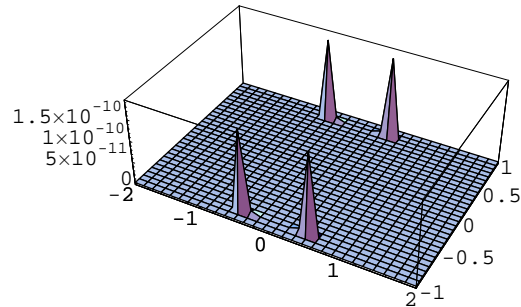
$|1 - v_{d,h}|$  für  $N = 100, d = 1$

Auch hier wird die Approximation für kleine  $d$  genauer, jedoch liegen zwischen den Fehlern für  $d = 0.01$  und  $d = 1$  nur noch zwei Zehnerpotenzen, während es beim Einheitskreis sieben waren.

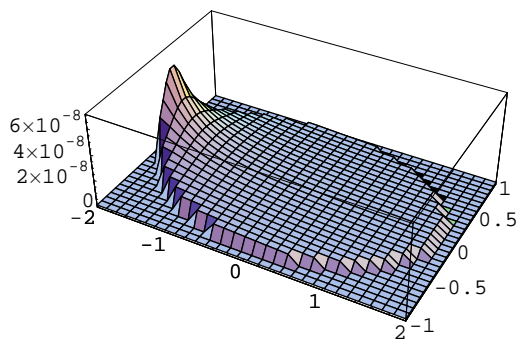
Für  $N = 200$  sieht das so aus:



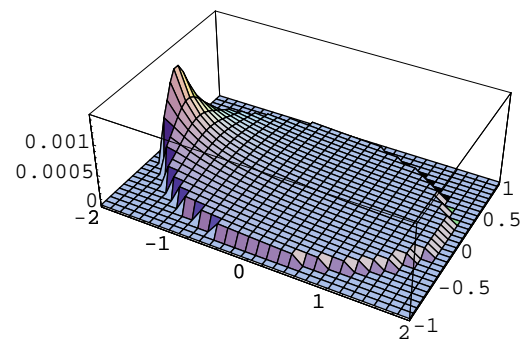
$|1 - v_h^{sp}|$  für  $N = 200$



$|1 - v_{d,h}|$  für  $N = 200, d = 0.01$



$|1 - v_{d,h}|$  für  $N = 200, d = 0.1$



$|1 - v_{d,h}|$  für  $N = 200, d = 1$

**2.18 Beispiel.** In den bisherigen Beispielen konnten wir die Lösung des Dirichlet-Problems, da der Randwert jeweils ein konstantes bzw. lineares Polynom war. Jetzt wollen wir die Lösung vorgeben und daraus den Randwert bestimmen. Dazu betrachten wir

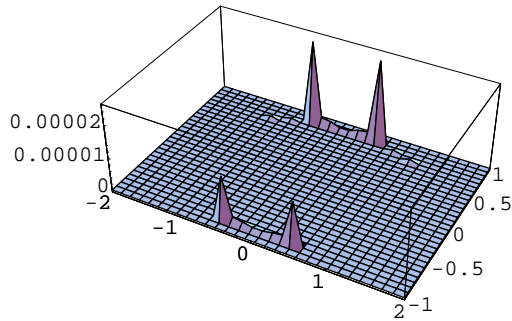
$$v(x) := \ln \left( \sqrt{x_1^2 + (x_2 + 2)^2} \right).$$

Hier gilt  $\Delta v = 0$  in  $G$  und  $v(x) = \ln \left( \sqrt{5 + \frac{3}{4}x_1^2 + 4x_2} \right)$  für  $x \in \Gamma$ . Setzen wir

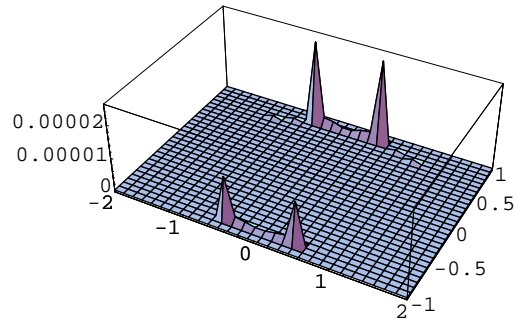
$$b(x) := \ln \left( \sqrt{5 + \frac{3}{4}x_1^2 + 4x_2} \right),$$

so ist  $v$  die eindeutige Lösung des Dirichlet-Problems mit Randwert  $b$ .

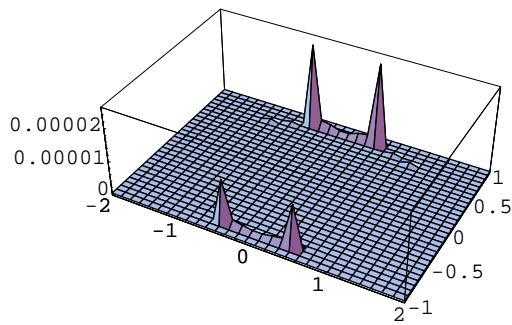
Wir betrachten für  $N = 100$  den Fehler  $|v - v_h^{sp}|$  sowie die Fehler  $|v - v_{d,h}|$  für verschiedene  $d$ .



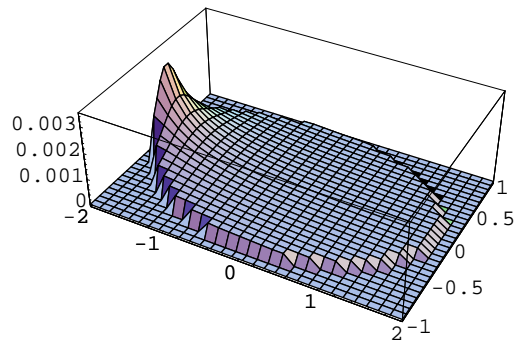
$|v - v_h^{sp}|$  für  $N = 100$



$|v - v_{d,h}|$  für  $N = 100, d = 0.01$



$|v - v_{d,h}|$  für  $N = 100, d = 0.1$



$|v - v_{d,h}|$  für  $N = 100, d = 1$

Für  $N = 200$  kann man etwa das gleiche Fehlerverhalten wie im letzten Beispiel beobachten.

### 3 Approximation von Stokes-Funktionen

In diesem Kapitel werden wir das soeben entwickelte Verfahren auf das innere Dirichlet-Problem für das System der Stokes-Gleichungen im  $\mathbb{R}^2$  übertragen. In der Hydrodynamik beschreiben diese Gleichungen stationäre ebene Strömungen zäher inkompressibler Flüssigkeiten bei kleinen Geschwindigkeitsgradienten.

Lösungen der Stokes-Gleichungen bestehen aus dem Geschwindigkeitsfeld der Strömung und einer skalaren Druckfunktion. Das Geschwindigkeitsfeld der Strömung nennen wir Stokes-Funktion.

#### 3.1 Das Dirichlet-Problem

Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet mit  $C^2$ -Rand  $\Gamma$ . Wir betrachten das folgende Dirichlet-Problem für die Stokes-Gleichungen: Gesucht sind ein Geschwindigkeitsfeld  $v \in C^2(G, \mathbb{R}^2) \cap C(\overline{G}, \mathbb{R}^2)$  und eine Druckfunktion  $p \in C^1(G)$  als Lösung von

$$-\Delta v + \nabla p = 0 \quad \text{in } G, \quad \nabla \cdot v = 0 \quad \text{in } G, \quad v = b \quad \text{auf } \Gamma.$$

Hier wird der Laplace-Operator  $\Delta$  auf die Komponenten  $v_1$  und  $v_2$  des Geschwindigkeitsfeldes  $v = (v_1, v_2)^T$  angewendet,  $\nabla p = (\partial_1 p, \partial_2 p)^T$  bezeichnet den Gradienten von  $p$  und  $\nabla \cdot v = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2$  ist die Divergenz von  $v$ . Weiterhin ist  $b \in C(\Gamma, \mathbb{R}^2)$  ein vorgegebener Randwert. Aufgrund der geforderten Divergenzfreiheit von  $v$  erhält man mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes als notwendige Bedingung für die Existenz einer Lösung die sogenannte Verträglichkeitsbedingung

$$\int_{\Gamma} b(y) \cdot n(y) \, ds(y) = 0.$$

Dabei bezeichnet  $n(y)$  wieder die ins Äußere von  $G$  zeigende Einheitsnormale im Punkt  $y \in \Gamma$ .

Aus der hydrodynamischen Potentialtheorie ist bekannt [35], [37], [39]: Ist die Verträglichkeitsbedingung erfüllt, so besitzt das Dirichlet-Problem eine Lösung  $(v, p)$ . Das Geschwindigkeitsfeld  $v$  ist eindeutig bestimmt, und die Druckfunktion  $p$  ist eindeutig bis auf eine additive Konstante. Das Geschwindigkeitsfeld  $v$  kann in  $G$  dargestellt werden durch das hydrodynamische Doppelschichtpotential

$$(D\varphi)(x) := \int_{\Gamma} D(x, y) \varphi(y) \, ds(y), \quad x \in G.$$

Dabei ist das Vektorfeld  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine noch unbekannte stetige Dichte, und der Kern  $D(x, y)$  des hydrodynamischen Doppelschichtpotentials ist für  $x \in \mathbb{R}^2$  und  $y \in \Gamma$  mit  $x \neq y$  definiert durch die  $2 \times 2$ -Matrix

$$D(x, y) := -\frac{(x - y) \cdot n(y)}{\pi |x - y|^4} \begin{pmatrix} (x_1 - y_1)^2 & (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \\ (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) & (x_2 - y_2)^2 \end{pmatrix}.$$

Unter der geforderten Regularität des Randes  $\Gamma$  folgt, dass sich der Kern des hydrodynamischen Doppelschichtpotentials stetig auf  $\Gamma \times \Gamma$  definieren lässt [23]. Also existiert für jedes  $x \in \Gamma$  der direkte Wert

$$(D\varphi)(x) := \int_{\Gamma} D(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma.$$

Mit Hilfe der Sprungrelationen für das hydrodynamische Doppelschichtpotential [23] erhält man, dass die gesuchte Dichte  $\varphi$  aus dem Fredholmschen Randintegralgleichungssystem zweiter Art

$$\frac{1}{2} \varphi(x) + (D\varphi)(x) = b(x), \quad x \in \Gamma,$$

zu bestimmen ist, wobei hier  $(D\varphi)(x)$  den direkten Wert bezeichnet.

Das hier vorliegende Randintegralgleichungssystem besitzt für jedes  $b \in C(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ , welches der Verträglichkeitsbedingung

$$\int_{\Gamma} b(y) \cdot n(y) ds(y) = 0$$

genügt, zwar eine Lösung  $\varphi \in C(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ , die jedoch nicht eindeutig bestimmt ist [3], [39]. Aus numerischen Gründen sind jedoch eindeutig lösbare Randintegralgleichungssysteme wünschenswert, da diese bei geeigneter Diskretisierung auf eindeutig lösbare algebraische Gleichungssysteme führen. Um die Eindeutigkeit der Lösung sicher zu stellen, definieren wir den Operator

$$N : C(\Gamma, \mathbb{R}^2) \rightarrow C(\Gamma, \mathbb{R}^2), \quad \varphi \mapsto N\varphi$$

mit

$$(N\varphi)(x) := n(x) \int_{\Gamma} \varphi(y) \cdot n(y) ds(y)$$

und betrachten an Stelle des obigen Randintegralgleichungssystems das System

$$\frac{1}{2} \varphi(x) + (D\varphi)(x) - (N\varphi)(x) = b(x), \quad x \in \Gamma.$$

Man kann zeigen [3], [39], dass dieses System für jedes  $b \in C(\Gamma, \mathbb{R}^2)$  eindeutig lösbar ist, und dass die eindeutige Lösung im Falle der Gültigkeit der Verträglichkeitsbedingung auch eine Lösung des Ausgangssystems ist. Wir werden daher im Folgenden das eindeutig lösbare System zu Grunde legen.

Ist  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \Gamma$  eine Parametrisierung des Randes  $\Gamma$ , so erhalten wir, sowohl in  $G$  als auch für den direkten Wert auf dem Rand  $\Gamma$ , die Darstellung

$$(D\varphi)(x) = \int_{-1}^1 D(x, \gamma(t)) \varphi(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Setzen wir

$$u := \varphi \circ \gamma$$

und

$$K(x, t) := D(x, \gamma(t)) |\gamma'(t)|,$$

so folgt für das hydrodynamische Doppelschichtpotential in  $G$  bzw. den direkten Wert auf dem Rand  $\Gamma$  die Darstellung

$$\begin{aligned} (D\varphi)(x) &= \int_{-1}^1 K(x, t) u(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} k_{11}(x, t) u_1(t) + k_{12}(x, t) u_2(t) \\ k_{21}(x, t) u_1(t) + k_{22}(x, t) u_2(t) \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

## 3.2 Das Approximationsverfahren

Wir wissen nun, dass sich das eindeutig bestimmte Geschwindigkeitsfeld  $v$  in  $G$  darstellen lässt durch das hydrodynamische Doppelschichtpotential, d.h. es gilt

$$v(x) = \int_{-1}^1 K(x, t) u(t) dt, \quad x \in G.$$

Analog zu Kapitel 2 werden wir im Folgenden das Geschwindigkeitsfeld  $v$  in  $G$  durch einen expliziten analytischen Ausdruck approximieren. Dies geschieht wieder in drei Schritten. Sei dazu  $N \in \mathbb{N}$ ,  $h := 1/N$  und  $d > 0$ .

### 3.2.1 Der erste Approximationsschritt

Wir ersetzen im ersten Approximationsschritt die Komponenten  $u_i$  der gesuchten Funktion  $u$  durch die direkten Quasi-Interpolierenden  $(u_i)_{d,h}$  und definieren für  $x \in G$

$$\Psi_{d,h}(x) := \int_{-1}^1 K(x, t) \begin{pmatrix} (u_1)_{d,h}(t) \\ (u_2)_{d,h}(t) \end{pmatrix} dt$$

als Näherung für  $v(x)$ .

Mit

$$u_{d,h}(t) := \begin{pmatrix} (u_1)_{d,h}(t) \\ (u_2)_{d,h}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N u(mh) e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \Psi_{d,h}(x) &= \int_{-1}^1 K(x,t) u_{d,h}(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N \int_{-1}^1 K(x,t) u(mh) e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt. \end{aligned}$$

### 3.2.2 Der zweite Approximationsschritt

Analog zu Abschnitt 2.2.2 ersetzen wir beim zweiten Approximationsschritt den Integralkern  $K(x,t)$  durch  $K(x,mh)$  und definieren für  $x \in G$

$$\begin{aligned} \Phi_{d,h}(x) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N \int_{-1}^1 K(x,mh) u(mh) e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N K(x,mh) u(mh) \int_{-1}^1 e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt \end{aligned}$$

als Näherung für  $\Psi_{d,h}(x)$ .

Wegen

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt = \frac{\sqrt{d}}{N} \int_{\frac{m-N}{\sqrt{d}}}^{\frac{m+N}{\sqrt{d}}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi d}}{2N} \operatorname{erf} \left( \frac{m-N}{\sqrt{d}}, \frac{m+N}{\sqrt{d}} \right)$$

erhalten wir die Darstellung

$$\Phi_{d,h}(x) = \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^N K(x,mh) u(mh) \operatorname{erf} \left( \frac{m-N}{\sqrt{d}}, \frac{m+N}{\sqrt{d}} \right).$$



### 3.2.3 Der dritte Approximationsschritt

Wie in Abschnitt 2.2.3 werden wir im dritten Approximationsschritt Näherungswerte  $u_m$  für die Werte  $u(mh)$  mit dem Nyström-Verfahren bestimmen. Dazu verwenden wir das eindeutig lösbares Randintegralgleichungssystem. Für alle  $x \in \Gamma$  gilt

$$\frac{1}{2} \varphi(x) + (D\varphi)(x) - n(x) \int_{\Gamma} \varphi(y) \cdot n(y) ds(y) = b(x),$$

d.h.

$$\frac{1}{2} \varphi(x) + \int_{-1}^1 K(x, t) u(t) dt - n(x) \int_{-1}^1 u(t) \cdot n(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = b(x).$$

Also gilt für alle  $s \in [-1, 1]$

$$\frac{1}{2} u(s) + \int_{-1}^1 K(\gamma(s), t) u(t) dt - n(\gamma(s)) \int_{-1}^1 u(t) \cdot n(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = b(\gamma(s)).$$

Insbesondere ist diese Gleichung in den Punkten  $s = jh$  erfüllt. Wir erhalten dann für  $j = -N, \dots, N$

$$\frac{1}{2} u(jh) + \int_{-1}^1 K(\gamma(jh), t) u(t) dt - n(\gamma(jh)) \int_{-1}^1 u(t) \cdot n(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = b(\gamma(jh)).$$

Fordern wir wieder Gleichheit, wenn wir die Integrale mit der summierten Trapezregel approximieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} b(\gamma(jh)) &= \sum_{m=-N}^N \left( \frac{2 - \delta_{|m|N}}{2N} K(\gamma(jh), mh) + \frac{1}{2} \delta_{jm} \right) u_m \\ &\quad - n(\gamma(jh)) \sum_{m=-N}^N \frac{2 - \delta_{|m|N}}{2N} u_m \cdot n(\gamma(mh)) |\gamma'(mh)|. \end{aligned}$$

Dabei sind die  $u_m = (u_{1,m}, u_{2,m})^T$  Näherungswerte für  $u(mh)$ . Komponentenweise gilt also

$$b_i(\gamma(jh)) = \sum_{m=-N}^N \left( a_{j,m}^{(i1)} u_{1,m} + a_{j,m}^{(i2)} u_{2,m} \right), \quad i = 1, 2$$

mit

$$a_{j,m}^{(ik)} := \frac{2 - \delta_{|m|N}}{2N} k_{ik}(\gamma(jh), mh) + \frac{1}{2} \delta_{jm} \delta_{ik} - \frac{2 - \delta_{|m|N}}{2N} n_i(\gamma(jh)) |\gamma'(mh)| n_k(\gamma(mh)).$$

Aus diesen  $2(2N + 1)$  Gleichungen erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_{-N,-N}^{(11)} & \cdots & a_{-N,N}^{(11)} & a_{-N,-N}^{(12)} & \cdots & a_{-N,N}^{(12)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,-N}^{(11)} & \cdots & a_{N,N}^{(11)} & a_{N,-N}^{(12)} & \cdots & a_{N,N}^{(12)} \\ a_{-N,-N}^{(21)} & \cdots & a_{-N,N}^{(21)} & a_{-N,-N}^{(22)} & \cdots & a_{-N,N}^{(22)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,-N}^{(21)} & \cdots & a_{N,N}^{(21)} & a_{N,-N}^{(22)} & \cdots & a_{N,N}^{(22)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,-N} \\ \vdots \\ u_{1,N} \\ u_{2,-N} \\ \vdots \\ u_{2,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(\gamma(-1)) \\ \vdots \\ b_1(\gamma(1)) \\ b_2(\gamma(-1)) \\ \vdots \\ b_2(\gamma(1)) \end{pmatrix}$$

zur Bestimmung der  $2(2N + 1)$  Unbekannten  $u_{1,-N}, \dots, u_{1,N}, u_{2,-N}, \dots, u_{2,N}$ .

Damit setzen wir für  $x \in G$

$$v_{d,h}(x) := \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^N K(x, mh) u_m \operatorname{erf} \left( \frac{m-N}{\sqrt{d}}, \frac{m+N}{\sqrt{d}} \right)$$

als Näherung für  $\Phi_{d,h}(x)$  und somit als Näherung für  $v(x)$ .

### 3.3 Konvergenzuntersuchung

Wir untersuchen jetzt, wie gut  $v_{d,h}$  das Geschwindigkeitsfeld  $v$  in  $G$  approximiert. Für den Fehler

$$F(d, h, x) := |v(x) - v_{d,h}(x)|$$

im Punkte  $x \in G$  verwenden wir wieder die Zerlegung

$$\begin{aligned} F(d, h, x) &= |v(x) - \Psi_{d,h}(x) + \Psi_{d,h}(x) - \Phi_{d,h}(x) + \Phi_{d,h}(x) - v_{d,h}(x)| \\ &\leq \underbrace{|v(x) - \Psi_{d,h}(x)|}_{=: F_1(d,h,x)} + \underbrace{|\Psi_{d,h}(x) - \Phi_{d,h}(x)|}_{=: F_2(d,h,x)} + \underbrace{|\Phi_{d,h}(x) - v_{d,h}(x)|}_{=: F_3(d,h,x)}, \end{aligned}$$

wobei  $F_i(d, h, x)$  der Fehler im  $i$ -ten Approximationsschritt ist.

### 3.3.1 Konvergenz im ersten Approximationsschritt

Für  $x \in G$  und  $y \in \Gamma$  gilt

$$|x_i - y_i| \leq |x - y|$$

und

$$|x - y| \geq \text{dist}(x, \Gamma).$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt daher

$$\begin{aligned} |k_{ik}(x, t)| &= \frac{|(x - \gamma(t)) \cdot n(\gamma(t))(x_i - \gamma_i(t))(x_k - \gamma_k(t))|}{\pi |x - \gamma(t)|^4} |\gamma'(t)| \\ &\leq \frac{\|\gamma'\|_\infty}{\pi |x - \gamma(t)|} \\ &\leq \frac{\|\gamma'\|_\infty}{\pi \text{dist}(x, \Gamma)}. \end{aligned}$$

Aus

$$v(x) - \Psi_{d,h}(x) = \int_{-1}^1 K(x, t) (u(t) - u_{d,h}(t)) dt$$

folgt für die Komponenten

$$\begin{aligned} v_i(x) - (\Psi_{d,h})_i(x) &= \int_{-1}^1 k_{i1}(x, t) (u_1(t) - (u_1)_{d,h}(t)) dt \\ &\quad + \int_{-1}^1 k_{i2}(x, t) (u_2(t) - (u_2)_{d,h}(t)) dt. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} |v_i(x) - (\Psi_{d,h})_i(x)| &\leq \frac{\|\gamma'\|_\infty}{\pi \text{dist}(x, \Gamma)} \int_{-1}^1 |u_1(t) - (u_1)_{d,h}(t)| dt \\ &\quad + \frac{\|\gamma'\|_\infty}{\pi \text{dist}(x, \Gamma)} \int_{-1}^1 |u_2(t) - (u_2)_{d,h}(t)| dt. \end{aligned}$$

Fordern wir nun, dass  $b \in C^2(\Gamma, \mathbb{R}^2)$  ist, so folgt wieder  $\varphi \in C^2(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ . Da  $\Gamma$  ein  $C^2$ -Rand ist, ist  $\gamma \in C^2([-1, 1], \mathbb{R}^2)$ , also ist  $u \in C^2([-1, 1], \mathbb{R}^2)$ , und somit sind die Komponenten  $u_1, u_2 \in C^2([-1, 1])$ .

Mit der aus Satz 1.11 bekannten Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |u_i(t) - (u_i)_{d,h}(t)| dt &\leq \|u_i\|_\infty \left( \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}, \frac{2N+1}{\sqrt{d}}\right)}{1 - e^{-\frac{2}{d}}} h + 2\varepsilon_0(d) \right) \\ &\quad + 2 \|u'_i\|_\infty h \left( \frac{d}{2} \varepsilon_1(d) + \frac{2e^{-\frac{1}{d}}}{\sqrt{\pi d}} \left(1 + \frac{d}{2}\right) \right) \\ &\quad + 2 \|u''_i\|_\infty c(d) h^2 \end{aligned}$$

sowie

$$\|u_i\|_\infty \leq \|u\|_\infty$$

und

$$F_1(d, h, x) = |v(x) - \Psi_{d,h}(x)| \leq \sqrt{2} \max_{i=1,2} |v_i(x) - (\Psi_{d,h})_i(x)|$$

erhalten wir nun für  $d \leq 2$  die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} F_1(d, h, x) &\leq \frac{\sqrt{2} \|\gamma'\|_\infty \|u\|_\infty}{\pi \operatorname{dist}(x, \Gamma)} \left( \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}, \frac{2N+1}{\sqrt{d}}\right)}{1 - e^{-\frac{2}{d}}} h + 2\varepsilon_0(d) \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{2} \|\gamma'\|_\infty \|u'\|_\infty}{\pi \operatorname{dist}(x, \Gamma)} \left( d \varepsilon_1(d) + \frac{e^{-\frac{1}{d}}(4 + 2d)}{\sqrt{\pi d}} \right) h \\ &\quad + \frac{\sqrt{2} \|\gamma'\|_\infty \|u''\|_\infty}{\pi \operatorname{dist}(x, \Gamma)} 2c(d) h^2. \end{aligned}$$

### 3.3.2 Konvergenz im zweiten Approximationsschritt

Für  $x \in G$  und  $i, k \in \{1, 2\}$  ist die Funktion  $t \mapsto k_{ik}(x, t)$  auf  $[-1, 1]$  stetig differenzierbar. Wir setzen

$$L(x) := \max_{i,k \in \{1,2\}} \max_{t \in [-1,1]} |\partial_t k_{ik}(x, t)|.$$

Für  $t, mh \in [-1, 1]$  und  $i, k \in \{1, 2\}$  folgt dann mit dem Mittelwertsatz

$$|k_{ik}(x, t) - k_{ik}(x, mh)| \leq L(x) |t - mh|.$$

Für die Komponenten von  $\Psi_{d,h} - \Phi_{d,h}$  erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
|(\Psi_{d,h})_i(x) - (\Phi_{d,h})_i(x)| &\leq \frac{\|u_1\|_\infty L(x)}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N \int_{-1}^1 |t - mh| e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt \\
&\quad + \frac{\|u_2\|_\infty L(x)}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N \int_{-1}^1 |t - mh| e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt \\
&\leq \frac{2\|u\|_\infty L(x)}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N \int_{-1}^1 |t - mh| e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt
\end{aligned}$$

Mit

$$\int_{-1}^1 |t - mh| e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}} dt \leq \frac{d}{N^2}$$

folgt

$$|(\Psi_{d,h})_i(x) - (\Phi_{d,h})_i(x)| \leq \frac{2\|u\|_\infty L(x)}{\sqrt{\pi d}} \sum_{m=-N}^N \frac{d}{N^2} = \frac{2\|u\|_\infty L(x)}{\sqrt{\pi d}} \frac{d(2N+1)}{N^2}.$$

Wegen

$$F_2(d, h, x) = |\Psi_{d,h}(x) - \Phi_{d,h}(x)| \leq \sqrt{2} \max_{i=1,2} |(\Psi_{d,h})_i(x) - (\Phi_{d,h})_i(x)|$$

erhalten wir schließlich

$$F_2(d, h, x) \leq \frac{2\sqrt{2}\|u\|_\infty L(x)}{\sqrt{\pi d}} \frac{d(2N+1)}{N^2} \leq \frac{2\sqrt{2}\|u\|_\infty L(x)}{\sqrt{\pi d}} \frac{d3N}{N^2}$$

und somit

$$F_2(d, h, x) \leq \frac{6\sqrt{2}\|u\|_\infty L(x)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{d} h.$$

Der Fehler  $F_2$  wird klein, wenn  $\sqrt{d}h$  klein ist, d.h. wenn der Gauß-Kern

$$t \mapsto e^{-\frac{(t-mh)^2}{dh^2}}$$

eine schmale Glocke besitzt.

### 3.3.3 Konvergenz im dritten Approximationsschritt

Ausgangspunkt im dritten Approximationsschritt ist die Integralgleichung (IGL)

$$\varphi(s) - \int_{-1}^1 \tilde{K}(s, t) \varphi(t) dt = B(s)$$

mit

$$\tilde{K}(s, t) := -2 \begin{pmatrix} k_{11}(\gamma(s), t) - n_1(s)n_1(t)|\gamma'(t)| & k_{12}(\gamma(s), t) - n_1(s)n_2(t)|\gamma'(t)| \\ k_{21}(\gamma(s), t) - n_2(s)n_1(t)|\gamma'(t)| & k_{22}(\gamma(s), t) - n_2(s)n_2(t)|\gamma'(t)| \end{pmatrix}$$

und

$$B(s) := 2b(\gamma(s)).$$

Wir definieren die Operatoren

$$T, T_N : C([-1, 1], \mathbb{R}^2) \rightarrow C([-1, 1], \mathbb{R}^2)$$

durch

$$(T\varphi)(s) := \int_{-1}^1 \tilde{K}(s, t) \varphi(t) dt$$

und

$$(T_N\varphi)(s) := \sum_{m=-N}^N \frac{2 - \delta_{|m|N}}{2N} \tilde{K}(s, mh) \varphi(mh).$$

Dann schreibt sich die IGL

$$\varphi - T\varphi = B.$$

Die IGL besitzt eine eindeutige Lösung  $u$ . Wie bei den harmonischen Funktionen zeigt man: Für genügend große  $N$  ist die Näherungsgleichung

$$\varphi_N - T_N\varphi_N = B$$

eindeutig lösbar, und die Folge der Näherungslösungen konvergiert gegen die Lösung  $u$  der IGL. Bei den Beweisen ersetzt man  $C([-1, 1])$  durch  $C([-1, 1], \mathbb{R}^2)$ , und bei der Abschätzung der Beträge muss berücksichtigt werden, dass die Frobenius-Norm mit der euklidischen Norm verträglich ist. Hieraus kann man nun wieder analog schließen, dass das LGS eindeutig lösbar ist und  $F_3(d, h, x)$  gegen Null geht für  $N \rightarrow \infty$ .

### 3.4 Beispiele am Einheitskreis

Sei  $G$  der Einheitskreis. Dann ist  $\Gamma$  die Einheitskreislinie. Mit der bereits aus Kapitel 2 bekannten Parametrisierung

$$\gamma : [-1, 1] \rightarrow \Gamma, \quad \gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$$

folgt wieder

$$n(\gamma(t)) = \gamma(t)$$

und

$$|\gamma'(t)| = \pi.$$

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned} k_{11}(x, t) &= \frac{(1 - x_1 \cos(\pi t) - x_2 \sin(\pi t))(x_1 - \cos(\pi t))^2}{(1 + |x|^2 - 2x_1 \cos(\pi t) - 2x_2 \sin(\pi t))^2} \\ k_{12}(x, t) &= \frac{(1 - x_1 \cos(\pi t) - x_2 \sin(\pi t))(x_1 - \cos(\pi t))(x_2 - \sin(\pi t))}{(1 + |x|^2 - 2x_1 \cos(\pi t) - 2x_2 \sin(\pi t))^2} \\ k_{21}(x, t) &= \frac{(1 - x_1 \cos(\pi t) - x_2 \sin(\pi t))(x_1 - \cos(\pi t))(x_2 - \sin(\pi t))}{(1 + |x|^2 - 2x_1 \cos(\pi t) - 2x_2 \sin(\pi t))^2} \\ k_{22}(x, t) &= \frac{(1 - x_1 \cos(\pi t) - x_2 \sin(\pi t))(x_2 - \sin(\pi t))^2}{(1 + |x|^2 - 2x_1 \cos(\pi t) - 2x_2 \sin(\pi t))^2} \end{aligned}$$

für  $x \in G$  und

$$\begin{aligned} k_{11}(\gamma(jh), mh) &= \frac{1}{2} \sin^2 \left( \frac{\pi(j+m)}{2N} \right) \\ k_{12}(\gamma(jh), mh) &= -\frac{1}{4} \sin \left( \frac{\pi(j+m)}{N} \right) \\ k_{21}(\gamma(jh), mh) &= -\frac{1}{4} \sin \left( \frac{\pi(j+m)}{N} \right) \\ k_{22}(\gamma(jh), mh) &= \frac{1}{2} \cos^2 \left( \frac{\pi(j+m)}{2N} \right) \end{aligned}$$

für  $j \in \{-N, \dots, N\}$ .

Die Koeffizienten der Matrix des linearen Gleichungssystems sind somit

$$\begin{aligned}
 a_{jm}^{(11)} &= \frac{(2 - \delta_{|m|N}) \sin^2\left(\frac{\pi(j+m)}{2N}\right)}{4N} - \frac{\pi(2 - \delta_{|m|N}) \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{2N} + \frac{\delta_{jm}}{2} \\
 a_{jm}^{(12)} &= \frac{(\delta_{|m|N} - 2) \sin\left(\frac{\pi(j+m)}{N}\right)}{8N} - \frac{\pi(2 - \delta_{|m|N}) \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{2N} \\
 a_{jm}^{(21)} &= \frac{(\delta_{|m|N} - 2) \sin\left(\frac{\pi(j+m)}{N}\right)}{8N} - \frac{\pi(2 - \delta_{|m|N}) \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{2N} \\
 a_{jm}^{(22)} &= \frac{(2 - \delta_{|m|N}) \cos^2\left(\frac{\pi(j+m)}{2N}\right)}{4N} - \frac{\pi(2 - \delta_{|m|N}) \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{2N} + \frac{\delta_{jm}}{2}.
 \end{aligned}$$

**3.1 Beispiel.** Der Randwert  $b$  sei gegeben durch  $b(x) = (1, 1)^T$ . Wegen

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} b(y) \cdot n(y) \, ds(y) &= \int_{-1}^1 b(\gamma(t)) \cdot n(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt \\
 &= \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix} \pi \, dt \\
 &= \pi \int_{-1}^1 (\cos(\pi t) + \sin(\pi t)) \, dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ist die Verträglichkeitsbedingung erfüllt. Es ist also sinnvoll nach einer Lösung zu suchen. Wir betrachten das Geschwindigkeitsfeld  $v$  mit  $v(x) := (1, 1)^T$  und die Druckfunktion  $p = 0$ . Für  $x \in G$  gilt

$$\Delta v(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla p(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \cdot v(x) = 0.$$

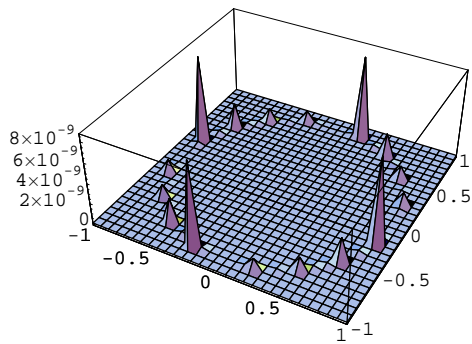
Also löst  $(v, p)$  die Stokes-Gleichungen

$$-\Delta v + \nabla p = 0 \quad \text{in } G, \quad \nabla \cdot v = 0 \quad \text{in } G, \quad v = b \quad \text{auf } \Gamma.$$

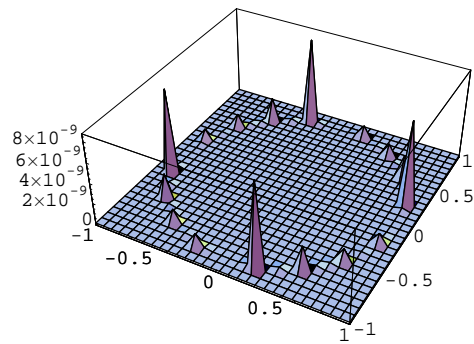
Da das Geschwindigkeitsfeld eindeutig bestimmt ist, und die Druckfunktion eindeutig ist bis auf eine additive Konstante, erhalten wir:  $v = (1, 1)^T$  ist das eindeutig bestimmte Geschwindigkeitsfeld, und die Druckfunktion  $p$  ist konstant.

Wir betrachten für  $N = 100$  die Fehler  $|1 - (v_{d,h})_1|$  und  $|1 - (v_{d,h})_2|$  für verschiedene Werte von  $d$ . Der Plotbereich wieder der Kreis mit dem Radius 0.9.

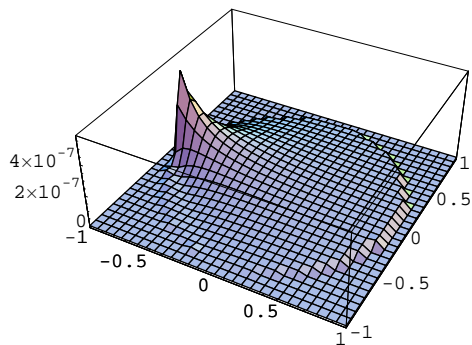




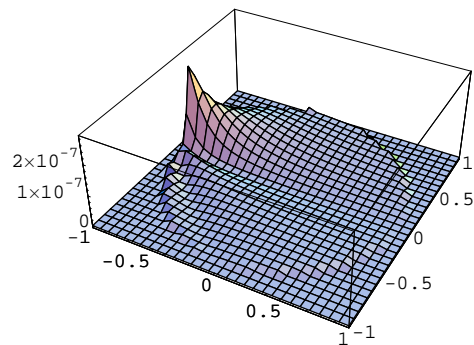
$|1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 100$ ,  $d = 0.01$



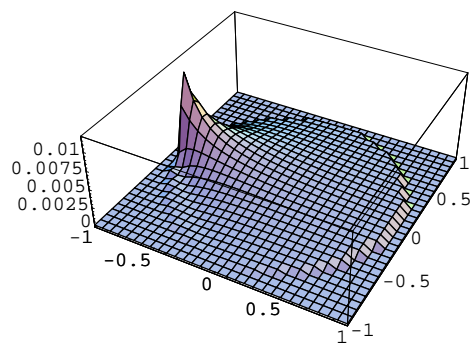
$|1 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 100$ ,  $d = 0.01$



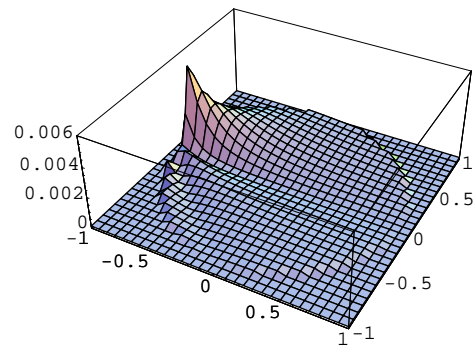
$|1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 100$ ,  $d = 0.1$



$|1 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 100$ ,  $d = 0.1$



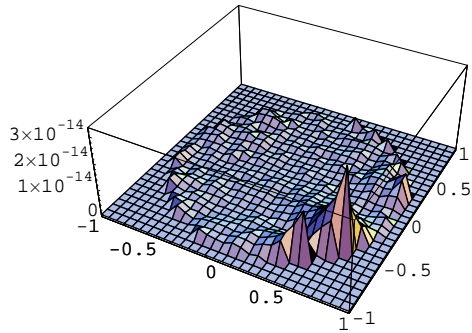
$|1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 100$ ,  $d = 1$



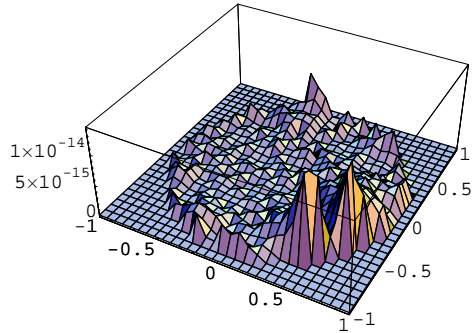
$|1 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 100$ ,  $d = 1$

Wie bereits bei den harmonischen Funktionen erhält man: Die Approximation ist genauer für kleine  $d$ . Für größere  $d$  wird der maximale Fehler im Punkt  $(-0.9, 0)$  angenommen, weil die Parametrisierung im Punkt  $(-1, 0)$  beginnt und endet.

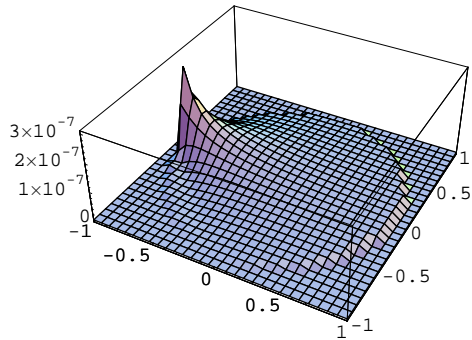
Für  $N = 200$  erhält man:



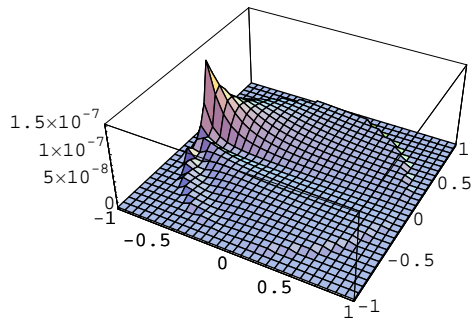
$|1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 200$ ,  $d = 0.01$



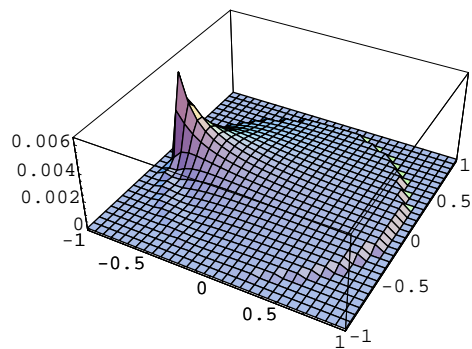
$|1 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 200$ ,  $d = 0.01$



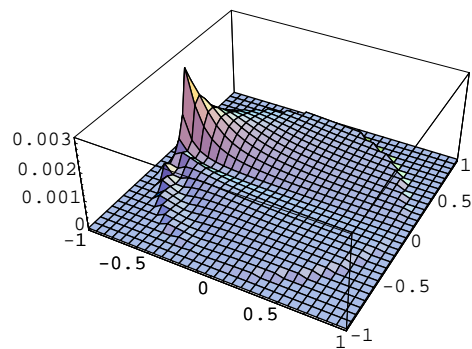
$|1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 200$ ,  $d = 0.1$



$|1 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 200$ ,  $d = 0.1$



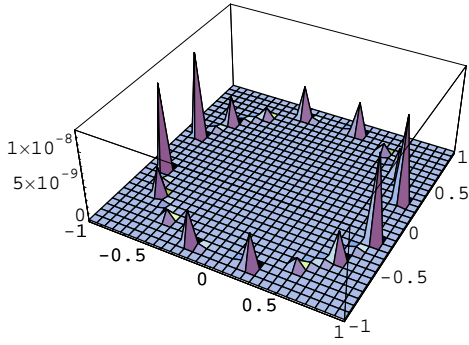
$|1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 200$ ,  $d = 1$



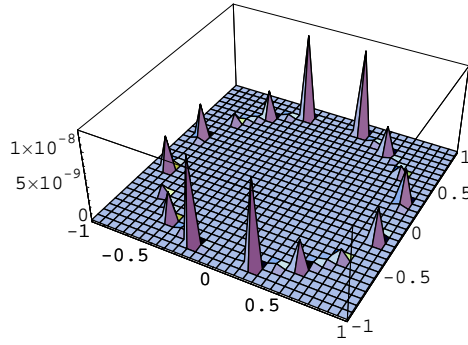
$|1 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 200$ ,  $d = 1$

Die Fehler  $|1 - (v_{0.01,h})_i|$  sind praktisch Null. Für  $d = 0.1$  und  $d = 0.1$  sind die Fehler etwa halb so groß wie bei  $N = 100$ .

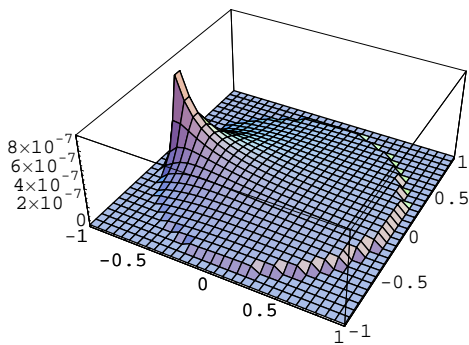
**3.2 Beispiel.** Nun betrachten wir den Randwert  $b$  mit  $b(x) = (x_1, -x_2)^T$ . Dann ist  $v = (x_1, -x_2)^T$  das eindeutig bestimmte Geschwindigkeitsfeld, und der Druck  $p$  ist konstant. Wir betrachten wieder für  $N = 100$  die gleichen Fehler wie im letzten Beispiel im Kreis mit Radius 0.9.



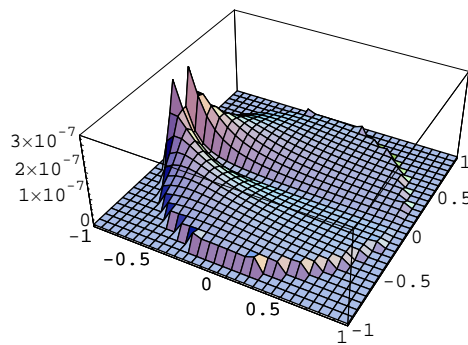
$|v_1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 100, d = 0.01$



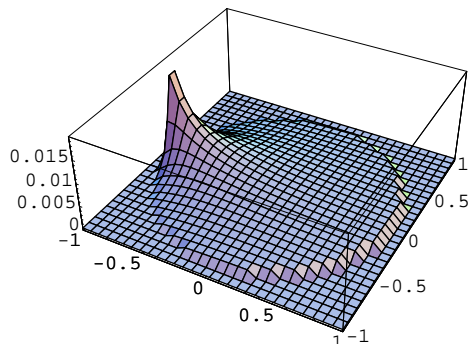
$|v_2 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 100, d = 0.01$



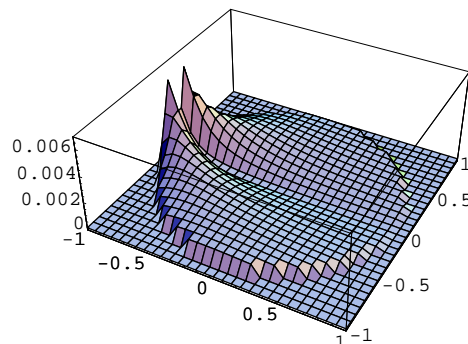
$|v_1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 100, d = 0.1$



$|v_2 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 100, d = 0.1$



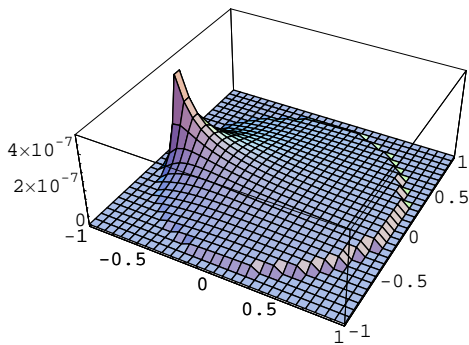
$|v_1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 100, d = 1$



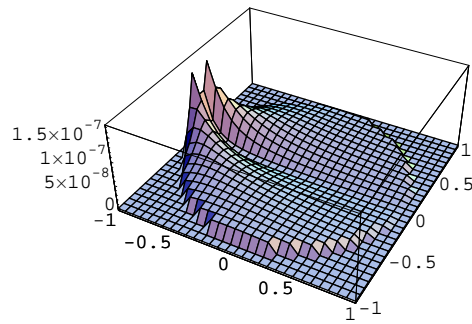
$|v_2 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 100, d = 1$

Hier erhalten wir für die beiden Komponenten sehr unterschiedliches Fehlerverhalten im Punkt  $(-0.9, 0)$ . Dies liegt offensichtlich daran, dass die Komponente  $b_1(\gamma(t)) = \cos(\pi t)$  in den Randpunkten ihr Betragsmaximum annimmt, während die Komponente  $b_2(\gamma(t)) = -\sin(\pi t)$  in den Randpunkten verschwindet. Wir wissen (vgl. Beispiel 1.14), dass der Fehler  $|u - u_{d,h}|$  auch in den Randpunkten klein wird, wenn  $u$  am Rand verschwindet.

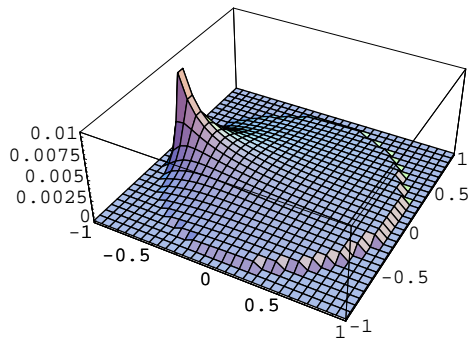
Bei  $N = 200$  sind die Fehler für  $d = 0.01$  wieder praktisch Null, und für  $d = 0.1$  bzw.  $d = 1$  erhalten wir



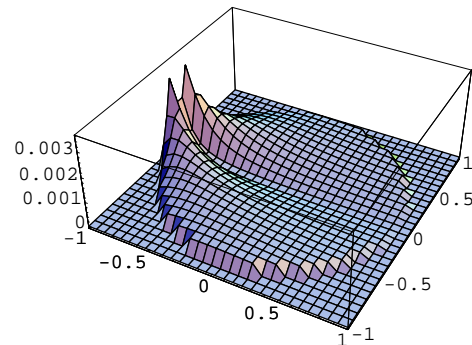
$|v_1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 200$ ,  $d = 0.1$



$|v_2 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 200$ ,  $d = 0.1$



$|v_1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 200$ ,  $d = 1$



$|v_2 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 200$ ,  $d = 1$

Auch hier halbiert sich der Fehler, wie im letzten Beispiel.

### 3.5 Beispiele an einer Ellipse

Sei nun  $\Gamma$  wieder die Ellipse, die beschrieben wird durch die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1$$

und  $G$  das Innere der Ellipse.

Mit der bereits aus Kapitel 2 bekannten Parametrisierung

$$\gamma : [-1, 1] \rightarrow \Gamma, \quad \gamma(t) := \begin{pmatrix} 2 \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$$

folgt wieder

$$|\gamma'(t)| = \pi \sqrt{1 + 3 \sin^2(\pi t)}$$

und

$$\begin{aligned} n(\gamma(t)) &= \frac{1}{|\gamma'(t)|} \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 3 \sin^2(\pi t)}} \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ 2 \sin(\pi t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} k_{11}(x, t) &= \frac{4(2 - x_1 \cos(\pi t) - 2x_2 \sin(\pi t))(x_1 - 2 \cos(\pi t))^2}{(5 + 2|x|^2 - 8x_1 \cos(\pi t) + 3 \cos(2\pi t) - 4x_2 \sin(\pi t))^2} \\ k_{12}(x, t) &= \frac{4(2 - x_1 \cos(\pi t) - 2x_2 \sin(\pi t))(x_1 - 2 \cos(\pi t))(x_2 - \sin(\pi t))}{(5 + 2|x|^2 - 8x_1 \cos(\pi t) + 3 \cos(2\pi t) - 4x_2 \sin(\pi t))^2} \\ k_{21}(x, t) &= \frac{4(2 - x_1 \cos(\pi t) - 2x_2 \sin(\pi t))(x_1 - 2 \cos(\pi t))(x_2 - \sin(\pi t))}{(5 + 2|x|^2 - 8x_1 \cos(\pi t) + 3 \cos(2\pi t) - 4x_2 \sin(\pi t))^2} \\ k_{22}(x, t) &= \frac{4(2 - x_1 \cos(\pi t) - 2x_2 \sin(\pi t))(x_2 - \sin(\pi t))^2}{(5 + 2|x|^2 - 8x_1 \cos(\pi t) + 3 \cos(2\pi t) - 4x_2 \sin(\pi t))^2} \end{aligned}$$

für  $x \in G$  und

$$\begin{aligned}
k_{11}(\gamma(jh), mh) &= \frac{16 \sin^2 \left( \frac{\pi(j+m)}{2N} \right)}{\left( 5 - 3 \cos \left( \frac{\pi(j+m)}{N} \right) \right)^2} \\
k_{12}(\gamma(jh), mh) &= -\frac{4 \sin \left( \frac{\pi(j+m)}{N} \right)}{\left( 5 - 3 \cos \left( \frac{\pi(j+m)}{N} \right) \right)^2} \\
k_{21}(\gamma(jh), mh) &= -\frac{4 \sin \left( \frac{\pi(j+m)}{N} \right)}{\left( 5 - 3 \cos \left( \frac{\pi(j+m)}{N} \right) \right)^2} \\
k_{22}(\gamma(jh), mh) &= \frac{4 \cos^2 \left( \frac{\pi(j+m)}{2N} \right)}{\left( 5 - 3 \cos \left( \frac{\pi(j+m)}{N} \right) \right)^2}.
\end{aligned}$$

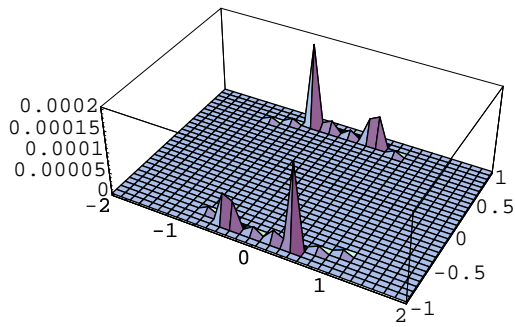
für  $j \in \{-N, \dots, N\}$ .

Die Koeffizienten der Matrix des linearen Gleichungssystems sind somit

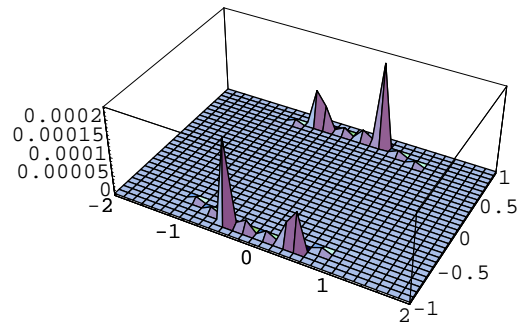
$$\begin{aligned}
a_{jm}^{(11)} &= \frac{(2 - \delta_{|m|N}) 8 \sin^2 \left( \frac{\pi(j+m)}{2N} \right)}{N \left( 5 - 3 \cos \left( \frac{\pi(j+m)}{N} \right) \right)^2} - \frac{\pi(2 - \delta_{|m|N}) \cos \left( \frac{\pi j}{N} \right) \cos \left( \frac{\pi m}{N} \right)}{2N \sqrt{1 + 3 \sin^2 \left( \frac{\pi j}{N} \right)}} + \frac{\delta_{jm}}{2} \\
a_{jm}^{(12)} &= \frac{(\delta_{|m|N} - 2) 2 \sin \left( \frac{\pi(j+m)}{N} \right)}{N \left( 5 - 3 \cos \left( \frac{\pi(j+m)}{N} \right) \right)^2} - \frac{\pi(2 - \delta_{|m|N}) \cos \left( \frac{\pi j}{N} \right) \sin \left( \frac{\pi m}{N} \right)}{N \sqrt{1 + 3 \sin^2 \left( \frac{\pi j}{N} \right)}} \\
a_{jm}^{(21)} &= \frac{(\delta_{|m|N} - 2) 2 \sin \left( \frac{\pi(j+m)}{N} \right)}{N \left( 5 - 3 \cos \left( \frac{\pi(j+m)}{N} \right) \right)^2} - \frac{\pi(2 - \delta_{|m|N}) \sin \left( \frac{\pi j}{N} \right) \cos \left( \frac{\pi m}{N} \right)}{N \sqrt{1 + 3 \sin^2 \left( \frac{\pi j}{N} \right)}} \\
a_{jm}^{(22)} &= \frac{(2 - \delta_{|m|N}) 2 \cos^2 \left( \frac{\pi(j+m)}{2N} \right)}{N \left( 5 - 3 \cos \left( \frac{\pi(j+m)}{N} \right) \right)^2} - \frac{\pi(2 - \delta_{|m|N}) 2 \sin \left( \frac{\pi j}{N} \right) \sin \left( \frac{\pi m}{N} \right)}{N \sqrt{1 + 3 \sin^2 \left( \frac{\pi j}{N} \right)}} + \frac{\delta_{jm}}{2}.
\end{aligned}$$



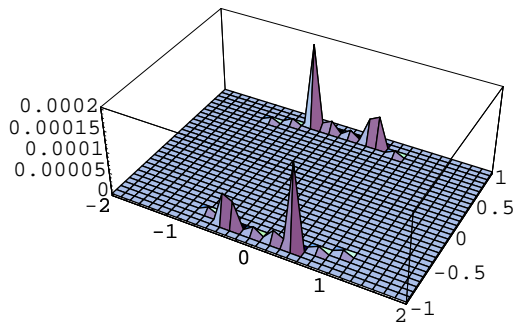
**3.3 Beispiel.** Sei  $b = (1,1)^T$ . Dann ist  $v = (1,1)^T$  das eindeutig bestimmte Geschwindigkeitsfeld, und der Druck  $p$  ist konstant. Wir betrachten wieder die gleichen Fehler für  $N = 100$ . Der Plotbereich ist wieder wie in Kapitel 2.



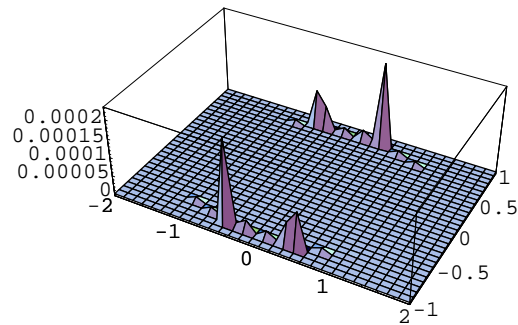
$|1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 100$ ,  $d = 0.01$



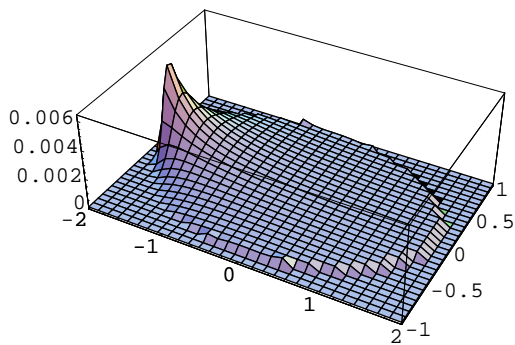
$|1 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 100$ ,  $d = 0.01$



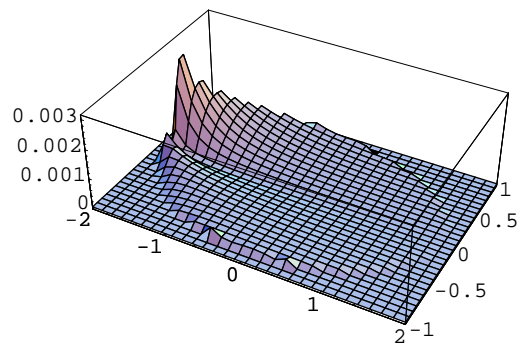
$|1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 100$ ,  $d = 0.1$



$|1 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 100$ ,  $d = 0.1$

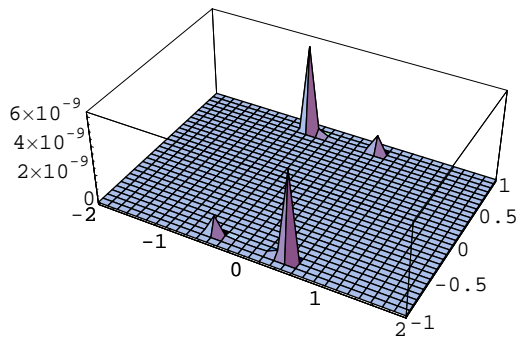


$|1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 100$ ,  $d = 1$

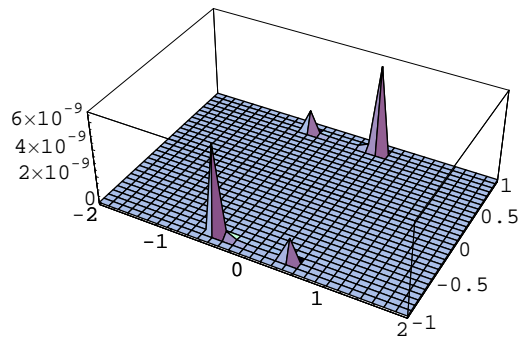


$|1 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 100$ ,  $d = 1$

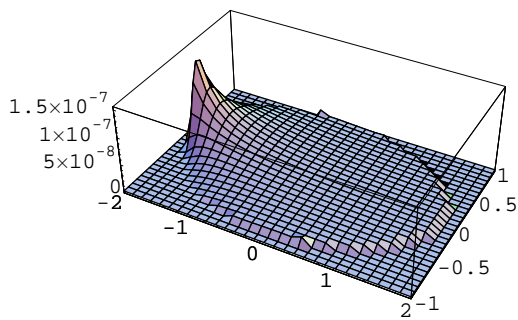
Hier liegt zwischen den Fehlern für  $d = 0.01$  und  $d = 1$  nur noch eine Zehnerpotenz. Für  $N = 200$  erhalten wir:



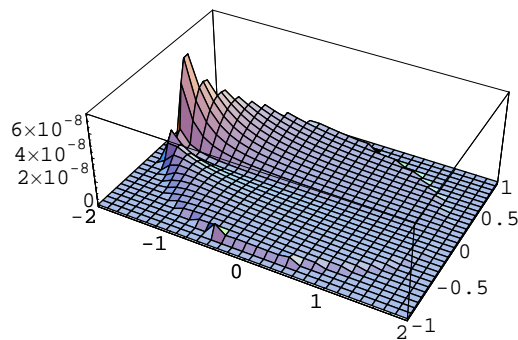
$|1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 200$ ,  $d = 0.01$



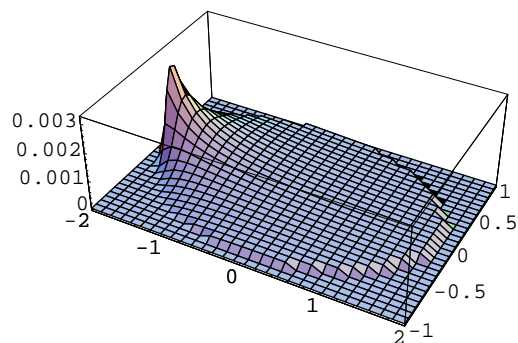
$|1 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 200$ ,  $d = 0.01$



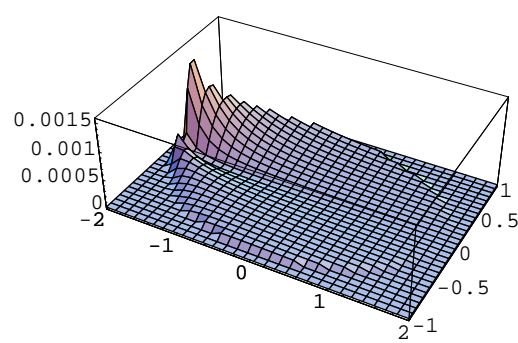
$|1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 200$ ,  $d = 0.1$



$|1 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 200$ ,  $d = 0.1$



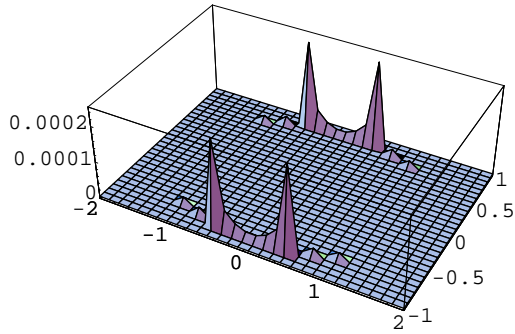
$|1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 200$ ,  $d = 1$



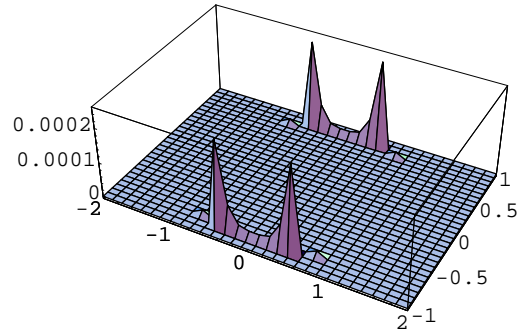
$|1 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 200$ ,  $d = 1$



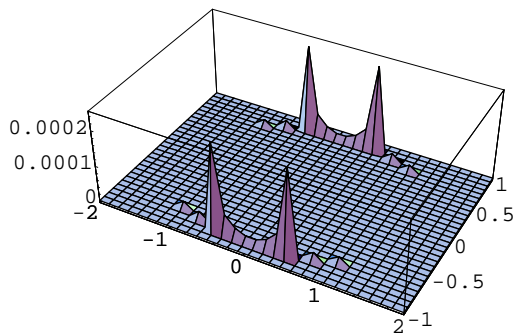
**3.4 Beispiel.** Sei  $b = (x_1, -x_2)^T$ . Dann ist  $v = (x_1, -x_2)^T$  das eindeutig bestimmte Geschwindigkeitsfeld, und der Druck  $p$  ist konstant. Wir betrachten wieder die gleichen Fehler, wie im letzten Beispiel, zunächst für  $N = 100$ .



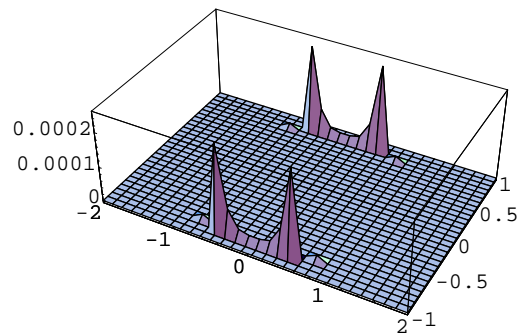
$|v_1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 100$ ,  $d = 0.01$



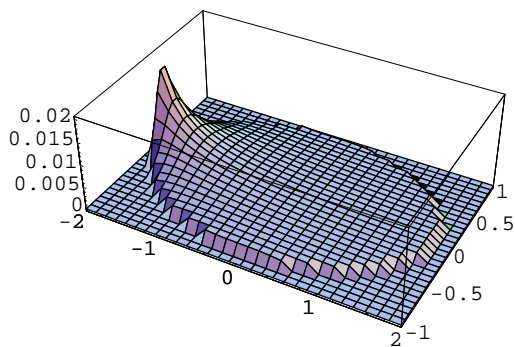
$|v_2 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 100$ ,  $d = 0.01$



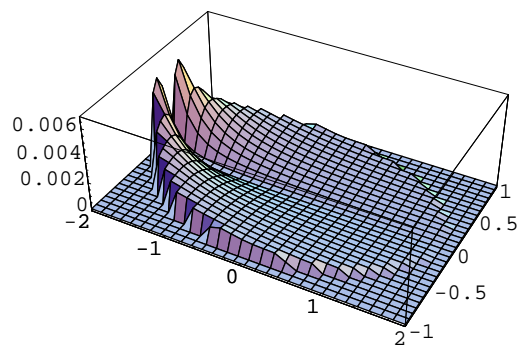
$|v_1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 100$ ,  $d = 0.1$



$|v_2 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 100$ ,  $d = 0.1$

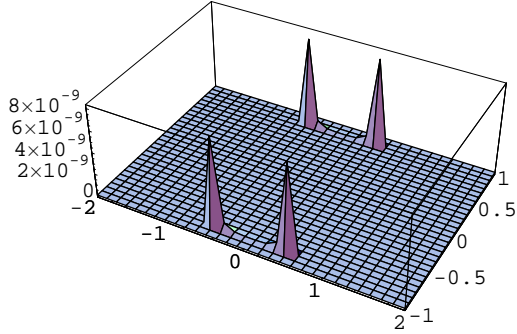


$|v_1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 100$ ,  $d = 1$

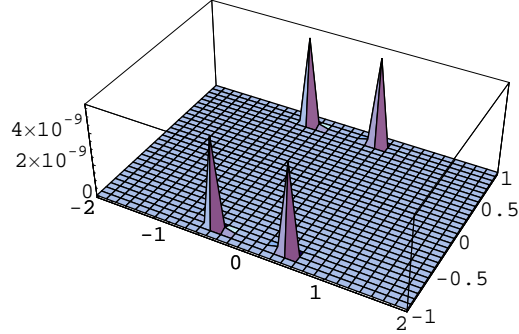


$|v_2 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 100$ ,  $d = 1$

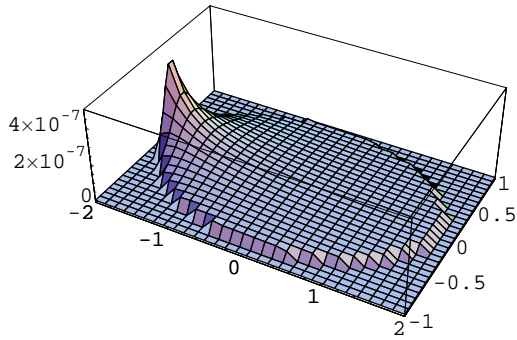
Für  $N = 200$  erhält man:



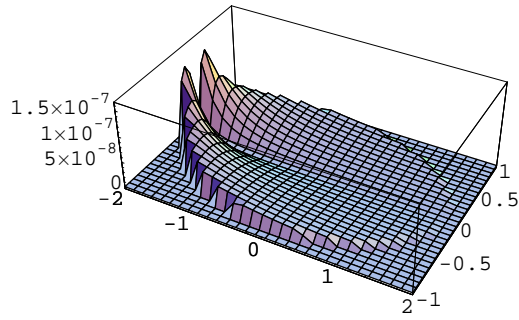
$|v_1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 200$ ,  $d = 0.01$



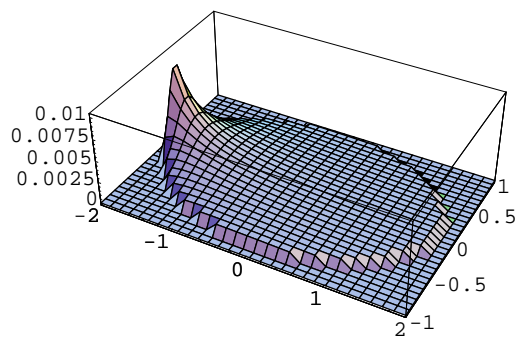
$|v_2 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 200$ ,  $d = 0.01$



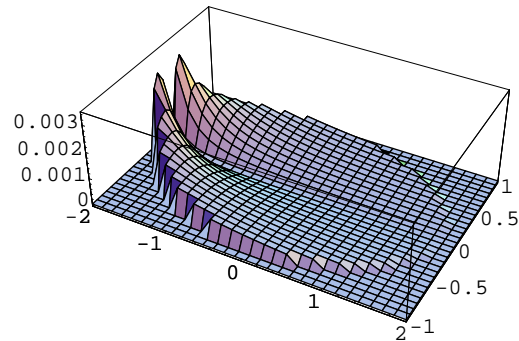
$|v_1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 200$ ,  $d = 0.1$



$|v_2 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 200$ ,  $d = 0.1$



$|v_1 - (v_{d,h})_1|$  für  $N = 200$ ,  $d = 1$



$|v_2 - (v_{d,h})_2|$  für  $N = 200$ ,  $d = 1$

Bei  $N = 100$  liegt auch hier nur eine Zehnerpotenz zwischen den Fehlern für  $d = 0.01$  und  $d = 1$ . Was das unterschiedliche Fehlerverhalten der beiden Komponenten im Punkt  $(-0.9, 0)$  angeht, so gilt wieder das in Beispiel 3.2 Gesagte.

## Bemerkungen und Ausblick

Alle numerischen Beispiele wurden mit dem Computeralgebrasystem Mathematica behandelt. Die linearen Gleichungssysteme wurden mit dem Mathematica-Befehl Solve gelöst. Alle Bilder wurden mit den Mathematica-Befehlen Plot bzw. Plot3D erzeugt.

Auch bei den Stokes-Funktionen kann man wie bei den harmonischen Funktionen, ausgehend von der Darstellung

$$v(x) = \int_{-1}^1 K(x, t) u(t) dt,$$

die gesuchte Funktion  $u$  ersetzen durch die Spline-Interpolierende

$$u_h^{sp}(t) := \begin{pmatrix} (u_1)_h^{sp}(t) \\ (u_2)_h^{sp}(t) \end{pmatrix} = \sum_{m=-N}^N u(mh) s_m(t)$$

und erhält durch analoges Vorgehen wie bei den harmonischen Funktionen

$$v_h^{sp}(x) = \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^N K(x, mh) u_m (2 - \delta_{|m|N}).$$

Ebenso erhält man: Für alle  $x \in G$  ist

$$\lim_{d \rightarrow 0} v_{d,h}(x) = v_h^{sp}(x).$$

Numerische Beispiele zeigen, wie bereits bei den harmonischen Funktionen, dass  $v_h^{sp}$  praktisch das gleiche Ergebnis liefert wie  $v_{d,h}$  für  $d = 0.01$ .

Im ersten Kapitel haben wir für Funktionen  $u$  aus  $C^2([-1, 1])$  neben der direkten Quasi-Interpolierenden  $u_{d,h}$  auch die Quasi-Interpolierende  $\tilde{u}_{d,h}$  betrachtet, die dadurch entsteht, dass die Funktion  $u$  zu einer  $C_0^2(\mathbb{R})$ -Funktion  $\tilde{u}$  fortgesetzt wird. Im Weiteren sind wir auf diese Quasi-Interpolierende nicht mehr eingegangen. Wir wollen nun kurz beschreiben, wie das Approximationsverfahren unter Verwendung von  $\tilde{u}_{d,h}$  aussieht, und warum dieses nicht weiter berücksichtigt wurde. Stellvertretend betrachten wir das Dirchlet-Problem aus Kapitel 2.

Ersetzt man im ersten Approximationsschritt  $u$  durch  $\tilde{u}_{d,h}$  statt  $u_{d,h}$ , so erhält man  $4N + 1$  Summanden statt  $2N + 1$ . Im zweiten Approximationsschritt wird dann die Funktion  $t \mapsto k(x, t)$  periodisch fortgesetzt, damit  $k(x, mh)$  für alle  $m$  definiert ist. Für  $m = -N, \dots, N$  bestimmt man wieder mit dem Nyström-Verfahren Näherungswerte  $u_m$  von  $u(mh)$ . Um Näherungswerte  $\tilde{u}_m$  von  $\tilde{u}(mh)$  für  $m < -N$  bzw.  $m > N$  zu erhalten, kann man nun die Ableitungen  $u'(\pm 1)$  und  $u''(\pm 1)$  durch die einseitigen Differenzenquotienten approximieren.

Geht man wie eben beschrieben vor, so erhält man für große  $d$  eine bessere Approximation, als beim Verfahren mit  $u_{d,h}$ , jedoch auch die doppelte Anzahl an Summationen. Für kleine  $d$  ist kein Unterschied mehr zu merken, nur der numerische Aufwand ist wegen der vielen Summationen höher. Dies ist der Grund, warum dieses Verfahren hier keine weitere Berücksichtigung gefunden hat.

Schließlich wollen wir noch einen Ausblick auf die Behandlung dreidimensionaler Probleme geben. Auch im Dreidimensionalen erhält man sowohl für die Laplace-Gleichung als auch für die Stokes-Gleichungen im Gebiet  $G$  Lösungsdarstellungen in Form von Doppelschichtpotentialen. Ebenso erhält man Fredholmsche Randintegralgleichungen zweiter Art zur Bestimmung der gesuchten Dichte auf dem Rand. Der wesentliche Unterschied zum zweidimensionalen Fall ist nun, dass die Randintegrale schwach singuläre Kerne haben.

Mit Hilfe von

$$\Theta_{d,N} : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Theta_{d,N}(t_1, t_2) := \vartheta_{d,N}(t_1)\vartheta_{d,N}(t_2)$$

kann man hier die direkte Quasi-Interpolierende für Funktionen  $u : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definieren und erhält analoge Fehlerabschätzungen. Nun kann man analog zum zweidimensionalen Fall vorgehen. Bei der Bestimmung von Näherungswerten mit dem Nyström-Verfahren kann man nun nicht ohne Weiteres Quadraturverfahren anwenden, die stetige Integranden voraussetzen, denn die Integralkerne sind schwach singulär. Hier bietet sich das Nyström-Verfahren für schwach singuläre Kerne an [22].

## Literatur

- [1] M. Abramowitz, I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Funktionen, New York, Dover Publications, 1970.
- [2] K.I. Babenko, On Stationary Solutions of the Problem of Flow past a Body of a Viscous Incompressible Fluid, Math. USSR Sbornik 20, 1-25, 1973.
- [3] W. Borchers, Über das Anfangs-Randwertproblem der instationären Stokes-Gleichung, Z.A.M.M. 65, T329-T330, 1985.
- [4] W. Borchers, W. Varnhorn, On the Boundedness of the Stokes Semigroup in Two-Dimensional Exterior Domains, Math. Z. 213, 275-300, 1993.
- [5] K. Burg, H. Haf, F. Wille, Partielle Differentialgleichungen, Teubner, 2004.
- [6] D. Colton, R. Kress, Integral Equation Methods in Scattering Theory, Wiley-Interscience Publication, New York, 1983.
- [7] D. Colton, R. Kress, Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, Springer, 1998.
- [8] L.C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, AMS, 1998.
- [9] H. Faxén, Fredholmsche Integralgleichungen zu der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten 1, Art. Mat. Astr. Fys. 21A, 14, 1-40, 1929.
- [10] R. Finn, D.R. Smith, On the Linearized Hydrodynamical Equation in Two Dimensiones, Arch. Rat. Mech. Anal. 25, 1-25, 1967.
- [11] G.B. Folland, Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, 1995.
- [12] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, 1998.
- [13] I.S. Gradstein, I.M. Ryshik, Summen-, Produkt-, und Integraltafeln 1, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1981.
- [14] I.S. Gradstein, I.M. Ryshik, Summen-, Produkt-, und Integraltafeln 2, Harry Deutsch, Frankfurt, 1981.
- [15] M.N. Günther, Die Potentialtheorie und ihre Anwendungen auf Grundaufgaben der mathematischen Physik, Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957.
- [16] W. Hackbusch, Integralgleichungen, Teubner, 1989.

- [17] G.C. Hsiao, Integral Representation of Solutions for Two-Dimensional Viscous Flow Problems, *Integral Equations and Operator Theory* 5, 533-547, 1982.
- [18] G.C. Hsiao, R. Kress, On an Integral Equation for the Two-Dimensional Exterior Stokes Problem, *Appl. Num. Math.* 1, 77-93, 1985.
- [19] T. Ivanov, Boundary Layer Approximate Approximations and Cubature of Potentials in Domains, *Linköping Studies in Science and Technology*, Theses No. 516, Linköping University, 1997.
- [20] K. Jörgens, *Lineare Integraloperatoren*, Teubner, 1970.
- [21] S. König, Experimentelle Konvergenzordnung einer Randpunktmethode, Diplomarbeit, Universität Kassel Fachbereich Mathematik/Informatik, 2003.
- [22] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer, 1989.
- [23] O.A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, New York et al., 1969.
- [24] R. Leis, *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967.
- [25] V. Maz'ya, A New Approximation Method and its Applications to the Calculation of Volume Potentials, Boundary Point Method, in: 3. DFG-Kolloquium des DFG-Forschungsschwerpunktes Randelementmethoden, 30.09.-05.10.1991.
- [26] V. Maz'ya, Boundary Point Method, LITH-MATH-R-91-44, Dept. of Math., Linköping University, 1991.
- [27] V. Maz'ya, Approximate Approximations, in: *The Mathematics of Finite Elements and Applications. Highlights 1993*, J.R. Whiteman (ed.), 77-104, Wiley, Chichester, 1994.
- [28] V. Maz'ya, G. Schmidt, Approximate Approximations and the Cubature of Potentials, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* 6, 161-184, 1995.
- [29] V. Maz'ya, G. Schmidt, On Approximate Approximations using Gaussian Kernels, *IMA J. Num. Anal.* 16, 13-29, 1996.
- [30] V. Maz'ya, G. Schmidt, Construction of Basis Functions for High Order Approximate Approximations, in: *Mathematical Aspects of Boundary Element Methods*, M. Bonnet (ed) et al., Chapman Hall/CRC Res. Notes Math. 414, 191-202, 200.

- [31] V. Maz'ya, G. Schmidt, On Quasi-Interpolation with Non-Uniformly Distributed Centers on Domains and Manifolds, *J. Approx. Theory* 110, 125-145, 2001.
- [32] V. Maz'ya, G. Schmidt, W. Wendland, On the Computation of Multi-Dimensional Layer Harmonic Potentials via Approximate Approximations, *CALCOLO* 40, 33-53, 2003.
- [33] A. Meister, *Numerik linearer Gleichungssysteme*, Vieweg, 1999.
- [34] S.G. Mikhlin, *Partielle Differentialgleichungen in der mathematischen Physik*, Akademie Verlag, Berlin, 1978.
- [35] F.K.G. Odquist, Über die Randwertaufgaben in der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten, *Math. Z.* 32, 329-375, 1930.
- [36] M. Peter, *Maximalbetragsabschätzungen für Lösungen der Gleichungen von Stokes*, Dissertation, Universität Kassel, Fachbereich Mathematik/Informatik, 2002.
- [37] A.N. Popov, Application of Potential Theory to the Solution of a Linearized System of Navier-Stokes Equations in the Two-Dimensional Case, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 116 (Ed.: O.A. Ladyzhenskaya), 167-186, Providence R.I., AMS, 1973.
- [38] H.R. Schwarz, *Numerische Mathematik*, Teubner, 1997.
- [39] W. Varnhorn, *The Stokes Equations*, *Mathematical Research* Vol. 76, Akademie Verlag, 1994.
- [40] W. Varnhorn, Boundary Integral Equations for the Stokes Problem in Exterior Domains of  $\mathbb{R}^n$ , in: *Navier-Stokes Equations and Related Nonlinear Problems*, A. Sequeira (ed), Plenum Press, New York, 1995.
- [41] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, 1995.
- [42] M. Wiegner, Schauder Estimates for Boundary Layer Potentials, *Math. Meth. Appl. Sci.* 16, 877-894, 1993.
- [43] M. Xourgias, Ein neues Approximationsverfahren für die Poissongleichung im  $\mathbb{R}^3$ , Diplomarbeit, Universität Kassel, Fachbereich Mathematik/Informatik, 1999.





## **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt habe und andere als die in der Dissertation angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Kein Teil dieser Arbeit ist in einem anderen Promotions- oder Habilitationsverfahren verwendet worden.

Kassel, den 2. Februar 2005

Frank Müller